ATELIER A28

DES ENTIERS AUX DÉCIMAUX : MANIPULER POUR COMPRENDRE LES OPÉRATIONS AU CYCLE 3 ? CAS DE LA MULTIPLICATION

Bernard ANSELMO
Formateur Maths, ESPE DE LYON
bernard.anselmo@univ-lyon1.fr

Sébastien DESSERTINE
Conseiller Pédagogique Départemental en Mathématiques, DSDEN DU RHONE
sebastien.dessertine@ac-lyon.fr

Hélène ZUCCHETTA
Formatrice Maths, ESPE DE LYON
helene.zucchetta@univ-lyon1.fr

Résumé

Le groupe Collège de l'IREM de Lyon a proposé une progression sur la construction des fractions et décimaux avec des situations tout au long du cycle 3 (Anselmo et al., 1999 ; Anselmo & Zucchetta, 2018), conforme aux programmes (MEN 2015).
Les situations reposent sur l'activité de l'élève et laissent une large place à la manipulation de bandes, de surfaces, de graduations avec l'utilisation de règles graduées en fractions… pour donner du sens et aider à la représentation.
Lors de l'atelier, les participants ont eu l'occasion de découvrir certaines des situations et d'interroger les dispositifs proposés. La place de la manipulation dans l'enseignement des opérations a été questionnée : peut-elle donner du sens à l'évolution des significations des opérations au moment du passage des entiers aux nouveaux nombres que sont les fractions et décimaux ? (Brousseau, 1987 ; Roditi, 2001).

I - INTRODUCTION

1 Une nouvelle publication de l'IREM de Lyon sur les fractions et nombres décimaux au cycle 3

A l'annonce de la création du nouveau cycle 3, une équipe de l'IREM de Lyon a repris la réflexion qui avait été menée pour la brochure « *La sixième entre fractions et décimaux* » (IREM de Lyon 1999), et l'a étendue à tout le cycle 3, du CM1 jusqu'à la 6ème. Les situations ont été revisitées et déclinées à différents niveaux de classe, d'autres ont été créées, expérimentées et filmées. Ce travail a abouti à une nouvelle publication à l'intention des équipes d'enseignants inter-degrés qui est parue chez CANOPé (2018). Elle se veut être un support d'échanges pour ces équipes, pour les aider à envisager et conduire des progressions communes à l'articulation école-collège.

Le travail engagé par ce groupe IREM se prolonge dans des actions de Formation Continue dans l'académie de Lyon : stages ou animations à destination des enseignants, création d'un parcours M@gistère[114] (F01-Fractions et décimaux au cycle 3 par Bernard Anselmo).

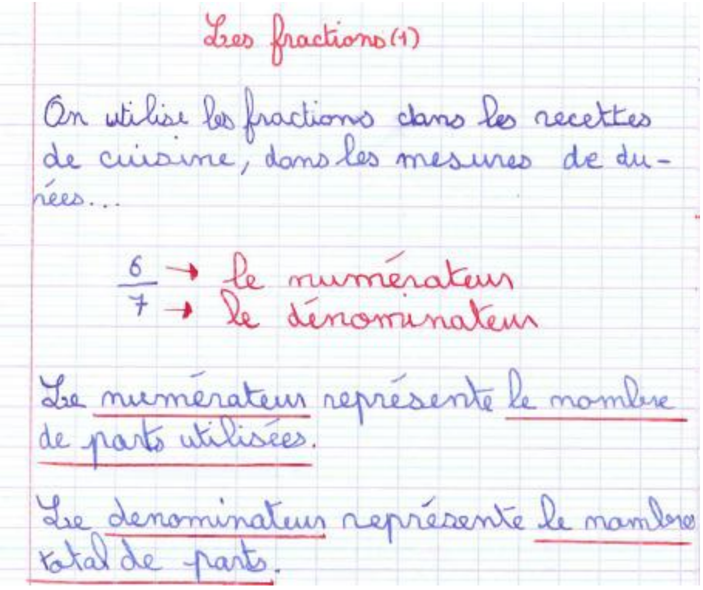
[114] Voir en ligne : https://magistere.education.fr/ac-lyon/course/view.php?id=2161&pageid=22918).

2 Un besoin de formation

Les difficultés rencontrées par nos élèves sont connues et ont fait l'objet de nombreuses études (Brousseau, 1980, 1981; Grisvard et Léonard, 1981, 1983 ; Perrin-Glorian, 1986 ; Bolon, 1992, 1996 ; Roditi, 2001, 2007 ; Chesné, 2014). Elles montrent que les questions posées par l'enseignement des fractions et décimaux sont nombreuses et complexes. Nos expériences en formation initiale ou continue, aussi bien auprès d'étudiants professeurs que de professeurs de collège et d'école en poste, nous amènent à constater que leur compréhension des différents aspects et significations des fractions ou des nombres décimaux n'est pas toujours bien assurée et que, de ce fait, les pratiques d'enseignement ne sont pas toujours à la hauteur des enjeux. Les réponses spontanées d'enseignants à la demande de définition d'un nombre décimal font, par exemple, encore très souvent intervenir l'écriture à virgule et non pas la fraction décimale. L'étude des traces à retenir sur certains cahiers d'élèves montre aussi que le lien entre fraction décimale et nombre décimal n'est pas toujours établi. Malheureusement, même si des documents ressources[115] sont disponibles sur Eduscol, ils ne sont pas toujours lus et assimilés par les enseignants et le temps de formation des enseignants est souvent trop restreint pour leur permettre de remettre complètement en cause leurs conceptions (parfois fausses) ou d'appréhender les savoirs en jeu dans leur totalité.

Ainsi, une mémorisation succincte de règles apprises, comme celles de la multiplication par 10, 100, …, empêche une compréhension plus profonde du fonctionnement global du système de numération décimal. Cette compréhension permet d'expliquer que ce n'est pas un décalage de la virgule qui est en jeu dans ces opérations mais un changement de valeur des chiffres dans l'écriture du nombre multiplié.

Dans les cahiers des élèves, la première leçon sur les fractions définit souvent du vocabulaire comme « numérateur » et « dénominateur », sans qu'aucune référence à une unité pour le partage ne soit clairement faite, et induit souvent l'idée qu'une fraction renvoie à un nombre nécessairement inférieur à 1. Nous retrouvons ces deux aspects à travers l'illustration suivante issue d'un cahier d'élève de CM2 :


Les fractions (1)

On utilise les fractions dans les recettes de cuisine, dans les mesures de durées...

6 → le numérateur
7 → le dénominateur

Le numérateur représente le nombre de parts utilisées.

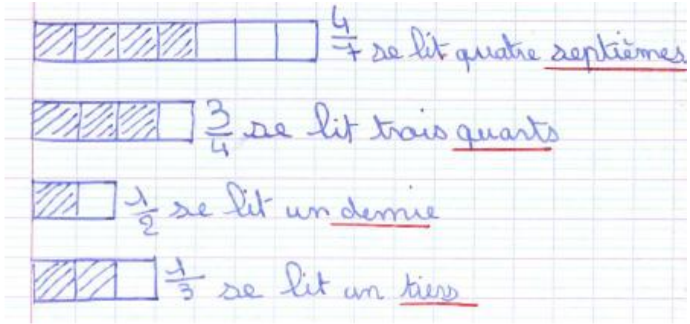
Le dénominateur représente le nombre total de parts.

Remarque :

D'une part, on remarque qu'aucune fraction supérieure à 1 n'est proposée et d'autre part, on peut se demander comment, dans ces conditions, la représentation suivante sera ensuite interprétée :

Est-ce $\frac{5}{4}$ *ou* $\frac{5}{8}$ qui est représenté ? Et de quelle unité ?

[115] Ressource d'accompagnement des programmes [« fractions et nombres décimaux au cycle 3 »]



Que dire de l'illustration qui suit la définition précédente ?

$\frac{1}{n}$ est-il toujours représenté par un carreau, quel que soit n ?

Figure 1 : extrait d'un cahier outil d'une classe de CM2

Le programme de novembre 2015[116], confirmé par les ajustements de juillet 2018, précise :

> *Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de* ***nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers****, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée.*
>
> ***Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel****. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes, …L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison (qui se différencient de celles mises en œuvre pour les entiers) et de calcul.*

Ainsi le programme propose d'inscrire les justifications des règles de comparaison et de calcul sur les nombres décimaux dans le prolongement de celles utilisées pour les entiers mais est–il possible de le faire pour toutes les opérations et en particulier pour la multiplication ?

Les projets de progression renvoient toujours la multiplication de deux nombres décimaux (sous forme d'écriture à virgule) à la classe de 6ème, en ne mettant en avant que l'aspect « technique opératoire : *« Au plus tard en période 3, ils apprennent l'algorithme de la multiplication de deux nombres décimaux. »*. Cet accent mis sur la technique au détriment du sens montre-t-il que le sens à acquérir n'est pas aussi simple ou est-il simplement sous-estimé ?

II - QUELS ARTEFACTS POUR INSTRUMENTALISER L'ILLUSTRATION DE LA MULTIPLICATION

Dans la théorie de la genèse instrumentale, Rabardel (1995) distingue l'artefact (tout objet matériel et symbolique) et l'instrument : fruit d'une construction par l'individu, composé de l'artefact lui-même et des schèmes des situations qui lui sont associés. Pour lui ce processus de construction et l'instrument lui-même vont avoir un impact sur la construction des savoirs.

Dans cette logique, l'objectif de l'atelier était de se questionner sur la place de la manipulation d'artefacts matériels dans la construction du concept de multiplication et d'étudier des supports susceptibles d'aider à comprendre les significations de la multiplication, en particulier celle de deux décimaux, mais aussi d'aider à illustrer les techniques opératoires.

[116] Programme pour le cycle 3, « Cycle 3. Mathématiques », *Bulletin officiel* spécial n° 11 du 26 novembre 2015, consultable sur eduscol.education.fr http://eduscol.education.fr/pid23199/ecole-elementaire-et-college.html

Différents types de matériels ont été prévus pour permettre aux participants de manipuler et d'illustrer des multiplications : matériel de numération comme le matériel multi-base (petits cubes, barres, plaques…) ou comme des abaques ou des bouliers, des réglettes Cuisenaire, des bandes unités (de 21 cm de couleurs différentes), des droites graduées en dixièmes et centièmes, des surfaces rectangulaires ou carrées de couleurs différentes (unités, dixièmes, centièmes), des guides-ânes….

Nous avons fait le choix de centrer cet atelier autour de l'étude du passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux. C'est en effet un point clé où la multiplication cesse d'être une simple répétition d'additions d'un même nombre ou une opération qui « agrandit toujours ».

Un premier temps a été dédié à la manipulation avec différents matériels pour illustrer des multiplications, chaque groupe ayant un matériel différent. Un second temps a été réservé à du calcul en ligne et du calcul posé.

Nous espérons ainsi alimenter une réflexion commune et offrir quelques pistes d'enseignement ou de formation pour le cycle 3.

1 Description du déroulement de l'atelier

1.1Descriptif et analyse a priori

Temps 1 :

A la suite d'une brève introduction sur le travail du groupe IREM de Lyon, du matériel est mis à disposition des groupes avec les consignes suivantes, données en même temps :

Activité 1 Consigne 1 :

Vous avez à votre disposition différents matériels.
Avec le matériel de votre choix, proposez une ou des manipulation(s) permettant d'illustrer chacune des multiplications suivantes (sans nécessairement en donner le résultat).

3×2	$\frac{5}{7} \times 2$	$2 \times 1{,}6$	$2{,}3 \times 1{,}7$

La règle graduée est interdite *en groupe 30 min*

Consigne 2 :

A partir des difficultés rencontrées lors de l'activité, listez les questions que vous vous êtes posées :

- *Sur le choix du matériel et des manipulations à effectuer,*
- *Sur la(les) signification(s) de l'opération multiplication,*
  Les manipulations seront présentées et les questions listées

Le choix des nombres a été prévu pour faire apparaître différentes représentations et différents sens de la multiplication. L'ordre d'écriture des nombres dans l'énoncé des multiplications a été choisi aussi pour interroger les lectures significatives du symbole « × ».

Que ce symbole soit lu « fois » ou « multiplié par », le calcul 3 × 2 peut être interprété comme une addition itérée. On pourra procéder trois fois à l'ajout de 2 unités ou 2 fois à l'ajout de 3 unités, quel que soit le matériel utilisé.

De même si le symbole « × » est lu « fois », 2 × 1,6 pourra être traduit comme deux fois l'ajout d'une unité et 6 dixièmes de cette même unité, avec l'unité imposée par la bande unité ou la droite graduée ou l'unité à choisir dans un autre matériel.

