

LES BIDULES OU COMMENT REPRODUIRE UN SOLIDE SOUS CONTRAINTES

Tatiana BELIAEVA

MCF, Espé de Strasbourg

Irma

tatiana.believa@espe.unistra.fr

Corinne JAECK

Prag, Espé de Strasbourg

corinne.jaek@espe.unistra.fr

Catherine THOMAS

Prag, Espé de Strasbourg

catherine.thomas@espe.unistra.fr

Résumé

L'objectif de l'atelier est de présenter et d'analyser une séance de formation à destination des futurs enseignants du premier degré. Cette séance consiste, en premier lieu, à décrire et observer un objet en carton nommé « bidule » (phase manipulation), en vue de, dans un deuxième temps, le reproduire par groupes de cinq étudiants suivant des contraintes différentes selon les groupes (phase manipulation/représentation), puis enfin de dégager ensemble les connaissances produites en réponse aux différentes questions provoquées par lesdites contraintes (phase représentation/communication). L'institutionnalisation de la séance conduit à identifier un *type de tâche* (au sens de Chevallard, 1999) commun apparu dans les différents groupes, faire la liste des différentes *techniques* apparues pour l'accomplir et leur lien avec les différents *instruments* utilisés (Duval & Godin, 2005) et dégager quelques *éléments technologiques* justifiant ces techniques, en reconnaissant celles qui peuvent être produites au premier degré et celles qui ne le peuvent pas. Ainsi, on rend les étudiants conscients du *lien entre instrument et concept*. Cette situation permet également de dégager l'importance de la *déconstruction/reconstruction dimensionnelle* dans la pensée géométrique.

I - INTRODUCTION

La situation présentée dans cet article est issue d'une séquence de formation mise au point à l'ESPE de Strasbourg.

Initialement, elle était conçue pour faire vivre aux étudiants une situation de classe qui leur permettrait de comprendre ce que l'on entend par « apprendre les mathématiques en résolvant des problèmes ». Elle permettait également de revisiter certains savoirs en géométrie, essentiels pour maîtriser leur enseignement.

Le cœur du problème consistant à fabriquer un objet peu usuel, il est apparu que, très spontanément, les étudiants proposaient une grande diversité de techniques de construction. Nous avons alors voulu davantage maîtriser cette diversité en l'organisant et en la provoquant. Inspirées par les différentes lectures d'articles issus des travaux dits du groupe de Lille⁸⁸, nous avons souhaité mettre à jour le lien

⁸⁸ Le groupe dit « de Lille » fait référence à une recherche financée par l'IUFM Nord-Pas-de-Calais, et réalisée par une équipe comprenant entre autres, R. Duval, C. Gaudeul, M. Godin et B. Keskessa. Le premier article produit par cette équipe est Duval & Godin (2005).

entre les techniques de construction employées par les étudiants, les outils qui étaient à leur disposition, et surtout, les concepts qu'ils (re)construisaient ainsi.

La situation est alors devenue plus ambitieuse. Les objectifs initiaux restaient bien entendu valables, mais nous avons souhaité que la situation permette également une première rencontre avec d'autres notions de la didactique de la géométrie, telle la *déconstruction/reconstruction dimensionnelle*⁸⁹ et le lien entre instrument et concept.

La *déconstruction/reconstruction dimensionnelle* est ici particulièrement à l'œuvre, notamment parce que l'activité de départ consiste à fabriquer un objet de l'espace (en 3D), mais que toute la problématique de construction se travaille dans le plan (en 2D), avec des figures planes dont il faut retrouver des éléments (1D ou 0D) pour pouvoir les tracer.

Et, nous l'avons dit, les différentes techniques employées par les étudiants pour effectuer la tâche vont dépendre d'outils que nous choisissons de mettre à leur disposition. Mais, pour aller plus loin, et dégager le lien entre instrument et concept mathématique, nous avons prolongé ce premier temps de fabrication de l'objet par l'analyse approfondie d'un type de tâche apparu systématiquement lors de l'activité, à savoir *reproduire un cercle*. Cette analyse nous a permis de montrer l'évolution du concept de cercle au long de la scolarité, en lien avec les différents instruments qui participent à sa construction.

Cette situation étant arrivée à maturité, nous avons souhaité la mettre à l'épreuve en la proposant sous forme d'un atelier aux autres formateurs et aux chercheurs de la communauté.

L'objectif annoncé de cet atelier était donc de présenter cette situation de formation dans le but de s'interroger à la fois :

- 1) sur l'enseignement de la géométrie, que ce soit le nôtre en tant que formatrices ou celui des futurs enseignants du premier degré, en le mettant en lien avec les différents apports de la recherche en didactique
- 2) sur les modalités de la formation des futures enseignantes et futurs enseignants en participant à l'analyse et l'approfondissement d'une situation de formation par homologie.

S'agissant d'un atelier, nous avons privilégié une mise en activité introductive des participants, plutôt qu'un exposé de notre expérience de formation. Cette mise en activité, basée sur celle proposée aux étudiants a permis aux collègues de vivre cette situation. Nous les avons ensuite invités à user de leur regard critique pour analyser cette situation.

La suite de l'article présente une analyse détaillée de cette séquence de formation, inspirée à la fois par nos différentes années d'expérience et par les discussions qui ont eu lieu lors de l'atelier.

II - DESCRIPTION DE LA SITUATION DE FORMATION

La situation de formation est construite à partir d'une activité de fabrication d'objet, nommé le *bidule*. Cette activité est ce que Mangiante & al. (2017) nomme une *activité amorce*, c'est-à-dire qu'elle permet à la fois d'initier un apprentissage et de donner du sens aux concepts qui sont précisément les objets de cet apprentissage.

Nous présentons dans cette partie la situation telle que nous la faisons vivre aux étudiants, puis nous détaillons les adaptations que nous avons faites pour les participants lors de l'atelier.

La tâche initiale proposée dans cette situation est, nous l'avons dit, la fabrication d'un objet, *bidule*, dont les particularités rendent cette fabrication problématique, et donc potentiellement riche d'apprentissages. Lesquels et comment sont deux questions-clés que nous détaillerons lors de l'analyse de la situation. Nous la décrivons ici succinctement afin d'en avoir rapidement une vue d'ensemble.

⁸⁹ Les expressions *déconstruction/reconstruction dimensionnelle*, *restauration de figure*, *jeu de coût*, ... sont toutes issues des travaux dits du groupe de Lille, dont le premier article de référence est celui de Duval & Godin (2005).

1 Qu'est-ce que le bidule ?

Le *bidule* est un objet fabriqué à partir de neuf disques. Un carré est inscrit dans cinq d'entre eux et un triangle équilatéral est inscrit dans chacun des quatre restants. Les carrés et les triangles équilatéraux ont tous leurs côtés de même longueur. Les disques sont ensuite pliés en suivant les côtés des polygones inscrits et les segments circulaires ainsi obtenus servent de pattes de collage vers l'extérieur.



Nous obtenons ainsi un solide d'aspect un peu curieux qui peut se modéliser, si l'on ne tient pas compte des pattes de collage, par un cube surmonté d'une pyramide régulière à base carrée⁹⁰.

La contrainte essentielle de cet objet est l'égalité entre les longueurs des côtés des carrés et ceux des triangles équilatéraux. Elle induit un fait peu visible à l'œil nu si l'on n'y prête pas attention : les disques « des carrés » ne sont pas de la même taille que ceux « des triangles équilatéraux ». Une grande partie de l'intérêt de cette activité réside précisément dans cette ambiguïté sur laquelle nous avons joué.

2 La première séance

2.1 Structure

La première séance s'organise en trois étapes d'inégales durées.

La première étape est une phase d'observation et de description. Un *bidule* de grande dimension est présenté à la classe. Il est d'abord observé en tant qu'objet physique puis décrit et analysé du point de vue de l'objet géométrique sous-jacent.

La deuxième étape, la plus longue, est celle de la fabrication de l'objet. Les étudiants doivent, par groupes de trois ou quatre personnes, fabriquer un *bidule*. Chaque groupe reçoit des contraintes différentes au niveau de la taille de l'objet (identique au modèle ou non), de l'accès au modèle et des outils à disposition. Comme il est important que chaque groupe ait le temps de fabriquer entièrement son *bidule*, les éventuels groupes qui terminent en avance ont pour consigne de construire un patron de l'objet théorique (nonaèdre).

⁹⁰ Cet objet est issu d'une activité mise en place par des collègues de l'IUFM de Basse-Normandie, au début des années 2000, dans le cadre de la préparation au concours.

