COMMUNICATION C15

LE TERRAIN D'ALPHONSE OU LES INFORTUNES DE LA MESURE

Alain KUZNIAK
Professeur
LDAR (EA 4434) Université Paris Diderot, UA UCP UPEC URN
alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

Assia NECHACHE
MCF, ESPE de Hirsh
LDAR (EA 4434) Université de Cergy-Pontoise, UA UPD UPEC URN
assia.nechache@hotmail.fr

Résumé

Dans cette contribution, nous nous proposons de revisiter le jeu entre paradigmes GI et GII dans le cadre du curriculum actuel qui accorde une place importante aux activités de modélisation dans l'apprentissage des mathématiques. Nous avons proposé à des étudiants de master MEEF 1er degré et de licence pluridisciplinaire, une tâche géométrique de modélisation sur l'estimation de l'aire d'un terrain, le terrain d'Alphonse. La résolution de la tâche suppose une articulation entre GI et GII en questionnant le rôle de la mesure et la place de l'approximation. Elle vise à aider ces étudiants à identifier les paradigmes en jeu dans la résolution d'une tâche géométrique de façon à éviter certains blocages sur la nature du travail mathématique attendu. S'insérant dans une perspective de formation d'enseignants en géométrie, notre communication se propose de montrer l'intérêt des outils didactiques développés dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique pour comprendre et influer sur le travail géométrique réellement produit par les étudiants futurs professeurs des écoles.

I - INTRODUCTION ET OBJECTIFS

1 Le contexte de la recherche

Dans cette communication, nous présentons une partie d'une recherche portant sur l'étude du travail géométrique des étudiants se destinant au métier de professeur du premier degré. Il s'agit pour nous de revisiter le jeu entre paradigmes GI et GII (Houdement et Kuzniak, 2006 ; Tanguay et Geeraerts, 2012) dans le cadre du curriculum actuel (dans la scolarité obligatoire) qui accorde une place importante aux activités de modélisation dans l'apprentissage des mathématiques.

Dans le cadre du master MEEF 1er degré, nous avons proposé à 45 étudiants de première année de master, une tâche géométrique sur l'estimation de l'aire d'un terrain, « le terrain d'Alphonse ». La résolution de cette tâche fait appel à la modélisation et elle suppose une articulation entre GI et GII en questionnant le rôle de la mesure et la place de l'approximation. Elle vise à aider les étudiants à identifier les paradigmes en jeu dans la résolution d'une tâche géométrique de façon à éviter certains blocages sur la nature du travail mathématique attendu.

Cette recherche s'insère dans une perspective de formation d'enseignants en géométrie et ses objectifs se déclinent comme suit :

- identifier le travail géométrique réellement produit par les étudiants pour le comprendre et à terme pouvoir l'influencer
- sensibiliser les étudiants aux questions de mesure et d'aire en relation avec les paradigmes géométriques GI et GII et avec le jeu possible entre ces deux paradigmes.

Par ailleurs, notre communication se propose de montrer l'intérêt des outils didactiques développés dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et Nechache, 2014 ; 2015) pour comprendre et influer sur le travail géométrique réellement produit par les étudiants futurs professeurs des écoles.

2 La tâche proposée aux étudiants : le terrain d'Alphonse

L'énoncé de la tâche est :

> Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?
>
> *Une information complémentaire*
>
> Alphonse a demandé à une amie périgourdine de l'aider et celle-ci ne lui a renvoyé que la longueur d'une des diagonales : 630 m.

Pour résoudre cette tâche, les étudiants doivent mobiliser des connaissances portant sur les quadrilatères, la notion d'échelle et de la mesure de l'aire d'un quadrilatère. De manière originale, la réalisation de cette tâche suppose une première modélisation liée à la forme et la représentation du terrain.

II - ÉLÉMENTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

Cette recherche s'inscrit dans le cadre théorique des Espaces de Travail mathématique articulé avec la notion de paradigme géométrique.

1 Les paradigmes géométriques

Rappelons que les paradigmes géométriques et les usages possibles de cette notion en formation des enseignants ont déjà fait l'objet de plusieurs présentations à l'occasion des colloques de la Copirelem. Pour une présentation complète, nous renvoyons plus particulièrement aux articles de Kuzniak et Rauscher (2003, 2004). Quant au modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM), son usage en formation des enseignants dans le cas de la géométrie est notamment illustré dans l'article de Gomez-Chacon et Kuzniak (2011). Il a été également présenté dans une communication (Kuzniak, 2014) lors du colloque de la Copirelem en 2014.

Selon Kuhn (1976), un paradigme désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Cette notion de paradigme permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe d'individus qui travaille sur le même sujet. En se situant dans le même paradigme, les personnes peuvent alors se comprendre car elles utilisent un vocabulaire et des concepts communs qui leur permettent d'envisager et de traiter un problème de la même manière. A contrario, lorsque les individus ne se réfèrent pas au même paradigme, des malentendus vont apparaître, souvent source d'une réelle incompréhension.

Dans le cadre de l'enseignement, il est possible d'identifier trois paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 2006) appelés respectivement GI, GII et GIII et définis comme suit :

- ***le paradigme GI*** définit une géométrie qui s'intéresse au monde de la pratique, au monde des dessins, des objets réels, il s'agit de ce qu'on peut appeler la géométrie naturelle (ou Géométrie I). Cette géométrie a pour source de validation la réalité et le monde sensible. D'une certaine façon, tous les types d'arguments rationnels, en particulier pragmatiques et expérimentaux, sont permis pour justifier une affirmation et convaincre un interlocuteur.
- ***le paradigme GII*** renvoie à une géométrie axée sur la démonstration, très attentive aux propriétés, aux théorèmes, aux relations entre les définitions des objets. Il s'agit de la géométrie axiomatique naturelle (ou Géométrie II). La Géométrie II est bâtie sur une

schématisation de la réalité mais une fois les principes et axiomes fixés, les démonstrations doivent se situer à l'intérieur du système des axiomes pour être certaines.

- ***le paradigme GIII*** renvoie à la Géométrie axiomatique formaliste (Géométrie III), qui privilégie essentiellement les relations entre les axiomes définissant les objets sans se préoccuper de leur relation avec la réalité.

Actuellement, dans l'enseignement de la géométrie au niveau primaire et secondaire, seuls les paradigmes GI et GII sont pris en compte. Le paradigme GIII constitue, parfois, un horizon qui peut aider les professeurs à inscrire leur enseignement dans le temps long de la formation aux mathématiques. Par ailleurs, ces paradigmes ne sont pas hiérarchisées suivant leur qualité : ils n'ont pas les mêmes fonctions et la même finalité.