Le calcul $\frac{5}{7}\times 2$ pourra aussi être vu comme une addition itérée à condition de le lire $\frac{5}{7}$ multiplié par 2, ou d'utiliser la commutativité de la multiplication pour le lire 2 fois $\frac{5}{7}$. La fraction $\frac{5}{7}$ ne peut pas être facilement représentée à l'aide du matériel de numération ou la droite graduée en dixièmes et centièmes.

Mais on pourra assez aisément en construire une représentation en utilisant la bande unité et le guide-âne pour la partager en 7 puis prendre 5 parts.

Cependant, le calcul de 2,3 × 1,7 nécessite forcément un traitement particulier comme, par exemple, de faire opérer la fraction $\frac{23}{10}$ sur 1,7 pour en prendre les vingt-trois dixièmes ou de situer l'opération dans un autre contexte où elle a du sens comme celui par exemple d'un calcul d'aire.

Temps 2 :

Consigne 1

Calcul en ligne de différentes multiplications.

Effectuer les opérations suivantes sans les poser :

- *23 × 13*
- *6 × 4,3*
- *4,2 × 4,5*

Consigne 2

Calcul posé, chaque groupe en faisant une différente.

Posez les multiplications suivantes et dites comment vous les expliqueriez à des élèves :

- *523 × 305*
- *349 × 24,5*
- *63,4 × 2,12*

Pour les calculs en ligne, les procédures s'appuieront certainement sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction ou l'associativité de la multiplication :

Pour 23 × 13 = 299 on peut faire :

- 23 × 3 puis 23 × 10
- 23 × 10 et 23 × 3
- (20 + 3) × 13

Pour 6 × 4,3 = 25,8 on peut faire :

- 6 ×4 = 24 et 6 × 0,3 = 1,8
- 3 × 0,3 = 0,9 puis multiplier par 2 ce qui donne 1,8
- 3 × 4,3=12,9 et le tout multiplié par 2
- 6 × 43 : 10

Pour 4,2 × 4,5 = 18,9 on peut faire :

- 4,2 × 9 : 2 = (4,2 × 10 – 4,2) : 2 = 37,8 :2 = 18,9
- 4,2 × 4 = 16,8 puis 4,2 × 0,5
- La moitié de 4,2 soit 2,1 et 16,8 + 2,1
- Eventuellement 4 × 4,5 puis 0,2 × 4,5
- *A priori*, le calcul42 × 45 : 100, proche de la technique posée usuelle, semble plus difficile à mettre en œuvre.

Pour les multiplications posées de la seconde consigne, les participants de l'atelier devraient présenter la technique de la multiplication de deux entiers avec une explication s'appuyant sur la décomposition canonique du deuxième nombre, l'utilisation de la distributivité de la multiplication sur l'addition et de l'associativité de la multiplication pour effectuer le produit par les multiples des puissances de 10.

Dans la multiplication *349 × 24,5,* la position du plus petit nombre 24,5 pourra être interrogée car dans un cas, il faudra effectuer le produit de 349 parle décimal 0,5 alors que si on inverse les facteurs, on sera conduit à effectuer le produit de 24,5 par l'entier 349.

Pour justifier la technique de cette multiplication nous nous nous attendons à des explications basées sur les différentes lecture ou décompositions possibles qui peuvent être faites de l'un ou l'autre des facteurs en jeu :

- 349 × 245/10
- 349× (2d + 4u + 5/10)
- 24,5 × (3c + 4d + 9u)

Pour 63,4 × 2,12, on s'attend à ce que les participants fassent :

- 634 × 212 /1000
- En utilisant la décomposition canonique d'un des facteurs 2,12 par exemple, ils pourraient aussi calculer le produit en calculant 2/100 fois 63,4 + 1/10 fois 63,4 + 2 fois 63,4 ce qui aurait pour conséquence de faire apparaitre la virgule dans les résultats intermédiaires (mais ils devraient alors expliquer comment traiter les opérations 2/100 fois 63,4 et 1/10 fois 63,4).

Dans le cas de la technique posée de la multiplication de deux nombres décimaux (non entiers) il y a une rupture de sens. Il convient donc de donner une autre signification à cette opération que simplement celle prenant appui sur l'addition itérée. En revanche, les explications données pour justifier l'algorithme de la multiplication de deux entiers s'appuient sur les propriétés du système de numération décimale et sur celles de l'opération multiplication. Ces propriétés s'étendent aux nombres décimaux et on peut légitimement penser qu'il est possible de construire un algorithme de multiplication des décimaux et de le justifier en s'inscrivant dans cette continuité.

Questions à mettre en débat : Discussion

Les questions suivantes pourront être abordées durant l'atelier :

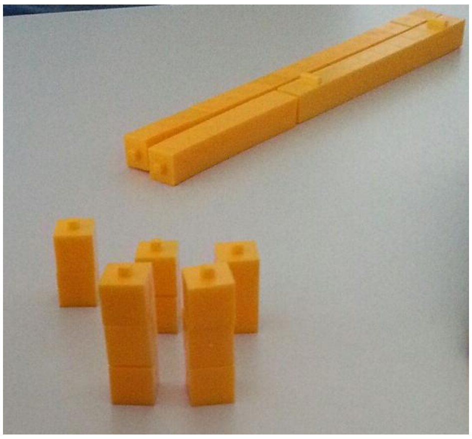
Quels liens, continuités, ruptures entre des techniques opératoires (en ligne ou posée) ?
Toutes ces techniques peuvent-elles être illustrées par la manipulation d'un matériel ?
Inversement, l'utilisation de matériels pourrait-elle induire d'autres explications des techniques ?

1.2Les productions du temps 1 de l'atelier

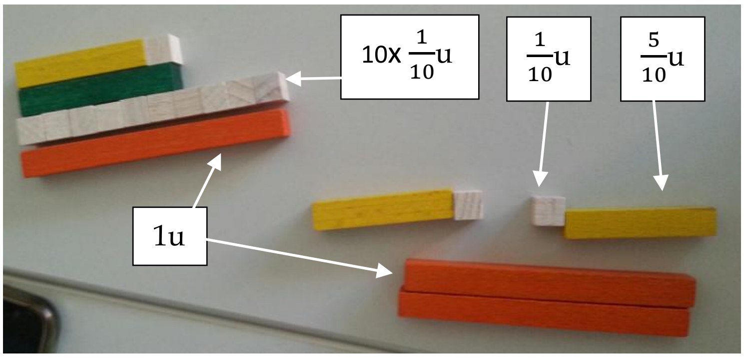
3 × 2	$\frac{5}{7} \times 2$	***2 × 1,6***	***2,3 × 1,7***

Les participants à l'atelier se sont emparés de différents matériels mis à leur disposition et ont facilement représenté le premier et le troisième calcul.

Les représentations des résultats de 3×2 et de 2 × 1,6 font apparaitre souvent le double d'une quantité matérialisée (3u +3u ou 1,6u +1,6u) mais aussi 2u+2u+2u et fonctionnent en montrant la multiplication comme addition réitérée. L'unité change suivant les besoins comme le montre l'exemple ci-dessous où le petit cube vaut une unité dans les représentations de 3×2 et un dixième dans la représentation de 2 × 1,6. Voir aussi l'illustration de cette opération sur le boulier où la colonne des boules unités devient de fait celle des dixièmes d'unité.

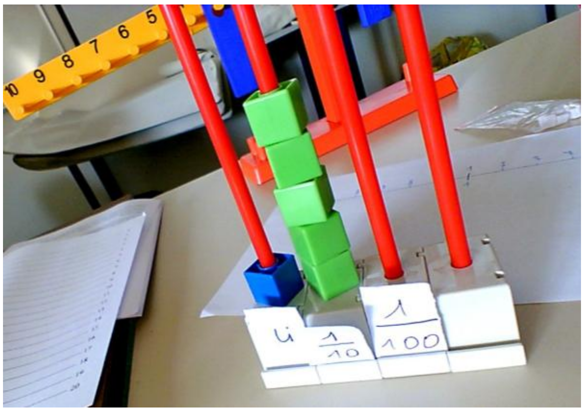


Au premier plan deux manières de représenter 3×2 et en arrière-plan 2 × 1,6 avec le matériel de numération (cubes et barres)

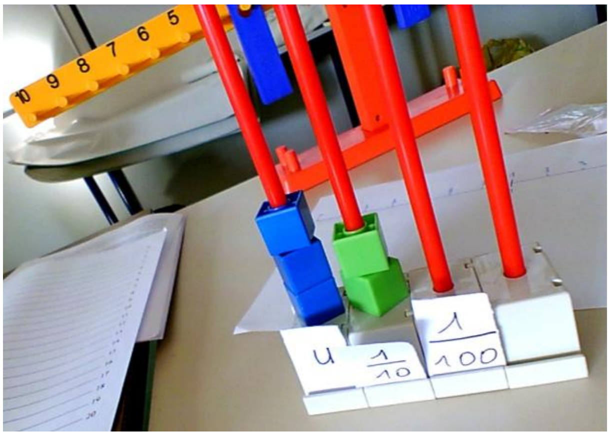


2 × 1,6avec les réglettes Cuisenaire

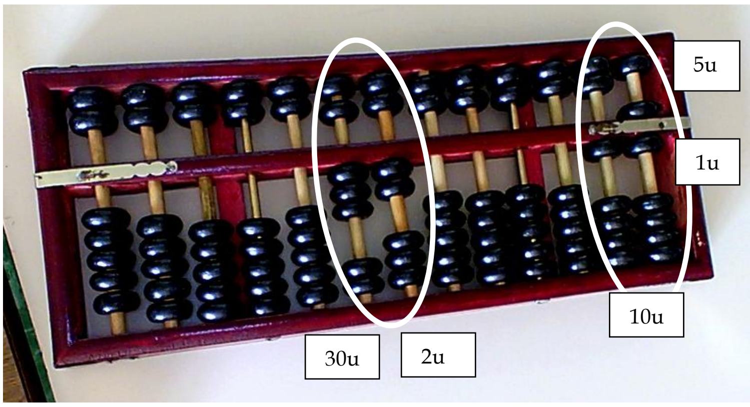
La réglette rouge représentant l'unité, le cube blanc représente alors $\frac{1}{10}$ de l'unité et la réglette jaune $\frac{5}{10}$ de l'unité.



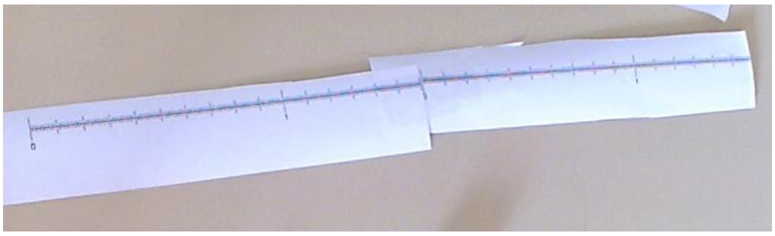
en cours de manipulation pour représentation de 1,6u (ici on voit à ce moment 1u et 5 dixièmes de l'unité)



puis le résultat de 2 × 1,6u suite à un échange de 10 dixièmes contre 1 unité



2 × 1,6 avec le boulier chinois : à droite le nombre 16 et au centre le nombre 32 obtenu en ajoutant 16 deux fois. L'existence de la virgule est donnée oralement.



2 × 1,6 avec la droite graduée en centièmes où après avoir représenté 1,6 deux fois les deux morceaux ont été collés bout à bout. La lecture du résultat se faisant en comptant les unités et les dixièmes par exemple.

Figure 2 : Différentes représentations des résultats de 3×2et de 2 × 1,6

On peut remarquer que la multiplication de 3 par 2 a été illustrée de deux manières 3u + 3u et 2u+2u+2u, mais celle de 2 × 1,6, d'une seule. Si la commutativité est facilement mobilisée pour proposer deux représentations dans le cas de la multiplication de deux entiers, dans le deuxième cas, elle n'est pas utilisée par les participants de l'atelier qui évitent ainsi le problème du sens à donner à l'opération 1,6 fois 2. (à moins que certains d'entre eux n'aient lu l'opération 1,6 multiplié par 2).

Cette question du sens de la multiplication lorsque le multiplicateur est un décimal non entier interroge la commutativité de cette opération et peut remettre en cause l'évidence de cette propriété surtout chez des élèves qui en débutent la construction. La généralisation de la commutativité de la multiplication avec des nombres non entiers est difficile à concevoir si la multiplication est considérée uniquement comme une addition itérée.

