COMMUNICATION C23

CONGRUENCE ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE COMPARAISON

Annie CAMENISCH
MCF Sciences du langage, Université de Strasbourg - ESPE
LiLPa EA 1339
annie.camenisch@unistra.fr

Serge PETIT
Professeur de mathématiques honoraire
Université de Strasbourg – IUFM d'Alsace
petit.serge@sfr.fr

Résumé

Certains problèmes de comparaison engendrent des résultats erronés des élèves jusqu'en cycle 3. Certains élèves, comme le dit Olivier Houdé (*directeur du Laboratoire de Psychologie du Développement et de l'Éducation de l'enfant (LaPsyDÉ)*), ne parviendraient pas à « inhiber l'automatisme implicite ». Par exemple : « Il y a le mot moins alors je soustrais. ». Le même chercheur constate, en fin d'article, que : « Il [le cerveau] résiste de mieux en mieux – mais pas toujours ! – aux automatismes de pensée ». L'auteur ne précise cependant pas comment procéder pour permettre au cerveau de résister davantage et permettre à l'élève de trouver la solution du problème de manière plus sûre.
Faut-il dès lors attendre que le cerveau « résiste » ou bien est-il possible de développer un apprentissage spécifique permettant aux élèves de mieux réussir certains problèmes de comparaison ?
Des travaux spécifiques, portant notamment sur la langue, devraient permettre une amélioration des résultats. Ceci reste une hypothèse que nous détaillerons au cours de ce texte en analysant de tels énoncés, en exposant des tests réalisés auprès d'un millier d'élèves et en analysant les résultats obtenus. Nous montrerons de manière plus détaillée que développer des stratégies d'enseignement prenant appui sur la reformulation (traitement dans le registre de la langue naturelle) pourrait augmenter de manière très sensible les performances des élèves. Les résultats exposés ci-dessous ne sont que provisoires et seront infirmés ou confirmés dans une étude plus approfondie pendant l'année scolaire 2018-2019.

Il est devenu un lieu commun de constater que certaines difficultés rencontrées par les élèves en résolution de problème sont dues aux difficultés liées à la lecture et à la compréhension des situations proposées. La langue s'érige alors en obstacle à la résolution de problème et donc à un travail spécifiquement mathématique. Ce constat étant posé, on peut s'interroger sur le type d'activités à mener, dans le champ des mathématiques et/ou dans celui de l'apprentissage de la langue. Cette question impose une réflexion sur la prise en compte explicite d'activités spécifiques à la langue dans le cadre des apprentissages mathématiques en classes et dans des séances décrochées en amont ou en remédiation, ou encore de manière régulière et intégrée au cœur des situations de résolution de problème.

Afin d'apporter des éléments de réponse à cette interrogation première, nous inscrivons nos recherches dans le cadre théorique de la littératie scolaire qui s'intéresse aux compétences de lecture et d'écriture nécessaires à la réussite des élèves à l'école dans tous les domaines d'apprentissage. Or les énoncés de problèmes appartiennent bien à ce champ. La littéracie scolaire, communément définie comme le versant positif de l'illettrisme, « se réfère à la compréhension et à la production des textes écrits utilisés à l'école » (Grossman, 1999, 140-141) et s'intéresse aussi aux processus cognitifs que modifie l'usage de l'écrit. La littératie se situe alors au croisement de trois disciplines : l'anthropologie, autour des recherches de Jack Goody (Goody, 2006 ; Olson, 2006) qui analyse les rôles de l'écrit dans les processus cognitifs, la

didactique du français, en particulier avec les recherches sur les écrits intermédiaires (Chabanne et Bucheton, 2000), et les mathématiques, à partir des travaux de Raymond Duval sur les registres sémiotiques et les phénomènes de congruence[178] (Duval, 1995), sans oublier la classification des problèmes additifs de Vergnaud (Vergnaud, 1986).

Finalisée par des enjeux scolaires visant à améliorer les performances en résolution de problème, la littéracie envisage des apprentissages spécifiques intégrés aux apprentissages dans les différentes disciplines, et plus particulièrement en mathématiques. Il s'agit notamment d'y ancrer un travail explicite de lecture et d'écriture (Camenisch et Petit, 2005). Notre recherche reprend à son compte les propos d'Olson (2006, 85) stipulant que « l'écriture transforme le langage en objet de pensée ». Elle s'interroge en particulier sur la mise en place d'écrits intermédiaires considérés comme autant de pratiques réflexives « qui permettent de penser, d'apprendre et de se construire » (Chabanne et Bucheton, 2000, 24).

On peut donc formuler l'hypothèse suivante, à savoir qu'un travail spécifique portant sur le langage dans les écrits mathématiques permet d'améliorer les performances en résolution de problème. Il convient donc de s'interroger d'une part, sur la nature du travail spécifique mené en contexte mathématique, d'autre part, sur les caractéristiques des énoncés de problèmes considérés, à savoir, pour ce qui nous concerne ici, les énoncés de problèmes additifs de comparaison.

I - VARIATIONS AUTOUR DES ÉNONCÉS DE PROBLÈMES

Afin de mettre en exergue les caractéristiques d'un énoncé de problème additif de comparaison, nous nous appuierons sur un exemple tiré d'un manuel scolaire. Il permettra à la fois de cerner les variables langagières impliquées, comprenant aussi les écrits intermédiaires qu'il peut générer, et l'analyse de congruence entre les énoncés et les processus de résolution mis en œuvre.

1 Un exemple d'énoncé de problème en classe de CE1

Nous avons sélectionné un énoncé de problème extrait du manuel de CE1 *Pour comprendre les maths* (Hachette, 2018, 100) d'une part parce qu'il présente une situation prototypique[179] à des énoncés de problème de comparaison, d'autre part, pour la variété des écrits qu'il présente.