La troisième et dernière étape consiste à mettre en commun et effectuer une première synthèse de l'activité. Afin de préparer cette mise en commun, nous demandons à chaque groupe de désigner un rapporteur et de remplir une feuille sur laquelle on trouve :

- les contraintes auxquelles était soumis le groupe ;
- les questions posées, et les difficultés rencontrées ;
- les éventuelles réponses apportées après réflexion.

On trouvera en annexe 1 une description plus détaillée de la séance et en annexe 2 la synthèse des questions posées par les étudiants.

Nous faisons ensuite une synthèse de la séance à deux niveaux :

- niveau des savoirs mathématiques : liste des questions principales rencontrées (voir annexe 2) ; les réponses à ces questions doivent être sues et constituent un premier corpus des savoirs géométriques à maîtriser. On distinguera, à la suite de ce premier corpus, un type de tâche particulier « reproduire un cercle », qui fera l'objet de la séance suivante.
- niveau des connaissances didactiques et pédagogiques : nous mettons particulièrement en avant le fait que ces connaissances sont explicitées comme réponse à un problème posé, ce qui permet de leur donner du sens. La question des choix faits par les formatrices, donc des variables didactiques pertinentes et du choix de leurs valeurs est également débattue.

2.2 Les choix d'organisation et les contraintes imposées sur les outils

L'originalité de la phase de fabrication réside dans le choix des outils proposés aux étudiants. Avant de détailler ces choix, précisons qu'il est important que le travail se fasse par groupe et que chaque groupe fabrique un *unique* objet. En effet, les étudiants sont ainsi contraints à travailler ensemble ; le moment de l'assemblage des faces est alors un moment crucial car il permet de valider ou d'invalidier certaines hypothèses implicites, comme, par exemple, le fait que tous les disques auraient le même rayon. Il s'agit typiquement d'une activité auto-validante.

Nous imposons à chaque groupe une consigne et des contraintes d'outils selon le tableau 1 : Consigne a		Consigne b	
« Reproduisez un unique exemplaire du bidule que je viens de déposer sur votre table »		« Construisez un unique bidule semblable à celui posé sur mon bureau »	
Outils et artefacts à disposition			
Feuilles, ciseaux, colle et crayon pour tous. Par ailleurs, les groupes disposent de :			
<u>groupe 1</u>	le bidule (aucun instrument de géométrie)	<u>groupe 4</u>	règle graduée, compas, équerre et sans rien d'autre
<u>groupe 2:</u>	le bidule, compas et règle non graduée (si possible, deux groupes dans cette situation)	<u>groupe 5</u>	un exemplaire du disque qui devra contenir un carré (présenté comme tel)
<u>groupe 3</u>	le bidule, tout matériel, dont équerre et règle graduée.	<u>groupe 6</u>	un exemplaire du disque qui devra contenir un triangle (présenté comme tel).

Tableau 1: Organisation des groupes en formation

À la fin de la première séance, au moment de la synthèse, il nous paraît important de faire prendre conscience aux étudiants de tous les choix à faire lors de la construction d'une telle séance ; les nôtres ont principalement été :

du côté des choix pédagogiques

- construire une activité presque transférable (en tout cas dans son organisation) aux élèves (ce qu'on appelle formation par homologie) ;
- organiser le travail par groupes dont le nombre et la taille sont fixés (la composition en est laissée libre) ;
- donner des consignes différentes pour chaque groupe ;
- faire fabriquer un objet par groupe (et non par personne) ;
- faire vivre l'activité jusqu'au bout, et donc prévoir une tâche supplémentaire prévue pour ceux qui ont terminé plus tôt (construire le patron).

du côté des choix didactiques

- l'accessibilité de l'objet à découvrir :
 - objet d'abord accessible seulement visuellement ;
 - objet sur la table de chaque groupe ;
- le type de tâche : reproduire à l'identique ou construire un objet semblable ;
- la disponibilité de l'objet-modèle lors de sa fabrication : sur la table ou pas ;
- les outils et autres artefacts à disposition.

L'objectif principal de tous ces choix est de faire émerger le plus de techniques possibles pour pouvoir analyser l'influence du choix des instruments⁹¹ sur les techniques produites et donc sur les concepts en jeu.

Lors de la troisième phase, les choix que nous avons faits pour construire la séance sont explicités et analysés avec les étudiants. Cette analyse permet d'illustrer la complexité et la richesse de gestes professionnels en jeu lors de l'élaboration d'une situation d'enseignement. Elle est tout particulièrement indiquée pour faire vivre la notion de variable didactique.

3 La séance suivante

Lors de la mise en commun de la première séance, un type de tâche particulier apparaît dans (presque) tous les groupes : *reproduire un cercle* dont on ne connaît ni le centre ni rayon. Quelques solutions à ce problème (dont le pliage) sont en général dégagées par les étudiants.

Il nous a paru donc cohérent de nous appuyer sur ce type de tâche pour la suite de la séquence de formation.

Ainsi, lors de la séance suivante, nous donnons à chaque étudiant un cercle (sans aucune indication de mesure des longueurs ni de points particuliers) avec pour consigne de le reproduire par au moins deux techniques différentes.

Ils doivent ensuite s'astreindre à décrire précisément ces techniques, ce qui n'est pas un exercice trivial. Ils doivent préciser les instruments utilisés et produire au moins un début de justification pour chaque technique.

⁹¹ au sens de Rabardel (1995). Nous revenons sur ce point et le précisons dans le paragraphe concernant les objectifs didactiques de la situation.

Lors de la mise en commun, pour chaque procédure analysée, sont explicités les éléments techniques et technologiques ainsi que la conception⁹² sous-jacente du cercle. Nous recueillons les diverses propositions et les organisons dans un tableau du type de celui de l'annexe 3.

Nous leur indiquons également la lecture de Artigue (1982) sans nécessairement revenir dessus.

Nous prolongeons ensuite la situation de formation par des deux séances supplémentaires sur le lien entre les concepts mathématiques en jeu et les instruments utilisés avec un nouvel artefact : GeoGebra.

Ces prolongements n'ayant été évoqués que très brièvement lors de l'atelier, par manque de temps, nous ne les développons pas ici. On trouvera une proposition un peu détaillée de ces séances au paragraphe V.

4 Adaptation de la situation pour l'atelier

Lors de l'atelier de la COPIRELEM, et puisqu'il s'agissait d'un atelier, précisément, nous avons privilégié une mise en activité introductive des participants (qui sont eux-mêmes formateurs pour beaucoup d'entre eux), plutôt qu'un exposé de notre expérience de formation. Cette adaptation de l'activité proposée aux étudiants, à quelques modifications près, a permis aux collègues de vivre « de l'intérieur » cette situation.

Ainsi cet atelier s'est déroulé en quatre phases :

- Phase 1 – Mise en situation (phase 1 et 2 de la première séance « étudiante »)
- Phase 2 – Étude du potentiel de cette situation
- Phase 3 – Présentation de notre propre analyse
- Phase 4 – Discussion sur la suite de la séquence de formation et ses prolongements possibles ou les pistes d'amélioration.

La phase d'observation du bidule s'est déroulée à l'identique.

Lors de la phase de fabrication, nous avons légèrement modifié les contraintes par rapport à celles données aux étudiants (voir tableau 2).

Nous avons par exemple enlevé la contrainte du groupe 1 (aucun instrument) car elle a pour objectif principal de montrer aux étudiants que l'on peut se servir de l'objet physique comme instrument, ce qui nous semblait avoir peu d'intérêt avec les formateurs.

Nous avons également rajouté parfois l'obligation d'utiliser les instruments donnés.

Avec le bidule sur la table	Avec le grand bidule hors de portée de main
Groupe 1 Avec tous les instruments de géométrie et possibilité d'utiliser ceux que l'on veut	Groupe 3 Avec tous les instruments de géométrie
Groupe 2 Avec compas et règle non graduée et obligation de les utiliser	Groupe 4 Avec un disque distribué et tous les instruments de géométrie
	Groupe 5 Avec un disque distribué, règle non graduée et compas

Tableau 2: organisation des groupes en atelier

Les deux dernières phases ont permis de riches échanges dont le contenu a nourri les analyses qui suivent.

⁹² au sens de Artigue (1982)

III - UNE ANALYSE DE L'ACTIVITE AMORCE

1 Analyse *a priori*

1.1 Analyse de la première phase

La phase 1, observation et description de l'objet, permet en premier lieu de distinguer l'objet physique (« lanterne » orange avec des pattes de collage) de son modèle géométrique (cube surmonté d'une pyramide, dont les faces sont toutes inscrites dans des disques).