Pour représenter le résultat de $\frac{5}{7}\times 2$, deux méthodes apparaissent en utilisant les bandes unités :

- interpréter l'opération comme « deux fois 5 septièmes », puis partager une bande unité en septièmes, prendre $\frac{5}{7}$ de la bande deux fois et accoler les deux morceaux (ou prolonger le comptage des septièmes une deuxième fois), ou
- interpréter l'opération comme cinq septièmes de deux unités, puis construire une nouvelle unité correspondant à deux bandes unités accolées et partager celle-ci en septièmes pour prendre ensuite 5 de ces parts.

La première méthode donne au nombre 2 le statut de scalaire qui opère sur la quantité $\frac{5}{7}$ d'unité. Cette considération permet alors d'envisager la multiplication des deux nombres comme une addition de deux termes identiques.

La seconde méthode repose sur la considération inverse et amène à envisager la multiplication comme l'opération qui consiste « à prendre une fraction d'une quantité ».

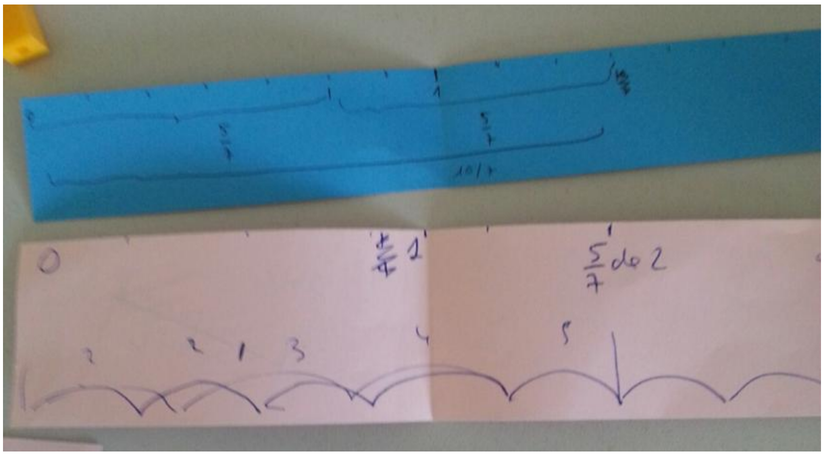


Figure 3 : Différentes représentations des résultats de $\frac{5}{7}\times 2$

La figure 3 révèle les deux façons de voir $\frac{5}{7} \times 2$ mais avec une utilisation de la bande donnée comme valant deux unités ; les participants ont positionné le repère « 1 » au milieu d'un côté de la bande.

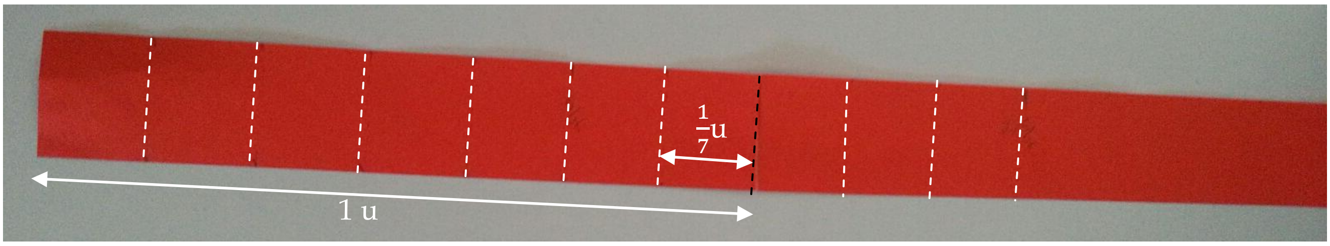


Figure 3 bis : Différentes représentations des résultats de $\frac{5}{7} \times 2$

La figure 3 bis révèle $\frac{5}{7} \times 2$ simplement vu comme $\frac{5}{7}$u + $\frac{5}{7}$u. Les auteurs de cette représentation ont effectué un partage de la bande unité en septièmes et ont repéré $\frac{5}{7}$u puis ils ont sur-compté 5 autres septièmes depuis ce repère. Comme il manquait 3 septièmes en atteignant l'extrémité de la bande unité pour avoir le bon compte, ils ont alors reporté 3 fois 1 septième de la bande unité sur une nouvelle bande unité.

Le matériel de numération et tout matériel s'appuyant sur le système décimal ne peut pas être utilisé pour illustrer cette opération, ils ne permettent pas de représenter facilement des septièmes pour une unité donnée.

Pour le dernier calcul 2,3 × 1,7, certains participants n'ont pas terminé et d'autres se sont appuyés sur une représentation rectangulaire de la multiplication (fig.5).

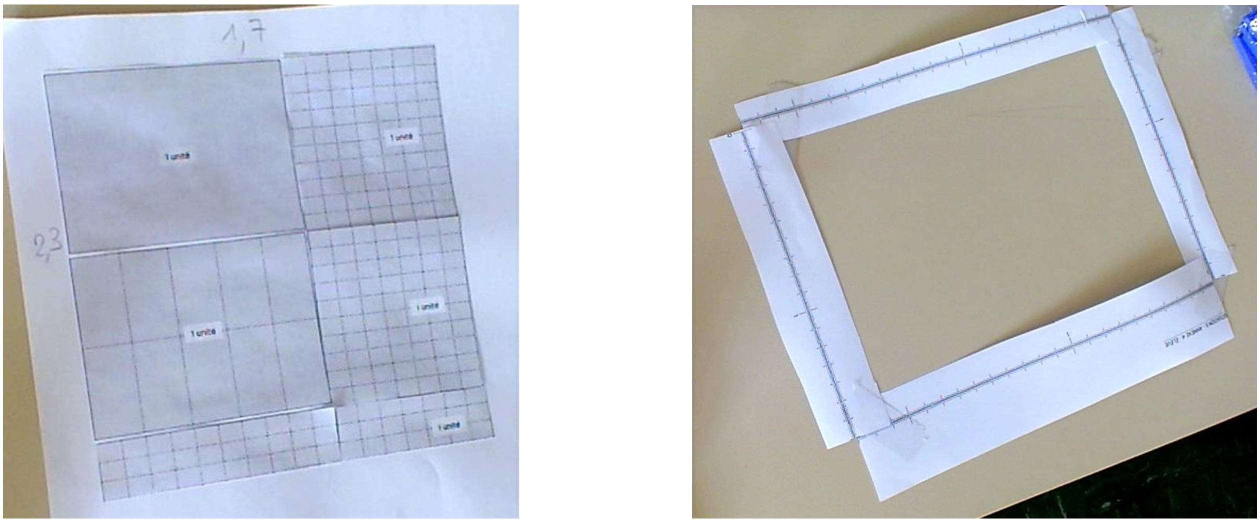
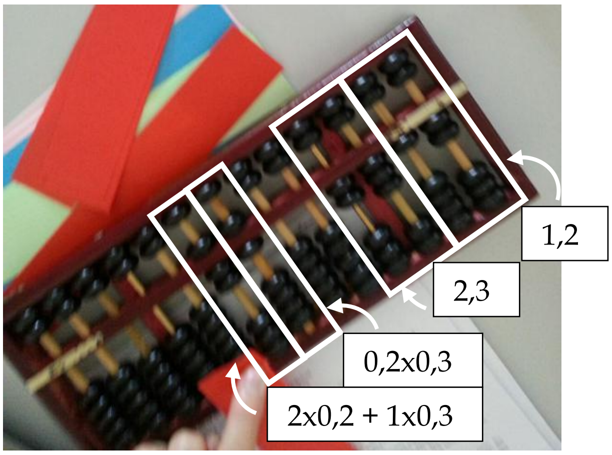


Figure 5 : Différentes représentations des résultats de 2,3× 1,7 sous forme rectangulaire

D'autres encore ont utilisé le boulier chinois et se sont appuyés sur la distributivité de multiplication sur l'addition (fig.5 bis).



Boulier en cours d'utilisation avec placement de la virgule pour le calcul de 2,3 × 1,2 (au lieu de 1,7 : erreur dans la multiplication proposée).

On voit les deux facteurs à droite sur le boulier et la multiplication en train d'être réalisée à gauche en s'appuyant sur les propriétés de double distributivité.

Le groupe a annoncé avoir voulu faire

1× 2,3u + 0,5 × 2,3u + 0,2 × 2,3u

Le doigt et le papier rouge indiquent la place de la virgule.

Figure 5 bis : Illustration sur un boulier du résultat de 2,3 × 1,2

Tous les participants ont exprimé que, pour eux, ce calcul montrait les limites de la manipulation.
Aucun d'eux n'a spontanément songé à illustrer l'opération en accolant à la suite des bandes unités, et prendre par exemple les $\frac{23}{10}$ de 1,7 unité, en constituant d'abord un segment de 1,7u pour le partager ensuite 10 parts identiques et reporter côte à côte 23 de ces parts.

1.3Les productions du temps 2 de l'atelier

Les participants de l'atelier ont effectué les calculs en ligne individuellement, et ont dû s'accorder en équipe sur une présentation de chaque calcul posé.

<u>Calcul en ligne</u>

Pour 23 × 13, les deux décompositions utilisant la distributivité sont apparues :

- 23 × 10 + 23 × 3
- 20 × 13 + 3 × 13

Une autre solution, à laquelle nous n'avions pas pensé dans notre analyse a priori, a été proposée :

$23 \times 13 = (18 + 5) \times (18 - 5) = 18^2 - 5^2 = 324 - 25 = 299$

Pour 6 × 4,3, certains posent l'opération dans leur tête tandis que d'autres ont des solutions plus originales :

- (43 × (5+1)) :10
- $6 \times 4 + 6 \times \frac{3}{10}$
- (4,3 × 3)× 2ou (4,3 × 2) × 3
- (6 × 40 + 6 × 3) :10

Pour 4,2 × 4,5 encore plus de propositions ont été faites :

- 4,2 × 4 + 2,1 (avec 2,1 comme la moitié de 4,2)
- (4d × 45 + 2u × 45) :100
- (42 × 45) :100 ; sans autre précision
- (21 × 2 × 9 × 5) :100 = 21 × 9 : 10
- 4,2 × 5 –4,2 × 0,5
- 4 × 4,5 + 4,5 : 5 (avec « multiplié par 0,2 »vu comme « multiplié par 1/5 » donc « divisé par 5 »)

Dans les calculs mettant en jeu les écritures décimales, on voit se dégager deux stratégies. Nous trouvons d'une part, celles qui s'appuient sur une décomposition additive du nombre décimal en une somme d'unités et de dixièmes ($4{,}3 = 4 + \frac{3}{10}$; $4{,}5 = 4 + \frac{5}{10} = 4 + \frac{1}{2}$; $4{,}2 = 4 + \frac{2}{10} = 4 + \frac{1}{5}$) et qui utilisent la distributivité de la multiplication sur l'addition et d'autre part, celles qui s'appuient sur une décomposition multiplicative du décimal vu comme une fraction décimale ($4{,}3 = \frac{43}{10} = 43 \times \frac{1}{10}$; $4{,}2 = \frac{42}{10} = 42 \times \frac{1}{10}$; $4{,}5 = \frac{45}{10} = 45 \times \frac{1}{10}$) et qui utilisent l'associativité de la multiplication.

A noter que la première stratégie rejoint celle largement adoptée par les participants dans le premier calcul effectué sur des entiers, et que la seconde nécessite de considérer le nombre décimal, soit comme un produit d'un entier par une fraction décimale, soit comme un quotient d'un entier par une puissance de 10.

Calcul posé

Le calcul portant sur les entiers a été présenté de façon classique en multipliant le plus grand nombre par le plus petit.

