COMMUNICATION C14

QUE NOUS APPRENNENT LES PROCEDURES DES ELEVES LORS DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES UTILISANT LA REGLE A L'ECOLE ?

Jacques DOUAIRE
Equipe ERMEL (Ifé)
jacques.douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN
Equipe ERMEL (Ifé)
CEREP- Université de Reims
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé

L'équipe ERMEL conçoit, expérimente, et produit des ingénieries didactiques (Artigue, 2002) sur l'ensemble de l'enseignement des mathématiques à l'école. En géométrie l'analyse des procédures de résolution des élèves dans des problèmes conduit à questionner le rôle de la manipulation, de la représentation et de la communication. En prenant l'artefact « règle » comme point d'entrée, nous proposerons d'étudier une évolution des tracés instrumentés des élèves à différents niveaux de l'école élémentaire. En particulier quelles sont les composantes de l'activité géométrique tant dans la production de tracés ou leurs contrôles par l'élève, que dans la maîtrise de l'outil ou l'évolution de son usage ?

PRÉSENTATION DE LA COMMUNICATION

Les observations, analyses et questions sur les tracés à la règle, abordées dans cette communication, sont issues des expérimentations de la recherche actuelle de l'équipe ERMEL (IFé-ENS-Lyon) sur les apprentissages spatiaux et les apprentissages géométriques de la Grande Section au CE1. Comme pour les autres recherches de l'équipe ERMEL, celle-ci présente deux buts. D'une part nous avons à expliciter les problématiques d'enseignement en prenant en compte les pratiques, besoins et difficultés des enseignants en identifiant : les composantes des apprentissages, les connaissances (procédurales ou déclaratives) dont les élèves disposent initialement, les problèmes ou activités permettant leur évolution, ainsi que les obstacles auxquels ils peuvent être confrontés. D'autre part, nous avons à produire des ressources pour les enseignants et les formateurs, leur proposant une vision cohérente des apprentissages dans ce domaine et en particulier de la place de la résolution de problèmes sur plusieurs années.

Or les enquêtes que nous avons menées auprès des enseignants nous ont montré la nécessité de leur fournir des outils d'analyse des connaissances des élèves, pour leur permettre d'identifier dans les gestes ou les formulations des élèves, les connaissances déjà présentes et d'envisager ainsi leur évolution. Toutefois dans le domaine des apprentissages spatiaux et géométriques les analyses des connaissances des élèves et les justifications de progressions issues de travaux de recherche dont peuvent disposer les enseignants sont plus réduites que dans le domaine numérique.

Cette description des observables, en particulier des gestes avec les instruments, et des productions lors des tracés constitue, selon nous, une première exigence en vue de la modification des pratiques, afin que les catégories « manipuler, représenter, communiquer » ne se réduisent pas simplement à des préalables, voire des prétextes à la transmission d'un vocabulaire géométrique, répété plusieurs années de suite et parfois déconnecté des potentialités mathématiques des élèves.

La finalité de notre recherche est de produire une ressource qui permette une transformation des pratiques d'enseignement cohérente avec les choix constants de l'équipe ERMEL : le développement des apprentissages mathématiques de l'élève par la résolution de problèmes prenant en compte ses

connaissances réelles dans les situations proposées. L'identification précise des connaissances que les élèves peuvent réellement mettre en œuvre étant indissociable de la proposition d'activités pour les développer.

Cette communication se situe dans la continuité des précédentes communications proposées à la COPIRELEM, elle aborde l'analyse des tracés issue de nos premières expérimentations puis les nouvelles hypothèses de recherche ainsi que des objectifs d'apprentissage possibles[141].

I - COMPOSANTES DE LA NOTION

Quelles sont les connaissances qui, au CP ou au CE1 peuvent contribuer à des acquisitions à plus long terme, c'est à dire qui ne correspondent pas seulement à la réussite de tâches ponctuelles lorsque l'on dit aux élèves ce qu'ils doivent faire « trace, plie… » mais qui deviennent des procédures fiables pour la résolution de problèmes spatiaux ou géométriques ? En d'autres termes quelles sont, dans le domaine du tracé de traits droits les connaissances susceptibles d'être développées et comment les activités menées au CP ou au CE1 peuvent-elles contribuer à ces acquisitions ?