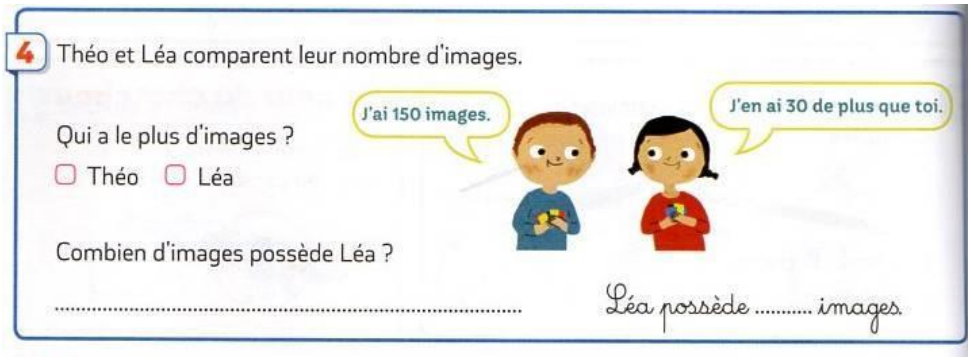


Figure 1. Un exemple d'énoncé de problème additif de comparaison

[178] Le mot *congruence* est formé sur le radical *-gr-* qui apparait dans des mots comme *progresser* (marcher en avant), *régresser* (marcher en arrière), le premier élément *con-* peut se traduire par *ensemble*. Deux représentations d'un même objet sont donc *congruentes* si et seulement si elles *marchent bien ensemble.* Ce qui signifie, entre autres, que les unités signifiantes de l'une et de l'autre apparaissent dans le même ordre et qu'elles portent les mêmes sens.

[179] Le *prototype* propose un exemple particulier, qui présente des caractéristiques communes et invariables, et s'oppose au *modèle*, qui serait à imiter pour reproduire des caractéristiques identiques. Le prototype permet des variations autour d'un exemple. Ici, l'énoncé est prototypique parce qu'il présente une situation rencontrée dans la plupart des énoncés de problèmes de comparaison : la comparaison d'un nombre d'objets.

Un énoncé de problème se présente comme un écrit fictif, comprenant un habillage, ici, sous la forme d'une situation évoquant des images réparties entre deux personnages appelés *Théo* et *Léa*. Il est formé d'une partie informative qui présente les données, sous forme textuelle, schématique, tabulaire, etc. et d'une partie injonctive, qui vise à réaliser une recherche pour trouver un résultat, le plus souvent sous la forme d'une question (Camenisch et Petit, 2008). Un problème additif de comparaison propose des comparaisons d'états (Vergnaud, 1986), ici un nombre d'images inégalement réparties entre les deux personnages. Il nécessite l'utilisation d'un vocabulaire spécifique, sous la forme de locutions adverbiales de comparaison, *de plus que, de moins que, autant que*. Au niveau des opérations mathématiques, sa résolution mobilise une addition ou une soustraction.

Cet énoncé de problème présente d'abord la situation fictive sous la forme d'une phrase introduisant les personnages et l'objet dont il est question : *Théo et Léa comparent leur nombre d'images*. Cette situation est illustrée par une représentation des personnages, qui sont des personnages récurrents dans ce manuel, donc connus des élèves. Les personnages tiennent dans leurs mains un nombre indéterminé d'images. Les informations ou données du problème apparaissent sous la forme de bulles où les personnages s'expriment dans un dialogue, Théo disant : « J'ai 150 images » et Léa répondant : « J'en ai 30 de plus que toi ». La comparaison s'exprime dans la réponse de Léa par l'usage de l'adverbe comparatif « de plus que ». Une difficulté linguistique provient de l'usage du pronom personnel « en » qui nécessite une structure syntaxique complexe : *J'en ai 30 de plus que toi*, renvoyant à *J'ai 30 images de plus que toi*. La partie injonctive du problème se présente sous la forme d'une phrase interrogative : *Combien d'images possède Léa ?*

Cette présentation d'un énoncé de problème de comparaison sous forme de dialogue accompagné d'une illustration n'est pas la plus fréquente. Mais si elle présente deux types d'écrits différents, narratif et conversationnel, c'est sans doute destiné à faciliter la représentation de la situation à des élèves de CE1, encore peu experts dans leur lecture des énoncés. Une présentation plus conventionnelle de la même situation prendrait la forme suivante :

Théo a 150 images. Léa a 30 images de plus que Théo. Combien d'images possède Léa ?

On peut remarquer la présence d'un écrit intermédiaire sous la forme d'une autre question précédant l'injonction du problème, avec une option à cocher parmi *Théo* ou *Léa* : *Qui a le plus d'images ?* Ce questionnement vise à interroger l'illustration et le dialogue pour estimer le résultat avant le calcul. Un autre écrit, fréquemment rencontré dans les manuels de CP et de CE1, se présente sous la forme d'une phrase réponse à trou : *Léa a …… images*. Du point de vue de la structure profonde, la question et la phrase réponse à trou renvoient à deux types différents d'une même phrase : un type interrogatif et un type déclaratif.

Du point de vue de la structure mathématique de l'énoncé, on peut constater qu'il y a congruence (Duval, 1995) entre l'énoncé et le processus de résolution visé. Ainsi, Théo et Léa apparaissent sur l'image dans le même ordre que dans la phrase introductive, les données numériques peuvent être prises également dans le même ordre, et l'égalité résolvante est congruente avec le mot « plus » utilisé dans l'énoncé : 150 + 30 = 180, calcul attendu dans les pointillés situés après la question.

2 Des variations plus ou moins congruentes

Les problèmes dans lesquels la traduction d'une égalité résolvante à partir des données figurant dans l'énoncé ne correspond pas à l'ordre ou au sens des unités de l'énoncé (opposition sémantique des unités signifiantes) sont dits « **non-congruents** » (Duval, 1995). C'est le cas d'une autre formulation de la même situation :

Théo a 150 images. Théo a 30 images de moins que Léa. Combien d''images possède Léa ?

L'unité signifiante *moins* de l'énoncé correspond à l'écriture du signe + dans une égalité résolvante qui reste la même : 150 + 30 = 180. La congruence concernant le sens de l'opération peut être cependant rétablie en écrivant une égalité résolvante à trou, elle n'est cependant pas congruente par rapport à l'ordre des données : ……. – 30 = 150.

Une autre formulation et un autre problème adoptant le point de vue de Léa s'appuient sur la même situation :

Léa a 180 images. Léa a 30 images de plus que Théo. Combien d'images possède Théo ?

L'unité signifiante *plus* de l'énoncé correspond à l'écriture du signe - dans une égalité résolvante : 180 – 30 = 150. La congruence concernant le sens de l'opération peut être cependant rétablie en écrivant une égalité résolvante à trou, elle n'est cependant pas congruente par rapport à l'ordre des données : ……. + 30 = 180.

En inversant les phrases des données, on obtient une autre formulation du même problème, qui n'est congruente ni du point de vue du sens (mot *plus*, signe -), ni du point de vue de l'ordre d'énonciation des données :

Léa a 30 images de plus que Théo. Léa a 180 images. Combien d'images possède Théo ?