Cependant certains ont tenu à faire apparaître les « zéros » sur la seconde ligne intermédiaire et à expliciter les résultats trouvés à chaque ligne : $523 \times 305 = 523 \times (300 + 5) = 523 \times 300 + 523 \times 5$

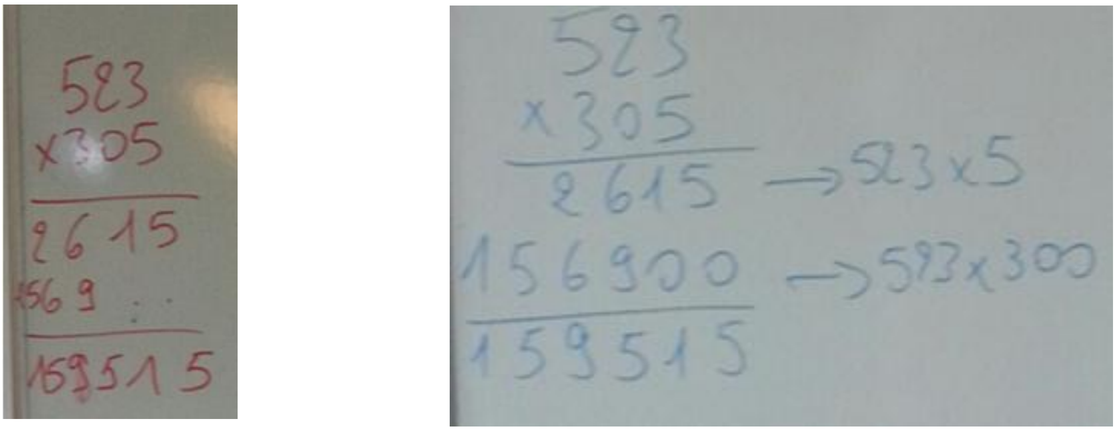
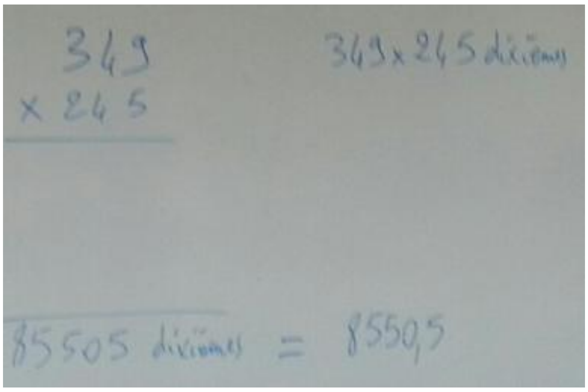


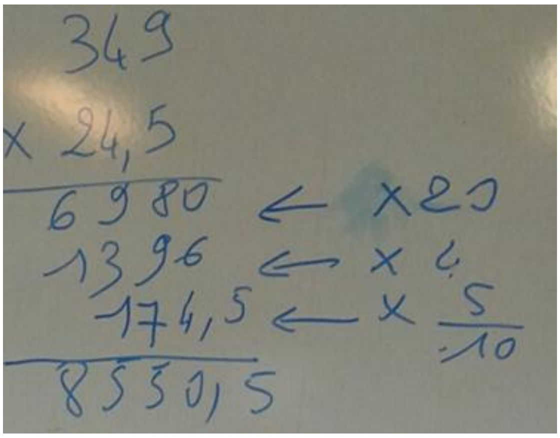
Figure 6 : Multiplications posées 523 × 305

Le calcul mettant en jeu un entier et un décimal non entier a été présenté de deux manières.



Dans cette proposition, l'opération 349 × 24,5 est considérée comme une multiplication de deux entiers où 349 joue le rôle de scalaire et où 245 désigne un nombre de dixièmes. Le résultat est d'abord exprimé sous la forme d'un nombre entier de dixièmes avant d'être traduit en écriture décimale.

Cependant comme 349 est en haut et 245 en bas, on pourrait penser au contraire que 245 joue le rôle de scalaire. En effet, dans la manière de calculer la multiplication posée on a l'habitude de faire opérer le nombre du bas sur celui du haut (5 fois 9 unités puis 5 fois 4 dizaines puis …)



Dans cette seconde proposition, c'est 24,5 qui opère sur 349.

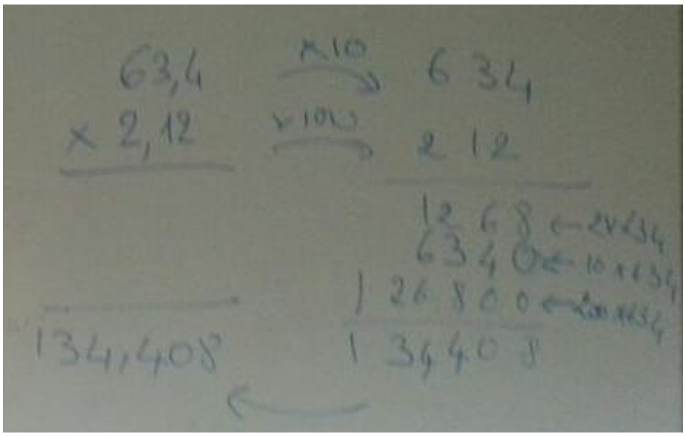
L'opération est vue comme étant le produit de 349 par (20 + 4+$\frac{5}{10}$) et les résultats des lignes intermédiaires correspondent respectivement aux calculs

349 ×20 ; 349 × 4 ; 349 × $\frac{5}{10}$.

Figure 7 : Multiplications posées : 349 × 24,5

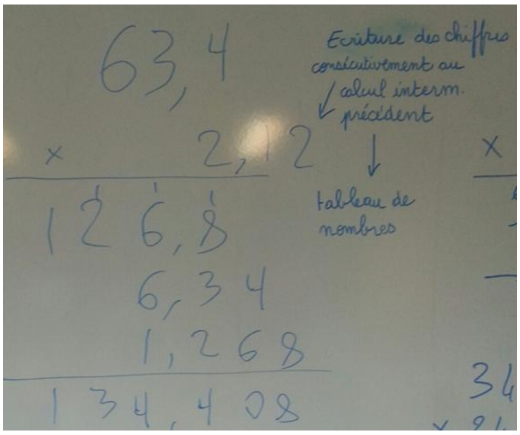
On peut remarquer que la seconde présentation reprend et prolonge la méthode utilisée avec les entiers. Elle demande cependant, pour effectuer le calcul de la troisième ligne de calculs intermédiaires, de savoir multiplier par $\frac{5}{10}$ et peut-être de donner un sens à cette multiplication qui a pour effet de réduire de moitié le nombre sur lequel elle opère.

La multiplication des deux nombres décimaux donnés en écriture décimale a été présentée de trois manières différentes.



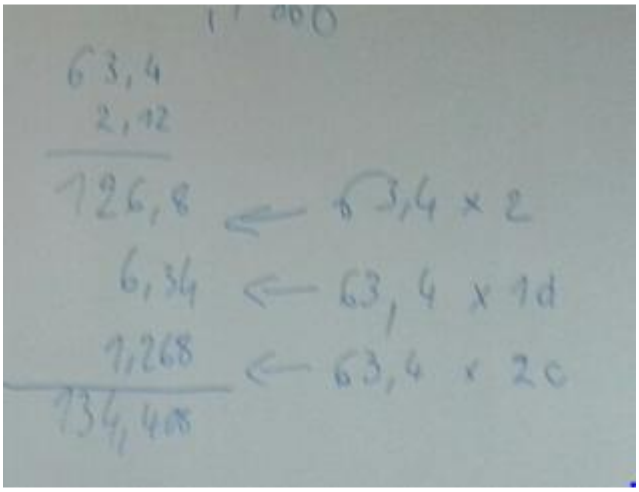
Cette présentation classique de la multiplication[117] conduit à substituer à la multiplication à 63,4 par 2,12, celle de 634 par 312, pour mobiliser la technique apprise sur les entiers.

On explique ensuite que, comme la transformation des deux facteurs décimaux en nombres entiers, nécessite de multiplier le premier par 10 et le second par 100, le produit des entiers obtenus est mille fois plus grand que celui des décimaux initiaux et que de ce fait le produit de ces décimaux est mille fois plus petit que celui trouvé avec les entiers.



Cette présentation propose de considérer la décomposition de 2,12 en 2 +$\frac{1}{10}$ + $\frac{2}{100}$ et d'effectuer la multiplication en calculant d'abord 2 fois 63,4 et d'écrire ce résultat sur la première ligne intermédiaire comme dans un tableau de numération, puis d'écrire le résultat de 63,4 multiplié par le deuxième « chiffre » de 2,12 en décalant d'un rang vers la droite son placement dans le tableau de numération, puis de faire de même sur la troisième ligne en décalant de deux rangs vers la droite le résultat. trouvé en effectuant le produit de 63,4 par le troisième « chiffre » de 2,12

[117] On retrouve cette présentation dans le document : Ressource pour le collège : Le calcul numérique au collège (pages 16 et 17)



Dans cette disposition, 2,12 est le scalaire qui opère sur 63,4. Il est décomposé en :2 +$\frac{1}{10}$ + $\frac{2}{100}$;sur les lignes intermédiaires apparaissent des nombres « à virgule » qui correspondent respectivement aux calculs 63,4 ×2 ; 63,4 ×$\frac{1}{10}$; 63,4 × $\frac{2}{100}$.

Figure 8 : Multiplications posées : 63,4× 2,12

On peut remarquer que la justification de la première technique repose sur l'application des techniques de multiplication et de division d'un décimal par une puissance de 10 et mobilise des propriétés telles que :(a × b) : c = a × (b : c) ou (a : b) : c = a : (b × c).

Comme dans la seconde présentation du calcul de 349 × 24,5, la troisième proposition de présentation du 63,4 × 2,12 reprend et prolonge la méthode utilisée avec les entiers. La question du sens à donner à la multiplication par un dixième ou par deux centièmes reste posée. La justification de la deuxième proposition de présentation du 63,4 × 2,12 repose sur les mêmes propriétés et soulève les mêmes questions.

1.4Le débat qui a suivi

La discussion a porté sur les continuités et ruptures engendrés par le passage à la multiplication par un décimal. La difficulté de donner sens à cette nouvelle multiplication et de justifier les techniques associées a été soulignée. La nécessité d'un travail autour de la distributivité et de l'associativité a été pointé au moment où la recherche de l'efficacité dans l'utilisation des techniques est rendue obsolète par les outils technologiques.

Les animateurs ont posé la question de savoir si les techniques proposées pouvaient être toutes illustrées sur du matériel ou si inversement des manipulations pouvaient induire d'autres techniques. Ils ont ensuite présenté rapidement quelques propositions du groupe *école-collège* de l'IREM de Lyon.

III DIFFÉRENTES SIGNIFICATIONS DE LA MULTIPLICATION : QUELLES RUPTURES ET QUELLES CONTINUITÉS AU NIVEAU DES DÉCIMAUX

Comme les participants de l'atelier ont pu le constater, les significations attachées à l'opération sont diverses et la définition même de cette opération est sujette à discussion.

Il est dès lors utile, aussi bien pour analyser des ressources existantes que pour concevoir de nouvelles situations de classe, de chercher à recenser les différentes définitions que peut prendre la multiplication. Ceci afin d'envisager des approches possibles de cette opération et d'étudier les avantages ou limites qu'elles peuvent présenter dans la construction de son sens et des techniques de calculs qui lui sont associées (en particulier au moment du passage des entiers aux décimaux).

1 Différentes définitions de la multiplication

Les travaux de Gérard Vergnaud sur le champ conceptuel ont déjà permis d'étudier largement le concept de multiplication, ils ont été souvent utilisés dans d'autres publications. Nous ferons ici à référence à ces travaux en nous intéressant plus particulièrement ce qui relève de la multiplication par une fraction ou un nombre décimal.

1.1Le produit cartésien

Cette conception correspond par exemple au cas où on cherche à déterminer combien de figures différentes il est possible de composer à partir de 5 couleurs et de 3 formes toutes différentes. La solution peut être trouvée par dénombrement de tous les cas possibles mais plus directement en effectuant le produit 5 × 3. La multiplication peut être alors définie de la manière suivante : « Le produit de deux entiers a et b est le cardinal du produit cartésien d'un ensemble de cardinal a par un ensemble de cardinal b. Autrement dit : Card(A) ×Card(B) = Card (A×B) ». Cette définition offre l'avantage d'illustrer les propriétés de commutativité et de distributivité de la multiplication. Elle peut s'étendre facilement aux nombres décimaux et être utilisée par exemple dans des problèmes de calcul d'aire (Clivaz et Deruaz, 2013, p.25).

1.2L'addition réitérée

Lorsqu'on cherche à déterminer la longueur d'un ruban constitué de 4 morceaux de 9 cm chacun, on peut effectuer l'addition 9 cm + 9 cm + 9 cm + 9 cm, ou directement le produit résultant de 9 cm multipliés par 4. La multiplication apparait alors comme étant une représentation simplifiée d'additions répétées d'un même terme et on a alors :

$$\mathrm{n} \times x = \underbrace{x + x + x + x + \ldots\ldots.. + x}_{\text{n fois}}$$

Il est à noter que dans le produit $n{\times}x$, les deux facteurs n'ont pas le même statut, le x est vu comme un nombre concret, c'est souvent l'expression d'une mesure dans une unité donnée, alors que n est un nombre abstrait dépourvu d'unité, c'est un scalaire qui opère sur l'autre nombre[118] (Vergnaud, 1994, p. 167). Dans l'expression $n \times x$ écrite dans cet ordre, le symbole « × » renvoie au mot « fois » plutôt qu'à l'expression « multiplié par ».

Si cette définition permet d'illustrer aisément la distributivité de l'opération sur l'addition, les différences de statut des deux facteurs rend difficile l'illustration de sa commutativité.

