# ATELIER A23

# L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES EN CLASSE, DE LA MATERNELLE À LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS : *ENTRE MOTS ET ARTEFACTS*

**Frédéric METIN**
Formateur à l'ESPÉ de Dijon, animateur IREM
Laboratoire SPHERE, université Paris-Diderot
frederic.metin01@u-bourgogne.fr

**Résumé**

Cet atelier visait à proposer aux participants plusieurs pistes d'introduction d'une perspective historique dans les activités mathématiques à l'école, particulièrement au cycle 3. Soulignant d'abord les difficultés inhérentes à cette approche, nous avons pu échanger nos points de vue et expériences sur les possibilités de mise en œuvre en classe offertes par diverses ressources historiques, qu'il s'agisse de textes originaux ou d'artefacts décrits dans ces textes. Les artefacts dont il s'agit comprennent les jetons de compte de l'époque médiévale, les carreaux bicolores dont les diverses combinaisons ont été étudiées par Sébastien Truchet en 1704, jusqu'à l'utilisation des textes anciens comme support d'écritures marginales, lorsqu'ils permettent le commentaire et l'appropriation de leurs contenus.

La publication des nouveaux programmes du lycée consacre pour la première fois l'histoire comme composante éclairante de l'enseignement de mathématiques, en particulier comme source féconde de problèmes pour la classe. Notre but dans le texte qui suit est de convaincre les lecteurs de la pertinence et de l'utilité d'une approche historique de notions mathématiques, de la maternelle à l'université, malgré les difficultés qui se présentent aux enseignants qui souhaitent utiliser des ressources originales. Certes, pour donner une perspective historique à notre enseignement des mathématiques, il arrive que nous sacrifiions la rigueur à l'attrait de l'anecdote, mais la coloration agréable ainsi donnée au discours d'ordinaire caractérisé par son aridité ne vaut-elle pas ce léger sacrifice ? Car même du côté des historiens, la vérité n'est pas immuable et certains mythes modernes (au sens de Barthes) comme ceux de la corde à nœuds ou du nombre d'or ont la vie dure (Neveux, 1995). Entre rigueur historique et bénéfices pédagogiques, nous essayons de trouver notre chemin en nous focalisant sur les objets, les *artefacts* qu'il est possible de présenter aux élèves et aux étudiants. Suivant le plan de l'atelier proposé aux participants, nous indiquons d'abord les écueils habituels auxquels est confrontée cette approche, puis nous proposons quelques pistes de travail, navigant entre textes historiques et objets mentionnés par ces textes. Il n'a pas été possible d'aborder en profondeur tous les sujets envisagés dans l'atelier ; les participants ont particulièrement exploré l'utilisation des jetons pour les calculs et les arrangements de carreaux bicolores de Sébastien Truchet, se penchant enfin sur l'utilisation des textes comme support à l'écriture de commentaires. Nous complétons donc notre compte rendu de ces travaux par les témoignages d'expérimentations en classe qui ont été présentés.

## I - LES DIFFICULTÉS D'UNE APPROCHE HISTORIQUE

L'approche historique en mathématiques n'est pas une entreprise courante, elle présente même plusieurs difficultés souvent mises en avant par les enseignants qui l'ont pratiquée : le temps nécessaire à la préparation des activités qui doivent être souvent totalement créées, le manque de culture historique au sujet des contenus à enseigner, la crainte d'une difficulté supplémentaire pour les élèves peu intéressés par ces disciplines « qui ne servent à rien » : mathématiques et histoire. Mais ces difficultés sont souvent compensées par un véritable éclairage que l'utilisation de ressources anciennes peut apporter aux élèves, joint à la possibilité d'un changement de regard sur les mathématiques, qu'ils peuvent découvrir bien plus « humaines » qu'ils ne les avaient pensées. Par exemple, un rappel du contexte historique de l'invention des nombres décimaux contribue à renforcer le lien entre les mathématiques et le monde réel, puisque Stevin adresse sa *Disme* (Stevin, 1585) à tout un éventail de corps de métiers qui seraient susceptible de l'utiliser : astrologues, arpenteurs, mesureurs de tapisserie, jaugeurs, etc. La lecture du texte de la *Disme* soulève donc des questionnements hors champ mathématique comme l'ont montré M.-L. Peltier et J. Briand dans le chapitre du *Concertum* consacré à l'étude du texte de Stevin (Briand & Peltier, 2003). Cependant, les repères historiques qu'ils citent (Ifrah 1994 ; Dedron & Itard, 1972) posent problème puisque le texte de Stevin y est daté de 1582, alors qu'aucune édition n'en existe à cette date. Ce détail, certes minuscule, montre toutefois la difficulté d'être parfaitement rigoureux même lorsqu'on est spécialiste du sujet. Nous soulevons maintenant d'autres difficultés posées par la pratique de l'approche historique.

## 1 Du danger de l'accroche narrative

L'une des utilisations les plus courantes de l'histoire des mathématiques en classe consiste en l'*humanisation* des notions abordées, à travers des anecdotes de la vie des grands inventeurs ou bien, et de plus en plus souvent, en montrant et reproduisant l'utilisation quotidienne de notions mathématiques à diverses époques par des gens ordinaires, et non les inventeurs. Toutefois, de simples anecdotes hors contexte n'auraient pas grande portée, il est donc souvent indispensable de prendre son temps pour contextualiser la notion abordée et favoriser une activité multidisciplinaire. Cela suppose donc une certaine culture historique, voire épistémologique, chez les enseignants ayant une vocation de conteurs.

C'est en partie pour cette raison que le programme de la licence EFEC[98] de l'université de Bourgogne inclut une UE d'histoire et épistémologie des mathématiques. Dans cette UE, nous avons privilégié une accroche narrative, une forme de *storytelling*, afin d'attirer l'attention de nos étudiants de L2, dont la plupart ont un bagage de culture scientifique réduit[99]. Présenter l'histoire des mathématiques comme un grand récit de l'humanité était dans notre idée le moyen de donner une perspective générale sur les notions de nombre, de grandeurs, de formes géométriques, ainsi que sur le mesurage et la résolution des problèmes.

Mais la réception de ces grands récits par notre public n'a pas forcément été conforme à nos objectifs. La plupart des étudiants n'ont pas un solide socle de connaissances, aussi bien en mathématiques qu'en histoire, et les nombreuses informations données pendant les séances étaient de nature à brouiller le message global. Un révélateur des difficultés liées à cette approche « par grand récit » est évidemment le moment de l'évaluation. Nous en donnerons un exemple caractéristique, qui permet de mesurer à quel point il peut être vain d'imaginer qu'une grande saga à la manière du *Seigneur des anneaux* facilite la maîtrise des notions mathématiques. L'une des questions d'un QCM d'évaluation était la suivante : « Qui a inventé l'algèbre, quand, et dans quelle zone géographique ? ». Nous reconnaissons *a posteriori* les ambiguïtés de cette question, pour laquelle nous pensions recueillir des réponses sans équivoque. Mais le florilège des résultats dépassait les espérances : tant pour les personnes (Archimède, Platon, Aristote, Les Égyptiens, les Babyloniens, Pythagore, Diophante, Fibonacci, etc.) que pour l'époque (de la haute antiquité égyptienne au 17e siècle) ou les lieux (Europe de l'Ouest ou de l'Est, Moyen-Orient, Chine), tout semblait mélangé jusqu'à l'absurde. Il n'est donc pas forcément utile de raconter des histoires de mathématiques à de jeunes adultes manquant de repères historiques.

## 2 Du danger des baguettes magiques

La baguette magique des enseignants n'a pas les pouvoirs de celle des sorciers de Poudlard. Elle n'est pas rigide, mais souple : elle s'appelle la corde à treize nœuds. D'une manière que nous n'avons pas encore réussi à expliquer, ce mythe moderne a pris racine dans le monde enseignant et celui de la

[98] Licence de sciences de l'éducation « Éducation, Formation, Enseignement, Culture », proposée depuis 2015 à l'ESPÉ de l'université de Bourgogne. http://espe.u-bourgogne.fr/formation-initiale/licence.html

[99] Une UE de la L1 EFEC est consacrée à la culture scientifique.

formation, où il rencontre un certain succès alimenté par des documents en ligne affirmant souvent sans recul de la réalité historique de l'objet.

Expliquons d'abord ce qu'est cet artefact. Il s'agit d'une cordelette subdivisée en douze parties égales par treize nœuds régulièrement espacés (les deux extrémités de la cordelette portant chacune un nœud). En superposant les deux nœuds des extrémités, puis tendant la corde par le 5e et le 8e nœud, on obtient un triangle dont les mesures des côtés sont 4, 3 et 5 intervalles égaux. Le théorème de Pythagore assure que le triangle est rectangle et nous avons ainsi construit un angle droit ! Cette corde à treize nœuds donne corps au théorème, voici ce qui séduit probablement les enseignants (et les autres) qui colportent ce mythe de la corde à nœuds. L'article qui y est consacré dans le Wikipedia francophone (« Corde à nœuds ») est à cet égard édifiant et démontre qu'il reste des notices sans surveillance sur cette encyclopédie non académique. En effet, l'illustration principale provient d'un manuscrit maintenant disparu dans lequel elle était légendée « Arithmetica » (Figure 1, tronquée dans Wikipedia) et qui montre l'utilisation d'un abaque à jetons pour le calcul. Il y est également affirmé, sans aucun document sérieux à l'appui, que la corde à treize nœuds était un outil très utilisé en Égypte sur les chantiers des pyramides et au Moyen Âge par les bâtisseurs de cathédrales. Cette information invérifiable est reprise par des pédagogues (Hubaut, s.d. ; Éveilleau, s.d.), avec néanmoins quelques précautions sur le site de Thérèse Éveilleau.

*Figure 1. Planche 8 de l'*Hortus deliciarum *(Coll. Bibliothèque Alsatique du Crédit Mutuel, Strasbourg)*

Quoi qu'il en soit, l'aspect merveilleux de cet artefact qui matérialise d'une façon minimaliste et élégante un triplet pythagoricien en fait l'attrait pédagogique. Alors pourquoi mettre en doute son existence ? Depuis longtemps, de nombreux groupes d'histoire des mathématiques ont travaillé dans les IREM (Rouen, Grenoble, Dijon) et les ESPÉ (Lille, Limoges, Dijon…) sur la géométrie pratique de la Renaissance et du monde médiéval, jusqu'à l'époque moderne (Besançon). L'inventaire des ouvrages et manuscrits étudiés est très complet, même s'il ne peut prétendre à l'exhaustivité. Il s'avère qu'aucun des ouvrages étudiés par ces groupes depuis des années ne mentionne quelque corde à nœuds que ce soit, tandis que l'usage des autres instruments (fausse équerre, carré géométrique, astrolabe, cordes simples avec piquets, etc.) y est très fréquemment décrit. D'ailleurs pourquoi les bâtisseurs de cathédrales se seraient-ils embêtés à créer treize nœuds dans une corde alors que seuls le cinquième et le huitième sont utilisés ? Ou encore que l'utilisation de fanions amovibles ou tout simplement de marques sur la corde auraient été tout aussi efficaces ? Il existe de très anciens témoignages de l'utilisation de cordes pour la géométrie pratique, en Égypte par les arpédonaptes (litt. « tendeurs de corde », les arpenteurs) ou dans les *Sulbasutras*[100] en Inde (Sen & Bag, 1983). Dans les textes qui nous sont parvenus, on ne trouve aucune trace de nœuds pratiqués sur les cordes, sauf éventuellement à leurs extrémités pour les attacher à des piquets.

[100] Les *Sulbasutras* sont des recueils de pratiques géométriques mises en œuvre dans les rites sacrificiels védiques. Les plus célèbres, les Sulbasutras de Baudhayana et d'Apastamba, dateraient du milieu du premier millénaire avant notre ère.

La corde à nœuds en tant qu'objet mythique du monde éducatif ne suppose aucune philosophie de l'histoire, mais ce n'est pas le cas d'autres théories moins anodines, dont les enseignants se font également l'écho sans précaution.