Il convient dans ces cas, comme l'affirme Olivier Houdé (Houdé, 2017), « d'inhiber » cette tentation d'associer automatiquement le signe + à l'écrit *plus* de l'énoncé ou le signe – à l'écrit *moins* dans le texte. Or certaines pratiques enseignantes consistent à entourer par exemple le mot « plus » de l'énoncé et à mettre en évidence sa correspondance avec le signe « + » dans l'égalité résolvante, confortant, ce faisant, des représentations erronées. Une telle solution fondée sur un système cognitif de type « heuristique » (Houdé, 2017) qui se traduit par une « pensée automatique et intuitive » (Houdé, 2017) ne fonctionne qu'avec certains types de problèmes dont on dit qu'ils sont « congruents ». Mais il y a autant de formulations possibles, pour une situation donnée, utilisant le mot « plus » et dans lequel l'égalité résolvante mobilise le signe « - » et l'opération de soustraction, que de formulations utilisant le mot « plus » et dans lequel l'égalité résolvante mobilise le signe « + » et l'opération d'addition. Il est donc absolument nécessaire, pédagogiquement, de ne jamais procéder à ces associations qui renforcent des tendances naturelles et des automatismes non pertinents qu'il est difficile d'inhiber par la suite. Au contraire, il est conseillé, très tôt, d'attirer l'attention des élèves sur le fait qu'on ne peut pas déduire l'utilisation du signe + automatiquement dès lors qu'apparait le mot « plus » dans un énoncé et donc de mettre en place un « système algorithmique » (Houdé, 2017) qui se traduit par une pensée « réfléchie logico-mathématique », qui conduit toujours au résultat, mais peut-être un peu plus lentement.

Une même situation visant la comparaison de deux états peut donc générer une multiplicité d'énoncés de problème plus ou moins congruents[180]. Un objectif fixé de la recherche que nous menons vise à développer ce système algorithmique chez les élèves, en les faisant réfléchir à la situation, par la mise en œuvre d'un écrit intermédiaire (Camenisch et Petit, 2018). Cet écrit intermédiaire nécessite alors un travail mental qui permet de passer d'une formulation non congruente de l'énoncé à une formulation plus congruente, dont la résolution ne pose guère de difficultés aux élèves, notamment à ceux du cycle 2.

II - REFORMULATION ET COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES

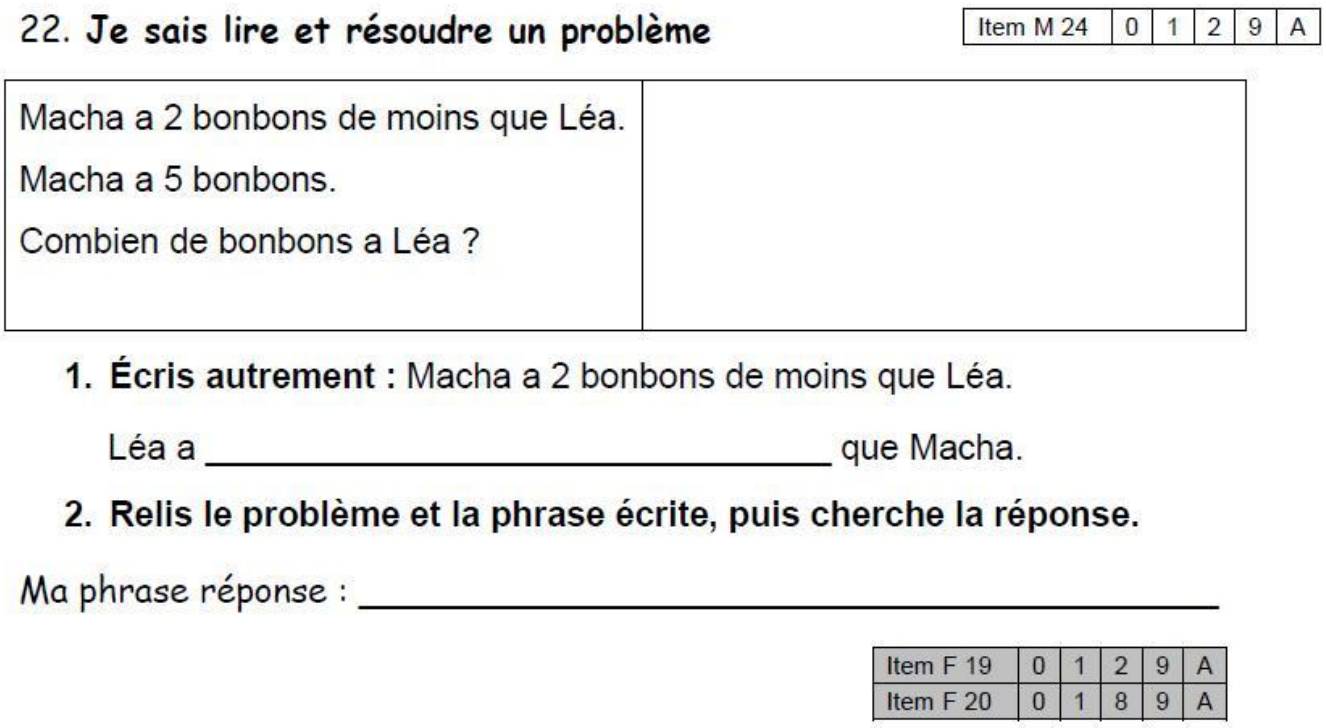
Les difficultés rencontrées par les élèves dans la résolution de problèmes de comparaison non congruents sont apparues lors d'évaluations de fin d'année réalisées dans des classes de CP. Ces évaluations de type sommatif avaient pour objectif de mesurer la réussite des élèves en numération et en résolution de problème suivant une même méthode de mathématiques[181], tout en observant les compétences de français mises en œuvre dans ce contexte mathématique.

[180] Dire qu'un énoncé de problème est congruent est un abus de langage si l'on se réfère à la définition du terme proposée par R. Duval. Cet abus de langage est commode et signifie que l'égalité résolvante experte (souvent attendue) s'écrit de manière congruente avec les données figurant dans l'énoncé (ordre et valeurs sémantiques). Il convient de remarquer que tout énoncé de problème de comparaison peut être congruent à condition de s'autoriser à écrire une égalité à trou, égalité résolvante algébrisée (le trou ayant la valeur d'une variable *x*).

[181] Pour information, il s'agit de la méthode *Construire les maths avec les NuméRas* sous la direction de Serge Petit (Nathan, 2017).