Pour répondre à ces questions il est nécessaire d'analyser les composantes du savoir mathématique, les significations spatiales associées ainsi que connaissances déjà disponibles ou les obstacles présents chez les élèves de CP et de CE1. En effet les différents aspects des apprentissages liés aux tracés ou à la notion de trait droit permettent d'une part de représenter des objets du monde réel et, d'autre part, constituent une composante d'un savoir géométrique en constitution qui possède des propriétés que l'élève découvrira progressivement au cours de sa scolarité.

1 Aspects mathématiques « théoriques » de la notion

D'un point de vue théorique, une droite peut être caractérisée :

- comme intersection de plans ;
- comme courbe de rayon de courbure infini ;
- comme « la ligne la plus courte entre deux points » ;
- comme solution d'un problème de distance (par exemple une médiatrice) ;
- comme l'ensemble des points invariants d'une transformation (axe de symétrie dans le plan, axe rotation dans l'espace) ;
- comme l'ensemble des points alignés avec deux points.

2 Aspects « spatiaux » de la notion

La notion peut être appréhendée par l'élève du primaire à travers différentes significations en appui sur la perception ou l'expérience :

- un objet matériel : un fil tendu, un objet ou un bord d'objet rectiligne, un rayon lumineux, un pli de feuille… voire des objets « composés » (un mètre de menuisier que l'on déplie, des baguettes mises bout à bout…) ;
- la frontière entre :
  - deux régions planes de l'espace
  - deux régions du plan, comme des demi-plans ;
- la trajectoire d'un objet ponctuel animé d'un mouvement rectiligne (bille,…) ;
- le tracé de traits rectilignes dans l'espace graphique avec la règle, avec un logiciel de géométrie.

Nous nous appuyons sur nos recherches en cycle 3 pour faire de nouvelles hypothèses de recherche.

[141] Nous les avons proposés dans les quatre derniers colloques de la COPIRELEM, pour les lecteurs qui souhaiteraient avec des comptes rendus plus détaillés de ces expérimentations.

II - ÉTAPES DE LA RECHERCHE

1 Nos choix pour les CE2 et le CM

Dans une recherche précédente sur les apprentissages géométriques et la résolution de problèmes du CE2 au CM2 nous avions cherché à identifier quelles étaient les connaissances disponibles. Nous avions ainsi repéré que certains élèves au début du CE2 étaient surpris de constater qu'un trait pouvait être tracé entre deux points éloignés sur une feuille de format A3 ; pour eux le trait était ce qu'ils pouvaient tracer avec un double décimètre, et l'expérience du prolongement leur était étrangère.

Au CE2, nous nous étions appuyés sur certaines significations citées précédemment pour enrichir les représentations des élèves et développer les tracés : par exemple, un trait tracé sur une feuille peut anticiper un pli à produire (symétrie) ou être prolongé pour représenter une visée réalisée dans l'espace. Nous avions aussi vu que l'usage de la règle pour tracer des traits droits était, en général, appréhendée par les élèves, la qualité technique du tracé pouvant être améliorée.

Dans cette recherche nous avions produit des problèmes pour lesquels ces aspects de la droite étaient des solutions optimales comme dans le cas de « œil qui voit tout ». Les élèves devaient dire si « œilquivoittout » peut voir « le personnage » ou pas un paravent étant placé dans le dispositif placé sur une table (figure 1).

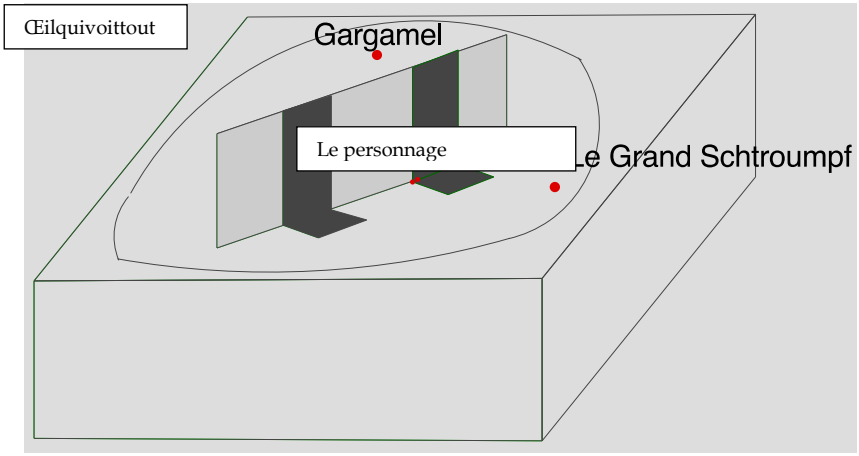

Figure 1. Dispositif matériel dans le méso-espace

Ce travail nous a conduit à émettre des hypothèses au début de notre recherche sur le cycle 2.