### 3 Du danger de quantifier la beauté

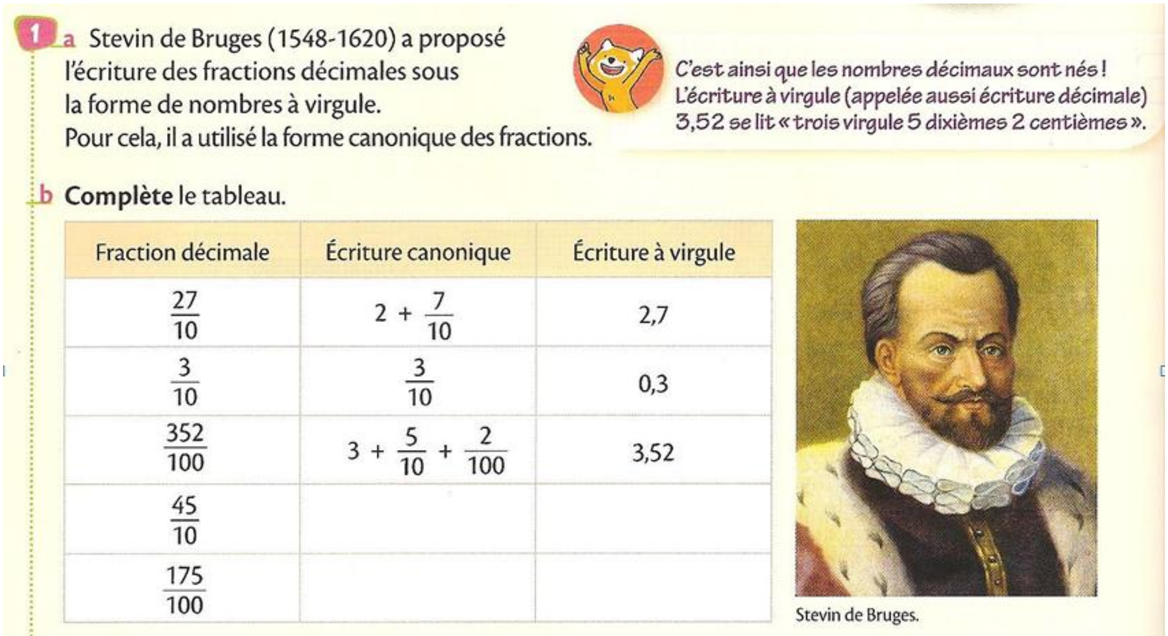
Cette fois encore, l'Égypte est le lieu fantasmatique d'une science mystérieuse des grands anciens, selon l'expression en vogue au début du XIX[e] siècle. Cette fascination pour les secrets de fabrication des pyramides a débuté avec la publication de l'étude de Charles Piazzi Smyth (1864) qui a fondé la pyramidologie. L'une des grandes trouvailles des pyramidologues est la présence discrète du nombre d'or ($\Phi$) ou de $\pi$ dans l'architecture même des monuments, valeurs obtenues après triturage des mesures de certaines longueurs en fixant parfois arbitrairement la valeur des unités. De nombreuses publications ont montré l'inanité de telles suppositions (Markowsky, 1992 ; Krivine, 2007), mais le nombre d'or et ses vertus cosmiques conservent une certain crédibilité auprès du public.

À l'école, le nombre d'or surgit en général lorsqu'il est question d'activités croisées entre les mathématiques et les arts. Combien de fois avons-nous entendu affirmer que l'esthétique classique est réglée par la divine proportion inventée par Fibonacci mais utilisée bien avant lui dans l'architecture dès l'Antiquité ? Presque systématiquement, les enseignants du secondaire invoquent une vérité statistique selon laquelle lorsque vous présentez au grand public des rectangles de diverses formes en leur demandant quel est le plus « beau », le rectangle majoritairement choisi est celui dont les dimensions sont en proportion du nombre d'or. Cette assertion sans fondement a été plusieurs fois démentie par de réels sondages (Jacquier & Drapel, 2005), et il ne semble pas que $\Phi$ joue un rôle particulier dans la beauté.

Il n'en demeure pas moins qu'en tant qu'alibi, $\Phi$ est un formidable pourvoyeur du mystère qui manque si souvent aux activités mathématiques, et les investigations qu'il permet sur les suites de Fibonacci ou l'esthétique de la peinture ne manquent pas. Faut-il pour autant conter des légendes en les faisant passer pour des vérités ? Ici encore, nous naviguons entre le désir d'offrir des activités riches et motivantes et celui de présenter des ressources fiables d'un point de vue historique.

### 4 Du danger des encarts

Revenons à Stevin et à la *Disme*. La popularité de cet ouvrage ne fait pas de doute, puisqu'un manuel récent de cycle 3 le cite dans l'introduction de son chapitre 82 sur les fractions décimales et les nombres décimaux (*Opération Maths - CM1*, Hatier, 2016, p. 170). L'encart qui y est présenté est de nature à illustrer plaisamment le propos et ancrer le portrait de Stevin dans l'imaginaire des élèves (Figure 2).



1 a Stevin de Bruges (1548-1620) a proposé l'écriture des fractions décimales sous la forme de nombres à virgule. Pour cela, il a utilisé la forme canonique des fractions.

*C'est ainsi que les nombres décimaux sont nés ! L'écriture à virgule (appelée aussi écriture décimale) 3,52 se lit « trois virgule 5 dixièmes 2 centièmes ».*

b **Complète** le tableau.

| Fraction décimale | Écriture canonique | Écriture à virgule |
|---|---|---|
| $\frac{27}{10}$ | $2 + \frac{7}{10}$ | 2,7 |
| $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | 0,3 |
| $\frac{352}{100}$ | $3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$ | 3,52 |
| $\frac{45}{10}$ | | |
| $\frac{175}{100}$ | | |

Stevin de Bruges.

*Figure 2. Extrait du manuel* Opération Maths - CM1*, Hatier, 2016, p. 170*

Au-delà de l'esthétique, l'encart se justifie par le lien qu'il donne entre les trois formes juxtaposées des nombres décimaux, très justement trouvé dans le texte original et légitimé par lui. En ce sens, il est l'exemple d'une utilisation très pertinente de la ressource originale. Mais il présente quelques maladresses d'autant plus étonnantes que deux des auteurs du manuel sont également ceux de l'intéressant article cité plus haut (Briand & Peltier, 2003). On peut par exemple être surpris du choix d'un portrait fantaisiste[101] de Simon Stevin pour illustrer l'encart alors qu'il existe un portrait gravé du vivant de l'auteur, qui mentionne correctement son identité (Simon Stevin) tandis qu'il est présenté dans l'encart comme « Stevin de Bruges » ce qui pourrait laisser croire aux élèves qu'il s'agit d'un noble prénommé Stevin. Ce qui est plus embêtant, c'est qu'on peut lire que Stevin « a proposé l'écriture des fractions sous forme de nombres à virgules » et que « c'est ainsi que les nombres décimaux sont nés » ce qui est incorrect et contredit même l'article de 2003, bien plus prudent à cet égard. Finalement l'énonciation recommandée du nombre 3,52 sous la forme « trois virgule 5 dixièmes 2 centièmes » nous paraît inappropriée.

Comme ce type d'encart n'est pas rare dans les manuels du secondaire, gageons que les nouveaux programmes de lycée qui font explicitement référence à l'histoire des mathématiques engendreront de nouvelles productions. Il est à souhaiter que les contenus n'en soient pas seulement choisis de manière illustrative, mais qu'ils soient aussi l'occasion d'activités basées sur des ressources anciennes.

## II - QUELQUES PISTES D'ACTIVITÉS

Ces difficultés liées à l'introduction d'une perspective historique en classe pourraient rendre perplexes les enseignants et les détourner de l'utilisation de ressources anciennes, laissée aux spécialistes de l'histoire des mathématiques. Comme nous l'avons vu plus haut, lorsque l'on utilise des textes anciens en classe, il n'y a pas de chemin exempt d'écueils du point de vue de la rigueur historique, mais il serait dommage de se priver de la lumière que jette l'introduction d'une perspective historique sur les notions mathématiques. Une approche pluridisciplinaire, nous dirions « polydisciplinaire » pour nous référer à la polyvalence des maîtres, contribue à faire mieux comprendre des concepts parfois difficiles et favorise chez l'apprenant le tissage de liens entre plusieurs domaines de la connaissance.

Nous avons aujourd'hui peu d'exemples d'utilisation de textes anciens dans les séances de mathématiques à l'école primaire. C'est d'ailleurs une préoccupation récente, mais de plus en plus fréquente chez les formateurs ESPÉ historiens des mathématiques de réfléchir à la mise en œuvre d'activités de cycle 3 basées sur une lecture de textes anciens. Nous en voulons pour preuve la récente publication conjointe par l'ARPEME et la Commission inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques de l'ouvrage *Passerelles* (Moyon & Tournès, 2018), qui expose en neuf chapitres diverses approches de notions mathématiques en référence à leur histoire. Les pistes d'activités que nous présentons ci-après se situent dans la ligne des chapitres de l'ouvrage, même si leur domaine d'application dépasse celui du cycle 3. Ces activités ont été pratiquées ces deux dernières années (2016-2018) dans divers cadres : en ateliers de pratique pédagogique (APP) avec des étudiants de M1 MEEF premier degré ; à l'école primaire et au collège lors de la semaine des mathématiques ou à l'occasion de journées de vulgarisation scientifique ; en licence EFEC dans l'UE de culture scientifique ; en M2 MEEF premier et second degrés, et finalement en formation continue et rencontres professionnelles (y compris le 45e colloque de la COPIRELEM).

### 1 Des matériaux anciens : Les carreaux de Truchet

Notre premier exemple se situe entre l'école maternelle (MS, GS) et la formation des maîtres (Licence EFEC, master MEEF). Les lecteurs nous accorderont qu'il est délicat d'envisager pour la maternelle des activités reposant sur la lecture de documents originaux. Mais il est possible de prendre le contenu d'un texte ancien à la fois comme ressource pour une activité (en maternelle) ou comme objet de problème en lui-même (à l'université), dans la mesure où ce texte présente lui-même des matériaux qu'il est loisible

101 Il s'agit de la reproduction d'une carte à collectionner belge des années 30 (chromos des « soies à coudre Gutermann »), en couleur mais assez différente du portrait original.

de manipuler même en dehors de leur contexte original. Nous resituons d'abord le document dans son contexte historique, décrivons son contenu, puis la manière dont nous l'avons exploité.

### *1.1 Le Mémoire de Sébastien Truchet (1704)*

Le père Truchet, prénommé initialement Jean, était né à Lyon en 1657. Naturellement porté sur la mécanique, il fut vite remarqué par l'entourage du roi pour ses talents d'horloger. Il fut nommé membre honoraire de l'Académie des Sciences après avoir probablement participé à de nombreux travaux hydrauliques dans les parcs des châteaux de Versailles et de Marly. Comme il le raconte dans son *Mémoire* présenté à l'Académie des Sciences (Truchet, 1704) c'est à l'occasion d'une visite d'inspection des canaux de la région d'Orléans qu'il fut amené à s'intéresser aux pavages : il avait été logé dans un domaine dont le propriétaire faisait recarreler le sol de la chapelle au moyen de simples carreaux carrés bicolores séparés en deux parties par leur diagonale (« mi-partis »). Dans ce Mémoire, Truchet recherche toutes les combinaisons possibles de deux tels carreaux, puis s'occupe des compositions réalisables par adjonction de telles combinaisons (figure A1.1 de l'Annexe 1).

### *1.2 Son utilisation à l'université*

Nous avons trouvé que ce matériau se prêtait particulièrement bien à des exercices de combinatoire incluant une expérimentation. L'intérêt des carreaux mi-partis de Truchet réside dans leur aspect matériel qui permet de favoriser la manipulation pour « voir ce que ça donne » au lieu de chercher à raisonner d'abord en examinant toutes les possibilités de contact de deux côtés de carreaux, ce que d'ailleurs la plupart des étudiants de L1 auraient été bien en peine d'entreprendre.