Si le problème est posé dans le monde physique, les questions qu'il soulève se résolvent pour une bonne part dans le monde géométrique, mais l'on constate un retour spontané des étudiants dans le monde physique dès qu'ils ont réussi la tâche : beaucoup d'entre eux s'approprient l'objet en le décorant (dessins sur les faces) et/ou en lui donnant un rôle (« maison de la grenouille », « boîte à meuh », personnage, ...).

Nous provoquons cette dualité par la forme même de notre première question : « Que pouvez-vous dire de cet objet ? »

On peut informer tout de suite ou plus tard, selon la réaction de la salle, qu'il faudra le reproduire plus tard, et donc préciser la question : « trouver toutes les informations nécessaires pour sa fabrication ».

Certaines d'entre nous posent des exemplaires du bidule sur les tables, d'autres se promènent dans la salle avec un unique grand exemplaire que personne ne touche.

Nous séparons en deux les informations que l'on peut recueillir, sachant que certaines d'entre elles peuvent appartenir aux deux catégories.

Informations relevant principalement de l'objet physique :

- la forme/l'objet ressemble à... on dirait une maison, une lanterne, ...
- la couleur
- la matière
- la fabrication : les morceaux collés avec les « oreilles »
- le « cube » a cinq faces
- le « chapeau » a quatre faces
- le pliage des disques
- les longueurs des différents éléments (dans le cas où l'objet est accessible)
 - longueur des côtés des polygones
 - diamètre des cercles
 - diagonale des carrés

Informations relevant principalement de l'objet géométrique sous-jacent :

- l'objet est un cube surmonté d'une pyramide régulière
- les triangles équilatéraux et les carrés sont inscrits dans des cercles
- la longueur des côtés des carrés est la même que celle des côtés des triangles équilatéraux
- les rayons des cercles circonscrits aux carrés sont différents de ceux des triangles.

Cette dernière information est souvent, soit absente, soit présente sous forme de question à laquelle on se garde bien de répondre et qui sera résolue lors de la fabrication. Elle dépend évidemment de la conscience ou non que l'on a de l'égalité des longueurs des côtés des triangles et des carrés.

En revanche, il faut confirmer les hypothèses sur la forme des faces ; en effet, les carrés pourraient tout aussi bien être des rectangles, et les triangles équilatéraux, des triangles isocèles, ce qui produirait des *bidules* non voulus.

Cette phase est également une occasion de rappeler l'usage des termes « face », « arête », « sommet ». Elle permet donc une première mise au point de la terminologie correcte des objets géométriques.

1.2 Analyse a priori de la phase de construction

L'analyse que l'on expose ici est non seulement à l'intention de celles et ceux qui souhaitent s'approprier la situation, mais est également proposée aux étudiants, en tant qu'ils sont de futurs enseignants. L'objectif est de les outiller dans le choix des variables didactiques, selon les types de tâches qu'ils souhaiteront privilégier.

Il existe deux entrées différentes dans le protocole de construction du *bidule* : l'entrée que nous nommerons « polygone » (on commence par construire un carré et/ou un triangle équilatéral), ou l'entrée « cercle » (on commence par tracer les cercles circonscrits aux carrés ou ceux circonscrits aux triangles).

La suite de la construction est quasiment imposée par ce premier choix.

Mais quel que soit le protocole choisi, en plus de la construction des objets de bases (cercle, carré, triangle), il est nécessaire d'effectuer deux des quatre types de tâches suivantes :

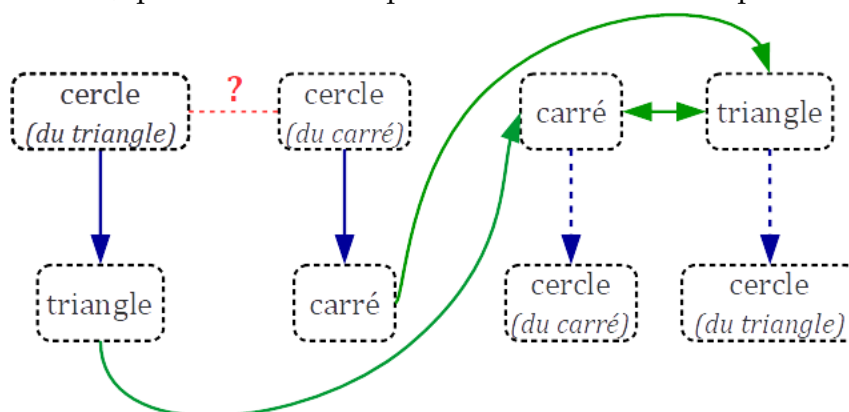
- T_1 - inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné ;
- T_2 - inscrire un carré dans un cercle donné ;
- T_3 - circonscrire un cercle à un carré ;
- T_4 - circonscrire un cercle à un triangle équilatéral.

Le choix des contraintes imposées à chaque groupe influe fortement, mais pas exclusivement, sur l'ordre dans lequel ces tâches sont réalisées.

Notons que toutes les combinaisons ne sont pas forcément possibles d'après l'analyse *a priori* ; par exemple, si l'on commence par circonscrire un cercle à un carré donné, on ne peut pas poursuivre en inscrivant un triangle dans un cercle, car il n'y a pas de lien direct entre les deux cercles. Il faut d'abord construire les triangles équilatéraux à partir des carrés, puis leur cercle circonscrit.

Nous verrons, lors de l'analyse *a posteriori*, que cela n'a pas empêché certains groupes de suivre ce chemin menant à une impasse ; il leur a suffi pour cela d'inventer un lien entre les deux cercles, le plus souvent en supposant que les cercles étaient de même rayon. L'assemblage des pièces a permis ensuite d'invalider cette hypothèse.

Lors de la mise en commun des différentes stratégies de construction avec les étudiants, on établit le schéma de synthèse suivant, qui résume tous les protocoles de construction possibles :



Les encadrés représentent les types de tâche : *construire un objet élémentaire* (cercle, carré, triangle équilatéral).

Les flèches correspondent au lien entre les différents objets élémentaires :

- flèches bleues pleines : polygone **inscrit** dans un cercle ;
- flèches bleues pointillées : cercle **circonsrit** à un polygone ;
- flèches vertes : **égalité** des longueurs des côtés des polygones ;
- pointillé rouge : lien supposé entre les dimensions des deux cercles.

En conséquence, les quatre colonnes correspondent aux quatre types tâches T_i décrites ci-dessus.

La réalisation de chacune de ces tâches dépend évidemment des contraintes imposées aux groupes, mais également des choix faits par les étudiants.

Nous donnons en annexe 4 une description détaillée d'un grand nombre de techniques possibles pour ces différentes constructions.

2 Analyse *a posteriori*

La première observation que l'on a pu faire est que les procédures élémentaires de construction à la règle non graduée et au compas (en particulier le tracé de la droite perpendiculaire à un segment donné passant par une extrémité de ce segment) ne sont pas disponibles chez les étudiants. Il faut souvent la rappeler aux groupes qui ne peuvent pas s'en passer.

Les étudiants qui ont accès aux disques vont assez naturellement utiliser le pliage pour retrouver le centre du disque ou pour construire un carré, plus rarement pour construire le triangle ; en général ils ont du mal à expliquer pourquoi leur procédure fonctionne.

Les étudiants qui ont accès au bidule **et** aux instruments ne pensent pas à utiliser le bidule comme gabarit. L'autorisation d'utiliser des instruments est très souvent perçue comme une obligation de les utiliser.

Systématiquement le seul groupe à utiliser le bidule comme gabarit est celui qui n'a pas d'instruments de construction à disposition, et l'idée de le faire n'est pas toujours immédiate. Mais une fois que les étudiants se permettent de le faire (et souvent elles/ils utilisent le bidule comme gabarit pour les cercles seulement, les polygones s'obtenant ensuite par pliage), c'est généralement le groupe qui termine le premier.

L'objectif de cette consigne (reproduire sans utiliser d'instruments) avait pour objectif initial d'attirer l'attention des étudiants sur le côté purement physique de la tâche et d'amener la discussion sur le statut de la figure et une première approche des paradigmes géométriques. Nous avons finalement abandonné cette entrée pour privilégier la mise en valeur du lien entre technique attendue et niveau de connaissance travaillée. Cette consigne n'a donc pas été retenue pour l'atelier avec les formateurs.

Les informations trouvées lors de la première phase ne sont pas toujours utilisées pleinement. En particulier, à chaque fois, au moins un groupe ne prend pas en compte l'égalité des côtés, mais part de l'hypothèse que les disques sont tous de même diamètre.