1 Présentation d'un cadre expérimental

Les évaluations ont été réalisées en juin 2017 dans une vingtaine de classes en Alsace ou en PACA, comprenant plusieurs classes de REP+, soit environ trois cents élèves au total. Ces évaluations avaient la particularité de comporter des items de mathématiques et de français portant sur les mêmes supports. Les sept énoncés de problèmes proposés comportaient les deux énoncés de problèmes additifs de comparaison non congruents suivants :



22. **Je sais lire et résoudre un problème**

Item M 24	0	1	2	9	A

Macha a 2 bonbons de moins que Léa. Macha a 5 bonbons. Combien de bonbons a Léa ?	

1. **Écris autrement :** Macha a 2 bonbons de moins que Léa.

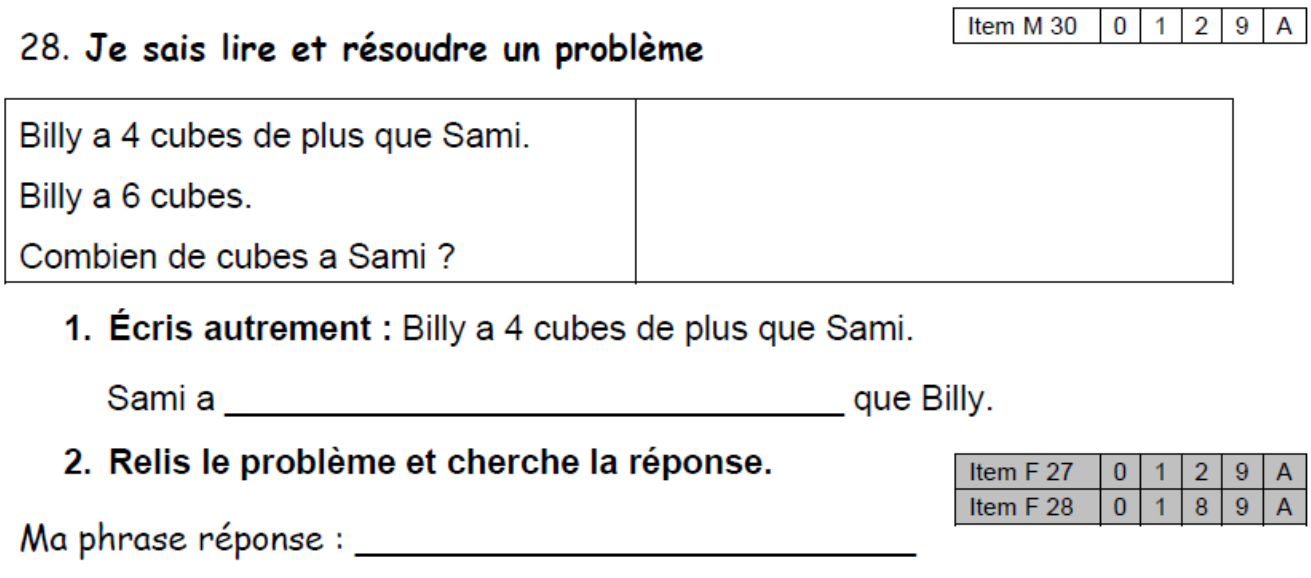
   Léa a _____ que Macha.

2. **Relis le problème et la phrase écrite, puis cherche la réponse.**

Ma phrase réponse : _____

Item F 19	0	1	2	9	A
Item F 20	0	1	8	9	A

Figure 16. Activité 22



28. **Je sais lire et résoudre un problème**

Item M 30	0	1	2	9	A

Billy a 4 cubes de plus que Sami. Billy a 6 cubes. Combien de cubes a Sami ?	

1. **Écris autrement :** Billy a 4 cubes de plus que Sami.

   Sami a _____ que Billy.

2. **Relis le problème et cherche la réponse.**

Ma phrase réponse : _____

Item F 27	0	1	2	9	A
Item F 28	0	1	8	9	A

Figure 3. Activité 28

Les deux énoncés se présentent sous forme textuelle avec une formulation analogue, l'activité 22 utilisant le mot *moins* avec l'égalité résolvante experte 2 + 5 = …, l'activité 28 utilisant le mot *plus* avec l'égalité résolvante experte 6 – 4 = ...

Deux questions suivent chaque énoncé de problème, la première visant l'écriture d'une phrase intermédiaire qui reformule la phrase comparative (traitement de l'information dans le registre de la langue naturelle) pour rétablir une convergence sémantique entre le signe utilisé pour l'opération et l'adverbe comparatif dans l'énoncé, la seconde demandant plus classiquement l'écriture d'une phrase réponse.

Différents items sont alors évalués : l'item M 24 ou M 30 évalue la réussite mathématique par un calcul ou un résultat juste, l'item F 19 ou F 27 évalue la correction syntaxique de la phrase intermédiaire, c'est-à-dire la capacité de l'élève à reformuler une phrase en *plus* en une phrase en *moins*, lorsqu'on change de sujet. L'item F 20 ou F 28 évalue la correction syntaxique de la phrase réponse.

2 Résultats

La réussite des élèves est relativement faible. En effet, pour l'activité 22 où 273 élèves ont été évalués, le taux de réussite est de 49 % (139 élèves contre 134). Statistiquement, on ne peut réfuter l'hypothèse que les résultats des élèves sont le fruit du hasard, comme si les élèves ne faisant qu'additionner ou soustraire les deux nombres en jeu de manière aléatoire.

La réussite est plus faible pour l'activité 28, portant sur 263 élèves, avec un taux de réussite de 40 %. Il est ici possible d'affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 2,5 % que les résultats des élèves en mathématiques ne sont pas le fruit du hasard, avec environ 40 % de réussite et 60 % d'échec (158 contre 105), mais s'orientent dans le sens de l'échec. On peut s'interroger sur les causes de la différence des résultats entre ces deux problèmes, qui traduisent la même situation de comparaison. Celle-ci est peut-être liée à la transformation en « moins » d'un « plus », ou, plus vraisemblablement, en classe de CP, à la nature de l'opération attendue qui est une soustraction. Le choix de la taille des nombres en jeu introduit peut-être un biais. Ce choix a été fait pour permettre à tous les élèves du CP au CM2 de résoudre exactement les mêmes problèmes, mais les élèves des plus grandes classes réagissent peut-être rapidement mentalement au vu de ces petits nombres alors qu'avec de plus grands nombres, ils poseraient et effectueraient une opération, prenant ainsi peut-être plus le temps de la réflexion.