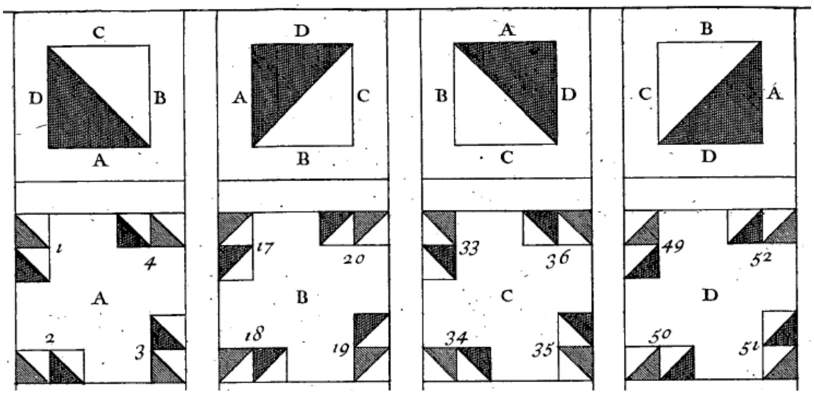
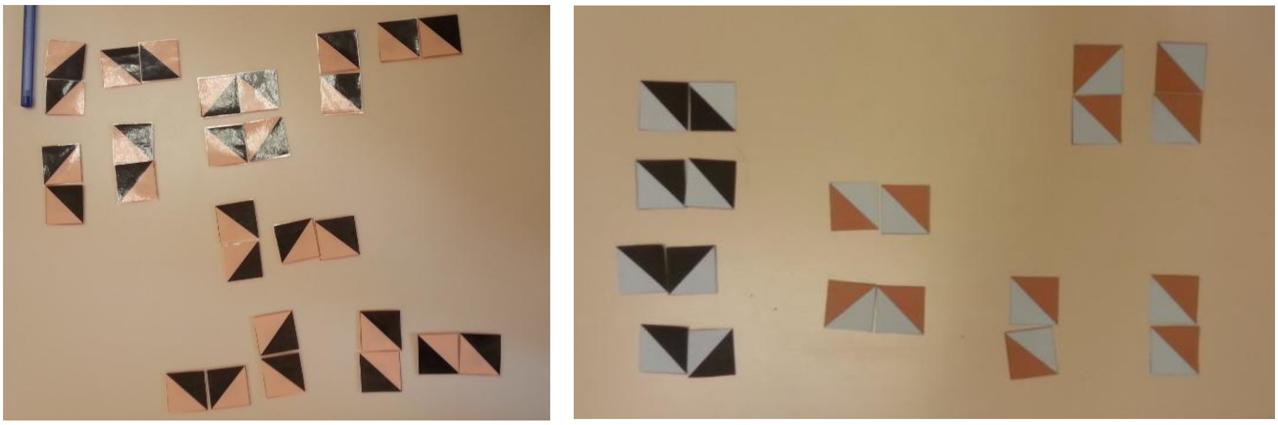



*Figure 3. Le document présenté aux étudiants*

La classe étant divisée en quatre, les étudiants disposaient d'un grand nombre de carrés bicolores de carton plastifié ; en assemblant ces carrés deux par deux, chaque groupe devait reconstituer l'une des quatre colonnes de la planche originale (cf. Annexe 1, figure A1.1), dont les premières cellules seulement étaient affichées, comme sur la figure 3 ci-dessus.



*Figures 4a & 4b. Une production initiale et un essai de réduction des cas.*

Ce qui est apparu nettement en conclusion de cette activité, c'est la place prépondérante qu'y occupe l'observation visuelle ainsi que la faculté de manipuler les objets, et que l'usage de la parole est dans un premier temps contre-productif. Par exemple, sur la production de la figure 4a, comment trouver les configurations qui manquent ? Cette question représentait un casse-tête pour les étudiants du groupe, qui durent classer les configurations déjà présentes suivant des critères visuels, et nommer les classes obtenues pour pouvoir communiquer entre eux.

Dans la seconde partie de l'activité, il s'agissait de réduire le nombre de cas au minimum en appariant les configurations semblables (figure 4b). Les étudiants font encore appel à l'évidence visuelle, mais il leur est parfois difficile d'identifier les mêmes configurations lorsqu'elles sont dans des positions différentes. Remarquons cependant que les étudiants ont tendance à assembler des carreaux de la même couleur (Figure 4b). Le fait d'avoir imprimé deux variétés de carreaux de couleurs différentes a-t-il donné un obstacle supplémentaire à la reconnaissance des formes ? Nous n'avons pas étudié l'impact des couleurs sur la réussite des étudiants, n'ayant pas initialement prévu de mélanger le carreaux de diverses couleurs. Ce travail serait  sans nul doute à mener dans le cadre d'une classe.

### *1.3 L'activité de GS*

Pas question de combinatoire aussi compliquée en maternelle ! Nous avons néanmoins cherché à utiliser le matériel de carton fabriqué pour l'occasion. L'activité proposée, encadrée par des étudiantes de M1, consistait en la reproduction par binômes de configurations simples inspirées de celles du *Memoire* de Truchet, dans le but de travailler les compétences de repérage dans le plan et de détermination de positions relatives de formes géométriques. Notre second objectif était de faire émerger la nécessité et l'utilité d'un vocabulaire descriptif géométrique approprié.

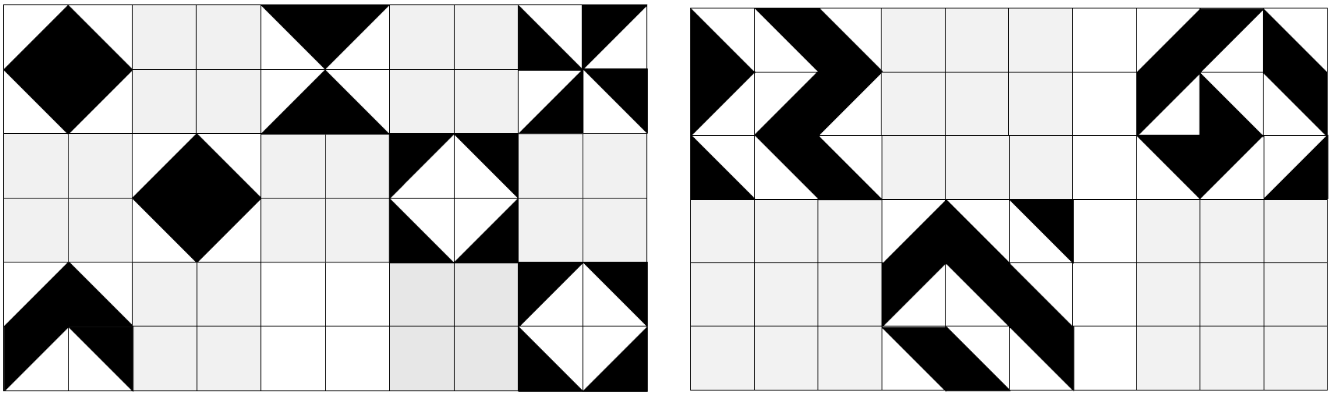


*Figure 5. Deux planches de la première activité (deux niveaux de difficulté).*

Dans certains binômes, les discussions ont été rudes, car plusieurs élèves n'étaient pas d'accord sur la réussite de leur partenaire mais éprouvaient des difficultés à leur expliquer leurs erreurs. En règle générale, celles-ci étaient liées à l'orientation des figures La médiation des étudiantes a permis de réconcilier les binômes à travers l'analyse des configurations et le choix d'expressions pour désigner les carrés mal placés ou mal orientés.

*Figure 6. Productions d'élèves et discussions en classe*

Les manipulations nécessaires à la réconciliation reposaient pour l'essentiel sur les transformations simples, rotation et symétrie axiale. Il est à noter que deux assemblages symétriques sont souvent pris pour identiques, ce qui constitue peut-être l'un des principaux inconvénients des carreaux bicolores. Mais nous sommes loin d'avoir exploité tout le potentiel de ces artefacts pour l'étude des configurations géométriques. Les lecteurs trouveront d'autres pistes avec ces mêmes carreaux dans un article déjà ancien mais complémentaire au présent travail (Neyret, 1978).

Nous avions également un projet de suite de cette activité en cycle 2, car les carreaux mi-partis existent encore de nos jours dans la vie réelle ; il est par exemple possible de s'en procurer dans les grandes surfaces de bricolage (collection « Dément », Leroy-Merlin). Le site de la grande enseigne propose même de visualiser quelques arrangements pour salle de bain, dans lesquels nous avons eu la surprise de retrouver les configurations déjà présentes chez Truchet (Annexe 1, figure A1.2). Jusqu'à présent, aucune école n'a voulu accueillir de chantier de réfection des sols d'une de ses classes, mais les images de synthèse du site leroymerlin.fr nous laissent espérer qu'un projet virtuel de rénovation peut être envisagé. Dès lors, il s'agirait pour les élèves de créer leurs propres arrangements, et d'en trouver les motifs fondamentaux reproduits par lignes ou groupes de lignes.

## 2 « Versailles » au CE2

Est-ce parce que la ville de Dijon fait partie du réseau des Cités de la Gastronomie que les écoles dijonnaises sont sensibilisées aux arts de la table ? Lorsque nous avons proposé à notre collègue Guillaume Grosmaire, PEMF à l'école d'application Chevreul de Dijon, de travailler sur des plans de table du grand siècle, son accord enthousiaste a été immédiat. Nous allions accompagner un groupe d'étudiants de M1 vers la prise en main de sa classe dans le cadre d'un atelier de pratique pédagogique, il ne restait qu'à déterminer comment exploiter le document que nous allons présenter maintenant.

### *2.1 Le document initial*

Un tel plan de table est visible dans les cuisines du château de Chantilly, où a exercé le célèbre Vatel (voir figure A2.1 de l'Annexe 2). Il s'agit du plan de la table de Louis XIV au château de Marly-le-Roi, tel qu'il lui avait été soumis en 1699. À Marly, le roi prenait ses repas avec la famille royale et des courtisans particulièrement distingués. L'unique table rectangulaire avait été remplacée par deux tables ovales et le plan présente la disposition retenue pour l'une d'entre elles. On constate dans cette disposition une recherche de symétrie, pas totale cependant puisqu'il y a dix-sept couverts. Peut-être cette symétrie n'était-elle pas souhaitable : le roi n'ayant pas d'homologue il ne pouvait s'installer qu'à une place unique, distinguable, qui correspond peut-être au couvert isolé au centre de la partie inférieure de l'ellipse.

La disposition des plats sur la table participe de l'esthétique de l'ensemble. Les couverts des convives sont représentés par des disques répartis sur toute la circonférence de l'ovale. Au centre, un hexagone curviligne qui doit correspondre à un surtout de table portant épices et aromates. Entre les deux, les « plats de Rost » matérialisent un axe de quasi-symétrie horizontal tandis que les soupières circulaires et les « Pots à l'oille »[102] sont disposés de manière symétrique par rapport au surtout central. Les assiettes rondes de hors d'œuvre complètent l'ensemble pour laisser un minimum de place vide sur la table.

Ce document fortement lié à l'histoire de France (vue du côté des maîtres d'hôtel) a été un utile point de départ d'activités de découverte et d'approfondissement sur la symétrie dans la classe de CE2.

### *2.2 L'activité en CE2*

Notre collègue est un utilisateur chevronné du tableau interactif et des technologies informatiques en général. Après un temps d'échange sur le contexte historique de Versailles au temps du roi-soleil, le plan de 1699 est décortiqué en insistant sur l'organisation de la réception et du placement des convives et plats sur la table. Lorsqu'une première idée de placement « en miroir » est formulée, les élèves sont

[102] Ces plats fermés en faïence contenaient des viandes en sauce dont Marie-Thérèse était friande et dont elle avait importé la mode d'Espagne.

invités tour à tour à faire apparaître cette propriété de la figure par coloriage : l'un choisit un objet qu'il colorie, son suivant doit peindre de la même couleur un des objets qui lui correspond  et le résultat est soumis à l'assemblée. L'introduction de la notion d'axe de symétrie est favorisée par la tâche interactive de coloriage et la demande finale : « À quel endroit pourrait-on découper cette table pour obtenir deux partie exactement identiques ? ».