Cela permet de dégager de façon lumineuse deux aspects d'une situation au sens de Brousseau :

- la situation est auto-validante ; si chaque membre du groupe a construit sa propre face (triangle ou carré) de son côté, la mise en commun est nécessaire pour la construction d'un seul bidule ; et là, ça fonctionne ou non, et sans intervention du formateur ;
- la rétro-action du milieu (ici, le bidule ne fonctionne pas) oblige chacun à revenir sur ses hypothèses et/ou ses techniques. Et donc à mettre à l'épreuve ses propres conceptions et, dans le meilleur des cas, à les faire évoluer, toujours sans intervention du formateur.

Nous n'avions pas prévu initialement une question qui émerge dans la plupart des groupes, et d'année en année, ce qui tend à montrer qu'elle n'est pas contingente mais fait partie de la situation :

Comment trouver le centre d'un disque ?

La grande diversité des techniques pour le faire, selon les instruments mis à disposition, nous a incité à rebondir sur cette question pour la suite. Nous nous sommes servis de la justification de chacune de ces techniques pour ajouter les deux derniers objectifs à la liste suivante :

- revoir de nombreuses propriétés de géométrie plane ;
- travailler la preuve en mathématique, particulièrement la démonstration en géométrie ;
- mettre à jour le lien entre l'instrument et le concept ;
- illustrer l'évolution des objets géométriques (passage de la vision globale au concept mathématique) à travers le cercle et la notion de déconstruction/reconstruction dimensionnelle.

IV - SYNTHÈSES DES OBJECTIFS DE LA SITUATION

La Copirelem (Copirelem, 2018) distingue quatre objectifs à l'enseignement des mathématiques pour les futurs enseignants du premier degré :

- *dominer les notions à enseigner ;*
- *comprendre et s'approprier les programmes ;*
- *comprendre les séquences, séances et manuels et les mettre en œuvre ;*
- *analyser les procédures des élèves.*

Nous nous y référons dans la suite pour analyser les concepts travaillés lors de la situation.

1 Les objectifs mathématiques

Les contraintes imposées à chaque groupe influent évidemment fortement sur les connaissances mises en jeu, nous reviendrons largement sur ce point lorsque nous développerons les objectifs didactiques, mais la synthèse de l'activité permet à tout le monde de (re)voir particulièrement les notions suivantes, sans que la liste soit exhaustive :

- les objets élémentaires : *cercle, disque, carré et triangle équilatéral ;*
- les objets relatifs : *cercle circonscrit à ... , médiatrice d'un segment, centre d'un cercle ;*
- les différentes techniques de construction de ces objets ;
- les propriétés mathématiques justifiant ces techniques ;
- des ébauches de démonstration en géométrie.

Toutes ces connaissances sont anciennes et il serait souhaitable qu'elles soient disponibles⁹³ pour les étudiants. Elles répondent particulièrement au premier objectif *dominer les notions à enseigner*. Il s'agit donc en premier lieu de permettre aux étudiants de revisiter des notions de géométrie de base, dans le but de les maîtriser, en particulier en leur donnant du sens.

De surcroît, l'organisation de la séquence doit également leur permettre de distinguer celles qu'ils devront à leur tour enseigner de celles qu'ils doivent connaître pour atteindre un niveau de maîtrise suffisant à leur future pratique professionnelle. Ceci relève donc du deuxième objectif, à savoir comprendre la logique interne des programmes.

Par exemple, si la médiatrice d'un segment peut être rencontrée à l'école primaire, sa construction au compas et à la règle non graduée nécessite une compréhension fine de ses propriétés qui va au-delà des programmes actuels, mais qui doit cependant être connue des enseignants. Ainsi, si nos étudiants souhaitent reprendre la situation des bidules avec leurs propres élèves, il leur faudra savoir jusqu'où la mener, et revisiter les objectifs pour l'adapter à leur classe.

⁹³ au sens d'Aline Robert (1999) : « Nous parlons de connaissances mobilisables pour indiquer que les élèves [ici les étudiants] peuvent les utiliser correctement mais à la demande, alors que nous parlons de connaissances disponibles pour indiquer que cette utilisation peut être improvisée par les élèves, à bon escient, sans aucune indication externe. » , note de fin n°19, p 152

La deuxième séance permet tout particulièrement de dégager l'évolution du concept de cercle dans la scolarité (de la reconnaissance globale à l'ensemble de points) et d'éclairer ainsi une partie du programme d'enseignement.

2 Les objectifs didactiques

Il est clair que, pour les futurs enseignants, toutes les connaissances didactiques sont nouvelles mais selon la place de la séquence dans l'année, certaines d'entre elles peuvent déjà avoir été rencontrées et explicitées. Comme nous avons placé cette première séquence de géométrie vers le mois d'octobre, nous avons déjà eu l'occasion d'installer en particulier le concept de *variable didactique*. La classification proposée est par conséquent dépendante de l'organisation générale de la formation.

Nous la présentons d'abord résumée puis nous développons chaque point :

- **L'ancien**
 - variable didactique
 - milieu réactif
 - situation auto-validante
- **Le nouveau implicite** : analyse praxéologique (Chevallard, 1999)
 - tâche et type de tâche
 - techniques associées
 - éléments technologiques justifiant les techniques
- **Le nouveau explicite**
 - déconstruction/reconstruction dimensionnelle (Duval & Gaudin, 2005)
 - lien entre instrument et concept

2.1 L'ancien

La situation telle qu'elle est proposée (avec des contraintes différentes selon les groupes) permet dans un premier temps de faire vivre en acte la notion de *variable didactique*, et d'illustrer *in situ* comment ses variations permettent d'influer fortement sur les procédures des élèves (ici des étudiants).

La variable la plus évidente est bien évidemment *le choix des artefacts*⁹⁴ ou outils, mis à disposition de chaque groupe dans la situation de la construction du bidule. Bien évidemment, tous les groupes disposent de crayon, de ciseaux et de colle, mais pour l'un d'entre eux, nous avons choisi de ne rien lui donner d'autre. Pour les autres, nous modulons entre le « tout autorisé » et l'obligation de n'utiliser que la règle non graduée et le compas, en passant par l'utilisation des gabarits des disques du carré et du triangle, voire du bidule lui-même.

Selon que les groupes disposaient d'un modèle ou non, le type de tâche n'était pas tout à fait le même : pour les uns, il s'agissait de reproduire un bidule isométrique (mêmes longueurs et mêmes propriétés angulaires), pour les autres, il s'agissait d'en construire un objet semblable (mêmes propriétés angulaires, mais pas nécessairement mêmes longueurs).

Il est apparu que quelles que soient les contraintes imposées aux différents groupes, ils se sont tous (à l'exception du groupe sans outils) heurtés à la même question – qui a plus ou moins fait obstacle – à savoir : comment retrouver le centre des cercles circonscrits. Ce centre est nécessaire pour les uns afin de reproduire les cercles, pour les autres afin de tracer les polygones inscrits dans lesdits cercles. Il nous a donc paru fertile de prolonger l'activité des bidules par une analyse praxéologique de ce type de tâche. Nous avons déjà évoqué la séance qui suit l'activité des bidules, et nous en développons les objectifs dans le paragraphe suivant.

Le second concept de didactique que nous réemployons ici est celui de *milieu réactif*. C'est une nouvelle fois l'occasion de pointer l'intérêt d'une situation *auto-validante* (il existe un lien entre les disques du

⁹⁴ Nous préférons le terme *artefact* à celui d'*instrument* car, au sens de Rabardel (1995), celui-ci dépend de l'utilisation qui en est faite ; par exemple, l'un utilisera le compas (artefact) comme report de longueur, et l'autre comme traceur de cercle

carré et ceux du triangle équilatéral dont il faut prendre conscience sinon le bidule est « bancal »). Les questions que les groupes se posent sont issues des difficultés qu'ils éprouvent à réaliser la tâche. Ainsi, il devient nécessaire de développer une technique pour trouver le centre d'un cercle, pour pouvoir, par exemple, tracer celui-ci ; cette technique n'est donc pas apportée gratuitement par un enseignement frontal mais répond au besoin de résoudre un problème.

2.2 Le nouveau implicite

Nous ne faisons pas de cours explicite sur la Théorie Anthropologique du Didactique, mais nous nous servons souvent des concepts développés par Yves Chevallard (dans, par exemple, Chevallard 1999) pour analyser une activité. En particulier, nous reprenons les termes de *tâche*, *type de tâche* et *technique* dans le sens même de la TAD. En revanche, nous parlons plutôt d'*éléments technologiques* ou *théoriques* plutôt que de *technologie* ou *théorie*, sans d'ailleurs les distinguer. Nous précisons que ces éléments permettent de justifier et/ou de comprendre les techniques employées, et qu'ils servent de point d'appui pour élaborer une justification de ces techniques.