Les paradigmes géométriques permettent d'identifier la nature épistémologique du travail réellement produit dans une institution scolaire. Cette identification de la nature du travail permet par la suite de comprendre et de caractériser la circulation du travail géométrique au sein de l'Espace de Travail Mathématique.

2 Les Espaces de Travail Mathématique

Tel qu'elle a été développée, la théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak 2011), notés ETM, a pour objectif d'analyser et d'organiser le travail mathématique produit par des élèves ou des enseignants dans une institution scolaire donnée. Les Espaces de Travail Mathématique sont conçus et pensés de manière à favoriser l'exercice du travail mathématique par ses utilisateurs. Les ETM sont organisés suivants deux plans (Figure 1) :

- le plan épistémologique, composé de trois pôles : representamen, l'artefact, référentiel théorique. Il permet de structurer le contenu mathématique.
- le plan cognitif composé de trois processus cognitifs : visualisation, construction et preuve. Il vise à structurer l'ETM lorsqu'il est proposé à un individu dont l'intention est d'effectuer le travail mathématique. Ce plan rend compte du travail mené par l'utilisateur de cet espace de travail pendant l'activité de résolution d'une tâche.

Le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles :

- une genèse sémiotique fondée sur les registres de représentation sémiotiques qui donne aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;
- une genèse instrumentale, qui a pour fonction de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif ;
- une genèse discursive de la preuve, qui permet de donner un sens aux propriétés pour les mettre en œuvre dans le raisonnement mathématique.

Ces trois genèses favorisent la circulation entre les deux plans horizontaux en activant une articulation entre les composantes respectives des deux plans.
Cet ensemble de relation peut être visualisé grâce au diagramme (Figure 1) qui fait de plus apparaître les relations entre les deux niveaux basées sur différentes dimensions ou genèses : sémiotique, discursive, instrumentale.
La mise en œuvre du travail géométrique peut être initiée à partir de l'une des trois dimensions associée à chacune des genèses (sémiotique, instrumentale et discursive), ou à travers de l'articulation de deux d'entre elles : sémiotique et instrumentale ([Sem-Ins]), sémiotique et discursive ([Sem-Dis]), ou encore discursive et instrumentale ([Dis-Ins]). Ces différentes articulations définissent ainsi trois plans verticaux de l'Espace de Travail Mathématique (Figure 2).

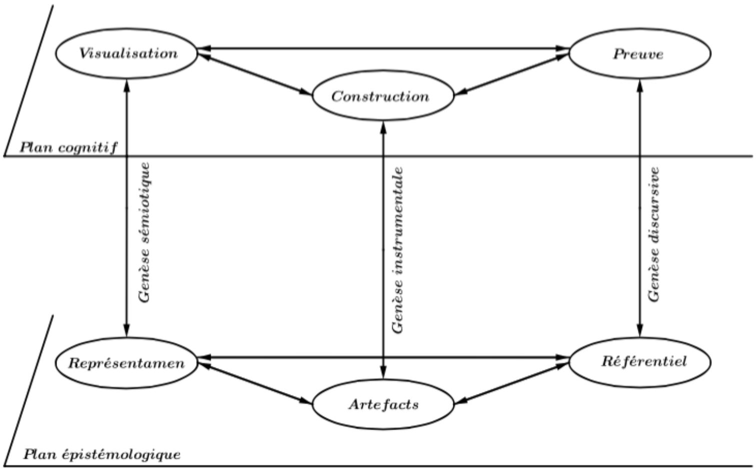


Figure 1. Diagramme général des Espaces de Travail Mathématique

Les différents plans verticaux permettent dans la suite de préciser la circulation du travail géométrique dans l'ETM et la manière dont le travail géométrique se poursuit et s'effectue. L'analyse du travail mathématique et de sa circulation au sein de l'ETM s'appuiera sur l'identification des outils *sémiotique, technologique, théorique* (Kuzniak, Nechache et Drouhard 2016) du plan épistémologique associés à chacune des dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) de l'ETM. Cette analyse prendra en compte la manière dont un sujet utilise et transforme ces outils en des instruments (sémiotique, instrumentale et discursive) du plan cognitif (Ibid., 2016). Elle permettra ainsi de préciser les ETM personnels des sujets et leur distance éventuelle aux ETM idoines développés par les professeurs dans le cadre des ETM de références souhaités par les diverses institutions concernées par l'enseignement des mathématiques.

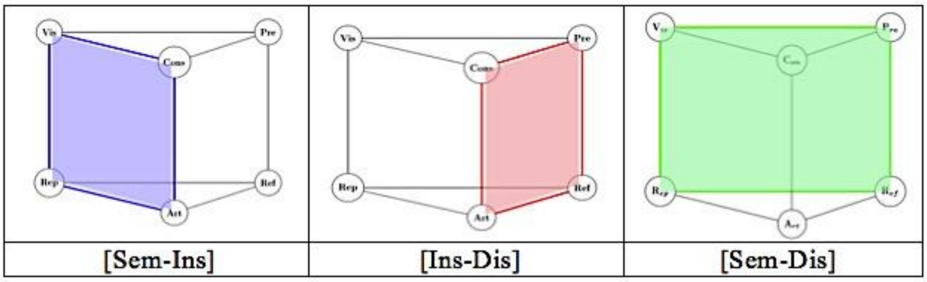


Figure 2. Les trois plans verticaux de l'ETM (Kuzniak & Nechache 2014)

3 Les points d'appui pour analyser la tâche proposée.

Dans cette recherche, nous avons choisi de mener l'analyse de la tâche géométrique en identifiant la manière dont les outils sémiotique, technologique et théorique sont utilisés par un sujet. Ainsi, l'étude de l'usage des outils sémiotiques passe par l'identification des différentes décompositions notamment méréologiques des figures (au sens de Duval). Cette étude des différentes décompositions nous amène à questionner leurs « légitimités » du point de vue théorique en nous appuyant sur des outils théoriques tels que les propriétés de dissection et d'équidécomposabilité (Hilbert). En ce qui concerne, les outils technologiques, il s'agira de mettre en évidence les outils de construction géométrique ainsi que les formules de calcul d'aire de figures usuelles (triangle, carré, trapèze, rectangle) qui peuvent être utilisées. Par ailleurs, notre analyse de la tâche prend en compte la manière dont la mesure de l'aire et le mesurage interviennent dans le raisonnement. Cela nous permet de préciser le(s) paradigme(s) géométrique(s) qui guide(nt) le travail mathématique.