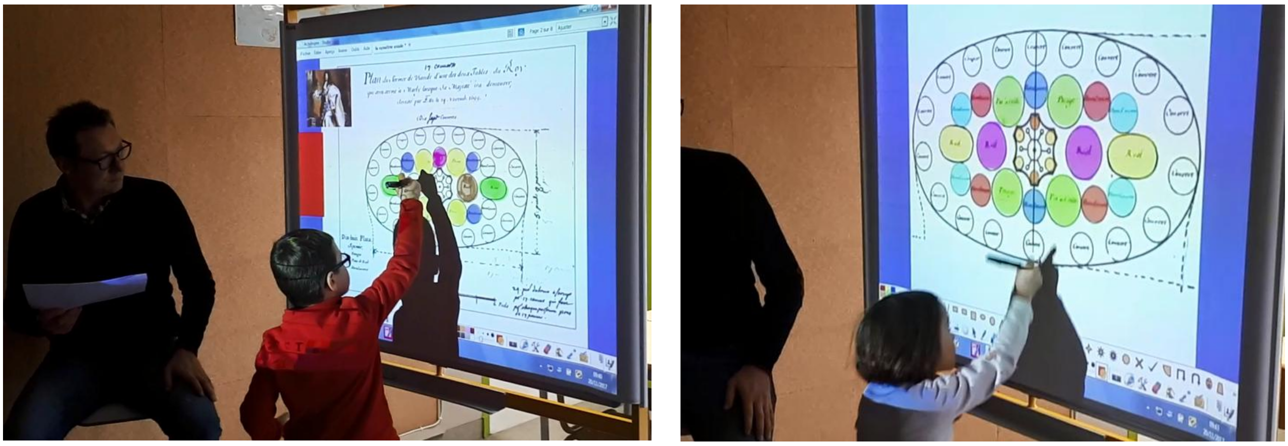


*Figure 7. Découverte des axes de symétrie*

L'activité plénière engendre peu d'erreurs dans la mesure où les échanges à l'intérieur de la classe sont fructueux et que les propositions incorrectes sont immédiatement corrigées. Il est à noter cependant qu'un second axe de symétrie, horizontal celui-là, a été accepté par tous (y compris les maîtres présent) sur la base d'une évidence visuelle globale, alors que le nombre de convives autour de la table ne le permettait pas. Il aurait alors fallu convenir d'une quasi-symétrie, mais les adultes présents ont préféré ne pas aller trop loin avec cette notion qui pouvait semer le trouble chez les élèves. D'autant que la quasi-symétrie était souvent à l'œuvre dans les ateliers individuels, dans la mesure où, s'agissant de reconstituer des figures incomplètes, les élèves avaient recours à la perception globale de leur production quand il fallait estimer la qualité de leur travail. Un exemple de document créé par Guillaume Gromaire se trouve en figure A2.2 de l'Annexe 2

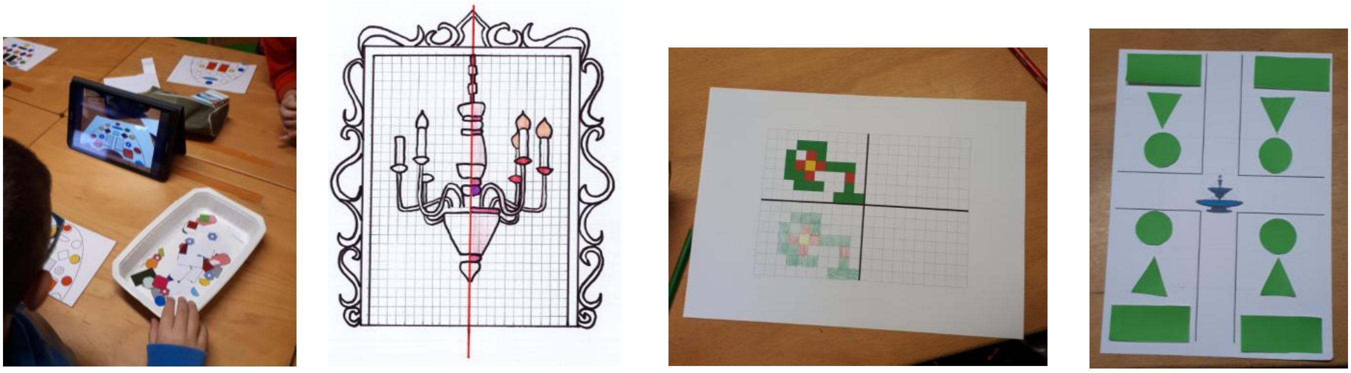


*Figure 8 (a, b, c et d). Déclinaisons diverses de la symétrie versaillaise*

Comme on pouvait s'y attendre, l'exercice est particulièrement réussi lorsque l'axe de symétrie est « vertical » (chandelier de la figure 8.b ; façades d'édifices -non présentées ici-) mais le recours à la translation intervient dans le cas « horizontal » (jardins pixels de la figure 8.c) qui peut même se résumer à une reproduction décalée. Par exemple, des élèves avaient à reconstituer la table du roi  dont ils n'avaient qu'une photo de la moitié et le calque de l'autre moitié à colorier symétriquement. Certains d'entre eux ont adopté une stratégie simplificatrice consistant à retourner leur calque, reproduire à l'identique l'image donnée sur la tablette, et finalement rétablir l'orientation initiale de leur calque (figure 8.a). Cette stratégie était valable dans ce cas, car nous n'avions pas pris la précaution de créer des dispositions de table ne présentant qu'un axe de symétrie. Par ailleurs, la possibilité qu'avaient les élèves d'estimer en un seul coup d'œil la réussite de leur travail rendait inutile tout examen point par point qui aurait pu permettre de les emmener vers des méthodes de construction plus élaborées. Il nous fallait trouver un dispositif les obligeant à analyser leur production.

*Figure 9. Le banquet presque en vrai*

C'est ainsi que nous avons décidé de créer des brigades de serveurs, maîtres d'hôtels et sommeliers : les élèves allaient dresser la table pour un banquet royal (figure 9). N'ayant pu disposer d'une vaisselle comparable à celle de Louis xiv, les étudiants ont préparé des demi-tables avec assiettes et gobelets en plastique, napperons et serviettes en papier, plats en aluminium et tout ce genre de matériel fréquent dans les écoles. Un tube rouge de la salle de motricité en guise d'axe de symétrie, nos brigades étaient prêtes à dresser la table. Étant donné la longueur de la table (une dizaine de mètres) et la taille des élèves, il ne leur était pas possible de superviser le travail d'en haut, d'autant plus qu'il s'agissait d'une tâche collective devant être finalement évaluée par un seul Intendant des menus plaisirs de la table. Les élèves passaient ainsi tout naturellement du micro-espace au méso-espace (Brousseau, 1983).

D'eux-mêmes, les élèves ont tendance à effectuer la tâche en deux étapes, considérant successivement la position puis l'orientation des objets à placer. Ils assignent d'abord un emplacement aux divers éléments constitutifs dont ils n'ont pas eu besoin de faire une liste (car tout est disponible sur place). Ce n'est qu'en deuxième lieu qu'ils s'intéressent à l'orientation de ces objets, ce qui engendre des discussions et même une contestation de l'autorité de l'Intendant… Certains élèves ont en effet considéré que la première étape était suffisante pour que la tâche soit accomplie, s'attachant ainsi à l'aspect fonctionnel des couverts et des plats, tandis que l'aspect esthétique était mis en avant par les vérificateurs.

Il aurait été possible d'insérer cette activité dans un projet interdisciplinaire plus large autour des Menus Plaisirs de Sa Majesté, mais le temps de notre atelier pédagogique ne le permettait pas. Nous le mentionnons néanmoins afin de rappeler que les mathématiques ont toute leur place dans un projet de ce type, qu'il n'est pas obligatoire de restreindre aux domaines artistiques et littéraire. C'est aussi l'avantage des artefacts et des ressources matérielles que d'être des objets interdisciplinaires par eux-mêmes.

## 3 Compter et calculer aux jetons

Le second chapitre de la brochure *Passerelles* (Moyon & Tournès, 2018) montre la pertinence de l'utilisation d'abaques à jetons au cycle 3, afin de faire parcourir aux élèves l'histoire des techniques de calcul, depuis sa pratique à l'aide d'artefacts jusqu'à l'utilisation des signes écrits. Les auteurs y indiquent l'histoire et l'usage pédagogique possible de tables à compter à la manière ancienne. Les abaques fabriqués par Dominique Tournès et son groupe de l'IREM de la Réunion sont constitués d'un support papier sur lequel sont tracées des lignes qui porteront les jetons selon l'ordre des unités, dizaines, centaines, etc. Notre pratique du calcul aux jetons est différente de celle-ci, car nous la puisons dans des ouvrages (anonyme, 1509 ; anonyme, 1551) qui présentent les calculs sans les lignes. Par ailleurs, nous ne nous servons pas des jetons avec des débutants en calcul, mais avec des élèves, étudiants et adultes connaissant déjà le système décimal de position et les opérations usuelles. La confrontation de ces publics avec cette technique ancienne leur permet de revisiter leurs représentations de la numération et des calculs, souvent pour le plaisir quand il s'agit d'adultes. Il nous paraît cependant envisageable de proposer le calcul aux jetons comme remédiation en cas de difficultés avec la numération et les opérations. En effet, comme nous allons le voir, si l'on n'impose pas de technique particulière mais qu'on laisse les personnes s'approprier le dispositif, celui-ci leur permet de remettre en question leurs représentations personnelles du système décimal de position.

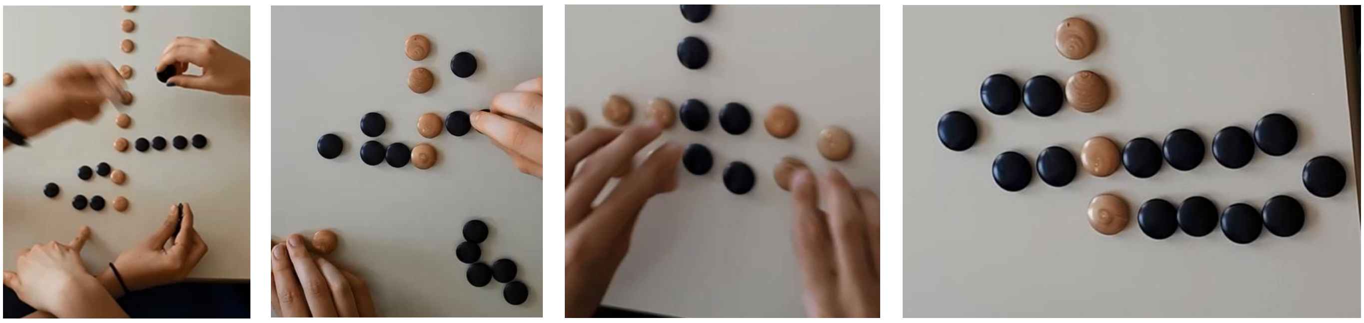
### 3.1 Les ressources

Il existe de nombreux ouvrages d'arithmétique imprimés au début du XVIe siècle, principalement à Lyon qui est à cette époque un centre majeur, à la fois pour le commerce et pour l'imprimerie. Notre principale référence est un ouvrage rarissime, le *Livre de Chiffres et de Getz*[103] (anonyme, 1509) dont il n'existe à ce jour qu'un exemplaire connu, à la bibliothèque Méjanes d'Aix en Provence. L'auteur n'en est pas identifié et d'ailleurs le contenu n'est pas tout à fait original puisqu'on le retrouve en partie dans des manuscrits du XVe siècle et dans d'autres ouvrages imprimés du XVIe siècle. La page de titre du livre (voir l'Annexe III) n'indique que l'identité des imprimeurs, Pierre Mareschal et Barnabé Chaussard. Leur marque d'imprimeur étant endommagée en bas de son côté droit, nous pouvons estimer que le livre a été imprimé entre 1508 et 1510 (date de fin de l'association de deux libraires), c'est pourquoi nous la datons de 1509.