La rupture de sens, qu'occasionnerait l'utilisation d'un scalaire non entier, rend impossible l'extension de cette définition à tous les réels. Il parait cependant intéressant d'essayer d'envisager son prolongement aux rationnels.

1.3La fraction d'une quantité

Lorsque, comme dans l'exemple précédent on cherche à déterminer la longueur d'un ruban, mais cette fois ci la longueur est $\frac{2}{3}$ de 9 cm. On peut pendre 2 fois le tiers de 9 cm ou le tiers du double de 9 cm et effectuer ainsi le produit de 9 cm par $\frac{2}{3}$.

Cette multiplication, étendue aux rationnels, peut ainsi être définie de deux manières :

- $\frac{a}{b} \times x = \underbrace{\frac{x}{b} + \frac{x}{b} + \frac{x}{b} + \cdots + \frac{x}{b}}_{a \text{ fois}}$ avec $b \neq 0$
- $\frac{a}{b} \times x = (\overbrace{x + x + x + \cdots + x}) : b$ avec $b \neq 0$,

[118]On trouve dans de vieux manuels la distinction entre multiplicateur et multiplicande

Cette définition permet d'envisager la multiplication par un nombre décimal comme une multiplication par une fraction décimale où la fraction décimale opère sur l'autre facteur (entier ou décimal) de la multiplication.

2 Différentes situations multiplicatives

Comme on vient de le voir les définitions de la multiplication mobilisées dépendent de la situation dans laquelle le problème est posé. On distingue généralement trois types de situations multiplicatives (Roditi, 2001,p 77).

2.1 Les situations mettant en jeu une seule grandeur

Comme dans l'exemple du calcul de la longueur du ruban, certains problèmes s'intéressent à une seule grandeur. On les qualifie parfois de problèmes de comparaison de type « n fois plus » ou « n fois moins » qui amènent à effectuer une multiplication d'une mesure d'une grandeur par un scalaire n.

Ces situations s'illustrent assez facilement sur du matériel lorsque n est entier, leur illustration est plus problématique lorsque n ne l'est plus, mais reste possible lorsque n est un rationnel non entier en mobilisant la définition « fraction d'une quantité » qui se traduit par une multiplication. On peut en effet illustrer $\frac{a}{b}$×c en prenant $\frac{a}{b}$ de c, comme illustrer $\frac{2}{3}$ ×9 cm en prenant $\frac{2}{3}$ de 9 cm.

2.2 Des situations où deux grandeurs sont proportionnelles

Dans ces situations le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de l'une à l'autre des grandeurs proportionnelles est lui-même une grandeur quotient des deux autres. Ainsi le coefficient de proportionnalité qui permet de calculer le prix d'achat en euros d'un certain nombre de litres d'essence se calcule en divisant le prix payé par le nombre de litres obtenus correspondant. Il s'exprime en €/L.

Les illustrations des situations de proportionnalité mettent en correspondance plusieurs mesures des deux grandeurs concernées (des œufs et des prix pour l'exemple illustré en fig. 9).

Figure 9: exemple d'illustration d'une situation de proportionnalité[119]

Elles rendent ainsi possible l'utilisation des propriétés de linéarité de la proportionnalité et en particulier la mise en œuvre de raisonnements utilisant les expressions du type « n fois plus » ou « n fois moins » où n est un scalaire, qui sont mobilisés dans des situations d'agrandissement ou de réduction rencontrées dans le paragraphe précédent.

Ils consistent à remarquer une relation sur une grandeur (9 œufs c'est 3 fois 3 œufs) puis l'appliquer sur l'autre (15 € c'est 3 fois 5 €) ou être utilisés en faisant référence seulement aux nombres, en omettant le fait qu'ils n'expriment pas nécessairement des mesures d'une même grandeur (6 c'est 3 fois 2, autrement dit, la mesure du prix des œufs en euro est égale à 3 fois la taille de collection d'œufs). Les mêmes raisonnements peuvent être étendus aux nombres non entiers mais leur illustration ne peut être effectuée que sur une seule grandeur à la fois, ce qui ramène à la problématique du paragraphe

[119] Source : http://troublesneurovisuels.unblog.fr/category/mathematiques/proportionnalite-mathematiques/

précédent et conduit à considérer la multiplication par un nombre en écriture fractionnaire comme l'opération consistant à « prendre une fraction de ».

2.3 Les situations mettant en jeu deux grandeurs pour en constituer une troisième

Comme dans l'exemple du problème de recherche du nombre de figures différentes que l'on peut composer avec différentes formes et différentes couleurs, certains problèmes demandent de combiner deux grandeurs pour en obtenir une troisième, produit des deux premières. C'est le cas dans les problèmes d'aire où l'on multiplie entre elles des longueurs, pour obtenir une aire.

Ces situations sont souvent illustrées par une représentation rectangulaire : tableaux à double entrée ou rectangle, qui permet de matérialiser la nouvelle grandeur obtenue. On peut remarquer que même si ces situations relèvent du produit cartésien, sur leurs représentations en rectangle, le dénombrement des unités de mesure de la grandeur produit renvoie à une addition réitérée d'un nombre entier de lignes ou de colonnes. Celui-ci est plus difficile à effectuer lorsque les deux mesures à composer sont des rationnels non entiers, il nécessite de considérer des fractions de l'unité de la grandeur produit qui résultent d'un produit de fractions d'unités des grandeurs à multiplier.

Le passage des entiers aux décimaux rend donc l'illustration des situations multiplicatives plus difficiles mais celle-ci demeure possible à condition de considérer le nombre décimal en tant que fraction décimale, et de mobiliser, dans certaines situations, la signification « fraction d'une quantité » de la multiplication.

3 Les techniques de multiplication de deux nombres en écriture décimale

Comme nous l'avons évoqué en décrivant l'atelier, la technique de multiplication des décimaux consiste souvent à poser la multiplication « comme s'il n'y avait pas de virgule » puis à placer la virgule dans le produit de telle sorte qu'il y ait autant de chiffres après la virgule que la somme des nombres de chiffres après la virgule dans les deux facteurs réunis. Cette technique est valide dans un calcul posé. Mais elle ne permet pas de comprendre le sens du placement de la virgule dans le résultat affiché par une calculatrice quand elle effectue par exemple : 2,4 × 1,5 = 3,6. Il est donc nécessaire de s'intéresser aussi aux discours susceptibles de justifier de cette technique ou d'en soutenir d'autres.

3.1 Le produit de fractions quotient

Dans le produit 5,7 × 2,75, on peut considérer que 5,7 est le nombre qui multiplié par 10, donne 57 et 2,75 le nombre qui multiplié par 100, donne 275. Le produit 57 × 275 est alors le produit (5,7 × 10) × (2,75 × 100) qui, par commutativité et associativité de la multiplication, est égal à (5,7 × 2,75) × 1 000.

Alors le nombre 5,7 × 2,75 est le nombre qui, multiplié par 1000, donne 57 × 275 : c'est donc $\frac{57 \times 275}{1000}$. Cette écriture fractionnaire du résultat permet, comme mentionné dans le paragraphe précédent, de justifier la technique usuelle de calcul du produit de deux décimaux.

On retrouve un raisonnement similaire mais qui n'utilise pas d'écriture fractionnaire dans la justification suivante :

5,7 × 2,75 = (5,7 × 1) × (2,75 × 1) = (5,7 × (10 : 10)) × (2,75 × (100 : 100) = (5,7 × 10) : 10 × (2,75 × 100) : 100 = ((57 × 275) : 10) : 100 = (57×275) : (10 × 100) = (57 × 275) : 1000.

Il mobilise également les propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication mais aussi d'autres telles que telles que:

$(a \times b) : c = a \times (b : c)$ ou $(a : b) : c = a : (b \times c)$ quels que soient les décimaux a ; b ; c (b et $c \neq 0$) .

La succession d'opérations nécessaires pour justifier la technique parait dans les deux cas, difficile à illustrer avec du matériel.

3.2Le produit de fractions décimales

Le produit de deux décimaux, par exemple 5,7 × 2,75, peut être considéré en tant que produit de deux fractions décimale : $\frac{57}{10}\times\frac{275}{100}$.

L'application de la règle de multiplication des fractions permet d'affirmer que le produit est égal à $\frac{57 \times 275}{10 \times 100}$ donc à $\frac{57 \times 275}{1000}$, autrement dit au quotient du produit de deux entiers par 1000.

On peut justifier ainsi la technique usuelle évoquée plus haut : effectuer le produit des deux entiers 57 par 75, puis diviser le résultat par 1000 (ou décomposer la fraction décimale sous la forme d'un entier et d'une partie décimale inférieure à 1). Cette dernière opération détermine la place de la virgule dans l'écriture décimale du résultat.

Cette première justification peut être illustrée par une configuration rectangulaire dans un problème d'aire mais pour être bien comprise, elle demande de concevoir que le produit de deux mesures exprimées chacune par une fraction décimale d'une unité de grandeur (ici la longueur) puisse donner une mesure d'une autre grandeur produit des premières (ici l'aire). En effet ceci n'est pas compatible avec la définition « fraction d'une quantité » de la multiplication, qui en illustrant la multiplication de deux fractions par une fraction d'une fraction d'une mesure de grandeur, ne mettrait en jeu qu'une seule grandeur.

3.3Le produit d'une fraction décimale par un décimal

Le produit 5,7 × 2,75 peut être vu comme le produit de $\frac{57}{10}\times$ 2,75 (ou5,7 × $\frac{275}{100}$) dans lequel la fraction opère sur le nombre en écriture décimale. Cela conduit à effectuer :

– soit le calcul du produit d'un entier par une fraction (57 par 2,75) et de le diviser par 10 ;

– soit le calcul du quotient d'un décimal par 10 (2,75 sur 10) puis de le multiplier par 57. Cette vision du produit conduit à mettre en place une technique de calcul un peu différente de la technique habituelle qui consiste à placer la virgule en deux temps, dans la multiplication d'un décimal par un entier et dans la division d'un décimal par une puissance de 10.

Cette technique nécessite de connaitre une technique de multiplication d'un nombre en écriture décimale par un entier et de savoir diviser un nombre décimal par une puissance de 10.

Elle peut être illustrée assez facilement en matérialisant par exemple les 57 dixièmes d'une bande de papier de 2,75 dm de long.

3.4Le produit d'un décimal par une somme de fractions décimales

Si, comme dans le paragraphe précédent, on connaît une technique de multiplication d'un nombre par une fraction et celle d'un décimal par un entier, alors le produit 5,7 × 2,75 peut être aussi considéré comme le produit de 5 +$\frac{7}{10}$ par 2,75 (ou de 5,7 par 2 + $\frac{5}{10}$+$\frac{7}{100}$).

L'application en acte de la distributivité conduit à calculer la somme de deux produits : celui d'un entier par un décimal (5 par 2,75 qui peut être assimilé à une addition réitérée) et celui d'une fraction décimale par un décimal ($\frac{7}{10}$ par 2,75 qui peut-être vu soit comme le produit de deux fractions, soit comme l'opération consistant à prendre la fraction d'un nombre). Cette vision du produit amène une technique opératoire dans laquelle la virgule apparaît dans les calculs intermédiaires de la multiplication posée.

Elle peut être illustrée sur un matériel identique à la précédente.

En conclusion, la justification de techniques opératoires de la multiplication des décimaux reste difficile mais l'étude précédente montre que certaines présentations peuvent être plus porteuses de sens parce qu'elles offrent la possibilité d'être mises en lien avec des manipulations concrètes ou évoquées. Elles offrent aussi l'avantage de s'inscrire dans la continuité des techniques mises en place pour multiplier un entier ou un nombre en écriture décimale par un entier, en mobilisant de façon similaire la distributivité de la multiplication sur l'addition et les propriétés de système de numération de position décimale.

IV ÉTUDE DE MANUELS

On peut s'interroger sur la manière dont les enseignants abordent ce passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux et se demander comment il leur est possible de prendre en compte les ruptures de sens de l'opération et les continuités liées à l'écriture décimale. L'étude des manuels peut nous fournir quelques indications.

1 Présentation de la signification de la multiplication des décimaux

1.1Dans un problème de proportionnalité

Sur les huit manuels[120]de 6ème (nouvelles collections) que nous avons étudiés, sept présentent la multiplication dans des problèmes de proportionnalité mettant en jeu deux grandeurs avec une référence à l'unité.

Quand il n'est pas présenté comme relevant directement de la multiplication, le problème est donné en deux fois : il est d'abord proposé avec une donnée entière et une autre décimale et non entière, comme par exemple dans la collection *Phare* (Hachette 2016) :« A la boulangerie, Marc achète 6 pains au chocolat à 1,15€ l'unité », pour être repris ensuite avec deux décimaux non entiers : « Sofia achète 3,4 kg de pommes. Un kilogramme de ces pommes coute 2,80 € ». Les manuels notent ensuite que dans les deux cas la multiplication des deux nombres conduit à la solution.