III - ANALYSE DE LA TACHE PROPOSÉE AUX ÉTUDIANTS

1 Les formes possibles du terrain d'Alphonse

Rappelons l'énoncé de la tâche :

> Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?
>
> *Une information complémentaire*
>
> Alphonse a demandé à une amie périgourdine de l'aider et celle-ci ne lui a renvoyé que la longueur d'une des diagonales : 630 m.

L'objectif est de déterminer l'aire du terrain qui intéresse la famille d'Alphonse. En utilisant les outils de construction géométrique nous pouvons obtenir plusieurs formes possibles du terrain d'Alphonse. Ces formes peuvent être convexe ou non convexe (Figure 3).

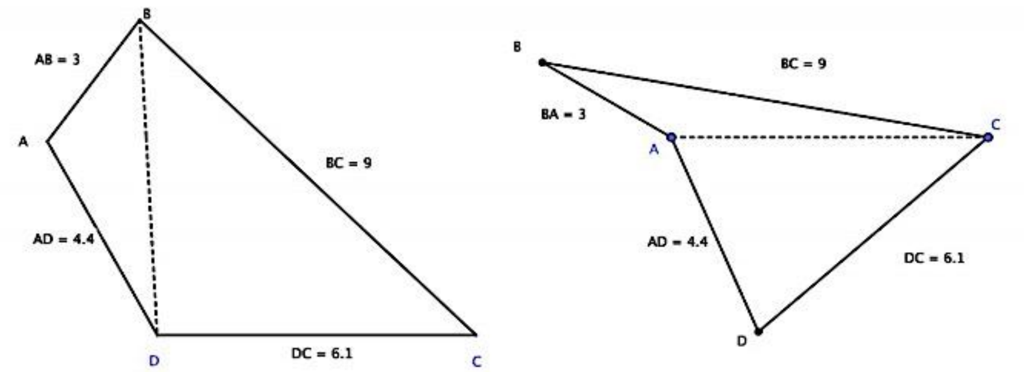


Figure 3. Les formes possibles du terrain d'Alphonse

Bien que la forme d'un quadrilatère croisé soit une forme possible au vu des données de l'énoncé, nous avons néanmoins écarté cette possibilité car nous supposons (aidé par « le bon sens ») que dans la réalité les rares terrains ayant une forme d'un quadrilatère croisé sont considérés comme deux champs triangulaires.

2 Quelques méthodes pour résoudre la tâche

Nous proposons quelques méthodes possibles faisant appel à la décomposition et la recomposition d'un quadrilatère (en utilisant l'une de ses diagonales) et à une construction géométrique utilisant (ou non) des outils de construction géométriques et/ou une échelle adaptée. Ces méthodes peuvent faire intervenir un ou plusieurs paradigmes géométriques. Toutes ces méthodes nécessitent la construction à l'aide ou non d'instruments de construction géométrique (compas et règle graduée) du quadrilatère en prenant par exemple comme mesure des côtés :

Mesure du terrain (dans la réalité)	300 m	900 m	610 m	440 m	630 m
Mesure du terrain (sur le dessin)	3 cm	9 cm	6,1 cm	4,4 cm	6,3 cm

Tableau 1. Echelle retenue pour la construction du quadrilatère

*Méthode 1. **Calcul de l'aire avec mesure effective de longueurs à l'aide de la règle graduée sur la figure construite***

À partir du quadrilatère convexe construit, on obtient une décomposition de ce quadrilatère en deux triangles (voir la figure 3). Il s'agit alors de calculer l'aire de chacun des deux triangles. Pour ce faire, on trace une hauteur de chacun de ces deux triangles et on mesure leur longueur à l'aide d'une règle graduée. Dans le cas du quadrilatère convexe, on trace la hauteur h_1 du triangle ABD et h_2 du triangle BCD (Figure 4). On effectue la somme des aires des deux triangles afin d'obtenir l'aire du quadrilatère et ainsi conclure sur l'aire du terrain d'Alphonse.

Cette méthode utilise la figure et le mesurage sur celle-ci comme outil technologique pour déterminer l'aire du quadrilatère. Ainsi, elle met essentiellement en jeu le paradigme GI.

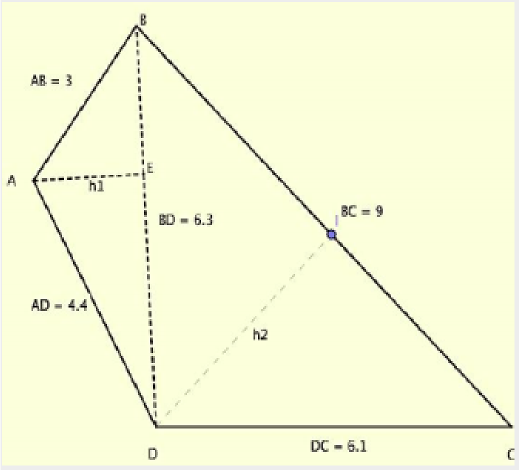


Figure 4.

*Méthode 2. **Calcul de l'aire avec mesure effective d'angles à l'aide d'un rapporteur sur la figure construite***

Cette méthode est une variante de la méthode présentée précédemment. La longueur de chacune des deux hauteurs est déterminée en utilisant les formules trigonométriques. En se plaçant dans le triangle AED rectangle en E par exemple, on mesure à l'aide d'un rapporteur l'angle ADE (Figure 5). On utilise la formule sin (ADE) = h_1/AD afin d'obtenir une longueur de h_1. On procède de la même manière en se plaçant dans le triangle BIC rectangle en I pour obtenir une valeur de la longueur h_2. Par la suite on calcul l'aire de chacun des triangles ABD et BDC afin d'en déduire celle du quadrilatère.

Cette méthode à l'image de la méthode précédente met en jeu le paradigme GI.

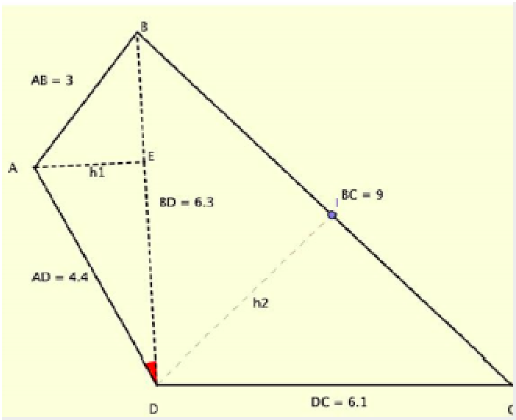


Figure 5.