Comme la plupart des traités d'arithmétique commerciale de cette époque, le *Livre de Chiffres et de Getz* explique, d'une part la manipulation des jetons, tant pour la représentation des nombres (la *Numeration*) que pour les quatre opérations, et d'autre part la résolution de problèmes fondée sur les règles de la proportionnalité. Dans nos activités en classe ou lors de séances grand public, nous n'en présentons que la page de titre et la planche légendée « La figure de numeration, laq[ue]lle monstre pauser les getz et le[ur] valeur » (Annexe III), le premier exercice consistant à comprendre comment sont posés les jetons et à trouver la valeur du nombre donné en exemple. Comme aucune ligne n'est gravée sur la planche, les ordres de grandeurs sont néanmoins indiqués par une colonne de jetons, appelée « l'arbre », à laquelle les imprimeurs ont pris soin d'ajouter une légende indiquant ces ordres de grandeur, mais que les praticiens de l'arithmétique n'avaient évidemment pas avec eux.

### 3.2 Les manipulations en classe (et ailleurs)

Tout l'intérêt de cet abaque sans ligne est qu'il est très facile à fabriquer et à installer où l'on veut : il suffit d'avoir sur soi une bonne quantité de jetons (dans notre cas, des jetons de go) et une surface plane. Les participants aux activités construisent eux-mêmes leur arbre de calcul, il est à cet égard utile d'avoir des jetons de plusieurs couleurs, comme on le voit sur trois des photographies de la figure 10.



*Figures 10a, 10b, 10c & 10d. Diverses techniques de multiplication*

Pour commencer, il faut trouver la valeur du nombre donné en exemple dans le livre. Les participants ont peu de difficulté à associer chaque groupe de jetons à l'ordre de grandeur de la « branche » à laquelle il appartient et reconstituer ainsi le nombre 214 112 138. Quelques exercices de numération sont l'occasion d'expliquer le rôle du jeton quinaire, placé en position intermédiaire entre deux branches et représentant cinq jetons de la branche inférieure. Une explication possible vient naturellement : au-delà de cinq, il y a peu de chance de pouvoir percevoir immédiatement les quantités par *subitizing*. Dans le cadre des comptes monétaires, il serait bien facile à un arithméticien virtuose mais malhonnête de prélever un jeton par-ci par-là et ponctionner ses clients. Le jeton quinaire permet à tous les protagonistes un contrôle visuel des opérations.

103 Ancien mot pour *jeton*.

Les opérations simples, addition et soustraction, ne nécessitent pas d'explication : pour additionner deux nombres dans l'arbre, il suffit de cumuler les jetons de même ordre et, lorsqu'on atteint une dizaine, de placer un unique jeton sur la branche supérieure.

Lorsqu'il s'agit de multiplication, l'habitude est de poser le multiplicande sur les branches gauches de l'arbre et le produit sur les branches droites. Le multiplicateur n'est pas représenté, et c'est justement la raison de la diversité des techniques possibles. Notre premier exemple est celui de la multiplication par 20, souvent utilisé dans les textes anciens pour la conversion de monnaie, car une livre correspond à vingt sols (et un sol à douze deniers). La tâche illustrée par la figure 10a est la conversion de 27 livres (à gauche) en sols. Les participants l'effectuent tout simplement : chaque jeton présent à gauche donne naissance à deux jetons à droite sur la branche immédiatement supérieure. Le jeton quinaire donnera donc deux jetons entre les branches des dizaines et des centaines, remplacé par un jeton sur la branche des centaines. La différence principale entre les manipulateurs est le fait de laisser à gauche le multiplicande intact ou au contraire d'en éliminer chaque jeton au fur et à mesure qu'il est remplacé par les deux autres à droite.

Après ce premier exercice facile, nous demandons aux participants de convertir 27 sols en deniers, c'est-à-dire de multiplier 27 par 12. C'est avec ce multiplicateur que les techniques diffèrent. Les trois méthodes illustrées par les figures 10b, 10c & 10d sont, dans l'ordre :

- 10b : remplacement de chaque jeton de gauche par douze jetons à droite, c'est-à-dire deux jetons dans la branche de même niveau et un jeton dans la branche immédiatement supérieure. Le jeton quinaire ne fait pas exception et ce n'est qu'après avoir posé tous les jetons à droite que les simplifications sont opérées.
- 10c : Le nombre 27 est copié à droite puis tous ses jetons sont surélevés d'une branche (« on fait : fois dix »), enfin chaque jeton de gauche est déplacé, avec doublement, à droite dans la branche de même ordre. Le jeton quinaire est simplement surélevé jusqu'à la branche des dizaines. L'élève de troisième de la photo trouvera 374, car dans sa première surélévation, le jeton quinaire a été placé par erreur sur la branche des centaines au lieu d'être en position intermédiaire.
- 10d : Les jetons de gauche sont reproduits à droite puis doublés (mais l'élève oublie de doubler le jeton quinaire). Ensuite, au lieu de surélever d'une branche le paquet de jetons de droite, les élèves opèrent ce déplacement sur les jetons de gauche. Puis ils s'arrêtent, perplexes (c'est ici que la photo est prise). L'aspect strictement gestuel de la procédure les a menés à une impasse. La reprise de cette procédure, étape par étape, avec discussions et commentaires, leur permet de rectifier la manipulation, en corrigeant au passage l'erreur sur le quinaire.

Ces diverses techniques sont guidées par différentes décompositions du multiplicateur 12, soit comme un bloc (Figure 10b), soit comme 10+2 (Figure 10c), soit comme 2+10 (Figure 10d). Le moment le plus intéressant pour les participants est la vérification de leur résultat et la recherche d'une éventuelle erreur. Pour cela, il est utile de les filmer en leur demandant de recommencer les manipulations pour la caméra en commentant leurs gestes, car il n'est pas naturel pour eux de parler en opérant.

Nous avons maintes fois constaté que cette activité de calcul aux jetons peut être menée sans recours au langage, car l'essentiel de la pratique se situe dans le geste, que chacun peut reproduire devant d'autres personnes sans un mot. S'il n'était pas question de faire verbaliser les participants de l'atelier pour qu'ils donnent l'explication de leurs techniques, cela pourrait presque se produire dans un silence complet. Nous demandons cependant systématiquement l'explication des manipulations, que les opérateurs soient débutants ou experts, car sans la phase de verbalisation, les échanges ne seraient que visuels et en resteraient à un niveau technique. Comme la pratique n'est pas la science, l'abandon des mots condamnerait les participants à n'être que des exécutants. Une autre modalité de l'exercice nous a été suggérée, mais nous ne l'avons pas encore expérimentée : elle peut mettre en scène un manipulateur muet associé à un orateur n'ayant pas la possibilité de toucher les jetons, l'action du premier étant alors commentée par le second.

## 4 Retour vers les mots

Dans les trois activités présentées plus haut, l'apport des textes est minimal. Ces activités sont centrées sur des ressources anciennes qui ne nécessitent pas la lecture d'un mode d'emploi, ni quelque écriture que ce soit. Il s'agissait d'abord de réaliser une tâche à l'aide d'objets inspirés d'artefacts du passé. Même dans le cas du calcul aux jetons, il n'est pas nécessaire de décrypter le texte ancien associé aux images présentées pour pouvoir s'investir dans la tâche demandée. Il n'est même pas nécessaire à l'enseignant de fournir des explications détaillées, car les objets se laissent apprivoiser facilement. Mais la question langagière n'en est jamais éliminée pour autant et il serait dommage d'abandonner les discours logiques qui nourrissent si souvent la réflexion en mathématiques. Il est même possible de regarder un texte ancien comme un véritable artefact, à plusieurs niveaux. Les idées et les mots des penseurs nous ont été transmis par le livre, l'un des objets les plus fascinants inventés par les humains, même s'il tend à disparaître au profit de supports modernes, eux aussi inventions humaines. Un texte donné à étudier aux élèves est d'abord un objet, la feuille de papier imprimée, manipulable en tant qu'objet. Nous la voyons donc comme un artefact pédagogique, simple dispositif destiné à engendrer l'interaction, la confrontation et le questionnement sur les connaissances. Dans les pratiques que nous présentons, les textes imprimés sont des supports de travail portant déjà les écrits qui engendreront les nôtres. En ce sens, ils sont des objets vraiment interactifs. Nous donnons en résumé trois exemples d'utilisations de textes anciens dans lesquelles les mots et les idées sont les objets de l'étude.

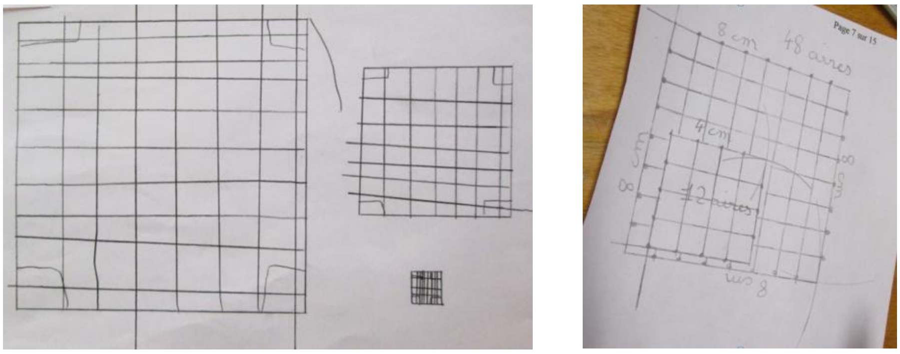
### *4.1 Doubler le carré, avec ou sans Platon*

L'utilisation par Socrate du problème de la duplication du carré pour étayer sa théorie de la réminiscence est un classique de la philosophie de la connaissance, que l'on trouve dans le dialogue *Ménon* de Platon. Le dialogue a fait l'objet d'une recherche interdisciplinaire mathématiques/français menée par une équipe de l'IREM de Paris, et dont la rédaction par Renaud Chorlay constitue le cinquième chapitre de *Passerelles* (Moyon & Tournès, 2018). Le dialogue a ceci de particulier qu'aucune figure datant de l'époque antique ne l'accompagne, il n'est d'ailleurs même pas sûr qu'il en ait existé à cette époque. Les figures ont depuis très longtemps été reconstituées par les lecteurs de Platon, mais c'est un exercice passionnant d'essayer de comprendre le texte sans elles et de les reconstituer au fur et à mesure de la lecture. Malgré les difficultés du texte, le chapitre met en évidence l'intérêt de l'activité en français comme en mathématiques. Dans le projet du groupe de l'IREM de Paris, les mots et le discours sont au centre des objectifs d'apprentissage.

Il s'avère que nous avions également travaillé sur la duplication du carré, mais dans une toute autre perspective. Après les premières séances d'introduction aux fractions, la question de la division d'une quantité se posait à des élèves de CM1 (école Petit Bernard de Dijon). La nature même des fractions n'allait pas de soi. Nous avons donc profité de ce moment de questionnement pour suggérer comme « petit exercice », la construction d'un carré d'aire double de celle d'un carré donné.

Comme dans l'expérimentation citée plus haut et comme chez Platon, la première réaction des élèves est de doubler la valeur du côté du carré, soit numériquement à partir de sa mesure, soit par un report au compas. Comment leur expliquer que l'aire du carré obtenu n'est pas le double de l'aire initiale ? Ils ont eux-mêmes l'idée de subdiviser chacun des carrés obtenus en carreaux d'aires égales, ou presque (voir la figure 11a), procédé qu'ils qualifient de « technique des aires ».