Il nous paraît particulièrement important que les étudiants distinguent les notions de *technique* et *éléments technologiques*, afin de les outiller dans l'analyse des productions d'élèves et des énoncés de manuels.

La séance succédant à celle de la construction du bidule permet une utilisation en acte de ces distinctions car nous nous concentrons sur un *type de tâche* particulier : reproduire un cercle.

Nous avons préféré ce type de tâche à celui de « trouver le centre d'un cercle donné » car il nous a permis de focaliser sur l'objet « cercle » en mettant à jour, à travers les différentes techniques de sa reproduction, l'évolution de ses différentes conceptions (voir par exemple Artigue, 1985).

Par exemple, la technique consistant à découper le disque à reproduire et en dessiner le contour (technique disponible dès que l'on sait se servir d'une paire de ciseaux) s'appuie sur une conception première du cercle, celle de « contour d'un disque », alors que tracer les médiatrices de deux cordes pour trouver son centre s'appuie sur des éléments théoriques beaucoup plus élaborés (par exemple, le cercle est l'ensemble des points équidistants d'un centre, et la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment).

Une analyse praxéologique de ce type de tâche (dont on rappelle qu'on en trouve une synthèse en annexe 3) nous a permis, non seulement d'étudier l'objet « cercle » et son évolution depuis la maternelle jusqu'au cycle 4, mais également d'introduire la notion de déconstruction dimensionnelle et du lien entre les instruments et les concepts mis en jeu. Ces deux points ont, quant à eux, fait l'objet d'une explicitation, et sont devenus de vrais outils didactiques de la géométrie.

2.3 Le nouveau explicite

Le bidule est en réalité une fausse situation 3D, au sens où ses objectifs ne se situent pas (ou très peu) en géométrie dans l'espace. Il nous semble remarquable que le point de départ soit un solide alors que les notions mathématiques en jeu relèvent toutes de la géométrie plane.

C'est pour cette raison que cette situation nous paraît idéale pour une première rencontre avec la notion de *déconstruction dimensionnelle*⁹⁵.

En effet, la construction du solide oblige évidemment à produire les faces de ce solide, et donc à une déconstruction 3D/2D. Ensuite, quelles que soient les contraintes, et donc les techniques déployées par les groupes, chacun d'entre eux devra repérer les pliages correspondant aux arêtes des polygones inscrits dans les cercles, et donc produire des éléments 1D. Pour la plupart d'entre eux, cela devra également passer par le repérage de points particuliers (centre des cercles, sommets des polygones, milieu des côtés, ...) et donc par la mise en évidence d'objets 0D.

Ainsi, nous pouvons expliciter deux aspects particuliers de l'enseignement de la géométrie :

⁹⁵ voir note 2

- Chaque objet nD est d'abord rencontré comme élément (face, contour, intersection...) d'objets (n+1)D, ce qui induit en particulier une logique d'enseignement des solides vers les points (et non le contraire) ;
- Les techniques de construction dépendent des artefacts mis à disposition ; ces artefacts deviennent des instruments privilégiés pour produire des objets particuliers ou vérifier des propriétés particulières.

La séance d'analyse praxéologique de la construction d'un cercle permet d'insister particulièrement sur ces deux points. En effet, les différentes techniques utilisées pour construire un cercle sont évidemment dépendantes des artefacts utilisés, ce qui nous permet d'insister sur ce lien entre artefact et concept (ici, conception du cercle). La déconstruction/reconstruction dimensionnelle est aussi à l'œuvre : en dégageant les objets 2D/1D/0D liés au cercle ; on illustre comment on peut faire évoluer le regard des enfants sur cet objet.

Nous continuons à travailler ces deux points dans les prolongements de la situation initiale, par des activités de restauration de figure. Nous l'évoquerons dans le paragraphe V.

3 Les objectifs pédagogiques

La situation-amorce est très clairement une situation qui peut se transposer, moyennant quelques ajustements mineurs, dans une classe de l'école élémentaire. Les étudiants, mis en position réflexive par rapport à la situation qu'elles ou ils viennent de vivre, peuvent dégager différents principes pédagogiques comme :

- l'organisation d'une séance à partir d'une situation-amorce réactive : mise en activité par groupe, observation, mise en commun, synthèse ... ; en particulier, apprentissage d'une posture de retrait en situation a-didactique ;
- en amont, analyse de la situation et choix des différentes valeurs des variables didactiques – ici, par exemple, réflexion sur les choix des instruments, ou , plus tard, choix des coûts des instruments dans une activité de restauration de figure ;
- en amont toujours, articulation de la première situation avec des séances de prolongements et d'entraînement ;
- en aval, retour réflexif sur les choix effectués et les productions des élèves.

V - PROLONGEMENTS DE LA SITUATION DE FORMATION

La séquence de formation, nous le rappelons, commence par une séance de 2h consacrée à la construction et à l'analyse de *bidules*, suivie d'une deuxième séance centrée sur une tâche de reproduction d'un cercle. Elle est ensuite prolongée par deux séances centrées sur la déconstruction dimensionnelle avec un nouvel outil, GeoGebra.

Pour l'atelier, nous avons fait le choix de ne pas exposer cette séquence telle que nous l'animons auprès des étudiants, mais plutôt de proposer aux participants de l'atelier de réfléchir à la conception d'une telle séquence. Nous leur avons demandé en particulier de détailler les connaissances visées⁹⁶, ainsi que d'imaginer les prolongements possibles. Faute de temps, nous n'avons pu qu'évoquer avec eux ces prolongements. Nous donnons donc ici quelques pistes.

1 La déconstruction dimensionnelle avec un logiciel de géométrie dynamique

Si la situation des *bidules* devient une situation de référence pour comprendre le lien entre instrument et concept, elle ne nous semble cependant pas suffisante pour espérer que les travaux du groupe de Lille puissent diffuser dans les classes et modifier les pratiques de l'enseignement de la géométrie.

⁹⁶ Mangiante et al. (2017) distinguent trois types de connaissances que l'on vise à faire acquérir aux futur.e.s enseignants : mathématiques, didactiques et pédagogiques. Nous avons repris ces distinctions.

C'est pourquoi nous prolongeons cette première séquence par une seconde dédiée spécifiquement à la déconstruction/reconstruction dimensionnelle; celle-ci nous sert de prétexte au maniement du logiciel GeoGebra, qui pose d'ailleurs la question de la nature des instruments utilisés pour construire une figure (les outils GeoGebra sont des artefacts différents des outils usuels de la géométrie).

Nous clôturons la séquence par une activité de construction avec coûts.

Pour des raisons pratiques, nous utilisons le logiciel GeoGebra ; les étudiants peuvent se le procurer facilement en ligne ; une grande majorité d'entre eux disposent d'un ordinateur portable qui permet de transformer rapidement notre salle de cours classique en salle informatique (il suffit d'apporter des rallonges pour les chargeurs).

La prise en main du logiciel est laissée à leur initiative, nous leur mettons à disposition un léger tutoriel leur permettant d'acquérir les gestes de base (trouver un outil, sélectionner/déplacer/effacer un objet, ...).

Voici donc quelques activités possibles.

1.1 Reprise des constructions liées au bidule

Nous demandons aux étudiants de reproduire les figures obtenues lors de la construction du bidule, à savoir un carré et un triangle équilatéral chacun inscrit dans un cercle, avec le logiciel de géométrie dynamique, d'abord sans contrainte particulière.

Cela nous permet, lors d'une première synthèse, de définir les concepts de figure *molle* et figure *robuste*, que nous empruntons à Healy (citée par Restrepo, 2008) : une figure robuste est une figure qui conserve toutes ses propriétés géométriques au cours d'un déplacement⁹⁷ quelconque, alors qu'une figure molle ne conserve pas toutes les propriétés géométriques demandées.

Contraindre les étudiants à obtenir une figure robuste nécessite l'utilisation de techniques s'appuyant sur les propriétés géométriques des objets et de leurs relations.

De plus, les contraindre à commencer par le cercle pour construire un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle n'utilise pas les mêmes propriétés que construire la même figure en commençant par le triangle.

Pour les plus rapides, nous pouvons imposer la contrainte supplémentaire que les côtés du carré et du triangle équilatéral soient de même longueur.

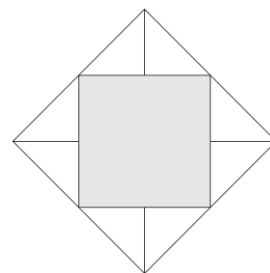
Cette première activité permet donc de travailler en profondeur les savoirs géométriques visés dans la situation des *bidules*.