Intéressons-nous aux rôles donnés aux différents nombres dans les multiplications qui permettent de résoudre ces problèmes. Considérons le tableau de proportionnalité suivant :

Nombre de pains au chocolat	1	6
Prix en €	1,15	

La multiplication 6 × 1,15 qui permet de calculer la quatrième proportionnelle peut renvoyer à deux procédures différentes :

- celle mobilisant les propriétés de linéarité de la proportionnalité :
  p(6 pains) = p(6 ×1 pain) = 6 × p(1pain).
  Dans ce cas, le nombre 6 joue le rôle d'opérateur scalaire et la multiplication est alors une écriture simplifiée d'une addition réitérée.
  C'est ainsi qu'elle est présentée dans le manuel *Phare* (Hachette 2016) : « Pour calculer le prix payé, Marc calcule : 1,15€ + 1,15€ + 1,15€ + 1,15€ + 1,15€ + 1,15€ » ;
- celle utilisant le coefficient de proportionnalité : p(6 pains) = 6 pains ×prix/pain.
  Dans ce cas le 6 est une mesure de grandeur (celle de la taille de la collection de pains) et 1,15 correspond àune grandeur quotient.
  C'est cette approche qui semble être privilégiée dans le manuel *Dimensions Maths* (Hatier 2016), où il est indiqué en encart : « Souviens-toi que le prix à payer = masse en kg × prix au kg. »

Lorsque le problème est présenté avec deux décimaux non entiers :

- dans le premier cas, on retrouve un opérateur scalaire qui n'est plus entier. De ce fait, la multiplication ne peut plus être vue comme une addition réitérée : il y a rupture de sens, là où les manuels cherchent à inscrire une continuité dans la procédure de résolution ;
- dans le second cas, on peut d'abord rappeler que « si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son

[120]Phare 2016 (Hachette) ; Delta 2016 (Magnard) ; Maths Monde 2016(Didier) ; Transmath 2016 (Nathan) ; Delta mathématiques 2016 (Belin) ; Kwyk Maths 2016 (Hachette éducation) ; Myriade 2016 (Bordas) ; Dimensions Maths 2016 (Hatier)

institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3 »[121]. La procédure n'est donc pas encore accessible à la majorité des élèves. On peut interroger ensuite la signification que les élèves peuvent donner à ce coefficient de proportionnalité : la relation qui existe entre les deux grandeurs est, en effet, souvent d'abord perçue comme une relation d'agrandissement où le nombre qui permet de passer de l'une à l'autre s'exprime sans unité. Il garde un statut de scalaire. Là aussi le saut conceptuel à effectuer au passage de l'entier au décimal est important. Les manuels ne semblent pas vraiment le prendre en considération.

1.2Dans un de calcul d'aire

Le manuel *Delta* de la collection Magnard propose d'approcher la multiplication de deux décimaux par un problème de calcul d'aire : il demande aux élèves de reproduire un rectangle donné sur du papier millimétré, de déterminer son aire en dénombrant les mm², d'effectuer la conversion en cm², avant de questionner le calcul qu'on aurait pu effectuer pour déterminer directement l'aire en cm².

Dans ce contexte de produit de mesures, l'aire est calculée en effectuant un produit de deux nombres dans lequel les deux facteurs ont le même statut. Il n'y a apparemment pas de rupture de signification au passage des entiers au décimaux… On doit cependant remarquer que, dans cette configuration rectangulaire (fig. 5), la multiplication est d'abord présentée à partir d'une organisation qui regroupe les unités d'aire, les dixièmes d'unité d'aire puis les centièmes d'unité d'aire, … en des nombres entiers de lignes et de colonnes, pour les dénombrer ensuite facilement par addition réitérée. C'est à cette première signification qu'il est fait appel pour construire l'opération. Le passage d'une organisation de nombres entiers à des nombres décimaux de lignes ou colonnes, qui pourrait lui en conférer une autre, n'est pas explicitement évoqué dans le manuel.

2 Présentation d'une technique posée de la multiplication des décimaux

Les manuels étudiés proposent tous d'effectuer la multiplication à la manière de celle des entiers, sans tenir compte dans un premier temps des virgules, et de les considérer dans un deuxième temps pour effectuer le placement de la virgule. Selon les collections, ce placement découle soit de l'application d'une règle, soit d'un raisonnement mené sur les ordres de grandeur, soit éventuellement des deux.

2.1Une règle donnée sans justification explicite.

C'est par exemple le cas du manuel **Delta mathématiques** (Belin 2016) qui présente, sous l'intitulé « J'apprends à », la multiplication posée en colonnes de 2,78 par 6,4 et indique dans des bulles : « 1°) on multiplie sans tenir compte, des virgules ; 2°) on place la virgule dans le résultat. Attention ! Il faut additionner les nombres de chiffres après la virgule de chaque facteur. »

Il est à noter que, juste au-dessus, sous le même intitulé, une multiplication posée de deux entiers, 83 × 64, est également affichée, avec des indications données dans des bulles qui explicitent les calculs effectués à chaque ligne, en faisant référence à la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture du nombre : « On multiplie 83 par les unités, 4 × 3 = 12, on pose 2 unités et on retient 1 dizaine.4 × 8 = 32, plus 1 de retenue, donc 33 dizaines … ». Ce type d'explication n'est pas repris dans la présentation de la multiplication de deux décimaux.

[121]Ressource d'accompagnement des programmes « Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3 »

2.2Une règle donnée avec des éléments de justification

Deux propositions de ce type apparaissent dans les manuels :

- Dans la collection *Phare* (Hachette 2016), un produit de deux entiers donné (856 × 273) est décomposé en un produit de deux produits de deux décimaux par une puissance de 10 d'exposant positif ((8,56 × 100) × (27,3 × 10)). Il devient ensuite (par associativité) un produit d'un produit deux décimaux par une seule puissance de 10 (8,56 × 27,3 × 1000). « Ainsi le résultat de 856 × 273 est 1000 fois plus grand que le résultat de 8,56 × 27,3 ... »
- La collection *Kwyk Maths* (Hachette éducation, 2016) propose, au contraire, de partir d'un produit de deux décimaux non entiers (4,2 × 4,3), de le décomposer en un produit de deux entiers par une puissance de dix d'exposant négatif ((42 × 0,1) × (43 × 0,1). Il devient ensuite (par associativité) un produit d'un produit de deux entiers par une seule puissance de 10 (42 × 43 × 0,01). Il s'agit ensuite, sachant que 42 × 43 = 546, d'en déduire le résultat de 4,2 × 4,3.

Outre le caractère abstrait de ces raisonnements déductifs, qui portent sur des nombres et des propriétés d'opérations pas toujours encore bien maitrisés par la plupart des élèves de sixième, on peut remarquer que ces justifications occultent les nombres inscrits sur les lignes intermédiaires dans les multiplications posées. Quelle est alors leur utilité ? Leur signification ?

2.3 Un raisonnement prenant appui sur les ordres de grandeur

C'est le choix fait par le manuel *Transmath* (Nathan 2016) pour présenter une technique de multiplication de deux nombres décimaux. Il donne, dans une bulle qui jouxte la présentation du calcul posé de la multiplication de 476 par 305, un « conseil » pour effectuer la multiplication de 4,76 × 30,5 : « On commence par calculer un ordre de grandeur de produit. On effectue la multiplication sans tenir compte des virgules. [….] On sait que le résultat doit être proche de 150, on peut donc placer correctement la virgule : le produit vaut le 145,18. »

Cette méthode est reprise dans d'autres manuels, où elle est souvent présentée comme un moyen de contrôle du résultat.

Elle peut effectivement permettre à l'élève de placer correctement la virgule dans l'écriture du résultat, à condition toutefois que l'ordre de grandeur du produit ne soit pas trop difficile à déterminer[122]. Toutefois il semble difficile de l'ériger en tant que technique mathématique, dans le sens où les justifications théoriques s'appuyant sur les propriétés des inégalités qui permettraient de l'étayer paraissent difficilement accessibles à un élève de fin de cycle 3. On peut également remarquer que comme dans les autres présentations, le raisonnement sur les ordres de grandeur occulte la signification des nombres inscrits sur les lignes intermédiaires dans les multiplications posées.

L'étude de ces manuels tend à démontrer que la rupture de signification de la multiplication qu'engendre le passage des entiers aux nombres décimaux est généralement cachée par une présentation de la multiplication des décimaux dans des problèmes où elle prolonge celle des entiers. Ces manuels semblent tenter de convaincre les élèves qu'il y a continuité des règles et du sens tout en proposant de nouvelles règles pour trouver le résultat d'une multiplication posée de deux décimaux non entiers. De plus, leurs justifications, quand elles sont données, s'appuient sur d'autres propriétés que celles, faisant référence à la valeur positionnelles des chiffres, utilisées pour expliquer le produit final et les produits partiels qui apparaissent dans la multiplication posée de deux entiers.

On peut alors se demander à quelles autres propositions d'enseignement le professeur pourrait se référer pour construire son enseignement de la multiplication de deux décimaux.

Dans sa thèse (2001), E.Roditi reprend, en en montrant les limites, trois autres propositions de situations dans laquelle la multiplication des décimaux apparait comme un outil pour résoudre un problème : celle

[122]Il n'est pas toujours facile pour une élève de déterminer l'ordre de grandeur d'un produit, en particulier quand l'un ou l'autre des facteurs est plus petit que 1. Par exemple dans le calcul de 0,35 par 12,4

de G. Brousseau dans un contexte de l'agrandissement de figure ; celle de Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin dans un contexte de calcul d'aire de rectangle ; celle de Milena Basso et Cinzia Bonotto, dans un contexte de calcul de prix.

De son côté, le groupe *É cole-Collège* de l'IREM de Lyon (2018) propose un ensemble de situations, couvrant différents contextes, dans lesquelles la multiplication par une fraction puis par un décimal apparaît nécessaire pour résoudre et illustrer des problèmes. Dans ces propositions, la technique de la multiplication posée de deux décimaux s'inscrit dans la continuité de celle des entiers.

V LES PROPOSITIONS DE SITUATIONS DE L'IREM DE LYON

Dans cette partie, nous décrirons succinctement plusieurs situations pour la classe[123] tirées de l'ouvrage *Construire les nouveaux nombres au cycle 3 : fractions et décimaux* qui ont été (trop rapidement) présentées en fin d'atelier.

Le groupe *École-Collège* de l'IREM, auteur de l'ouvrage, a cherché en élaborant ces activités :

- à prendre en compte à la fois les ruptures et les continuités engendrées au passage de la multiplication par un entier à la multiplication par un décimal (ou une fraction),

- à construire les nouvelles significations de l'opération en s'appuyant sur la manipulation d'artefacts, permettant de construire l'opération symbolique à partir d'opérations réalisées d'abord physiquement,

- à construire et justifier les techniques opératoires en se référant à ces opérations physiques,

- à présenter l'opération multiplication dans différents contextes où elle prend sens en tant qu'outil pour résoudre un problème.

Pour ce faire, la brochure propose une progression en trois temps :

- étude de la multiplication d'un décimal par un entier ;
- étude de la multiplication d'un entier par une fraction ;
- étude de la multiplication d'un décimal par une fraction ou un décimal dans des contextes différents où elle montre son utilité.

1. *Multiplication d'un décimal par un entier : « Des rectangles à foison »*

Les techniques opératoires sur les nombres en écriture décimale sont en grande partie similaires à celles mises en œuvre sur les entiers. Cette situation propose de fonder ou de redécouvrir les techniques dans le cas de la multiplication d'un décimal par un entier, puis par 10, 100 ou 1000, en référence à la signification des écritures, à partir de manipulations sur des axes gradués ou sur des surfaces.

Les techniques opératoires présentées le sont en prenant appui sur un matériel multi-base similaire à celui utilisé pour les entiers. Dans la situation « des rectangles à foison », ces illustrations visent à installer l'idée que les écritures décimales des nombres entiers ou décimaux relèvent d'un même système décimal de numération et que les relations installées entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) peuvent être prolongées aux décimaux (dixièmes, centièmes…)

2. *Vers la fraction quotient : « Les Bonbons rubans »*

La situation a pour but d'enrichir la notion de fraction avant de l'envisager en tant que quotient de deux entiers. Elle amène à la découvrir, dans un contexte de longueur, en tant que valeur d'une part dans un partage de plusieurs unités, puis de nombre, coefficient scalaire, par lequel on peut multiplier une longueur pour en obtenir une autre.