Les résultats deviennent plus intéressants si l'on croise la réussite en mathématiques avec la réussite en français. En effet, on peut constater que lorsque les élèves échouent dans la reformulation en français (donc dans l'item 19), pour l'activité 22, ils ont un taux de réussite de 37 %, contre un taux d'échec de 63 %, alors que lorsque les élèves réussissent à reformuler la phrase intermédiaire, leur taux de réussite est bien supérieur en mathématiques, avec un taux de réussite de 73 % contre un taux d'échec à 27 %.

Activité 22	Reformulation échouée	Reformulation réussie
Échec en maths	63 %	27 %
Réussite en maths	37 %	73 %

Figure 4. Tableau des résultats pour l'activité 22

Ce tableau montre que les élèves réussissant à reformuler une donnée réussissent à 73 % le problème de mathématiques, au contraire de ceux qui ne parviennent pas à reformuler et qui ne réussissent qu'à 37 %.

Ces résultats sont corroborés dans l'activité 28, où les élèves échouant dans la reformulation en français (donc l'item 27) ont un taux d'échec en mathématiques de 78 %, contre 22 % de réussite, et les élèves réussissant dans la reformulation en français réussissent les mathématiques à 67 % contre 33 % d'échec.

Activité 28	Reformulation échouée	Reformulation réussie
Échec en maths	78 %	33 %
Réussite en maths	22 %	67 %

Figure 5. Tableau des résultats pour l'activité 28

Là encore, plus des deux tiers des élèves qui réussissent à reformuler la phrase résolvent correctement le problème.

Si ces résultats ne suffisent pas pour inférer l'existence d'une relation de cause à effet, entre la capacité à reformuler et la réussite en mathématiques, c'est-à-dire à prouver l'implication {réussite en maths => reformulation réussie}, ils permettent cependant de formuler l'hypothèse que la réflexion suscitée par la reformulation constitue une aide pour la résolution du problème. Ils font émerger un nouveau questionnement. Le caractère congruent ou non congruent des énoncés du point de vue du sens ou de l'ordre des données a-t-il un effet sur les résultats en mathématiques ? Si oui, quel est cet effet en fonction du niveau des classes ? Enfin peut-on confirmer la corrélation entre la compréhension de l'énoncé par la production d'un écrit intermédiaire et les résultats en mathématiques ? Ce questionnement nécessite alors la mise en œuvre d'une expérimentation spécifique.

III - RÉUSSITES, ÉCHECS ET CONGRUENCE

Le nouveau protocole expérimental est décliné en deux étapes. La première étape, réalisée en avril 2018, consiste en un test exploratoire destiné à vérifier une première hypothèse de travail, à savoir que la congruence ou non congruence des énoncés du point de vue du sens ou de l'ordre des données a une influence notable sur les résultats en mathématiques, en particulier au cycle 2. Mais il s'agit aussi de voir si les échecs peuvent perdurer, et dans quelle mesure, au cycle 3.

La seconde étape, qui sera intégralement menée sur l'année scolaire 2018-2019, consiste à proposer un travail explicite sur la représentation des situations des énoncés de problème de comparaison et sur la reformulation des données. Ce travail sera encadré par un test initial et un test final portant sur des énoncés de problèmes additifs de comparaison et de transformation, congruents et non congruents. Il ne sera plus proposé d'écrit intermédiaire. Afin de tenir compte de la distanciation qui pourrait être induite par le choix de plus grands nombres, des nombres dits « à deux chiffres » sont introduits dans le nouveau protocole.

Nous présentons ci-dessous le cadre expérimental de la première étape, avec une analyse détaillée des énoncés proposés et des résultats.

1 Cadre expérimental de la première étape

Les tests exploratoires ont été proposés en avril 2018 à soixante-six classes du CP au CM2, situées en Alsace, en PACA et d'autres régions de France. Elles ont concerné 968 élèves, également répartis par niveau, soit environ 200 élèves par niveau. Les enseignants disposaient de consignes strictes de passation qui étaient identiques pour tous les niveaux, sauf pour les classes de CP, où tous les énoncés étaient lus et relus oralement, avant leur résolution. Les élèves devaient résoudre quatre problèmes (voir annexe 2), deux problèmes congruents et deux problèmes non congruents, sur deux jours différents, sans qu'ils puissent disposer des problèmes déjà résolus. Aucune correction des problèmes n'avait lieu avant la résolution de l'ensemble des problèmes.

Après une analyse sommaire des énoncés proposés, des résultats très généraux seront donnés dans un premier temps énoncé par énoncé, avant que les résultats ne soient comparés dans un tableau récapitulatif niveau par niveau et en fonction de la congruence.

2 Analyse des énoncés de problèmes et réussite globale

Une analyse des énoncés permet de mesurer et de comparer la congruence entre les énoncés et le processus de résolution du point de vue du sens (*plus* ou *moins*) et de l'ordre des données ou de leur traitement.

2.1Analyse de l'énoncé de problème 1

Énoncé 1 : Luc a 2 pains de plus que Badi. Luc a 7 pains. Combien de pains a Badi ?

La manière experte de résoudre le problème 1 est : Badi a 7 **–** 2 pains. D'où la réponse : *Badi a 5 pains*.

Cet énoncé n'est congruent, ni du point de vue du sens des unités signifiantes, ni du point de vue de l'ordre des données. Les élèves sont tentés de formuler leur réponse en calquant mathématiquement l'écriture d'une égalité résolvante en suivant les données de l'énoncé dans l'ordre dans lequel elles apparaissent et en tenant compte du sens premier exprimé par certaines unités signifiantes comme le mot *plus*. Cela peut conduire certains élèves à écrire une égalité résolvante comme 2 + 7 = __ et à la réponse erronée 9. L'absence de congruence dans l'ordre des données peut aussi mener les élèves à une écriture soustractive erronée comme 2 – 7, avec un résultat juste (5 car le signe – utilisé de cette manière ne semble pas troubler certains élèves). Comme dit précédemment, le choix des mêmes petits nombres a été fait pour tous les niveaux d'enseignement, ce choix est susceptible d'entraîner un biais dans les plus grandes classes, par des réponses spontanées obtenues par un calcul non posé.

Les taux de réussite s'étalent en progressant régulièrement de 27 % en CP à 83 % en CM2. Un tel énoncé reste donc difficile pour des élèves de CM2. On pourrait s'attendre à une réussite totale ou quasi-totale à ce niveau et ce d'autant plus que les problèmes additifs relèvent du programme du cycle 2.