Mais elle permet également de s'approprier un nouveau type d'instruments, indiqués selon leur fonction première plutôt que par un nom commun générique (par exemple outil *droites perpendiculaires* plutôt que *équerre*) ; il n'est pas évident pour les étudiants et *a fortiori* pour leurs futurs élèves, qu'il faille utiliser l'outil *cercle* pour construire un triangle équilatéral robuste ; pourtant, sur papier, ils ou elles utilisent sans hésiter leur compas. Il n'est donc pas inutile d'explicitier, même à leur niveau, le lien entre le compas et le cercle, ou, plus exactement, pourquoi un compas permet de tracer des cercles. Dans le cadre des travaux du groupe de Lille, ce lien entre *compas* et *cercle* est largement étudié et développé par Bulf & Celi (2016).

1.2 La déconstruction/reconstruction dimensionnelle avec GeoGebra

L'exercice suivant consiste à reproduire des dessins de façon robuste, comme par exemple celui-ci.

Les étudiants sont d'abord en position d'élèves pour effectuer la tâche demandée. Pour chaque dessin proposé, il est nécessaire d'analyser d'abord sa structure, et donc de forcer son regard à ne pas se contenter de ce qu'il voit, mais à déterminer les relations entre différentes composantes de ces



⁹⁷ Déplacement au sens de l'outil « déplacer » de GeoGebra, et non d'un déplacement au sens mathématique du terme.

figures. Il s'agit donc bien, en acte, de les décomposer, et même de les déconstruire, pour mieux les reconstruire ensuite.

Par exemple, pour le dessin proposé, il faut prendre en considération que les sommets du carré central sont les milieux des côtés du grand carré ; il convient donc de considérer des éléments 1D et 0D qui n'apparaissent pas *a priori* dans les figures pour pouvoir les reproduire, comme par exemple, les droites supportant les diagonales du grand carré.

Lors de la correction de ces constructions, nous revenons sur la notion de changement de regard nécessaire sur les figures pour pouvoir les comprendre.

1.3 La restauration de figure avec GeoGebra

La première activité de restauration se fait avec GeoGebra. Nous avons choisi pour cela une figure inspirée de Keskessa, Perrin-Glorian & Delplace (2007). Elle s'appuie sur un réseau de ligne qu'il faut retrouver pour construire la figure à moindre coût.

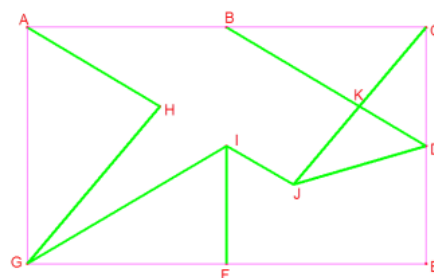
Reproduire la figure ci-contre à partir du rectangle ACEG
(on doit pouvoir déplacer les sommets du rectangle tout en conservant la configuration obtenue).

Selon les outils utilisés, votre réalisation coûte plus ou moins cher :

- Le rectangle ACEG coûte 0 point, quelle que soit la manière de le construire ;
- L'outil *point* coûte 0 point ;
- Les outils *droite*, *demi-droite* et *segment* coûtent 1 point ;
- L'outil *cercle (centre ; point)* coûte 1 point ;
- Les outils *droite parallèle* et *droite perpendiculaire* coûtent 4 points ;
- L'outil *médiatrice* et l'outil *compas* coûtent 8 points ;
- L'outil *milieu ou centre* coûte 10 points ;

Tous les outils utilisant une mesure coûtent 12 points.

Toutes les manipulations consistant à mettre en forme le dessin, tel que nommer des points, rendre invisible des objets, les colorier ... ne coûtent rien.



Là encore, les étudiants sont d'abord placés en situation d'élèves pour effectuer la tâche demandée. Beaucoup se prennent au jeu et cherchent à améliorer leur première construction. Nous n'avons pas de difficulté à les convaincre qu'il en sera de même pour leurs futurs élèves.

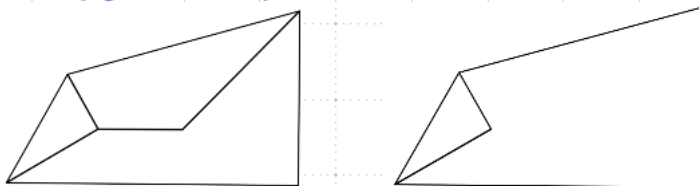
Ici, les coûts ont délibérément été choisis pour privilégier l'utilisation des alignements de points. Nous faisons prendre conscience aux étudiants du lien entre la notion que nous souhaitons travailler, et les instruments utilisés pour la construction.

Afin de promouvoir ce genre d'activité dans les classes, nous souhaitons poursuivre sur ce thème dans un environnement papier/crayon, d'abord pour être plus près de la réalité probable de leurs futures classes, et ensuite pour permettre aux étudiants de faire un pas de côté, et de se positionner en tant qu'enseignant-chercheur. C'est l'objectif de la dernière partie de la séquence.

2 Le jeu des coûts en situation de restauration de figure

Nous partons d'une figure inspirée de Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian (2014).

- Chaque groupe doit proposer un **système de coût des outils géométriques** nécessaires à la reproduction d'une figure (figure de gauche), à partir d'une amorce (figure de droite) :



- Chaque système de coût doit correspondre à un objectif d'apprentissage, ce qui signifie que la restauration de figure est possible à moindre coût avec l'objectif visé.
- Les objectifs d'apprentissage sont à chercher dans les programmes

Les étudiants peuvent ainsi commencer à se positionner en tant que futurs enseignants en construisant eux-mêmes leur exercice, en fonction des objectifs qu'ils souhaitent travailler.

Un débat fructueux est ensuite organisé en classe pour discuter des différentes propositions.

VI - CONCLUSION

La situation que nous venons de décrire nous semble pertinente d'un point de vue didactique. Elle a le mérite d'être robuste et permet d'atteindre les mêmes objectifs d'année en année. En plus de réactiver les connaissances de géométrie élémentaire chez les étudiants, elle permet de dégager les principes complexes de la conception d'une activité basée sur la résolution de problème et le travail de groupe, et, surtout, elle permet de développer certains éléments théoriques importants de la didactique des mathématiques. Pour ne citer que les plus importants :

- le rôle des variables didactiques ;
- la déconstruction/reconstruction dimensionnelle pour l'analyse de figures ;
- le lien entre instrument de construction et concept mathématique.

Elle sensibilise de plus les futurs enseignants à l'intérêt de nouvelles activités en géométrie, encore peu présentes dans les manuels, telles que la restauration de figure. Une telle activité de restauration à partir d'une amorce, couplée à un jeu de coût sur les outils proposés, est riche d'apprentissage pour les élèves, comme le montrent tous les travaux du groupe de Lille.

Nous espérons contribuer ainsi à la diffusion de ces travaux, et nous remercions tous les participants à notre atelier, dont les réactions et le retour ont permis la maturation de notre réflexion et la rédaction de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (1982). A propos des conceptions du cercle. Présentation de situation de classes privilégiant certaines de ces conceptions, *Grand N*, 27, 45-72

Bulf C. & Celi V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire. Une transition clé : du gabarit au compas. *Grand N*, 97, 21-58

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265

COPIRELEM. (2018). *Quelles mathématiques pour une formation initiale des professeurs des écoles ?* En ligne <http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/formation-initiale-maths-pe-copirelem2018-24-04.pdf>

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27

Keskessa B., Perrin-Glorian M.J. & Delplace J.R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, 79, 33-60

Kuzniak, A. (2003). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du 1^{er} degré en mathématiques, *Carnets de route de la COPIRELEM, Concertum tome 3*, COPIRELEM, 7-22

Mangiante, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A., Tempier, F. & Winder, C. (2017). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles. *Actes du quatrième colloque ARCD 2016*. Université de Toulouse, France.

Mangiante-Orsola C. & Perrin-Glorian M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des Maîtres, *Grand N*, 94, 47-83

Rabardel, P. (1995). Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. *Outils pour le calcul et le traçage des courbes*. CNDP-DIE, 61-65. En ligne https://tecfalabs.unige.ch/mitic/articles/rabardel_1995_quest-ce_quun_instrument.pdf

Restrepo, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de sixième*. Grenoble : Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Robert, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia*, 15, 123-157. En ligne http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/didaskalia/INRP_RD015_5.pdf

ANNEXES

Annexe 1 – Description détaillée de l'activité

Matériel

- Un bidule grand format.
- 7 ou 8 bidules petit format.
- Plusieurs feuilles de format A4 (80 mg suffisant).
- Ciseaux, colle.
- Matériel habituel (règle, compas, équerre).
- Un disque correspondant au cercle circonscrit au carré.
- Un disque correspondant au cercle circonscrit au triangle.
- Une feuille de synthèse par groupe.