[123] Voir en annexe pour avoir une idée des situations ; celles-ci sont décrites bien plus précisément dans l'ouvrage.

3. *Enrichir la multiplication*

Ces situations visent à donner un nouveau sens à la multiplication autre que celui de l'addition réitérée. Elles sont proposées dans des contextes de grandeurs différentes et sont conçues pour la fin du cycle.

i. Multiplication et longueur

Cette situation amène les élèves à calculer des fractions de longueurs pour construire des segments. Elle vise à mettre en lien la notion de fraction opérateur, coefficient scalaire permettant de passer d'une fraction à une autre, avec l'opération multiplication et le symbole « × », puis à l'étendre au cas des fractions décimales. C'est l'occasion de comprendre comment des expressions différentes telles que : « prendre une fraction d'un nombre », « prendre une fraction de fois un nombre », « multiplier un nombre par une fraction » ou « calculer une fraction fois un nombre », renvoient à en seule et même opération mathématique symbolisée par le signe « × ».

ii. Multiplication et proportionnalité

Après avoir défini ou revu, dans un contexte de proportionnalité, la multiplication d'un décimal par une fraction, on présente le cas particulier du produit d'un décimal par une fraction décimale, autrement dit de deux décimaux. On se demande ensuite comment poser la multiplication pour effectuer de tels produits en écriture décimale.

iii. Multiplication et aire

Il s'agit d'étendre la formule de calcul de l'aire d'un rectangle au cas des dimensions décimales et de donner ainsi un autre sens à la multiplication de deux décimaux.

VI CONCLUSION

La communauté de formateurs qui constituait l'assemblée de l'atelier a tenté de cerner la place de la manipulation dans les apprentissages et de déterminer des supports susceptibles d'aider les élèves à comprendre les significations de la multiplication par un décimal.

Un travail autour de dispositifs d'enseignement susceptibles de donner du sens à cette opération a conduit le groupe à distinguer des contextes pour lesquels ont émergé des points de ruptures vis-à-vis de ce qui a pu être construit avec des entiers. La multiplication peut prendre des sens différents selon les problèmes ou situations dans lesquels elle est mobilisée. Elle peut prendre tour à tour un sens d'écriture simplifiée d'une addition itérée dans le cas d'un calcul d'une grandeur par un scalaire entier mais également le statut d'opération privilégié dans le calcul du cardinal d'un produit cartésien ou encore l'aspect « rectangulaire », celle résultant de la multiplication de deux grandeurs. Ces situations, qui ne sont pas sans influence sur la construction du concept (Vergnaud, 1991), nécessitent d'être réinterrogés au passage de l'entier au décimal. Ainsi, si nous savons tous que la multiplication est une opération commutative d'un point de vue purement mathématique, il n'est pas si évident que cette propriété soit facilement perceptible voire effective dans le cas de la multiplication d'un entier par un décimal non entier. Un élève qui associe cette opération à une addition itérée aura plus d'aisance à calculer le produit de 3 fois 4,2 que celui de 4,2 fois 3.

Ces premières variations sur le sens se répercutent sur les procédures mises en place pour calculer le produit de deux nombres mais également sur la disponibilité ou non de certaines propriétés en fonction de la signification que l'on peut donner aux facteurs traités.

Ces effets sur la représentation de cette opération ne facilitent donc pas la tâche de l'enseignant pour donner du sens aux différentes étapes de la multiplication posée. Par rapport au sens de la technique opératoire dans le cas d'un entier par un décimal non-entier pour lequel il peut encore s'appuyer sur les connaissances acquises par les élèves sur la technique opératoire entre deux entiers, dans le contexte du produit résultant de la multiplication de deux décimaux non-entiers, l'enseignant se trouve confronté à devoir donner du sens au placement de la virgule ou plutôt à la multiplication de fractions décimales. Cet aspect de la multiplication n'est pas si évident à signifier. Les participants ont fait des propositions qui ne sont pas dénuées de tout intérêt mais qui se confrontent et butent malgré tout à ce nœud de sens. Aucune de leurs propositions matérielles, de leurs modélisations, ni même de leurs présentations n'a pu lever totalement l'obstacle vers une illustration ou une justification de la technique accessible à un élève de début de collège.

Face à la difficulté d'assurer une continuité de la technique apprise avec deux entiers, les auteurs de manuels de 6ème que nous avons présentés proposent des alternatives afin de permettre aux élèves de placer la virgule dans le produit. De la technique par dénombrement des chiffres « à droite » de la virgule dans chaque facteur à la division par une puissance de 10 du produit en passant par un raisonnement basé sur l'ordre de grandeur du produit estimé à partir de l'arrondi des facteurs au nombre entier le plus proche, les choix pédagogiques ne montrent pas clairement comment la technique, en s'appuyant sur les propriétés de la numération décimale, s'inscrit dans un prolongement de celle mise en œuvre pour les entiers. Dans leur approche, les manuels ne donnent pas tous la même importance au sens à donner à cette opération et ne semblent pas prendre en compte les ruptures engendrées par le passage aux nombres non entiers.

L'ouvrage de l'IREM de Lyon sur la construction des nouveaux nombres au cycle 3 propose, dans différents contextes influençant la construction du concept, des situations qui tentent de prendre en compte les continuités et les ruptures dans le passage de la multiplication de deux nombres entiers à celle entre deux nombres décimaux non-entiers. Le collectif d'auteurs a notamment fait le choix d'enrichir les significations attribuées à cette opération en travaillant le lien entre « prendre une fraction d'une quantité » et « multiplier par un nombre en écriture fractionnaire ou décimale » et d'appuyer la construction de techniques opératoires sur cette définition.

Finalement, à l'issue de cet atelier nous avons pu mettre en évidence que les artefacts, s'ils paraissent incontournables pour mettre du sens sur le concept de la multiplication tant du point de vue de la représentation que du point de vue de la théorie mathématique, ont du mal à être inventés dans le cas de la multiplication de deux décimaux non-entiers en fin de cycle 3. Dans notre cas l'accès à la compréhension du sens par la manipulation nécessite de construire l'équivalence entre la multiplication (2 dixièmes multipliés par 3 dixièmes) et la fraction d'un nombre (3 dixièmes de 2 dixièmes).

Plus généralement, cet atelier a montré qu'une utilisation pédagogique d'artefacts en classe nécessite, pour être porteuse de sens, d'avoir fait l'objet d'une attention didactique parfois pointue. Inversement les questions posées par l'éventuelle utilisation d'artefacts dans la construction de connaissances ont été source d'une riche réflexion didactique. La question de l'utilisation d'artefacts en classe offre donc une intéressante entrée pour la formation.

BIBLIOGRAPHIE

Livres et articles :

Anselmo B. (dir.) et Zucchetta H. (dir.)(2018). *Construire les nouveaux nombres au cycle 3 : fractions et décimaux. Lyon :* CANOPé.
Anselmo B. et al (1999). *La sixième entre fractions et décimaux. Lyon :* IREM de Lyon
Bolon J. (1992). L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire, *Grand N,*52, 49-79.

Bolon J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège.* (Thèse de doctorat, Université Paris 5).
Brousseau G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1(1), 11-59.
Brousseau G. (1981).Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 2(1), 37-127.
Brousseau G. et Brousseau N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* (thèse de doctorat, IREM Bordeau). En ligne :https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/file/Rationnels_et_dA_cimaux_1987.pdf
Chesné J-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. (thèse de doctorat, Université Paris Diderot - Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) Paris). En ligne : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01081505/
Clivaz S. et Deruaz M. (2013). Des mathématiques à leur enseignement,l'algorithme de la multiplication.*GrandN,* 92, 15-23. En ligne :http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/revue_n/fic/92/92n2.pdf
Grisvard C. et Léonard F. (1981). Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. *Bulletin vert*, 327. APMEP.
Grisvard C. et Léonard F. (1983). Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux. *Bulletin vert*, 340. APMEP.
Perrin-Glorian, M.-J.(1986). Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège. *Petit x*, 10, 5-29.
Roditi E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième étude de pratiques ordinaires* (thèse de doctorat, université Denis Diderot, Paris 7). En ligne : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00364726/file/2001_Roditi_these.pdf
Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique.* Paris : L'Harmattan,
Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*,12, 55-81
Vergnaud, G. (1994). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple*Grand N*.56, 55-66.

Références institutionnelles

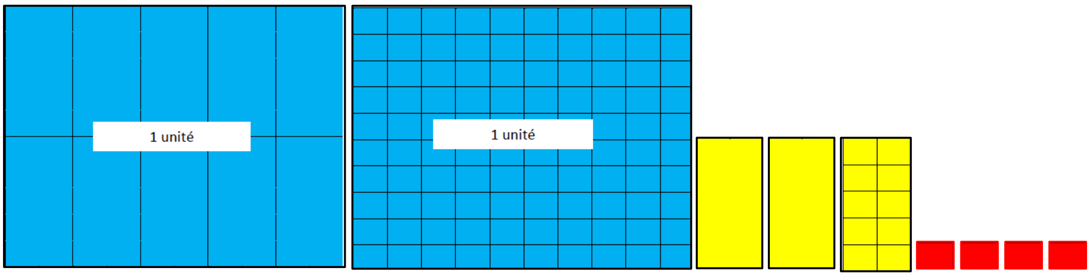
- Programme pour le cycle 3, « Cycle 3. Mathématiques », *Bulletin officiel* spécial n° 11 du 26 novembre 2015
consultable sur eduscol.education.fr http://eduscol.education.fr/pid23199/ecole-elementaire-et-college.html
- *Le nombre au cycle 3. Apprentissages numériques*, coll. « Ressources pour faire la classe », Chasseneuil-du-Poitou, Scérén/CNDP-CRDP, 2012.
Document Ressources programmes 2015 :
- *Fractions et nombres décimaux au cycle 3*
consultables sur eduscol.education.fr http://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html
- *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3* :
consultable sur eduscol.education.frhttp://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html
- *Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes: les nombres décimaux* :
consultable sur eduscol.education.fr http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle-4.html
- Ressource pour le collège (2007 et repris en 2016) : *Le calcul numérique au collège* (p.16&17) http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/1/doc_acc_clg_calcul_numerique_109171.pdf

DES RECTANGLES À FOISON [124]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves manipulent des rectangles unités concrètement ou mentalement, pour déterminer l'aire d'une surface obtenue en les dupliquant un certain nombre de fois.

MATERIEL : Pour l'enseignant

- Des « rectangles », comme ceux-ci-dessous projetés au tableau



-
- Ces mêmes rectangles en grand modèle découpés (ou représentés sur TBI pour pouvoir être dupliqués) qui pourront être manipulés et échangés lors des mises en commun (au moins 23 bleus, 40 jaunes, et 10 rouges)
- Un tableau de numération « dynamique » dans lequel on peut faire coulisser (et grouper) des étiquettes chiffres, comme dans le tableau ci-dessous.

0	0	0	0	0	0	2	3	4	0	0
millions	cent mille	dix mille	Mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	dix millièmes

CONSIGNES

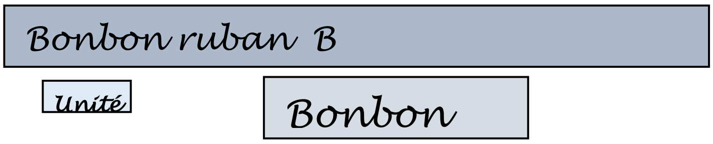
1) Déterminer la mesure en unités *u* de l'aire totale de la surface obtenue en prenant 10 fois chacune des surfaces colorées en bleu, jaune et rouge.
2) Déterminer la mesure en unités *u* de l'aire totale de la surface obtenue en prenant 100 fois chacune des surfaces colorées en bleu, jaune et rouge.

124 Adapté de« Construire les nouveaux nombres au cycle 3»- Canopé

LES BONBONS RUBANS [125]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves disposent de deux « bonbons » rubans : un ruban A qui mesure 3 unités, un ruban B qui en mesure 8. Ils doivent trouver combien de fois la longueur du ruban A est contenue dans celle du ruban B.

MATÉRIEL :



Pour le professeur :

- une bande unité ;
- quelques exemplaires du ruban A de longueur 3 unités et du ruban B de longueur 8 unités.

Pour chaque élève :

- des bandes longues comme le ruban A ;
- une feuille A4 sur laquelle construire le ruban B.

CONSIGNES

1) Le ruban A mesure 3 unités, le ruban B mesure 8 unités A votre avis, le ruban B est long comme combien de fois le ruban A ?
2) Comment construire un segment de longueur 8 unités à partir du ruban A sans utiliser de règle graduée ?
3) Avez-vous changé d'avis ?