Lorsque la subdivision a été faite dans les règles de l'art, c'est le calcul qui laisse à désirer (Figure 11b) : le jeune homme a considéré qu'un carré de côté 4 avait une aire « 12 aires » et que son double, de côté 8, donc, avait une aire de « 48 aires ». Il n'a pas pu expliquer ses calculs, mais l'activité était quand même sauvée puisque, comme les autres, il avait obtenu un quadruplement de l'aire du carré initial !




*Figures 11a & 11b. L'un des carrés est-il le double de l'autre ?*

### *4.2 L'expérience de l'étrangeté*

Nous évoquons brièvement des expériences de classe qui n'ont pu être abordées lors de l'atelier, mais qui nous semblent d'intérêt pour notre propos. Ces activités sont basées sur des textes arithmétiques de la fin du Moyen Âge et de la Renaissance, qui ne font pas appel à un formalisme algébrique, mais présentent néanmoins des algorithmes de résolution de problème sans l'usage des lettres. L'un des ouvrages que nous avons le plus utilisés est l'*Œuvre tressubtile et proufitable* de Juan de Ortega, première arithmétique espagnole imprimée (Ortega, 1515).

La façon la plus simple de partager l'expérience de l'étrangeté avec les lecteurs est de leur donner le texte original d'une des activités de lecture / interprétation proposée à des élèves de seconde (Ortega, 1515, fol. XCIXr°-orthographe modernisée-) :

> *Un homme fait son testament & a vaillant 3000 écus et laisse sa femme grosse d'enfant. Et ordonne ainsi que s'il meurt et après sa femme fasse un fils, que ledit fils aura les trois parts de ses biens et la mère l'autre partie. Et [si] elle fait une fille, la mère aura les trois parts de ses biens et la fille l'autre partie. Advient qu'après la mort du père, la femme fit deux enfants tout ensemble, c'est à savoir fils et fille. Demande comment se partiront les biens dudit défunt par ainsi que le testament du père soit observé.*

Ce type de problème est dit « de testament », on le trouve assez fréquemment dans les ouvrages anciens d'arithmétique commerciale. Il est possible que la popularité de ce genre de questions provienne de la nécessité de faire appel à des arithméticiens, voire des algébristes, dans les litiges au sujet des héritages, car les règles du droit en cette matière ont pu être extrêmement compliquées pour le commun des mortels. Dans les classes, c'est la typographie ancienne qui constitue le premier obstacle à la lecture. Étonnamment, aucun élève n'a cependant protesté contre le sort réservé aux filles. Une fois la barrière du langage surmontée, il s'agit de comprendre le sens de la solution donnée par Ortega :

> *Et tu feras ainsi : commence avec la fille car si la fille a une partie la mère doit avoir les trois parts, pour ce pose 1 pour la fille et trois pour la mère et le fils doit avoir trois fois autant que la mère et seront 9. Ores, ajoute ces trois sommes c'est à savoir 1, 3, 9 & sont 13 pour partiteur. Ores, diras par la règle de trois : si 13 me donnent 3000, que me donnera 9 ? Multiplie et partis ainsi que la règle de trois le requiert & trouveras 230 écus &* $\frac{10}{13}$*, qui est la part de la fille. Et a la mère 692 écus et* $\frac{4}{13}$*, vient au fils 2076 écus et* $\frac{12}{13}$ *d'écus.*

Les enseignants de mathématiques saisiront rapidement qu'il s'agit de partages proportionnels, mais nous devons rappeler que ces notions sont bien loin des préoccupations et des compétences des lycéens contemporains. Ceux-ci achoppent particulièrement sur les coefficients 1, 3, 9 et 13, dont ils ont peine à comprendre le rôle dans la résolution du problème. Ici les numérateurs et le dénominateur ne sont pas distingués par leurs positions dans une fraction mais par le mot « partiteur » qualifiant le nombre 13.

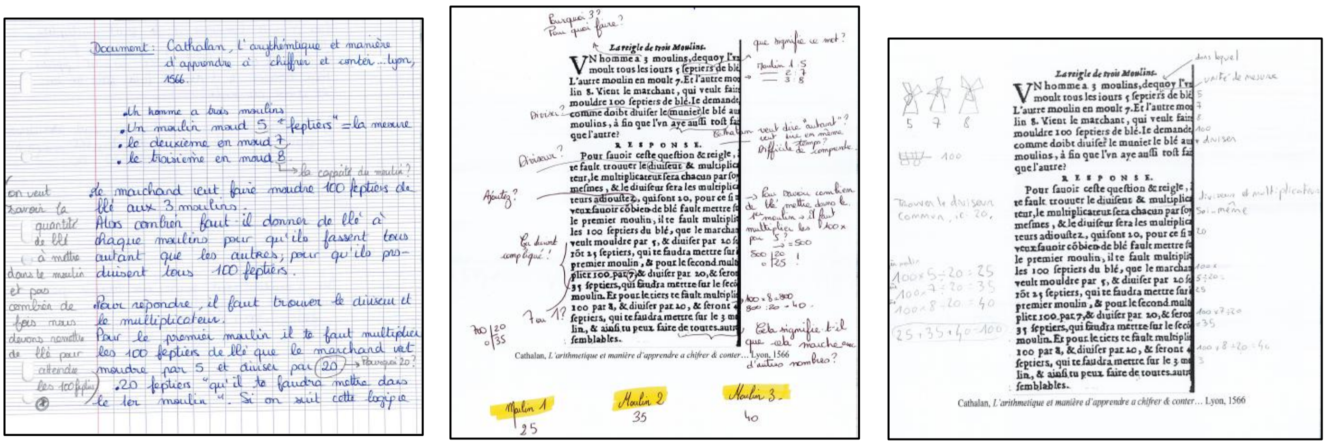
Ce n'est certes pas le texte le plus difficile à lire que nous avons proposé à des élèves de lycée. Pour une étude plus détaillée de la question de la compréhension des textes d'Ortega, nous renverrons les lecteurs à un autre article (Métin, 2012). En règle générale, la non-compréhension initiale, toute frustrante qu'elle soit, mène quand même à la satisfaction de percevoir le sens des textes à travers leurs contenus mathématiques avant d'en saisir les mots et les tournures. Nous présentons maintenant un travail de recherche en cours sur les mécanismes de la compréhension de textes mathématiques, manifestés dans des ateliers d'écriture marginales.

### 4.3 *Mathématiques dans les marges*

Notre dernière piste à propos de l'utilisation de textes anciens en classe concerne la formation initiale des enseignants, pour laquelle nous avons utilisé les ressources textuelles comme artefacts d'écriture, c'est-à-dire comme des objets choisis/créés par nous et destinés à servir de supports à la trace écrite de l'appropriation des textes qu'ils portent. Il ne s'agit pas pour les étudiants de faire l'exégèse de passages obscurs de textes anciens, mais plutôt de se confronter à ceux-ci et de s'interroger sur les mécanismes qu'ils mettent en œuvre pour les comprendre.

C'est une tradition ancienne en mathématiques que d'écrire dans les marges des livres qu'on étudie. Nous n'en citerons que le plus célèbre exemple, celui de Pierre de Fermat annotant son exemplaire des *Arithmétiques* de Diophante et laissant une mention marginale qui allait devenir sa fameuse conjecture, dont l'exiguïté de la marge l'empêchait de développer l'élégante démonstration. Lors de nos pérégrinations dans les bibliothèques, nous avons pu consulter de nombreux ouvrages portant de telles mentions marginales, d'une portée certes moins grande, mais non moins révélatrices du réel aspect interactif des ouvrages traditionnels. En outre, qu'elles soient de savants connus ou de lecteurs obscurs, les mentions marginales sont autant de manifestations des mathématiques comme activités humaines.

L'un de nos derniers projets de recherches (conjoint entre l'IREM et l'ESPÉ de Dijon) porte sur les traces écrites de l'activité des élèves ou des étudiants. Dans son volet scolaire, ce projet se centre sur le cahier de mathématiques vu comme un journal personnel de l'élève. Dans son volet universitaire, il s'appuie sur l'annotation marginale de photocopies de textes anciens de mathématiques, allant de l'arithmétique commerciale à l'algèbre, la géométrie et les probabilités. Notre travail d'analyse des productions est centré *a priori* sur trois axes : la nécessité ou non de la réécriture, celle de la traduction en termes familiers ou notions usuelles et la place des diagrammes.




*Figures 12a ; b & c. Le problème des trois moulins annoté par les étudiants de M2 MEEF*

Lors de séances de TD en master 2 MEEF, nous proposons aux étudiants de travailler sur l'un des documents distribués, avec la consigne de noter dans l'espace de leurs marges tout ce qui leur passe par la tête, questions, réflexions, étonnement, qu'ils considèrent comme faisant partie de leur mécanisme d'appropriation des contenus.

Dans l'exemple que nous présentons en figure 12, le texte étudié provient d'un ouvrage d'arithmétique pratique contenant de nombreux problèmes qui sont résolus par diverses variantes de la règle de trois. Le problème traité est le suivant (Cathalan, 1566, fol. 66v) :

> *Un homme a 3 moulins, de quoy l'un moult tous les jours 5 septiers de blé. L'autre moulin en moult 7. Et l'autre moulin 8. Vient le marchant qui veult faire mouldre 100 septiers de blé. Je demande comme doibt diviser le meunier le blé aux moulins, afin que l'un aye aussi tôt fait que l'autre ?*

Difficile pour les étudiants des jeunes générations d'imaginer que le setier est une mesure de capacité (de douze boisseaux), surtout lorsqu'il est écrit « septier ». Difficile également de comprendre tout à fait qu'il s'agit d'un problème de partage proportionnel, comme celui d'Ortega.

C'est sans doute pour cela que les étudiants ont besoin de récrire le texte, comme on le voit dans la production de la figure 12a, dont l'auteure a oublié qu'elle n'avait que l'espace des marges de sa photocopie pour son travail. Sans surprise, les mots sont un premier obstacle, mais nous avons ici une totale reformulation du texte, qui néglige le point crucial de la question, c'est-à-dire le fait que les trois moulins doivent avoir terminé en même temps. La production de la figure 12b montre également un attachement à la signification des mots, mais le texte n'est pas récrit. Les mots sont repris, redéfinis, surlignés. Dans la production de la figure 12c, l'étudiant a eu besoin d'une représentation des moulins, ce qui n'était pas le cas des deux premières.

Ne soyons pas surpris de l'incompréhension manifestée par certains étudiants. Nous leur avions à dessein précisé qu'il ne s'agissait pas de comprendre le texte avec certitude, mais d'écrire tous les éléments de leur démarche de recherche de sens. Cette compréhension n'étant pas le but du travail, elle n'était donc pas un critère de réussite.

## III - CONCLUSION : LES BÉNÉFICES D'UNE APPROCHE HISTORIQUE

Nous avons présenté ces diverses activités en lien avec la problématique initiale de l'utilisation de textes originaux en classe évitant les écueils soulevés au départ, c'est-à-dire avec le souci de ne pas sacrifier la rigueur historique à la beauté du récit. Le choix de se centrer sur les artefacts, sans pour autant éviter l'écrit si c'est possible, permet effectivement de gommer la difficulté liée à la maîtrise du contexte historique, des circonstances précises. Cela pourrait se résumer par cette formule : ne pas se laisser enfermer dans un carcan historien quand les ressources sont pertinentes pour les mathématiques, mais s'autoriser à explorer le contexte historique et sociologique de ces ressources.