*Méthode 3. **Usage du théorème de Pythagore***

On pose *DE*= x et *CI*=y (Figure 5). Pour déterminer x, on utilise deux fois le théorème de Pythagore. Une première fois dans le triangle *AED* rectangle en *E*. Une deuxième fois dans le triangle *AEB* rectangle en *E*. On obtient alors deux égalités : $h_1^2 = 19{,}36 - x^2$ *(1)* et $h_1^2 = 9 - (6{,}3 - x)^2$ *(2)*. On en déduit alors : $19{,}36 - x^2 = 9 - (6{,}3 - x)^2$. La résolution de cette équation permet d'obtenir la valeur de x qui est égale à 50,5/12,6 cm. On remplaçant x par 50,5/12,6 dans l'une des deux égalités (1) et (2) on obtient la valeur de h_1 qui permet par la suite de calculer la valeur de l'aire du triangle *ABD*. De la même manière, en déterminant la valeur de y, en déduit celle de h_2 et ainsi que celle de l'aire du triangle *BDC*. L'aire du quadrilatère cherchée est alors déduite de la même manière que dans les deux premières méthodes présentées ci-dessous. Cette méthode utilise le théorème de Pythagore comme un outil technologique pour déterminer des longueurs qui nécessite cependant de faire des allers retours entre la figure et les calculs. De ce fait, cette méthode met en jeu deux paradigmes GI et GII. Cette méthode peut très vite conduire à des erreurs de calculs et à même à l'abandon car les calculs peuvent être lourd à mener (notamment chez des étudiants M1).

Méthode 4. Travail sur une figure générique pour découvrir une formule

Cette méthode consiste à se placer dans l'un des deux triangles mis en évidence à l'issue de la décomposition du quadrilatère (convexe ou non). Par exemple dans la figure 5, on se place dans le triangle *ABD* et on note *a*, *b* et *c* ses dimensions. On peut appliquer la formule d'Héron[142] dans ce triangle pour calculer son aire et de même pour le triangle BDC. On en déduit par la suite l'aire du quadrilatère cherchée. Cette méthode utilise la formule d'Héron comme outil à la fois théorique mais technologique pour déterminer et justifier l'aire du quadrilatère cherchée. Ainsi, le travail sur la figure n'est pas essentiel et devient heuristique par rapport aux trois autres méthodes. Cette méthode met alors en jeu le paradigme GII. Des variantes de cette méthode sont possibles, si les étudiants cherchent eux-mêmes une formule générale. Dans ce cas, le travail suppose un travail algébrique important et non évident.

3 La mise en œuvre de la tâche en classe

Nous avons proposé la tâche « le terrain d'Alphonse » à des étudiants de première année de master MEEF 1er degré. La mise en œuvre de cette tâche a été conduite selon trois phases ayant des objectifs spécifiques. Chacune des phases s'achève par une mise en commun.

Dans la première phase, nous avons distribué l'énoncé de la tâche sans l'information complémentaire concernant la longueur de l'une des diagonales du terrain et nous avons laissé 10 minutes aux étudiants pour chercher une solution. Il s'agit ici de conduire les étudiants à constater qu'il manque des données (i.e la longueur d'une diagonale) pour pouvoir résoudre la tâche. A l'issue de cette phase, nous avons ramassé les productions des étudiants avant de procéder à une mise en commun. Dans la deuxième phase, nous avons proposé l'information complémentaire sur la diagonale et nous avons laissé 10 minutes pour chercher une solution. L'objectif de cette phase est de mettre en évidence les différentes formes possibles du terrain. Après les 10 minutes du temps de recherche, nous avons ramassé les productions d'étudiants et nous avons par la suite mené une mise en commun. Cette mise en commun permet de rendre compte des deux formes possibles du terrain d'Alphonse et de discuter les méthodes utilisées par les étudiants. Pour la dernière phase, les étudiants ont mené un travail de calcul d'aire du terrain en se plaçant tout d'abord dans le cas où le terrain avait la forme d'un quadrilatère convexe puis une forme non convexe. La mise en commun à l'issue du temps de recherche (soit environ 1h), permet de répertorier (au tableau) toutes les méthodes utilisées par les étudiants afin de les discuter. Il s'agit plus particulièrement, de confronter les résultats obtenus en fonction des méthodes choisies et en fonction de la forme du terrain choisie pour mener les calculs.

Nous proposons un résumé du déroulement de cette mise en œuvre dans le tableau suivant en précisant l'objectif et la durée de chacune des trois phases, le matériel autorisé et les modalités de travail des étudiants :

	Phase 1	**Phase 2**	**Phase 3**
Objectif	Mise en évidence de la donnée manquante	Mise en évidence des différentes formes du terrain et des méthodes	Trouver l'aire en fonction de la forme du terrain retenu et discussion des résultats obtenus
Tâche	Enoncé sans information	Enoncé avec aide	Enoncé avec aide
Modalité de travail des étudiants	Individuel	Individuel	Individuel

142 Formule d'Héron : S= $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec $p = \frac{a+b+c}{2}$

Matériel	Outils géométriques et calculatrice	Outils géométriques et calculatrice	Outils géométriques et calculatrice
Durée proposée pour la recherche d'une solution	10 min	10 min	45 min - 1h

Tableau 2. Déroulement de la mise en œuvre de la tâche dans une classe de M1

IV - MÉTHODOLOGIE

1 Recueil de données

Pour mener notre recherche concernant le travail géométrique réellement produit par les étudiants de master MEEF 1degré, nous avons travaillé avec deux groupes de M1 (soit 45 étudiants).

Nous avons opté pour une technique de recueil de données basée sur les productions écrites des étudiants (45 productions pour chacune des phases, soit 135 productions). Le recueil de données est également basé sur les dialogues produits lors des mises en commun. Ces dialogues ont été enregistrés et transcrits intégralement.

2 Analyse des productions des étudiants

L'analyse des productions écrites des étudiants a été effectuée suivant une grille d'analyse que nous avons construit. L'analyse est centrée sur le travail effectué sur la (ou les) figure (s) construite (s) (Tableau 3) et sur le discours portant sur l'aire et la mesure de l'aire (Tableau 4).