Déroulement

Phase 0 - Observation

La classe est organisée en six groupes de quatre ou cinq personnes chacun.

Chaque groupe reçoit un bidule avec pour consigne de l'observer pendant environ deux minutes, puis de le décrire lors de la phase collective orale. On peut ne pas autoriser les étudiants à manipuler l'objet, les informations prises ne sont alors que visuelles (à partir de l'objet grand format bien visible pour tous par exemple).

L'enseignant intervient éventuellement pour parvenir au but recherché (voir synthèse) : combien de faces ? nature des faces ? nature des triangles ? forme des « oreilles » ? lien entre les « oreilles » et les faces ?

Un étudiant au tableau prend des notes lors de la mise en commun.

Synthèse 1

Le premier but de cette synthèse est de faire une distinction entre objet physique et objet géométrique sous-jacent (cube, pyramide) et de (re-)voir le vocabulaire associé.

Objet physique : fabriqué à partir de neuf disques (on observe que pour les étudiants le mot « disque » désigne quasi exclusivement l'objet physique et non une partie du plan délimitée par un cercle), dans lesquels sont inscrits des triangles équilatéraux et des carrés ; les segments de disque, obtenus par pliage le long des côtes des triangles et des carrés, servent de pattes de collage.

Objet géométrique : les segments circulaires n'appartiennent pas à cet objet théorique ; l'objet est donc un polyèdre à neuf faces (nonaèdre), dont cinq faces sont des carrés et quatre faces sont des triangles équilatéraux. On peut également le voir comme un cube surmonté d'une pyramide régulière à base carrée.

Le deuxième objectif est de confirmer certaines hypothèses nécessaires à la fabrication du bidule : les quadrilatères sont bien des carrés (ils pourraient être des rectangles non carrés) et les triangles sont bien équilatéraux (ils pourraient être simplement isocèles).

En revanche, s'il n'est pas apparu que les disques n'ont pas tous le même rayon, ou que les carrés et les triangles équilatéraux ont des côtés de même longueur, on ne cherche pas à le faire préciser. Ces propriétés seront nécessaires pour la phase 2, et seront découvertes à ce moment-là.

Remarque : il est possible (mais nous ne l'avons pas expérimenté) de ne pas réaliser la phase d'observation et de lancer directement les groupes dans la fabrication. On entamerait ainsi directement l'activité par une situation d'action, et la situation de formulation viendrait ensuite, dans un schéma plus classique.

Phase 1 – Construction du bidule

Chacun des six groupes reçoit une consigne et des contraintes différentes de matériel.

Consigne a - « Reproduisez un unique exemplaire du bidule que je viens de déposer sur votre table »

groupe 1 : le bidule, aucun instrument de géométrie, uniquement feuilles, ciseaux, colle, crayon

groupes 2 et 2 bis : le bidule/compas et règle non graduée (deux groupes si possible)

groupe 3 : le bidule, tout matériel, dont équerre et règle graduée.

Consigne b - « Construisez un unique bidule semblable à celui posé sur mon bureau »

groupe 4 : règle, compas, équerre et sans rien d'autre

groupe 5 : un exemplaire du disque circonscrit au carré (présenté comme tel)

groupe 6 : un exemplaire du disque circonscrit au triangle (présenté comme tel).

Pendant que les groupes travaillent, ils reçoivent une feuille de synthèse sur laquelle ils doivent :

- rappeler leurs contraintes
- noter les questions qu'ils se sont posées, ou les difficultés auxquelles ils se sont heurtés
- décrire le plus précisément possible les réponses apportées.

Ces notes serviront ensuite à la mise en commun

Il est important de laisser chaque groupe aller au bout de la fabrication. Il faut donc prévoir une tâche supplémentaire pour les groupes qui terminent plus tôt. Nous avons choisi la construction (à la règle et au compas) d'un patron de l'objet théorique.

Phase 2 – Mise en commun

Chaque groupe présente ses contraintes, sa démarche et des difficultés éventuelles.

Phase 3 Synthèse 2

On met en évidence l'existence de deux stratégies : aller du disque (ou cercle) vers le polygone inscrit ou du polygone vers son cercle circonscrit ; certaines procédures nécessitent les deux stratégies alors que d'autres n'en nécessitent qu'une seule. On analyse l'influence des outils et artefacts à disposition sur le choix de telle ou telle stratégie.

Phase 4 Reproduction d'un cercle

Ce travail prend une séance entière après la séance de reproduction de bidule. Le travail est individuel.

Chaque étudiant reçoit une feuille avec un cercle sans aucun point distinctif. La consigne est de trouver au moins deux techniques différentes pour reproduire ce cercle à l'identique. Les étudiants choisissent eux-mêmes les outils pour chacune de ces techniques.

Annexe 2 – Questions posées par les étudiants - Synthèse

1. Comment retrouver le centre d'un cercle ?
2. Comment inscrire un triangle équilatéral dans un cercle ?
3. Comment construire un carré ?
4. Comment tracer le cercle circonscrit à un carré ?
5. Comment tracer le cercle circonscrit à un triangle ?
6. Comment inscrire un carré dans un cercle ?
7. Comment déterminer le diamètre d'un cercle ?

Annexe 3 – Tableau de synthèse – Construction d'un cercle

Type de tâche : Reproduire un cercle					
Technique/procédure/méthode	Éléments technologiques /propriétés mathématiques associés	Avec ou sans mesure ?	Outil(s) ou instruments ?	Regard sur les objets	Niveau ou cycle
Découper le disque et en tracer le contour	Un cercle est le contour d'un disque. Un cercle est une ligne courbe de courbure constante.	sans	Ciseaux - Gabarit d'un disque	Vision 2D (disque) → vers une vision 1D : contour du disque	Cycle 1 GS
Découper le contour du disque	Un cercle est une ligne courbe de courbure constante.	sans	Papier calque	Vision 1D : Cercle comme ligne, éventuellement comme contour d'un disque	Cycle 1
(Découper le disque,) le plier une première fois en deux sur lui-même (bord contre bord) ; le déplier puis le replier de la même façon mais en un autre endroit, de façon à obtenir deux plis qui s'intersectent. Prendre au compas l'écartement entre le point d'intersection des plis et le bord du disque, puis tracer un cercle avec cet écartement.	Un disque a une infinité d'axes de symétrie, chacun support d'un diamètre ; tous les diamètres ont le même milieu, centre du disque ; tous les points du cercle sont à égale distance du centre.	sans	Ciseaux - Compas	Vision 2D (disque, demi-disque) → vers une vision 1D : pli comme diamètre → Vers une vision 0D : intersection des diamètres comme centre du cercle.	Cycle 2 CE1
Découper le disque, le plier une première fois en deux sur lui-même (bord contre bord), puis une seconde fois ; tracer un trait en suivant l'un des bords droits du secteur de disque obtenu ; tracer au compas un cercle dont ce trait est un rayon	Un disque a une infinité d'axes de symétrie, chacun support d'un diamètre ; tous les diamètres ont le même milieu, centre du disque ; un rayon a pour longueur la moitié d'un diamètre ; le centre du cercle est l'une des extrémités du rayon ; tous les points du cercle sont à égale distance du centre.	sans	Ciseaux - Compas	Vision 2D (disque, demi-disque, secteur angulaire) → vers une vision 1D : pli comme diamètre, bord du secteur angulaire comme rayon → Vers une vision 0D : extrémité du rayon comme centre du cercle.	Cycle 2