2.2Analyse de l'énoncé de problème 2

Énoncé 2 : Rémi a trois 3 pommes de plus que Lina. Lina a 5 pommes. Combien de pommes a Rémi ?

Cet énoncé est tout à fait congruent. L'égalité résolvante experte est 3 + 5 = __. Les unités signifiantes (3, plus et 5) apparaissent dans le même ordre dans l'égalité résolvante et dans le texte et le sens du mot « plus » se traduit par le signe « + ». Cet énoncé pose bien moins de difficultés aux élèves.

Les taux de réussite s'étalent en progressant régulièrement de 53 % en CP à 94 % en CM2. Un tel énoncé congruent, donc plus facile, n'est cependant pas réussi par l'intégralité des élèves, même en CM2.

2.3 Analyse de l'énoncé de problème 3

Énoncé 3 : Badi a 2 pains de moins que Luc. Luc a 7 pains. Combien de pains a Badi ?

Une première remarque s'impose : cet énoncé renvoie à la même situation que l'énoncé 1. Il n'est pas certain que les élèves s'en rendent compte. L'égalité résolvante experte est 7 – 2 = ___.

L'analyse de congruence entre cette égalité experte et la représentation de la situation donnée par l'énoncé est la suivante. Les unités signifiantes n'apparaissent pas dans le même ordre dans l'énoncé et dans l'égalité résolvante, puisque le 7 qui apparait en troisième position dans l'énoncé figure en première position dans l'égalité résolvante et inversement pour le 2. Cependant, le mot « moins », situé entre les deux unités signifiantes numériques se traduit par le signe -, en parfaite correspondance sémantique. Ce problème n'est donc pas tout à fait congruent, mais ne comporte pas de « piège » au niveau de l'opération à effectuer.

On a pu observer dans les productions que certains élèves mettent en œuvre une démarche fondée sur la congruence en écrivant l'égalité résolvante 2 – 7 = __ et concluent en donnant la bonne réponse : 5.

Les taux de réussite s'étalent en progressant régulièrement de 44 % en CP à 93 % en CM2. Un tel énoncé plus congruent que le premier, mais moins que le deuxième, est moins bien réussi en classe de CP, mais le taux de réussite est équivalent en CM2.

2.4 Analyse de l'énoncé de problème 4

Énoncé 4 : Lina a 3 pommes de moins que Rémi. Lina a 5 pommes. Combien de pommes a Rémi ?

Cet énoncé, dont la situation est identique à l'énoncé 2, est non congruent puisque son égalité résolvante experte est 5 + 3 = __. La rédaction de cette égalité résolvante prend pour point de départ une des données sous forme d'un état (les cinq pommes de Lina). Cette égalité peut être guidée par la reformulation de la comparaison en *Rémi a 3 pommes de plus que Lina.* L'égalité résolvante 3 + 5 = 8 est davantage guidée par l'ordre d'apparition des données dans l'énoncé.

Les taux de réussite s'étalent en progressant régulièrement de 39 % en CP à 77 % en CM2. Un tel problème non congruent n'est réussi que par moins de la moitié des élèves de CP et fait encore chuter plus de 20 % d'élèves de CM2.

3 Analyse des résultats

Le tableau ci-dessous met en regard les énoncés et la réussite des élèves en fonction des situations, des données dans leur ordre d'apparition et des solutions expertes attendues. Il présente aussi les énoncés par niveau de congruence décroissant. Ainsi l'énoncé 2 est congruent du point de vue de l'ordre et du sens (code 1), alors que l'énoncé 1 n'est congruent ni du point de vue de l'ordre ni du point de vue du sens (code 0). Les autres énoncés montrent des états intermédiaires de congruence, soit du point de vue du sens (énoncé 3), soit du point de l'ordre (énoncé 4).

	Situation	**Données**	**Égalité résolvante experte**	**Congruence**	**Réussite (en %)**				
					CP	CE1	CE2	CM1	CM2
Enoncé 2	Lina : 5 pommes Rémi : 8 pommes	**3 ; plus ; 5**	**3 + 5 = __** **5 + 3 = __**	ordre : 1 sens : 1	53	64	76	91	94
Enoncé 3	Luc : 7 pains Badi : 5 pains	**2 ; moins ; 7**	**7 – 2 = __**	ordre : 0 sens : 1	44	62	81	88	93
Enoncé 4	Lina : 5 pommes Rémi : 8 pommes	**3 ; moins ; 5**	**3 + 5 = __** **5 + 3 = __**	ordre : 1 sens : 0	39	38	53	68	77
Enoncé 1	Luc : 7 pains Badi : 5 pains	**2 ; plus ; 7**	**7 – 2 = __**	ordre : 0 sens : 0	27	35	70	77	83

Figure 6. Tableau comparatif des résultats des élèves en fonction de la congruence (en pourcentages)

Si l'on regarde la réussite des élèves du point de vue de la congruence des énoncés, on constate que c'est la correspondance sémantique entre l'opération experte à effectuer et le sens des unités signifiantes *de plus que* et *de moins que* qui conditionne la réussite des élèves, les énoncés 2 et 3 étant significativement mieux réussis à tous les niveaux que les autres. Les énoncés 1 et 4 sont de ce fait plus fortement non-congruents. Il existe une différence de réussite concernant l'ordre des données, mais on constate que si les énoncés congruents du point de vue de l'ordre sont mieux réussis en CP et CE1, ils sont curieusement moins réussis du CE2 et CM1, voire au CM2.