Figure								
Représentation de la figure		Nombre de figures tracées		Type de figure tracée		Travail sur la figure tracée		
A main levée	Avec des instruments (règle et compas)	Une	Plusieurs	Quelconque	Particulière	Décom-position	Tracé de la hauteur et son mesurage	Tracé d'une dia-gonale

Tableau 3. Grille d'analyse des productions des étudiants du point de vue de la figure

Discours					
Portant sur l'aire		Portant sur le mesurage et la mesure de l'aire			
Sans texte	Avec texte	Dissection (décomposition de la figure en sous figures)	Calcul d'aire avec les formules connues	Usage du théorème de Pythagore	Mesure et l'approximation des longueurs

Tableau 4. Grille d'analyse de productions écrites des étudiants du point de vue du discours

L'analyse des enregistrements des mises en commun prend appuis sur :

- l'identification ou non (par les étudiants) de la donnée manquante pour fixer la figure ;
- la prise en compte (par les étudiants) de l'échelle pour la construction de la figure et le calcul d'aire ;
- la place de la mesure et de l'approximation dans le travail géométrique des étudiants ;
- l'usage ou non de théorèmes en acte formulés par les étudiants tel que : « deux figures ayant le même périmètre ont la même aire »

Ces analyses de résultats permettent de mettre en évidence la circulation du travail géométrique produit par les étudiants au sein des différents plans verticaux (Figure 2) de l'ETM et le paradigme géométrique qui guide ce travail.

V - RÉSULTATS ET DISCUSSION

Dans cette communication, nous avons choisi de présenter uniquement les résultats de la première phase de l'expérimentation. Rappelons que dans la première phase, l'énoncé de la tâche a été proposé aux étudiants sans l'information complémentaire (une diagonale mesure 630 m). Contrairement aux attentes initiales, cette phase a suivi un déroulement inattendu du fait que la quasi-totalité des étudiants n'a pas relevé la nécessité d'obtenir des conditions supplémentaires pour fixer la forme du quadrilatère. En effet, les étudiants se sont engagé dans la recherche de l'aire du terrain en ajoutant spontanément certaines conditions supplémentaires : le quadrilatère était nécessairement particulier (condition lié au type de contrat didactique propre à l'enseignement de la géométrie en France ?) ou que tous les quadrilatères avaient la même aire puisqu'ils avaient le même périmètre et il était donc possible de raisonner sur une figure particulière. Pour illustrer nos propos, nous présentons ci-dessous les productions de quatre étudiants : Ivana, Francis, Katia et Séverine.

Production d'Ivana

L'étudiante construit un quadrilatère convexe en choisissant une échelle (identique à celle du Tableau 1) et à l'aide d'une règle graduée et d'un compas (outils de la dimension instrumentale). La figure obtenue est un quadrilatère (nommé ABCD) ayant un angle droit (en D) (Figure 6). Toutefois, dans l'énoncé de la tâche aucune indication n'est donnée sur les angles du quadrilatère. Ce quadrilatère a été conçu de telle manière à avoir un angle droit :

> Ivana : En fait j'ai construit la figure de manière à avoir un angle droit, et du coup j'ai calculé l'aire du premier triangle en faisant ~~euh.~~

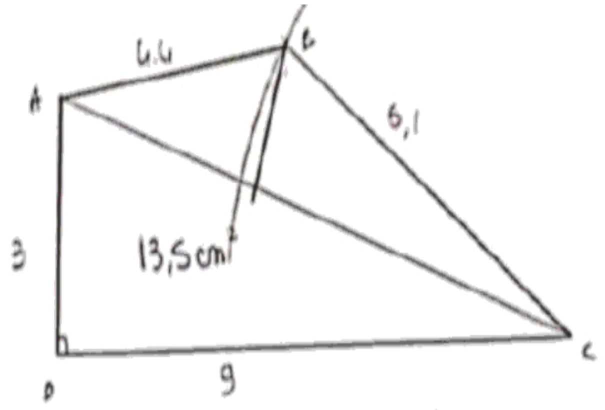
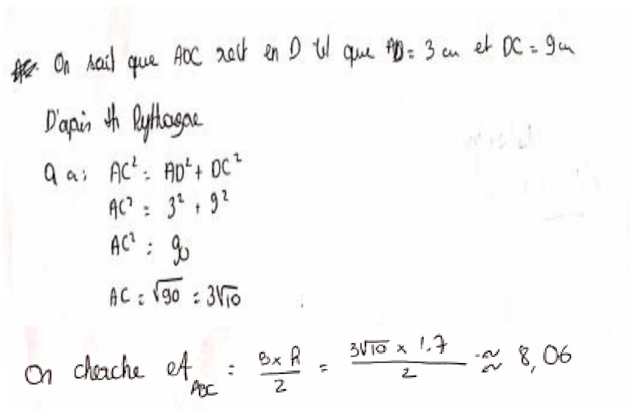


Figure 6. La figure tracée par Ivana



Figue 7. Production écrite d'Ivana

L'étudiante décompose le quadrilatère suivant une diagonale (ici [AC]) de façon à obtenir deux triangles ABC (quelconque) et ADC (rectangle en D) (dimension sémiotique). Elle calcule l'aire du triangle ADC rectangle en D en utilisant la formule de calcul d'aire d'un triangle (outil de la dimension instrumentale). Elle obtient 13,5 cm^2 qu'elle convertit immédiatement en m^2 (soit 135000 m^2). Ensuite, elle applique le théorème de Pythagore (outil de la dimension discursive) dans ce même triangle afin d'en déduire la longueur du côté [AC] (Figure 7). Elle calcule enfin l'aire du triangle ABC en mesurant à l'aide d'une règle graduée (outil de la dimension instrumentale) la longueur de la hauteur issue de B relativement au côté [AC]. Elle obtient alors une valeur approchée de l'aire d'environ 8,06 cm^2 (Figure 7).

Lors de la présentation orale de sa méthode, Ivana explique qu'elle n'a pas eu le temps d'achever son raisonnement :

Professeur : Donc tu as trouvé l'aire du triangle rectangle ici ADC.

Ivana : Oui. Pour le deuxième triangle, J'ai calculé avec Pythagore pour avoir l'hypoténuse.

Professeur : Ivana comment as-tu trouvé la longueur AC ?

Ivana : J'ai fait Pythagore, parce que ADC est rectangle en D. Après je n'ai pas eu le temps de finir.

Le professeur questionne alors l'ensemble de la classe sur la légitimité de la méthode d'Ivana. Une étudiante affirme qu'Ivana a considéré que le triangle ADC était rectangle en D alors qu'il n'y a aucune indication dans l'énoncé de la tâche. Le professeur poursuit le dialogue en se basant sur les différents quadrilatères produits par chacun des étudiants. Ce dialogue a permis de mettre évidence l'usage par Ivana d'un théorème en acte (« deux figures ayant le même périmètre ont également la même aire ») pour élaborer le travail mathématique :

Professeur: Quand je regarde les différents quadrilatères que vous avez dessinés, je ne pense pas que vous ayez dessiné la même chose. Chacun d'entre vous a dessiné un quadrilatère différent des autres.