2 Une première hypothèse au CP et au CE1

Aussi au début de notre recherche actuelle nous nous sommes interrogés sur les aspects mathématiques de la notion de droite à aborder ainsi que sur la ou les signification(s) spatiale(s) sur laquelle (lesquelles) s'appuyer. Notre hypothèse initiale était de développer des expériences spatiales dans le méso-espace.

Nous avons donc envisagé de donner une signification spatiale au trait droit par une approche de la notion d'alignement fondée sur des expériences spatiales centrées sur l'idée de cacher un objet (résolu au moyen de la visée), à partir d'activités vécues dans l'espace de la cour ou du gymnase qui présentent les caractéristiques du méso-espace (en particulier l'élève fait partie du dispositif qu'il peut contrôler du regard). En effet le fait de cacher un objet derrière un autre (ou de se cacher soi-même), à une distance plus ou moins proche de celui-ci, pour qu'il ne soit pas visible de la place d'un observateur constitue une expérience assez partagée par les élèves.

3 Situation PLOT : cacher un objet

Le problème proposé était de placer un plot afin qu'il soit aligné deux par deux avec quatre autre plots dans la cour (consigne : où placer un plot bleu pour que, de sa place, le plot jaune cache le plot orange et que le plot rouge cache le vert cf. photographie ci-dessous). Puis, dans un deuxième temps, un problème analogue était proposé sur papier crayon, modélisant la situation résolue dans la cour, afin de

faire apparaître la ligne droite comme un moyen efficace pour résoudre un problème d'alignement de points. De façon similaire, il s'agissait donc de trouver, sur le papier un point aligné avec deux couples de points, représentant les plots dans la cour, la solution résidant dans l'intersection des deux droites formées par chaque couple de points.

Figure 2. Photographie d'un dispositif d'alignement de plots dans la cour.

En l'occurrence nous pensions ainsi permettre aux élèves de se constituer une expérience spatiale pour donner une signification au recours à des tracés de traits droits. Nous faisions l'hypothèse que des procédures développées dans le méso-espace seraient réinvestissables dans des tracés sur la feuille de papier et faire apparaître un trait droit comme une solution d'un problème d'alignement.

4 Résultats

Dans cette situation alors que, dans la cour, les élèves développaient des procédures spatiales de résolution s'appuyant sur la visée et d'autres gestes, la modélisation par une droite de la visée n'était pas effective dans la résolution sur papier. Certaines procédures dans le méso-espace (visée, utilisation des pas pour aller droit…, appui sur des repères propres à la cour) n'avaient pas de traduction dans le micro espace de la feuille. De plus, des difficultés spécifiques de tracé se posaient sur la feuille de papier, d'une part pour la compréhension de la symbolisation des objets de la cour (les plots vus de dessus représentés par des points), mais surtout pour le tracé à la règle de traits droits ; en effet, beaucoup de productions comportaient des lignes brisées et non des lignes droites, sans que les élèves n'y perçoivent de contradiction.

Deux difficultés principales apparaissaient donc : d'une part des élèves ne comprenaient pas en quoi le tracé sur la feuille représentait une modélisation de la situation vécue auparavant. D'autre part beaucoup d'élèves traçaient des lignes brisées, n'effectuant pas de déplacement correct de la règle pour reporter des traits sans qu'ils n'aient conscience de leur erreur.

Le trait droit ne leur était pas apparu comme solution à des problèmes.