### 1 Faire de l'histoire des mathématiques…

Dans notre vision, faire de l'histoire des mathématiques c'est d'abord pratiquer des mathématiques. Avec cette particularité que ces activités mathématiques s'inspirent de sources originales, que celles-ci soient directement exploitées avec les élèves ou non. Il ne s'agit donc pas d'activités historiques à proprement parler, car les méthodes des historiens n'y sont pas de mise. Les questionnements ont essentiellement pour objet la compréhension des notions abordées, même si cette compréhension ne ressort pas uniquement du domaine scientifique. Toutefois, apprendre à calculer aux jetons sans s'interroger sur l'époque médiévale, voire sur le lien entre les objets et les nombres, constituerait une activité aride et dont la légitimité pourrait être mise en cause. Cela dépend des sources originales étudiées. Dans le cas des carrelages, il y a si peu de différence entre les objets représentés au XVIIIe siècle et le modèle *Dément* d'aujourd'hui qu'il était tout à fait possible de ne pas faire référence au texte de Truchet pour notre activité. Cependant, la recherche des combinaisons de carreaux est légitimée par l'article de 1704, tandis qu'elle pourrait paraître artificielle ou inutile si elle était simplement posée comme sujet de recherche. Cet exercice de combinatoire sera facilement présenté comme une reconstitution d'un texte ancien, dont l'existence permet d'ailleurs la vérification et la comparaison avec les solutions trouvées par les élèves.

### 2 Le dépaysement épistémologique

Le concept de dépaysement épistémologique a été remis à l'honneur récemment par David Guillemette dans sa thèse de doctorat en éducation de l'université du Québec à Montréal (Guillemette, 2015). Ce qui est à l'œuvre dans le dépaysement épistémologique, c'est la transformation d'un objet familier (le savoir mathématique) en objet étranger sous le regard de son propriétaire. L'histoire des mathématiques perturbe la vision usuelle que nous avons des mathématiques en nous confrontant à des écrits et des pratiques dans lesquelles nous ne reconnaissons pas nos propres connaissances. « Ce qui va de soi » devient l'objet d'un étonnement, selon la formule de l'historien Paul Veyne.

Dans nos exemples d'activités, c'est l'étude des textes arithmétiques de la Renaissance qui permet le mieux le dépaysement épistémologique des élèves de lycée et des maîtres en formation. L'intérêt de ce dépaysement est la remise en cause des certitudes du type « c'est facile » en replaçant les étudiants professeurs stagiaires dans le contexte de l'obscurité face à un texte dont ils ne comprennent pas les ressorts scientifiques. Il y a alors un triple effet pour les personnes dans cette situation :

1° Comme des élèves obligés de se pencher sur des exercices qu'ils goûtent peu, elles pourront d'abord affirmer « Je n'y comprends rien ! » ;

2° Chercher à décoder les mathématiques qui se trouvent derrière cette langue étrangère les amène à se rassurer sur leur propre capacité de compréhension et à finalement pouvoir interpréter en langue moderne (ici, l'algèbre) les méthodes anciennes ; c'est donc un travail de traduction et de commentaire, car il leur faut insérer des lignes algébriques complémentaires pour profiter à plein des contenus du texte ancien ;

3° Après s'être réassurées, elles devront s'interroger sur les mécanismes qui leur ont permis de se réapproprier les notions mathématiques cachées. De fait, cette compréhension aura été favorisée par les rayons X de leur entendement, qui leur auront donné à voir le squelette mathématique de l'écrit considéré. Les habits anciens qui les en empêchaient sont à comparer avec ceux de leur propre langage d'enseignants, qui dès lors doit être regardé d'un point de vue réflexif critique.

Le dépaysement n'a donc de sens que si l'on rentre de voyage changé par les contrées visitées. Et comme pour les voyages, ce déplacement de point de vue est affaire de rencontre d'autrui. Autrement dit, chercher le contexte initial d'invention d'une notion mathématique ou s'approprier des pratiques d'un autre temps nous ramène à l'expérience de l'autre, géographiquement et temporellement. Dans cet état d'esprit, s'intéresser au contexte historique et social participe du respect dû à l'autre, fût-il un disparu. Il ne s'agit donc pas d'une manie d'historien scrupuleux, mais d'une attitude révérencieuse lors de l'examen de ce que nous ont laissé des ancêtres parfois très différents de nous. Dans ce sens, l'apprentissage des mathématiques revêt aussi un caractère éducatif moral.

## 3 Un contexte non magistral

Utiliser des documents anciens implique pour les enseignants d'accepter un rôle différent de celui de détenteur unique du savoir. En effet, négliger les références historiques ou la mise en perspective du savoir mathématique conduit à présenter les matières de manière magistrale sans mention de quelque tiers que ce soit, y compris et surtout les inventeurs des notions ou les utilisateurs d'artefacts mathématiques. Sans pour autant se servir de ces derniers comme d'alibis, il est possible d'inscrire les mathématiques dans l'histoire des progrès humains et dans des problématiques qui dépassent donc le strict cadre de la classe et de l'acquisition de connaissances. Prenons le cas des carreaux de Truchet. Il est plaisant de pouvoir offrir aux élèves de réfléchir à un problème déjà étudié au XVIIIe siècle mais qui reste pertinent, et dans lequel les concepts mathématiques mis en œuvre sont à leur portée. Accepteraient-ils de se poser la question des arrangements de carreaux sans le défi de résoudre une question posée par un personnage du siècle des Lumières ? Car c'est bien Truchet qui pose la question aux élèves. Nous voyons dans le fait de suivre sa trace une forme d'aventure qui ne serait pas permise avec l'enseignant titulaire, dont les pérégrinations à Orléans n'auraient pas à être révélées. Celui-ci devient même un accompagnateur des progrès des élèves face à une question de recherche posée par un tiers, car ces mathématiques concrètes sont une affaire d'hommes et de (trop rares) femmes. N'étant plus possesseurs exclusifs du savoir, les maîtres deviennent des organisateurs de voyage, facilitateurs de la découverte, comme ils le sont lorsqu'ils emmènent leurs élèves dans les musées.

## 4 L'expression personnelle

Il nous paraît important de pouvoir instaurer une forme de dialogue à propos des notions mathématiques étudiées. Les apprenants savent bien qu'ils ne réinventent pas les propriétés des objets ni les techniques et méthodes qu'ils découvrent dans les activités. Mais l'une des difficultés majeures des enseignants débutants est d'accepter d'écouter ce que les élèves ont à dire sur ce qu'ils étudient, et même de favoriser les questionnements. Dans les activités scientifiques, ces enseignants ont tendance à apporter toutes les réponses et ne pas favoriser l'émergence de questions qui pourraient s'écarter du chemin déjà balisé, pour s'assurer de la réussite de l'activité. Dans ce cas, ils favorisent davantage les connaissances que les apprentissages en général, et particulièrement les méthodes.

Notre proposition d'une méthode d'analyse de la compréhension basée sur les annotations marginales des textes étudiés est toute récente et notre groupe de travail de l'IREM n'en est qu'à ses débuts. Nous espérons mettre en évidence chez nos jeunes collègues enseignants la nécessité de favoriser chez leurs élèves une verbalisation (orale ou écrite) personnelle de leur propre cheminement dans l'appropriation des notions, des méthodes ou des pratiques mathématiques. En mettant nos étudiants stagiaires dans la position d'exégètes, nous cherchons à les aider à s'écarter du modèle de détenteurs d'un savoir incontestable et évident, d'une posture de toute-puissance liée au statut que donne la connaissance.

Notre but serait atteint si nous parvenions à retrouver avec eux le plaisir d'un gai savoir et celui de l'aventure de la recherche de la connaissance émancipatrice. L'introduction d'une perspective historique par l'utilisation de ressources anciennes, textes et artefacts, nous paraît un moyen d'atteindre ce but.

## IV - BIBLIOGRAPHIE


Anonyme (1509). *Livre d'chiffres et de getz nouvellement imprime*. Lyon : Pierre Mareschal & Barnabé Chaussard. (Bibliothèque Méjanes, Rés. S. 167, 3)

Anonyme (1551). *L'arithmetique & manière de apprendre a Chiffrer & compter par la Plume et par les getz en nombre entier et rompu, facile a apprendre & tres-utile a toutes gens…* Paris : Jehan Ruelle.

Briand, J., Peltier, M.-L. (2003) Étude de la disme de Stevin de Bruges. Dans COPIRELEM, *Concertum, Carnets de route de la COPIRELEM*. Tome 2, 381-406. Paris : ARPEME.

Briand, J., Peltier, M.-L., N'Gono, B., Vergne, D. (2016). *Opération Maths - CM1 - cycle 3*. Paris : Hatier.

Brousseau G. (1983) Études de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble : Université Joseph Fourier, laboratoire LSD IMAG.

Cathalan, A. (1566). *L'arithmetique et manière d'apprendre a chifrer & conter, par la plume & par les Getz…* Lyon : Thibault Payan.

Eveilleau, T. (s.d.). La corde égyptienne. A quoi peut donc bien servir une corde à treize nœuds ?. En ligne sur le site *Mathématiques magiques* http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/, consulté le 10 juin 2018.

Hubaut, X. (s.d.). La corde à treize nœuds. Comment nos ancêtres bâtissaient-ils des cathédrales ?. En ligne sur *Mathématiques du secondaire* https://xavier.hubaut.info/coursmath/var/13noeuds.htm consulté le 14 mai 2018.

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres*. Collection Bouquins. Paris : Robert Lafont.

Jacquier, C., Drapel, K. (2005). *Le nombre d'or : réalité ou interprétations douteuses ? Projet STS présenté le 25 avril 2005*. Lausanne : École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Krivine, J.-P. (2007). Le Mythe du nombre d'or. *Sciences et Pseudo-sciences, 278*, 32-40.

Markowsky, G. (1992). Misconceptions about the Golden Ratio, *The College Mathematics Journal, 23* (1), 2-19.

Métin, F. (2012). L'arithmétique de Juan de Ortega : des équations sans algèbre dans E. Barbin (dir.), *Des arpenteurs aux ingénieurs. Les mathématiques éclairées par l'histoire* (p. 59-70). Paris : Vuibert-ADAPT.

Moyon, M. & Tournès, D. (Dir.). (2018). *Passerelles. Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*. Paris : ARPEME.

Neveux, M. (1995). *Le nombre d'or. Radiographie d'un mythe*. Paris : Éditions du Seuil.

Neyret, R. (1978). Avec des carrés bicolores. *Grand N*, 14, 40-52.

Ortega, J. (1515). *Oeuvre tressubtille & profitable de lartz science de aristmeticque & geometrie translaté nouvellement despaignol en francoys…* Lyon : Etienne Balland.

Ringot, B. & Sarmant, T. (2012). « Sire, Marly ? » : usages et étiquette de Marly et de Versailles sous le règne de Louis XIV ». *Bulletin du Centre de recherche du château de Versailles*, 2012. Consulté sur le site http://journals.openedition.org/crcv/11920 le 5 octobre 2017.

Smyth, C. P. (1864). *Our Inheritance in the Great Pyramid*. London: A. Strahan.

Sen, S. N. & Bag A. K. (1983). *The Śulbasūtras of Baudhāyana, Āpastamba, Kātyāyana and Mānava, with Text, English Translation and Commentary*. New Delhi: Indian National Science Academy.

Stevin, S. (1585). *L'arithmetique de Simon Stevin de Bruges. Contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires […] Encore un livre particulier de la Pratique d'Arithmetique contenant entre autres les Tables d'interest, la Disme…* Leyde : Christophle Plantin.

Truchet, S. (1704), « Mémoire sur les combinaisons », dans *Histoire de l'Académie royale des sciences. Année MCCIV. Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie*. Paris : Martin, Coignard et Guerin.