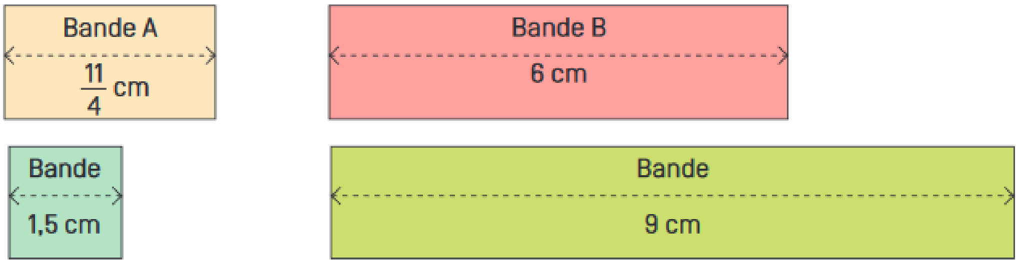
[125] Adapté de « Construire les nouveaux nombres au cycle 3» - Canopé

QUEL EST LE PLUS LONG ?[126]

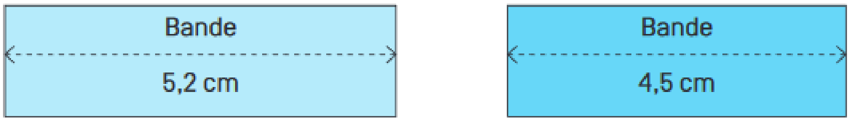
DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves doivent déterminer les mesures de segments longs comme un nombre de fois des bandes de longueurs données. La classe institutionnalise le fait que prendre un nombre de fois une fraction d'une unité revient à prendre la même fraction du nombre donné d'unités et que cela conduit à une multiplication (il existe différentes façons de conduire ce calcul qui amènent toutes à un même résultat). Ensuite, les élèves doivent choisir, parmi des bandes, celle qu'ils préfèrent utiliser pour construire des segments dont les longueurs sont données sous la forme du produit d'un entier puis d'un décimal.

C'est une nouvelle signification de la multiplication qui associe le signe × à l'opération « prendre une fraction d'une quantité » qui est à construire.

MATERIELS : la règle graduée et la calculatrice sont interdites.
Des bandes de différentes longueurs pour répondre aux différentes consignes de comparaison ou de construction.



Utilise la bande de ton choix pour construire un segment de longueur 9 × 1,5 cm.



Utilise la bande de ton choix pour construire un segment de longueur 5,2 × 4,5 cm, sur une feuille A4.

Pour chaque élève :

- Des bandes A de longueur 2,75 cm et des bandes B de longueur 6 cm, puis de longueurs 1,5cm ; 9cm ; 5,2cm et 4,5cm.
- Un guide-âne, des ciseaux et colle

CONSIGNES

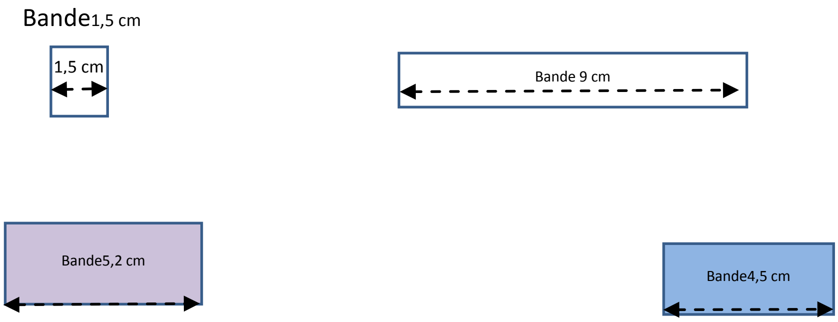
1) Qui a construit le segment le plus long ? Combien mesure-t-il ?
Ali a construit un segment long comme 6 fois la bande A, Bérangère a construit un segment long comme $\frac{11}{4}$ fois la bande B, Clara a construit un segment dont la longueur est 2,75cm multipliés par 6.
2) Utilise la bande de ton choix pour construire un segment de longueur $9 \times 1{,}5$ cm. Quelle est sa longueur ? Comment as-tu fait pour construire le segment ? Comment as-tu fait pour calculer sa longueur ?
3) Utilise la bande de ton choix pour construire un segment de longueur $5{,}2 \times 4{,}5$ cm. Explique comment tu fais ;trouve différentes façons de calculer sa longueur.

[126] Adapté de « Construire les nouveaux nombres du Cm1 à la sixième» -Canopé

LA BONNE BANDE[127]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves doivent construire, à l'aide de bandes qui leur sont fournies, des segmentsde longueurs données en cm sous la forme du produit d'un nombre entier par un décimal, puis d'un décimal par un décimal. La règle graduée est interdite.

MATERIEL :



Pour chaque élève :

- deux bandes respectivement de longueurs 1,5 cm et 9 cm,
- dans un deuxième temps, une bande de longueur 5,2cm ou une bande de 4,5cm ;
- une feuille A4 sur laquelle construire lessegments.

Pour le professeur :

- des bandes en réserve ;
- des bandes agrandies pour illustrer les manipulations au tableau ;
- éventuellement, si les élèves ont déjà appris à s'en servir, quelques guide-ânes à réseau suffisamment serré pour pouvoir effectuer les partages des bandes en dix.

CONSIGNES

1) Sans te servir d'une règle graduée, construis un segment de longueur «9 × 1,5 cm », en utilisant la bande qui te convient le mieux.
2) Sans te servir d'une règle graduée, construis un segment de longueur «5,2 × 4,5 cm », en utilisant la bande qui te convient le mieux.
3) Sans te servir d'une règle graduée, explique comment faire pour construire un segment de longueur «5,2 × 4,5 cm », en utilisant uniquement la bande qui mesure 4,5 cm.

[127] Adapté de « Construire les nouveaux nombres du Cm1 à la sixième» -Canopé

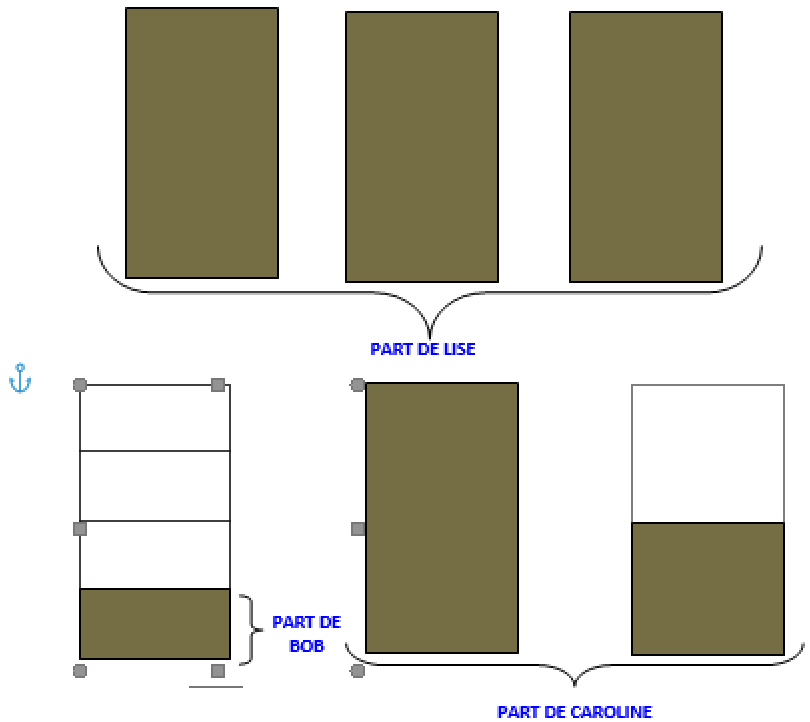
MULTIPLICATION ET PROPORTIONNALITÉ[128]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves disposent de rectangles tous identiques, figurant des tablettes de chocolat. Ils recherchent la masse de différentes parts, exprimées sous forme fractionnaire ou décimale.On établit, en s'appuyant sur le dessin, comment multiplier un nombre décimal par une fraction (prendre une fraction d'un nombre décimal), ce qui permet de faire apparaître la multiplication par un nombre décimal comme économique. On justifiera aussi le placement de la virgule dans l'écriture.

MATERIEL : des rectangles représentant des tablettes de chocolat.

Des enfants ont pris des tablettes de chocolat qui pèsent 2,52 hg chacune. Lise a pris 3 tablettes ; Bob a pris $\frac{1}{4}$ de tablette, et Caroline a pris une tablette et demie.

Calcule combien pèse la part de chacun.



Pour chaque élève :

- Un certain nombre de tablettes à découper pour représenter la part prise par chaque enfant.
- Un guide-âne

CONSIGNES

1) Denis a pris 4/7 de tablette et Emilie 0,7 tablette. Dessinez leur part, collez-la sur le cahier ; indiquez combien pèse la part de chacun ; indiquez comment vous avez fait.
2) Farid a pris 2,36 tablettes. Dessinez sa part. Calculez combien pèse sa part ; indiquez comment vous faites. Trouvez 2 méthodes au moins.
3) Vous savez poser des multiplications avec des nombres entiers. Comment poseriez-vous et effectueriez-vous la multiplication suivante sans utiliser la calculatrice : 5,36 × 1,4 ?

[128] Adapté de « Construire les nouveaux nombres du Cm1 à la sixième » -Canopé

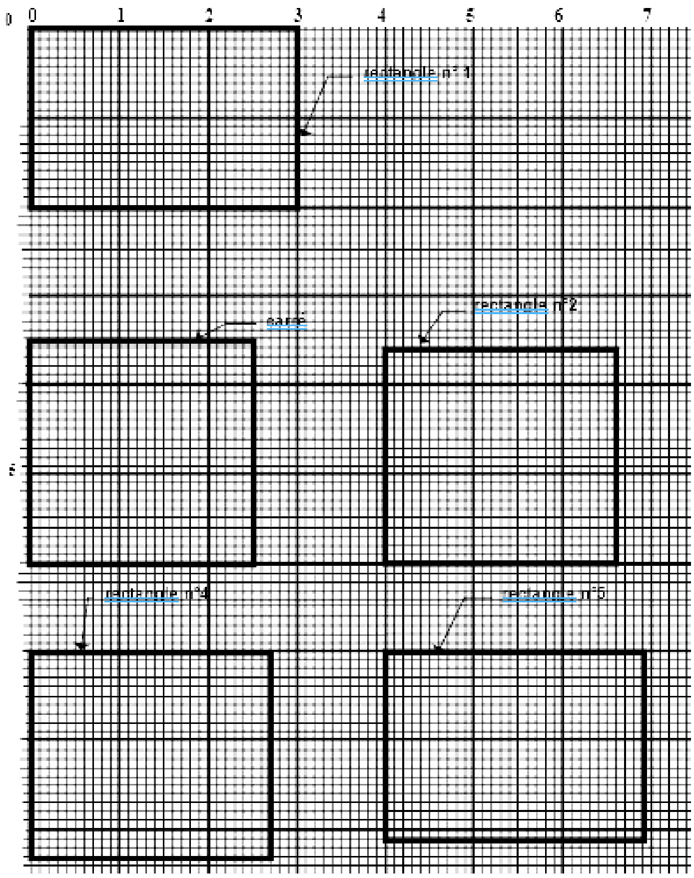
MULTIPLICATION ET AIRE[129]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves doivent construire, sur papier millimétré, une série de rectangles de périmètre donné. Les différentes propositions sont recensées et validées, ensuite les élèves doivent déterminer l'aire de 5 des rectangles tracés dont nécessairement l'aire de rectangles dont les dimensions sont non entières.

La multiplication par un nombre décimal acquiert,ainsi, une signification dans des problèmes de produits de mesures où l'on cherche à déterminer la mesure d'une grandeur produit d'autres grandeurs.

MATERIEL : cinq figures sur papier millimétré dont le périmètre est 10 cm :

- rectangle n°1 : de 3 cm par 2 cm
- un carré de 2,5 cm de côté
- rectangle n°2 : de 2,4 cm par 2,6 cm
- rectangle n°3 : de 2,3 cm par 2,7 cm
- rectangle n°4 : de 2,9 cm par 2,1 cm



Pour chaque élève :

- feuille de papier millimétré sur laquelle il a tracé les 5 rectangles

CONSIGNES

1) Par groupe de deux, vous devez sur une feuille de papier millimétré dessiner six rectangles dont le périmètre est 10 cm. Vous pouvez vous aider des lignes du quadrillage. Tous les rectangles doivent être différents (donc non superposables).
2) Déterminer l'aire de chaque figure en cm² (la calculatrice n'est pas autorisée). Les classer par aire de la plus petite à la plus grande.

[129] Adapté de « Construire les nouveaux nombres du Cm1 à la sixième » -Canopé