III - NOUVELLES HYPOTHÈSES ET EXPÉRIMENTATIONS

Nous avons donc envisagé de traiter les difficultés repérées sur les tracés de traits droits, indépendamment de la résolution éventuelle sur papier crayon de problèmes d'alignement transposés du méso-espace. Il s'agissait que les élèves puissent découvrir comment prolonger un trait, percevoir qu'une ligne brisée n'est pas solution. Nous voulions aussi préciser quelles étaient les significations spatiales du trait droit dont les élèves disposaient ou qu'ils pouvaient acquérir. Nous distinguions donc deux composantes dans les activités de tracé, relatives à :

- L'« alignement » : la production d'alignements (placer des points ou des objets alignés) ou l'identification d'alignements (dire si trois points ou trois objets sont alignés).
- La « rectitude » portant notamment sur la capacité technique à tracer un trait droit dans différentes tâches et à découvrir les conditions des tracés.

Nous abordons plus spécifiquement ici les questions de rectitude qui concernent la production de traits rectilignes (produire un trait rectiligne, le prolonger) ou le jugement de traits rectilignes (dire si un trait en prolonge un autre) ainsi que la reconnaissance et l'usage des instruments susceptibles d'être utilisés dans ce but.

Afin de mieux connaître les compétences et difficultés des élèves, nous avons expérimenté deux types de problèmes à différents moments du CP ou du CE1.

- D'une part des problèmes où l'élève doit prolonger des traits tracés sur une grande feuille, nécessitant le report d'outils ; dans ce cas le seul tracé d'un trait droit avec un double décimètre ne suffisait pas et Il est alors nécessaire d'effectuer des reports avec la règle pour prolonger un trait jusqu'au bout de la feuille. Au risque de produire des lignes brisées où des traits presque alignés mais décalés les uns par rapport aux autres.
- D'autre part une situation où les élèves ont à joindre cinq points pour tracer une étoile. Celle-ci est réalisée avec un fil de laine sur une planche où des clous en constituent les sommets ; puis les élèves doivent la reproduire sur papier. Le trait droit apparaît ici comme composante d'une figure.

Notre hypothèse est que c'est dans la comparaison des productions entre elles et aussi avec le modèle que les élèves peuvent identifier les différences, les erreurs, en exprimer les causes et donc progresser. Comme pour les autres apprentissages mathématiques le rôle de ces problèmes est de permettre aux connaissances et conceptions des élèves – qu'elles soient compatibles avec les savoirs visés, ou qu'elles constituent des obstacles de différentes nature – d'être explicitées et ainsi traitées, notamment lors de mises en commun.

1 Situation PAPIER PEINT : prolonger des traits

Les versions des situations successives proposées différaient par le contexte : dans un premier temps celui-ci était un papier peint composé de bandes parallèles. Les élèves disposaient d'une amorce de papier peint (à bandes horizontales) dont ils avaient à prolonger les traits frontières des bandes sur une grande feuille. Puis nous avons simplement proposé de prolonger des traits tracés sur une feuille de format A3 ou voisin. Les élèves avaient le choix des instruments afin de les amener à identifier les difficultés et les techniques de tracé. Quelques productions de cette dernière activité au milieu de l'année du CP sont présentées sur les figures 3, 4 et 5.

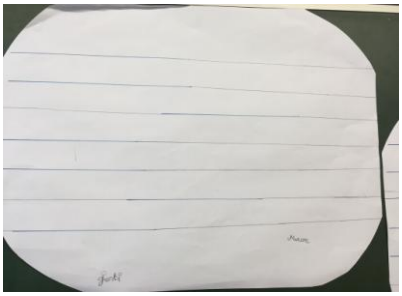

Figure 3. Des tracés à la règle

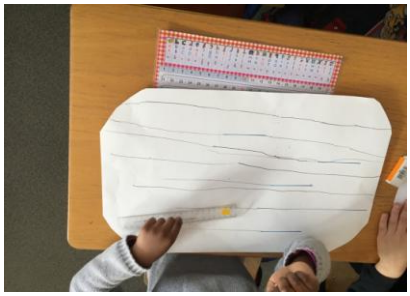

Figure 4. Des tracés sans règle

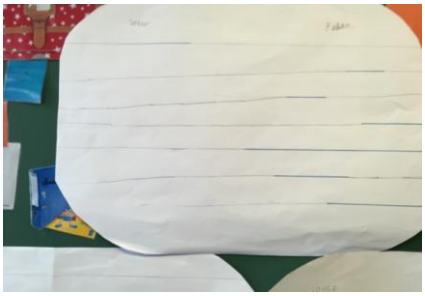

Figure 5. Des tracés « mixtes »

Nous avons observé au CP, avec des élèves qui n'avaient pas encore été confrontés à ce type de problème et quelle que soit la période de l'année, que de rares élèves en restaient à des tracés uniquement à main levée.