Ivana : Peu importe comment il est le terrain, l'aire c'est la même car on a les mêmes mesures.

Professeur : Êtes-vous d'accord ?

Étudiants : Non

Professeur : Marie pourquoi tu n'es pas d'accord ?

Marie : Parce que, par exemple ce que l'on a ici on peut calculer le périmètre, par exemple on peut avoir un carré et un rectangle avec le même périmètre mais avec des aires qui diffèrent.

Professeur : Donc, deux figures ayant le même périmètre n'ont pas obligatoirement la même aire. Vous vous rappelez, on l'a vu au premier semestre. Donc Marie contredit ce que tu viens de dire Ivana.

En résumé, le travail mathématique produit par Ivana a été initié dans le plan [Sem-Ins] pour construire un quadrilatère *ABCD* au moyen d'outils de construction géométrique et avec l'hypothèse que l'un des angles du quadrilatère était un angle droit. Cette inclusion d'une propriété supplémentaire est courante chez les étudiants qui ont choisi d'utiliser des outils de construction. Le travail mathématique est ensuite placé dans le plan [Sem-Dis] pour calculer l'aire du triangle ADC et pour déterminer la longueur [AC] à l'aide du théorème de Pythagore (dimension discursive). Enfin, Ivana utilise la règle graduée pour mesurer une longueur (la hauteur du triangle ABC issue de B) et elle applique la formule de l'aire d'un triangle pour déterminer l'aire du triangle ABC. Le travail mathématique se termine donc dans le plan [Ins-Dis] avec une utilisation non spécifiée de la mesure. Cet appui sur la mesure et l'usage des outils de construction géométrique pour valider des propriétés nous indiquent que le travail mathématique semble être guidé par le paradigme GI. Cependant, ce travail n'est pas conforme aux « règles mathématiques » puisque l'étudiante n'a aucun contrôle sur les résultats obtenus. Quand le professeur l'interroge sur la légitimité de son travail, elle répond que « tous les quadrilatères ont la même aire parce qu'ils ont le même périmètre » et c'est pourquoi il est possible de raisonner sur une figure particulière. Ce théorème en acte conduit au fait que son travail mathématique n'est pas valide. Avec ce travail, nous sommes confrontés à un problème d'interprétation assez commun, qui concerne l'identification du paradigme exact dans lequel l'étudiant travaille. Les étudiants, en raison du contrat didactique très fort à ce niveau, évitent généralement la mesure et pensent donc qu'ils travaillent dans le paradigme GII. Mais, en fait et en partie pour éviter les obstacles liés à la difficulté de construire une preuve basée uniquement sur les propriétés, ils entrent subrepticement dans le paradigme de GI soit, comme Ivana, en utilisant des mesures non supposées, soit comme nous le verrons ci-dessous en utilisant des données basées uniquement sur la perception.

Production de Francis

En choisissant une échelle, Francis construit à l'aide d'une règle graduée et d'un compas un quadrilatère convexe de telle sorte que cela soit un trapèze (Figure 7). Rappelons que dans l'énoncé aucune indication sur la forme du quadrilatère n'a été signalée.

Pour construire le trapèze, il procède à des réajustements de la construction à l'aide des instruments de construction géométrique (outils technologiques) et exerce un contrôle visuel :

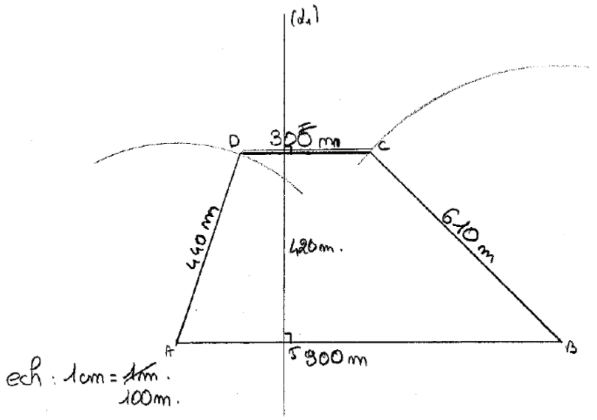


Figure 8. Construction de Francis

Professeur:	Est-ce que vous avez une idée de ce que ça pourrait être ? Est-ce que cela peut être un carré ?
Étudiants :	Non.
Professeur :	Un rectangle, Un losange ?
Étudiants :	Non.
Professeur :	Tout cela vous savez calculer les aires. Ensuite, un trapèze ?
Boris :	Cela pourrait mais.
Florine :	Oui mais avec les mesures cela ne coïncide pas.
Francis :	**Si cela fait un trapèze.**
Professeur :	Cela fait un trapèze ?
Francis :	**Oui, j'ai pris la grande base 900 m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle et puis j'ai tracé une perpendiculaire à la grande base.**

Francis justifie ensuite à l'aide d'une propriété géométrique que le quadrilatère obtenu à l'issue de la construction est un trapèze (Figure 9).

Francis : **Cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elle donc cela fait un trapèze.**

Pour terminer, Francis mesure à l'aide de la règle graduée la longueur de l'une des hauteurs du trapèze (ici [IJ]) et applique la formule de calcul d'aire d'un trapèze (Figure 9) pour obtenir l'aire recherchée.

Pour mesure [IJ] = 420m. I ∈ [DC] et J ∈ [AB].

$$\mathcal{A} = \frac{300+900}{2} \times 420$$

$$\mathcal{A} = \frac{1200}{2} \times 420$$

$$\mathcal{A} = 600 \times 420.$$

Figure 9. Calcul de l'aire du terrain

Le travail mathématique produit par Francis est initié dans le plan [Sem-Ins] pour construire à l'aide des outils de construction géométrique (outil technologique) un quadrilatère convexe ayant la forme d'un trapèze. Cette construction est par la suite justifiée à l'aide de la propriété : « deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles » (outil théorique). La formule de calcul d'aire d'un trapèze (outil technologique) est appliquée pour produire le résultat (ici l'aire du terrain). Ainsi le travail mathématique s'achève dans le plan [Ins-Dis]. Ce travail mathématique repose sur des raisonnements considérés comme valides dans le paradigme GI.