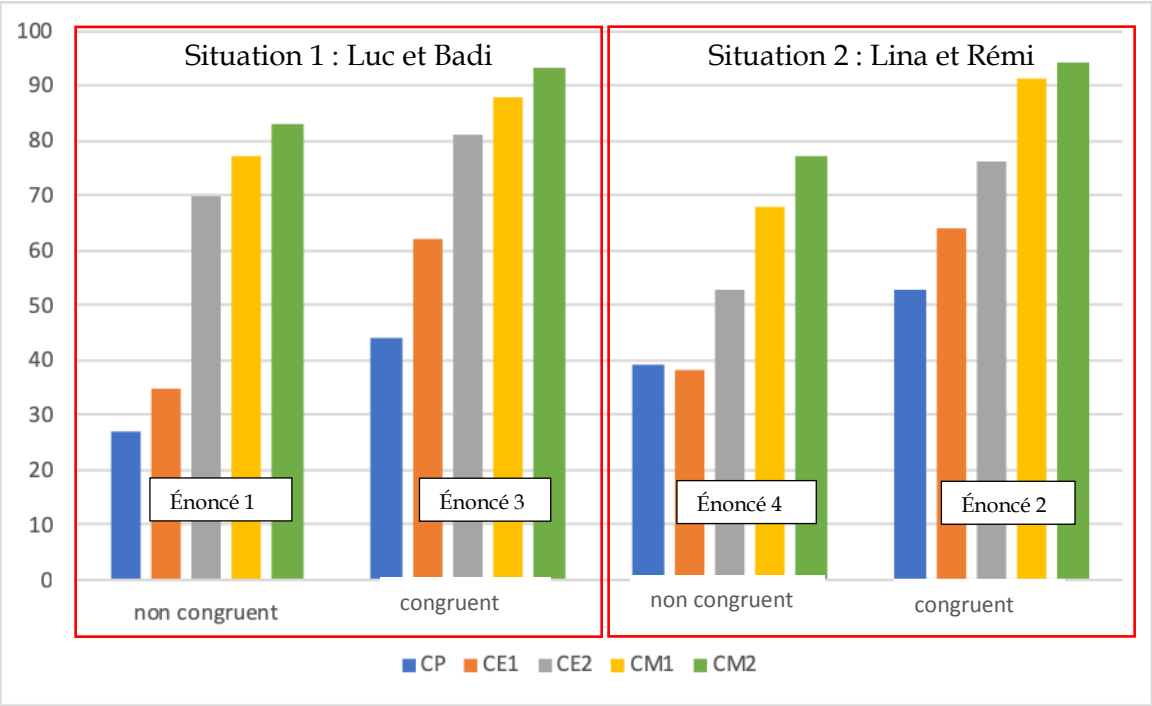
On peut aussi faire le constat assez naturel du progrès des élèves en fonction des niveaux, les résultats étant, à une exception près que nous tenterons d'analyser plus loin, progressivement meilleurs au fil des niveaux. Cependant, les taux d'échecs en classe de cycle 3 restent importants pour des problèmes dont la résolution ne devrait plus guère poser de problème au-delà du cycle 2 étant donné d'une part que les élèves du cycle 3 sont censés pouvoir lire et comprendre les textes du type des énoncés concernés et, d'autre part, sont censés maitriser les contenus mathématiques sous-jacents (addition, soustraction) et donc être capables d'effectuer un choix pertinent du calcul à réaliser.

Cette analyse, en termes de congruence, des problèmes explique la différence de réussite entre les énoncés 1 et 4 (non congruents) et les énoncés 2 et 3 (congruents), alors que les énoncés 1 et 3, 2 et 4 renvoient respectivement à la même situation.

	Énoncé 1 non congruent	Énoncé 3 congruent	Énoncé 4 non congruent	Énoncé 2 congruent	
	Même situation Luc : 7 pains ; Badi : 5 pains		Même situation Lina : 5 pommes ; Rémi : 8 pommes		
	R en %	R en %	R en %	R en %	Nombre élèves
CP	27	44	39	53	196
CE1	35	62	38	64	191
CE2	70	81	53	76	172
CM1	77	88	68	91	208
CM2	83	93	77	94	201
Total					968

Figure 7. Tableau comparatif de la réussite en fonction de la situation (en pourcentage)

Les résultats peuvent aussi se présenter sous forme de graphique :



4 Des conjectures autour d'une aberration

On peut constater qu'une aberration apparait à l'énoncé 4 entre les résultats des CP et des CE1. En effet, les CP ont globalement un résultat supérieur à celui des CE1. La différence peut s'expliquer par les méthodes utilisées en mathématiques. En effet, une partie de l'effectif en CP et en CE1 utilise une méthode de mathématiques[182] qui propose un travail explicite de reformulation d'énoncés de problèmes comparatifs non congruents.

Ainsi, un travail explicite porte sur les différents sens de l'adverbe « plus »[183]. Avant que les élèves n'aient à résoudre des problèmes de comparaison, l'enseignant peut leur faire réaliser différents exercices d'écriture ou de reformulation. Les exercices d'écriture à partir d'illustrations visent à écrire

[182] *Construire les maths avec les NuméRas*, sous la direction de S. Petit, Nathan, 2016.

[183] Il existe deux adverbes homographes s'écrivant PLUS. Un premier adverbe *plus*, est un adverbe de négation, le « s » final ne se prononce pas. On le retrouve dans des expressions comme « Il n'y a plus de pommes ». Un deuxième adverbe *plus*, fréquemment utilisé en mathématiques est polysémique dans cette discipline. Il peut d'une part renvoyer au signe +, symbole mathématique qui traduit une décomposition additive ou un ajout, d'autre part, être utilisé dans des locutions comparatives avec des prononciations diverses dans *le plus, le plus de, de plus que.*

des phrases pour comparer des collections en utilisant les mots *plus*, *moins* ou *autant*. L'enseignant est encouragé à pratiquer oralement des formulations symétriques de phrases comparatives à partir de situations quotidiennes, en transformant *plus* en *moins*, par croisement de sujet. Des exercices écrits complètent cette mise en œuvre préparatoire où les élèves doivent comparer des collections par la formulation de deux phrases symétriques[184]. Il n'est cependant pas possible de vérifier que tous les enseignants ayant fait passer ces tests à leurs élèves ont bien réalisé toutes les activités proposées avant la résolution de problèmes de comparaison.

Il convient aussi de noter que la méthode propose des activités spécifiques en langue à tout moment : activités lexicales, grammaticales, activités de compréhension, de reformulation, d'écriture, etc. et pas uniquement pour les problèmes de comparaison.

Nous avons donc distingué les classes de CP et de CE1, selon qu'elles soient susceptibles ou non d'avoir réalisé un travail sur la reformulation. Nous obtenons les résultats suivants :

	Item 1 NC	Item 3 C	Item 4 NC	Item 2 C	
	Même situation Luc : 7 pains ; Badi : 5 pains		Même situation Lina : 5 pommes ; Rémi : 8 pommes		
	R en %	R en %	R en %	R en %	Nombre d'élèves
CP Autres	12	29	29	51	52
CP avec reformulation	32	49	42	54	144
CE1 Autres	31	61	36	63	140
CE1 avec reformulation	45	67	42	67	51

Les différences les plus importantes se situent dans la réussite aux problèmes non congruents, en particulier pour l'énoncé 1, le moins congruent, où un pourcentage de réussite de 32 % pour les élèves pouvant pratiquer la reformulation, s'oppose à une réussite limitée à 12 % pour les autres élèves.