# V - ANNEXE 1 : LES CARREAUX DE SÉBASTIEN TRUCHET

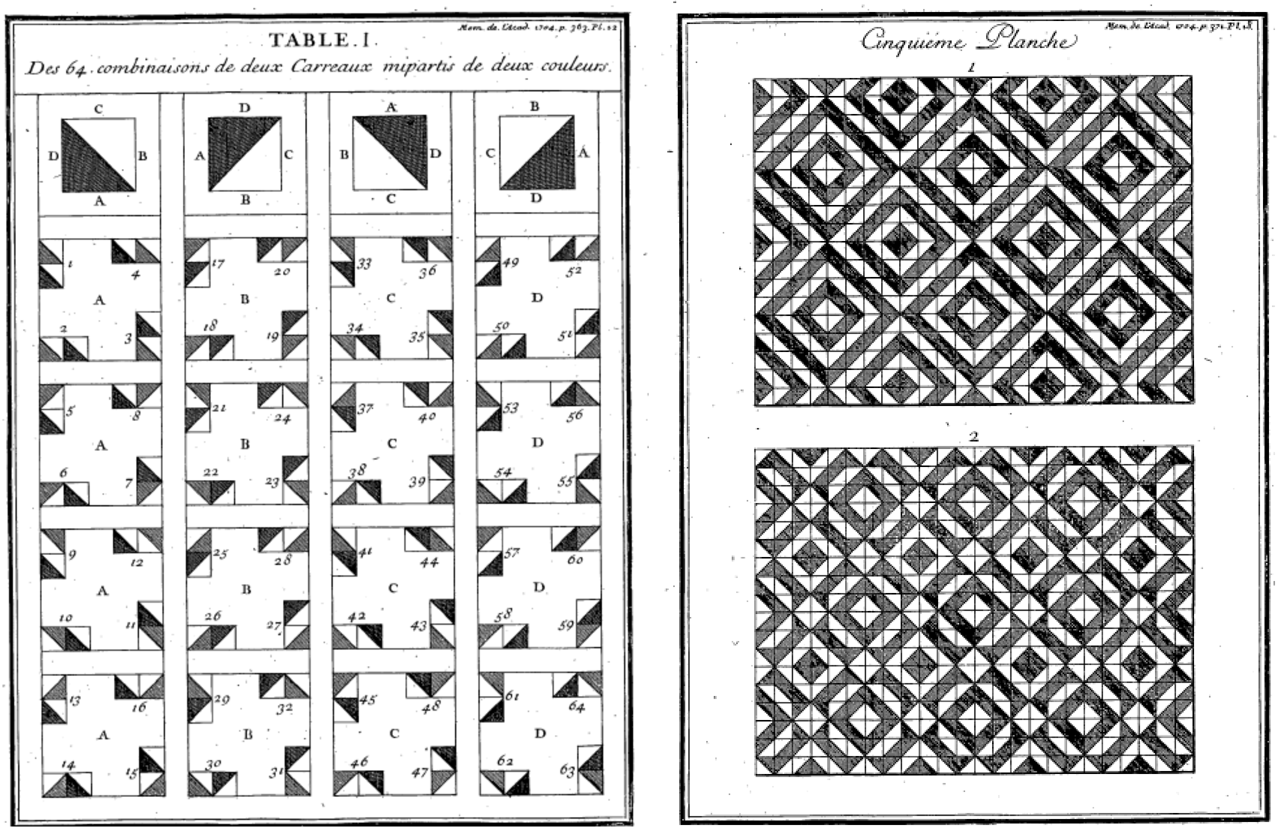



*Figure A1.1. Planches n°1 et n°5 du* Memoire *de Truchet (1704)*

*Figure A1.2. Quelques compositions actuelles*

# VI - ANNEXE 2 : LA TABLE DE LOUIS

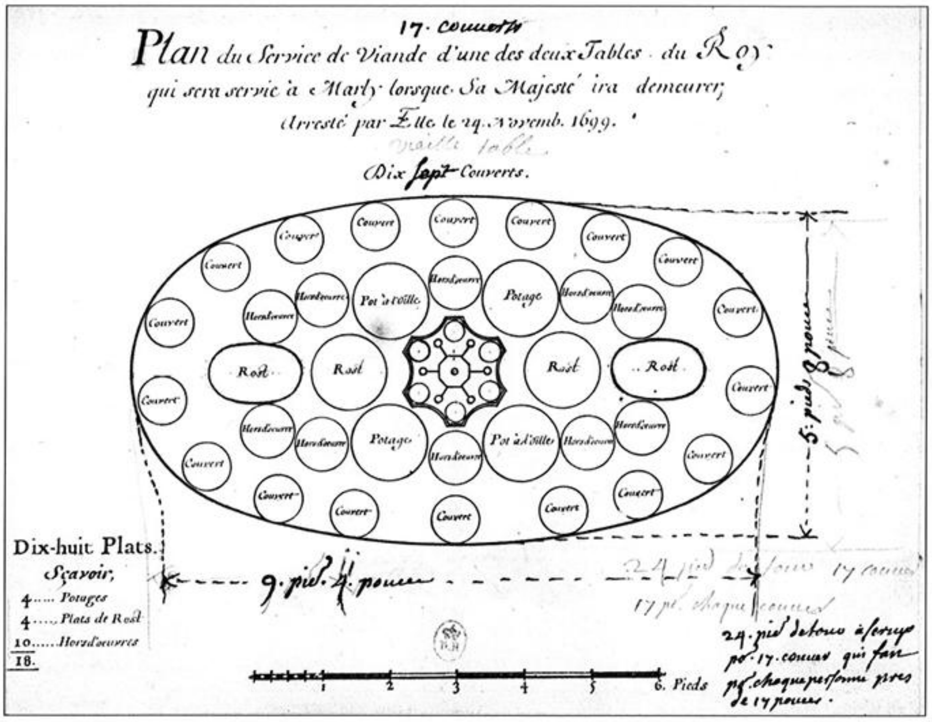



*Figure A2.1.* Plan de table, 1699. *Paris, Bibliothèque nationale de France, Va 78a t. 3*
(reproduit dans Ringot & Sarmant, 2012)

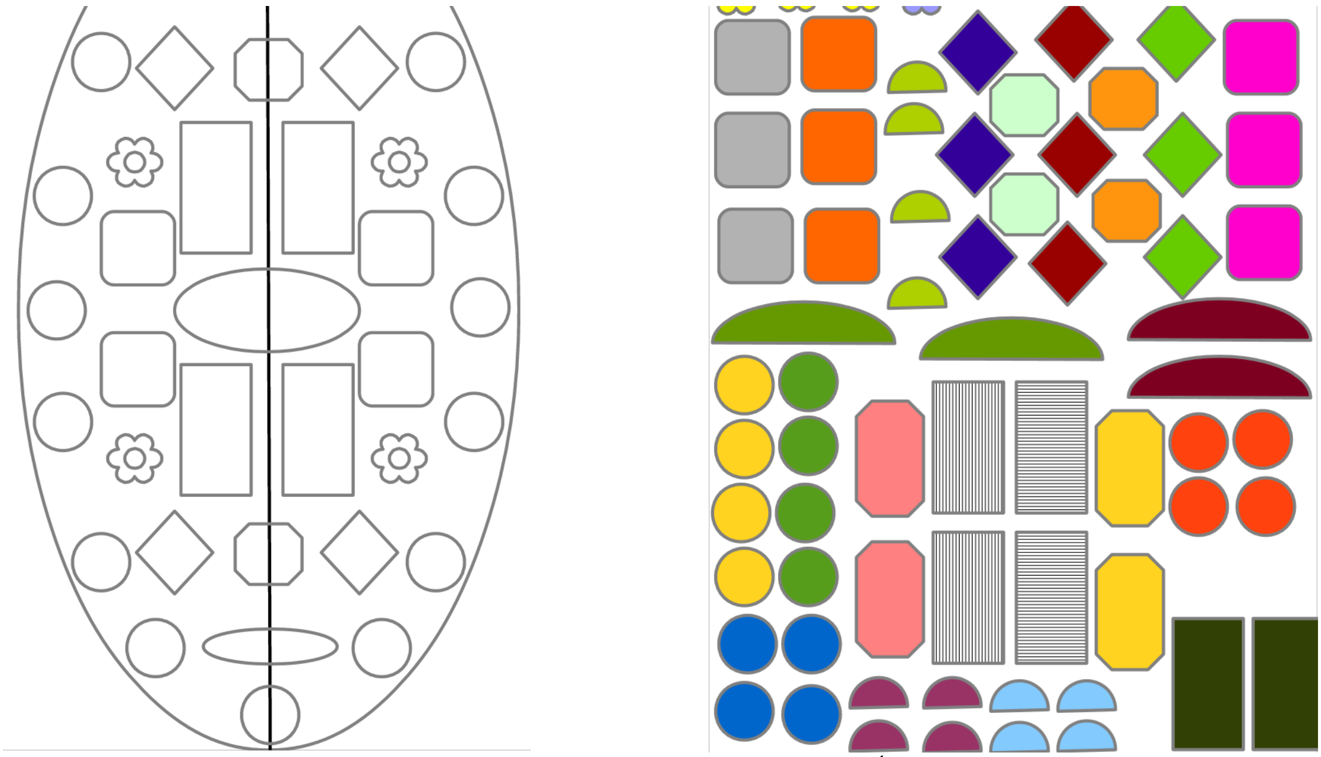


*Figure A2.2. Documents de travail de CE2 (Guillaume Grosmaire, École Chevreul, Dijon)*

# VII - ANNEXE 3 : L'ARBRE AUX JETONS

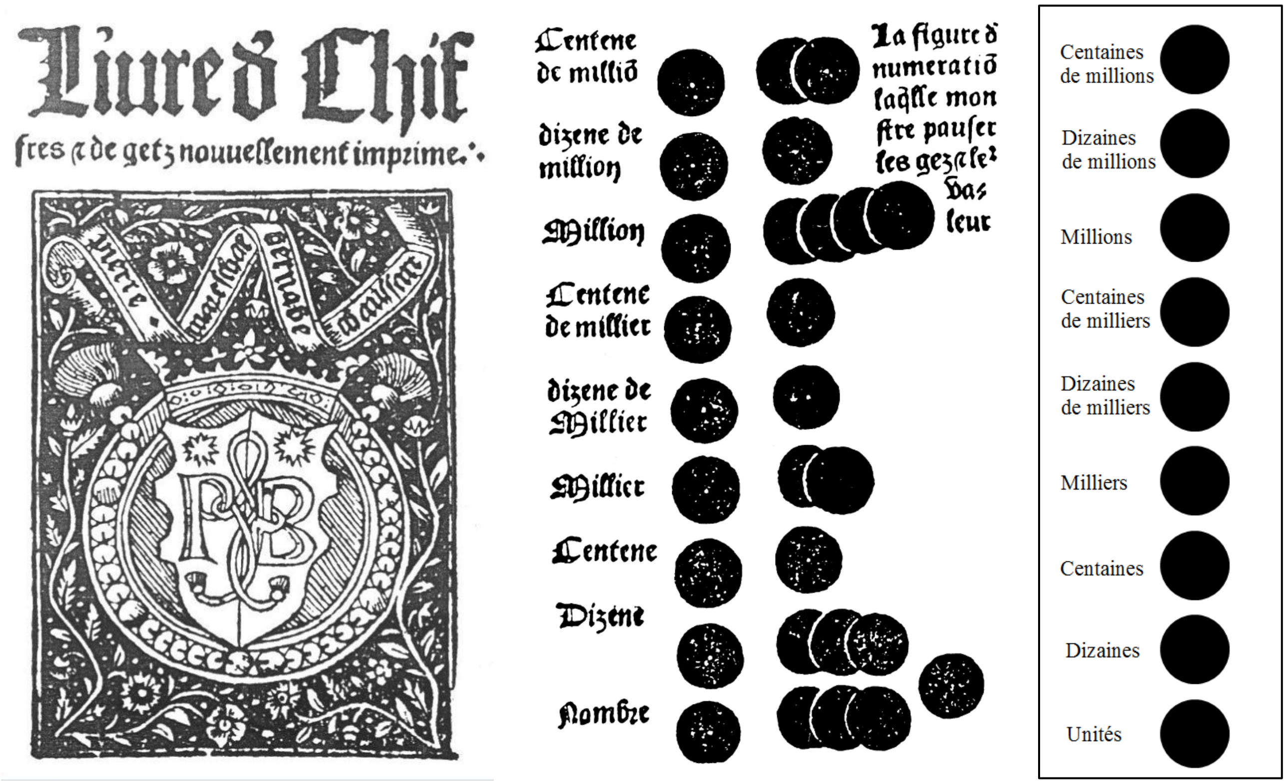



*Figure A4. Extraits du* Livre d'chiffres et de getz *(Lyon, vers 1509) & notre document.*