Production de Katia

Katia commence par construire deux figures à main levée. Elle propose une transformation de la première figure à la seconde de telle sorte que l'aire de la figure soit plus ou moins invariante. À partir des longueurs initiales du terrain (900 m, 440 m, 610 m, 300 m), elle effectue la moyenne arithmétique des longueurs des côtés opposés du quadrilatère (Figure 10) pour obtenir les mesures des longueurs des côtés de la deuxième figure, qui est un rectangle

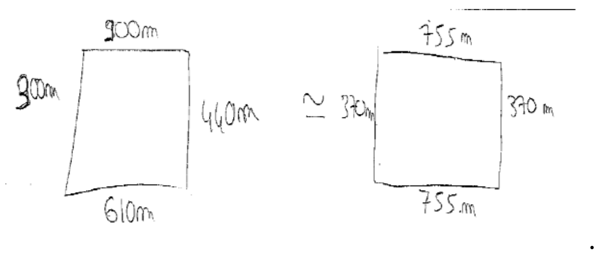


Figure 10.

Pour déterminer l'aire du quadrilatère, elle applique la formule de calcul d'aire d'un rectangle (Figure 11). Le travail géométrique produit par Katia se situe dans le plan [Sem- Ins]. En effet, ce travail est orienté vers l'utilisation d'une formule de calcul d'aire bien connue en transformant la figure géométrique initiale. Ce travail est réalisé sans aucun contrôle à l'aide d'outils matériels (outils géométriques) et sans aucun contrôle par des outils théoriques (propriétés). Par conséquent, si ce travail géométrique peut être considéré comme partiellement valable en GI, il n'est valide dans aucun des paradigmes.

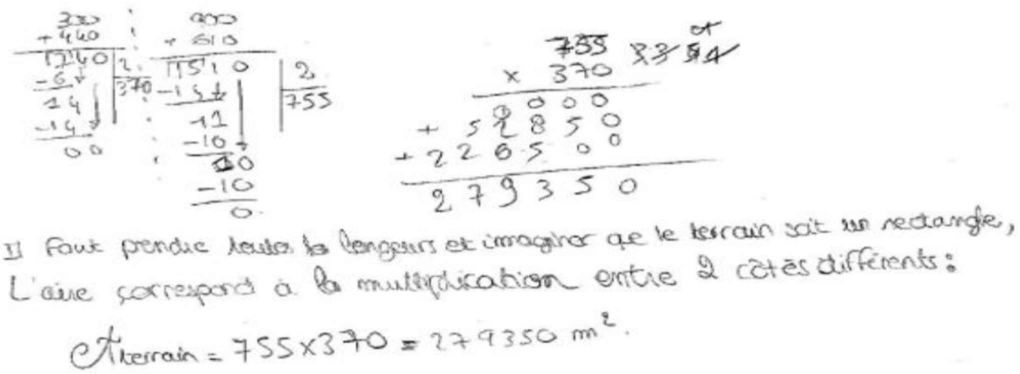


Figure 11.

Nous signalons que le travail géométrique de Katia est l'un des plus fréquents chez les étudiants qui ne voulaient pas utiliser d'instruments de construction. En effet, ces étudiants s'interdisent le mesurage sur la figure et cherchent à se situer en GII. Néanmoins, ils s'accordent une grande « liberté sémiotique » pour obtenir des formules ou appliquer des formules de calcul d'aire connues.

Production de Séverine

Dans son travail, Séverine commence par tracer à main levée un quadrilatère convexe quelconque. Elle produit une dissection à main levée de ce quadrilatère en un trapèze et deux triangles rectangles (Figure 12). Elle explique ainsi sa procédure :

Séverine : Je suis parti d'un quadrilatère général, puis j'ai dessiné deux triangles à angle droit (à l'intérieur) pour compléter le quadrilatère.

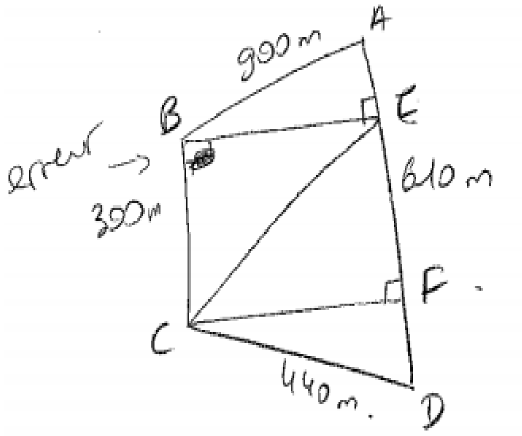


Figure 12.

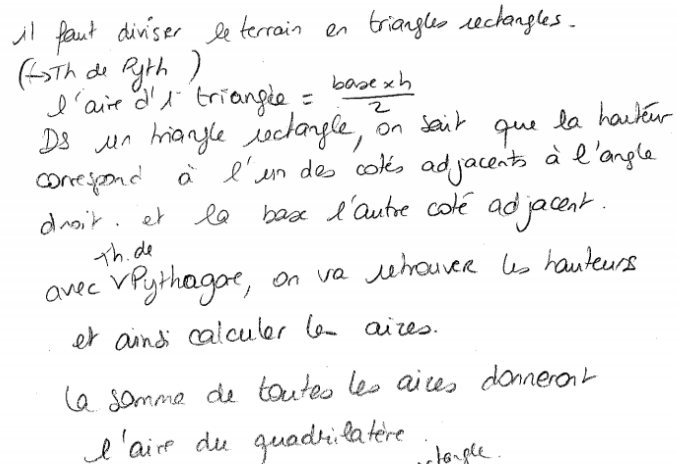

il faut diviser le terrain en triangles rectangles.
(→Th de Pyth)
l'aire d'1 triangle = $\frac{\text{base} \times h}{2}$
Ds un triangle rectangle, on sait que la hauteur correspond à l'un des cotés adjacents à l'angle droit. et la base l'autre coté adjacent.
avec Th. de Pythagore, on va retrouver les hauteurs et ainsi calculer les aires.
La somme de toutes les aires donneront l'aire du quadrilatère
..tangle.

Figure 13.

Puis, sur sa feuille, Séverine explique qu'il serait nécessaire de trouver les hauteurs des triangles et aussi d'utiliser le théorème de Pythagore pour faire les calculs (Figure 13). Elle ne les exécute pas. Cependant, à ce stade, cela peut être considéré comme normal parce qu'il lui manque une donnée, mais elle ne l'a pas demandée.

Le travail géométrique produit par Séverine est donc bloqué dans le plan [Sem-Dis]. Le professeur intervient en essayant de motiver la nécessité d'avoir la valeur de l'une des diagonales du terrain.

Professeur : Pouvez-vous commenter ce que Séverine suggère, avez-vous l'information nécessaire pour faire le calcul ?