Au seuil de 2,5 %, on peut affirmer, concernant l'item 1 en CP (46/144 et 6/52)[185], que la réussite des élèves susceptibles de pratiquer des activités de reformulation est statistiquement différente de celle des élèves susceptibles de ne pas en pratiquer, au bénéfice des premiers.

On ne peut pas rejeter l'hypothèse que les élèves de CP susceptibles de pratiquer des activités de reformulation ont le même score que les élèves de CE1 ne pratiquant pas ces activités (46/144 et 43/140), scores respectifs de 32 % et de 31 %. On ne peut pas non plus rejeter l'hypothèse (60/144 et 50/140) qu'il en est de même pour l'item 4 qui semble mieux réussi par les CP que par les CE1 (respectivement 42 % et 36 % de réussite).

La pratique de la reformulation semble ainsi faire gagner une année d'apprentissage en résolution de ces types de problèmes non-congruents. La différence est cependant moins nette pour les problèmes congruents peut-être parce qu'ils ne posent pas de difficulté inhérente au langage.

Dans tous les cas, les CP susceptibles de pratiquer des activités de reformulation ont des scores supérieurs aux CP susceptibles de ne pas en pratiquer. Il en est de même pour les CE1.

La différence des résultats entre CP susceptibles de pratiquer des activités de reformulation et CE susceptibles de ne pas en pratiquer est moins marquée pour les deux items 2 et 3, items plus congruents.

[184] Voir en particulier le cahier d'élève *Je construis les maths avec les NuméRas*, Cahier 1, CP, Nathan, 2018, p.41-47.

[185] Nous notons ainsi les effectifs par réussite sur le nombre total d'élèves concernés.

Pour tous ces problèmes, on peut constater que le taux de réussite, surtout pour les problèmes les moins congruents, est nettement différent selon que la méthode invite explicitement à travailler la langue dans les apprentissages mathématiques ou non. On peut dès lors supposer que l'entrainement sur les reformulations a quelques effets positifs. C'est ce que cherchera à vérifier le protocole expérimental mis en place en 2018-2019.

5 Vers un nouveau protocole expérimental

Ce protocole expérimental visera à travailler de manière explicite la lecture de l'énoncé afin de dégager le sens de la situation (qui a le plus, qui a le moins), donc la compréhension de l'énoncé. Il proposera un travail de reformulation de phrases exprimant des comparaisons dans des situations théâtralisées puis reformulées par écrit. Il mettra aussi en œuvre une stratégie explicite de compréhension des énoncés, visant soit à « inhiber » (Houdé, 2017) un comportement automatisé des élèves, soit à favoriser une posture réflexive en résolution de problème.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Camenisch, A. et Petit, S. (2018). Résolution de problèmes et apprentissages de la langue à l'école élémentaire, *Au fil des maths* (528), 20-24.

Camenisch, A. et Petit, S. (2017). Writing in Mathematics : The Role of Intermediate Texts, *Research on Writing: Multiple Perspectives*, Fort Collins, Colorado, The WAC Clearinghouse, 201-222.

Camenisch, A. et Petit, S. (2016). Écrire en mathématiques : le rôle des écrits intermédiaires, *Recherches en écritures : regards pluriels*, Université de Lorraine, Recherches Textuelles (13), 235-259.

Camenisch, A. et Petit, S. (2008). Apprendre à écrire par les mathématiques. In D. Alamargot, J. Bouchand, E. Lambert, V. Millogo, et C. Beaudet (éds.), *Actes du colloque international De la France au Québec : l'Ecriture dans tous ses états*. Poitiers, France.

Camenisch, A. et Petit, S. (2007). Projets d'écriture en mathématiques pour mieux comprendre les énoncés de problème. *Actes du 33e Colloque européen de la COPIRELEM.* Dourdan, France : CRDP de Versailles, CDDP de l'Essonne Evry. Cédérom.

Camenisch, A. et Petit, S. (2005). Lire et écrire des énoncés de problème. *Bulletin de l'APMEP* (456), 7-20.

Chabanne, J.-C. et Bucheton, D. (2000). Les écrits intermédiaires. *La lettre de la DFLM* (26), 23-27.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée humaine*, Peter Lang.

Houdé, O. (2017). *Apprendre à résister*, Le pommier.

Goody, J. (2006). La littératie, un chantier toujours ouvert. *Pratiques* (131/132), 69-75.

Grossmann, F. (1999). Littératie, compréhension et interprétation des textes. *Repères (*19), 139-166.

Olson, D. (2006). Littératie, scolarisation et cognition. Quelques implications de l'anthropologie de Jack Goody. *Pratiques* (131/132), 83-94.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives. *Grand N* (38), 21-40.

V - ANNEXE 1 : EXTRAIT DES EVALUATIONS DE FIN CP, 2017.

Conception : S. Petit, A. Camenisch

22. **Je sais lire et résoudre un problème**

Macha a 2 bonbons de moins que Léa. Macha a 5 bonbons. Combien de bonbons a Léa ?	

1. **Écris autrement :** Macha a 2 bonbons de moins que Léa.

   Léa a _____ que Macha.

2. **Relis le problème et la phrase écrite, puis cherche la réponse.**

II - MA PHRASE REPONSE :

_____

Item F 19	0	1	2	9	A
Item F 20	0	1	8	9	A

28. Je sais lire et résoudre un problème

Item M 30	0	1	2	9	A

Billy a 4 cubes de plus que Sami. Billy a 6 cubes. Combien de cubes a Sami ?	

1. **Écris autrement :** Billy a 4 cubes de plus que Sami.

   Sami a _____ que Billy.

2. **Relis le problème et cherche la réponse.**

III - MA PHRASE REPONSE :

_____

Item F 27	0	1	2	9	A
Item F 28	0	1	8	9	A

VI - ANNEXE 2 : PROBLÈMES PROPOSÉS DANS LES TESTS EN RÉSOLUTION DE PROBLEMES ADDITIFS DE COMPARAISON, 2018

Conception : S. Petit

JOUR 1

1 Luc a 2 pains de plus que Badi. Luc a 7 pains.

Combien de pains a Badi ?

2 Rémi a 3 pommes de plus que Lina. Lina a 5 pommes.

Combien de pommes a Rémi ?

JOUR 2

3 Badi a 2 pains de moins que Luc. Luc a 7 pains.

Combien de pains a Badi ?

4 Lina a 3 pommes de moins que Rémi. Lina a 5 pommes.

Combien de pommes a Rémi ?