2 Situation ÉTOILE : Tracer une figure

Dans la deuxième situation L'ETOILE quelques élèves produisaient aussi des tracés à main levée. Cette difficulté ne relève pas seulement d'une mauvaise analyse ou compréhension de la figure, du but à atteindre mais d'une faible capacité à produire des tracés à la règle, liée à un manque de pratique ou des expériences ayant pu leur donner confiance en leur capacités, (en dehors d'élèves rencontrant des difficultés spécifiques d'ordre moteur ne relevant pas des mathématiques)

Un des éléments caractéristique est que des élèves ayant effectués des tracés à main levée peuvent avoir conscience de ne pas réussir ce qui leur est demandé, même en affirmant qu'ils ont « fait une étoile », ou en disant eux-mêmes qu'ils ne peuvent pas la tracer avec la règle.

D'autres types de productions, dans cette situation, ont apporté un éclairage sur les connaissances des élèves. Par exemple , un élève après avoir tracé – correctement - les trois premiers côtés affirme qu'il s'est trompé car la figure ainsi formée représente un « A » majuscule et qu'il voulait faire une étoile, sans identifier qu'elle en constitue une étape. Un autre, une fois tracés les deux premiers traits issus d'un des sommets, trace les autres en plusieurs morceaux, comme s'il devait s'arrêter à chaque intersection ainsi créée.

Il nous semble important que les séances conduites permettent une explicitation de ces représentations.

IV - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Les trois problèmes proposés ont donc des finalités différentes, même si la première (modéliser une activité vécue dans le méso-espace) n'a pu être atteinte. En effet il s'agit de comprendre que le tracé de traits droits :

- permet de trouver un emplacement (un lieu point ou plot comme intersection de deux droites) pour la situation PLOT,
- de reproduire une figure pour la situation ETOILE,
- doit satisfaire des conditions pour correspondre à un prolongement de traits pour la situation PAPIER PEINT.

Mais dans ces trois situations les points ne constituent pas des éléments définissant le tracé. Dans PLOT l'idée de cacher, ou l'action de viser donne aux objets un autre statut que celui d'un point sur une feuille. Dans ETOILE c'est principalement la conformité à la forme générale qui est le critère de jugement de la figure, avec notamment des caractéristiques de taille, de rectitude des traits. Dans les tracés de PAPIER PEINT (ou des versions suivantes) les points sont absents.

Dans ces problèmes l'apprentissage du tracé comporte plusieurs éléments :

- comprendre le but à atteindre : pourquoi faut-il prolonger le trait ?
- savoir tracer un simple trait avec un instrument ;
- expliquer la technique de report de la règle ;
- être capable d'anticiper la direction d'un trait.

Ces apprentissages nous semblent pouvoir être développés dès le CP. Les situations citées constituent pour les élèves des expériences qui leur permettent de construire une représentation du trait droit et d'acquérir progressivement une habileté technique fondée sur l'analyse de leurs productions et leur contrôle.

V - BIBLIOGRAPHIE

Argaud, H.-C., Barbier, L., Douaire, J., Emprin, F., Gerdil-Margueron, G., Vivier, C. (2016). Ressources pour la résolution de problèmes et les apprentissages géométriques au cycle 2 : une approche spatiale des figures courbes et du cercle. *In actes du XLIIème colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques COPIRELEM : former et se former … quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ?* Besançon les 16, 17 et 18 juin 2015. [CD-ROM]. ARPEME.

Argaud, H.-C., Douaire, J., Emprin, F. (2018). Actions, langages, représentations dans la résolution de problème spatiaux et géométriques de la GS au *CE1 In actes du XLIVème colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques COPIRELEM*. Épinal les 13, 14 et 15 juin 2017. [CD-ROM]. ARPEME.

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui, *Revue Internationale des Sciences de l'éducation,* n°8, 59-72.

Équipe ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*, (Hatier ed).