Chloé : Il n'y a pas d'indications de mesure, nous ne savons pas où la hauteur coupe (le côté) après cela donc nous n'avons qu'une dimension sur chaque triangle.

Les étudiants demandent par la suite des données supplémentaires mais pas celle de la longueur de la diagonale. Mais un étudiant (une nouvelle fois Francis) intervient pour affirmer qu'il n'était pas nécessaire d'avoir une donnée supplémentaire car l'usage de l'échelle conduit à prélever les mesures nécessaires directement sur le dessin :

Francis : Oui, mais comme nous l'avons fait avec une échelle respectée, nous pouvons mesurer.

Par conséquent, l'intervention de Francis ramène le travail géométrique dans le paradigme GI assumée alors que Séverine et Chloé s'interdisaient de s'engager dans ce paradigme.

VI - CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons pu identifier les formes de travail géométrique des étudiants de première année de master confrontés à une tâche de géométrie liée à la mesure de l'aire d'un terrain. Les résultats que nous avons obtenus montrent, d'une part, des blocages (refus de l'usage des outils de mesure) chez les étudiants qui tentent de répondre aux attentes institutionnelles (un travail géométrique en GII). D'autre part, les résultats montrent des « rebonds » chez les étudiants qui assument parfaitement l'usage des instruments géométriques ou qui s'accordent une grande liberté sémiotique pour obtenir des formules ou appliquer des formules de calcul d'aire connues. Le travail ainsi produit est profondément incomplet parce qu'il est souvent confiné à un seul plan ou à une dimension de l'ETM.

De plus, et pour nous, c'est le plus inquiétant du point de vue de la formation des enseignants, ces étudiants disposent de très peu d'outils de contrôle autres que perceptifs et matériels sur leurs productions. Lorsqu'ils en utilisent d'autres, ils sont généralement basés sur des « théorèmes en actes » faux qui rendent le travail mathématique non valable d'un point de vue épistémologique. Il faut cependant noter que la tâche est déstabilisante car elle ne suit pas le contrat didactique habituel pratiqué à ce niveau de classe, qui suppose que toutes les données soient incluses dans l'énoncé de la tâche. De plus, les étudiants ont inclus dans ce contrat l'idée que toutes les formes géométriques qu'on leur demande d'étudier sont nécessairement des formes particulières. De leur propre initiative, ils ajoutent une propriété spécifique qui leur permet de ne pas être bloqués dans une dimension ou un plan de l'ETM. Cependant, leur travail ne peut être considéré comme valide.

Partant de ce constat, nous supposons que l'intégration des logiciels de géométrie dynamique dans ce travail géométrique pourrait être intéressante, notamment pour aider les étudiants à questionner les méthodes de construction et de validation. Nous souhaitons développer à l'avenir des tâches géométriques qui encouragent l'utilisation de logiciels dans la perspective d'une géométrie favorisant le travail de modélisation et d'approximation contrôlée. De manière générale, il s'agit pour nous de développer chez les étudiants un travail géométrique conforme aux règles du paradigme (voir annexe 1) mis en jeu et en même temps atténuer les effets du contrat didactique notamment ceux liés aux attentes du concours de professeurs.

VII - BIBLIOGRAPHIE

Gibel, P. & Henry, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des sciences de l'éducation*, **43 (1)**, 37-84.

Gomez-Chacon, I. & Kuzniak, A. (2011). Les Espaces de Travail Géométrique de futurs professeurs en contexte de connaissances technologiques et professionnelles, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **16**, 187-216

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Les paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **11**, 175-193.

Kuhn,T-S. (1977) En repensant aux paradigmes, In La tension essentielle, Odile Jacob, Paris.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail mathématique et ses genèses, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **16**, 19-24.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2014). Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. *Actes du 41e Colloque COPIRELEM, juin 2014, Mont de Marsan*.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2015). Using the Geometric Working Spaces in order to plan the teaching of geometry. In K. Krainer and N.Vondrova (Eds.), Proceedings of CERME 9 (pp. 543-549). Prague, Czech Republic: Charles University.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics education*, **48 (6)**, 861-874

Kuzniak, A. & Raucher, J-C. (2002). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *Actes du 29e Colloque COPIRELEM* (pp 271-290). La Roche sur Yon : Université de Nantes.

Kuzniak, A. & Raucher, J-C. (2003). Formation des PE1 et anamnèse géométrique. *Actes du 30e Colloque COPIRELEM* (pp 231-248). Avignon : Université d'Avignon.

Tanguay, D., & Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, 88, 5-24.

VIII - ANNEXE 1

Paradigmes géométriques prenant en compte l'aire et mesure d'aire

Paradigmes	Aire	Mesure de l'aire
GI/A1	Travail de décomposition et recomposition méréologique basée sur des découpages, des ajustements et des puzzles. Exemple du problème d'Ozanam où deux figures paraissent équidécomposables et elles n'ont pourtant pas la même mesure d'aire. Aire comme formule simple ou somme de formules simples associées aux décompositions.	Usage de la mesure avec utilisation des outils. Evolution graduelle privilégiant les calculs basés sur des propriétés ou formules, provenant de GII. Travail dans D ou Q restreint à des fractions relativement élémentaires.
GII/A2	Tradition euclidienne basée sur la congruence des triangles qui assure de fait une égalité des aires. Usages de notions communes précisant la nature des relations des parties ou tout. Démonstration basée sur des décompositions méréologiques par complément (parallélogrammes de même base) ou sur des congruences de figures (Pythagore).	La mesure directe sur la figure est interdite et il est important de parvenir aux conditions minimales permettant d'éviter au maximum les calculs. Usage d'une « géométrie algébrique élémentaire », rôle des théorèmes comme Pythagore ou Thales, trigonométrie et formule type Héron obtenu par du calcul algébrique (voir analyse a priori).
GIII/A3	Dans le traité de géométrie d'Hilbert une part importante est accordée à ce point avec l'introduction de relations d'équivalence comme l'équidécomposabilité, l'equal content, equalcomplement qui ne sont pas forcément équivalente (cela dépend du corps de base). Théorie élémentaire de la mesure de l'aire qui permet notamment de préciser la différence entre les propriétés de l'aire et de la mesure.	Deux figures équidécomposable si elles ont la même mesure d'aire. La réciproque de ce théorème est fausse dans l'espace (Dehn) La mesure est définie de manière générale et les valeurs sont prises dans *R* ce qui donne lieu à des raisonnements utilisant par exemple l'irrationalité de certains nombre. Préparation à la mesure liée aux infinitésimaux qui sera basé sur les mêmes propriétés.