Type de tâche : Reproduire un cercle					
Positionner l'origine de la règle graduée sur un point du cercle ; faire pivoter la règle autour de son origine jusqu'à trouver la longueur maximale de l'autre côté du cercle ; immobiliser alors la règle (et tracer d'un bord à l'autre du cercle. Mesurer sa longueur, et en) prendre la moitié pour déterminer le rayon du cercle ; utiliser un compas ouvert au rayon déterminé.	Un diamètre est une corde de longueur maximale ; tous les diamètres mesurent la même longueur ; le rayon d'un cercle est le demi-diamètre ; un cercle est l'ensemble des points équidistants d'un point/centre	avec	Règle graduée ; compas	Vision 1D (ligne, diamètre) → vers une vision 0D (point sur le cercle, milieu d'un diamètre, centre du cercle comme extrémité d'un rayon)	Cycle 2 CE2
Tracer une corde, la mesurer pour en déterminer le milieu, puis tracer la perpendiculaire à la corde passant par son milieu. Mesurer le diamètre obtenu pour en calculer la moitié et trouver ainsi le rayon ; ouvrir le compas à cette mesure du rayon obtenue et tracer le cercle.	Le centre d'un cercle se trouve sur la médiatrice de n'importe quelle corde de ce cercle ; (la médiatrice d'un segment vu comme l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment) ; la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu ; ...	avec	Règle ; équerre ; compas	Vision 1D (corde, médiatrice, diamètre, ...) → vers une vision 0D (milieu de la corde, centre du cercle comme extrémité d'un rayon)	Cycle 3 (6ème)
Tracer une corde ; construire sa médiatrice par intersection d'arcs de cercles ; tracer une deuxième corde ainsi que sa médiatrice ; reporter au compas l'ouverture entre le point d'intersection des deux médiatrices et un point quelconque du cercle ; tracer un nouveau cercle avec cette ouverture.	La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment ; Le centre du cercle est équidistant de tous les points du cercle ; le centre d'un cercle se trouve à l'intersection des médiatrices de deux cordes quelconques.	sans	Règle non graduée ; compas	Vision 1D (corde, médiatrice, cercle) → vers une vision 0D (intersection des médiatrices)	cycle 4

Type de tâche : Reproduire un cercle					
Avec le compas, évaluer approximativement le lieu du centre, piquer la pointe en ce lieu, écarter le compas jusqu'au cercle, puis vérifier le lieu du centre en traçant un cercle ; procéder ensuite par ajustement pour obtenir le meilleur écartement possible du compas ; tracer ensuite un cercle avec ce même écartement.	Le centre du cercle est équidistant de tous les points du cercle ; cette distance est le rayon du cercle	sans	compas	Vision 1D (cercle) et vision 0D (centre comme point isolé)	Cycle 2
On trace une corde quelconque, puis une deuxième corde perpendiculaire à cette corde à partir de l'une de ses extrémités, puis une troisième et une quatrième de façon à former un rectangle ; on trace ensuite les diagonales de ce rectangle ; on pique le compas à l'intersection des diagonales et on l'ouvre jusqu'au cercle. On trace ensuite un cercle avec ce même écartement.	Un rectangle est toujours inscrit dans un cercle car il se caractérise par des diagonales de même longueur et se coupant en leur milieu. L'intersection des diagonales est le centre du cercle, chaque diagonale est un diamètre du cercle.	sans	règle non graduée, équerre, compas	Vision 1D (cordes, perpendicularité, diagonales) → vers une vision 0D (centre comme intersection des diagonales, encore 1D)	Cycle 3
On trace une corde quelconque, puis une deuxième corde perpendiculaire à cette corde à partir de l'une de ses extrémités ; on joint ensuite les deux autres extrémités des cordes de façon à obtenir un triangle rectangle. On trace la médiatrice de son hypoténuse ; on pique le compas à l'intersection de l'hypoténuse et de sa médiatrice, puis on l'écarte jusqu'au cercle. On trace ensuite un cercle avec ce même écartement.	L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le diamètre de son cercle circonscrit ; la médiatrice d'un segment passe par le milieu de ce segment ; le milieu d'un diamètre est le centre du cercle.	sans	règle non graduée ; (équerre) ; compas	Vision 1D (cordes, perpendicularité, hypoténuse, médiatrice, ...) → vers une vision 0D (milieu comme intersection, encore 1D)	Cycle 4
On trace trois cordes successivement de façon à former un triangle inscrit dans le cercle. On trace deux médiatrices de ce triangle (méthode au choix, à décrire). On ouvre le compas entre l'intersection des médiatrices et le cercle, pour ensuite tracer un cercle avec ce même écartement	Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de concours de ses médiatrices	sans ou avec (selon la technique utilisée pour tracer une médiatrice)	règle non graduée, compas (ou en plus règle graduée et équerre selon la technique utilisée pour tracer les médiatrices)	Vision 1D (cercle, corde, médiatrices) → vers une vision 0D (centre comme intersection de ligne)	Cycle 4

Remarque - En fin de séance, nous demandons de relire l'intégralité des programmes des cycles 1, 2 et 3, pour y trouver des présences du cercle et de son évolution, et remplir ainsi la dernière colonne du tableau, à savoir situer la technique décrite dans un cycle, voire une année si possible.

Annexe 4 – Construction des différents objets

1 Les figures élémentaires

Quelles que soient les contraintes données à chaque groupe, les étudiants doivent choisir un objet de base par lequel commencer, celui qu'il faut construire indépendamment de ses relations avec les autres objets.

Le carré

Le carré peut être construit soit à partir de son côté soit à partir de sa diagonale. En fonction d'outils disponibles et de l'analyse faite pendant la phase de découverte, le segment en question peut être construit :

- En utilisant le bidule comme gabarit (cette procédure permet de reproduire le carré directement).
- En prenant la mesure sur le bidule puis en utilisant la règle graduée pour tracer le segment de longueur nécessaire.
- En reportant la longueur du segment avec un compas ou une règle informable (c.à.d. une règle sur laquelle il est possible d'inscrire des marques correspondant à des extrémités de segments ; elle peut donc servir d'outil de report et de comparaison de longueurs).

Les procédures possibles pour la construction du carré à partir de sa diagonale :

- 1) Procédure qui permet de construire le cercle circonscrit au même temps :
 - a) Tracer le segment
 - b) Tracer sa médiatrice
 - Soit à la règle non graduée et au compas
 - Soit en trouvant le milieu du segment à la règle graduée et en traçant (à l'équerre) la droite perpendiculaire passant par le milieu
 - c) Tracer le cercle du centre le milieu du segment passant par une extrémité du segment
 - d) Relier les points d'intersection avec le cercle.
- 2) Procédure qui permet de construire le carré seul :
 - a) Tracer le segment
 - b) Trouver son milieu à la règle graduée
 - c) Tracer deux segments perpendiculaires d'extrémité le milieu et de longueur la moitié de la longueur du segment de départ (à l'équerre et règle graduée).

Les procédures possibles pour construire le carré à partir de son côté.

- 1) À la règle non graduée et au compas

Pour simplifier, on nomme le segment donné [AB].

- a) Tracer la droite (AB)
- b) Tracer le cercle de centre A et de rayon AB. Soit E le deuxième point d'intersection du cercle avec la droite (AB)

- c) Construire la médiatrice (d) du segment [BE]. Soit D un point d'intersection de (d) avec le cercle.
 - d) Tracer le cercle de centre B et de rayon AB et le cercle de centre D et de rayon AB. Soit C le point d'intersection de ces cercles, différent de A.
 - e) Tracer le quadrilatère ABCD.
- 2) À la règle graduée et à l'équerre
- a) Tracer les deux perpendiculaires au segment passant par les extrémités
 - b) Reporter la mesure de longueur du segment sur les deux perpendiculaires (de même côté du segment)
 - c) Relier les deux points obtenus
- 3) À la règle non graduée, l'équerre et le gabarit de moitié d'un angle plat (p.ex. équerre isocèle)
- a) Tracer les deux perpendiculaires au segment passant par les extrémités
 - b) Tracer les bissectrices intérieures des deux angles droits obtenus
 - c) Relier les points d'intersection entre les bissectrices et perpendiculaires
- 4) Différentes procédures qui mélangent des éléments des procédures précédentes

Le triangle équilatéral

Le triangle équilatéral ne peut être construit qu'à partir de son côté. Le côté peut être construit en utilisant les mêmes procédures que celles décrites ci-dessus. Les procédures possibles :

- 1) Utiliser le bidule comme gabarit (repérer les trois sommets puis les relier.
- 2) Tracer deux cercles de centre une extrémité du segment et passant par l'autre extrémité puis relier un point d'intersection de ces cercles aux extrémités du segment.

Le cercle/disque

Deux procédures possibles :

- Utiliser le bidule comme gabarit (disponible seulement pour les groupes ayant le bidule à leur disposition)
- Tracer le cercle au compas.

Pour la deuxième procédure tous les groupes sauf ceux qui n'ont pas la contrainte de reproduction à l'identique sont confrontés à la tâche : trouver le rayon du cercle à reproduire. En fonction d'outils et artefacts à disposition, les procédures possibles sont :

- Plier le disque en quatre (pour retrouver implicitement deux axes de symétrie).
- Mesurer le diamètre (comme diagonale du carré, ou la plus grande corde, ...), diviser la mesure par deux pour obtenir la mesure du rayon.
- Tracer une corde, tracer sa médiatrice à la règle et au compas, mesurer le diamètre obtenu puis diviser par deux.
- Tracer deux cordes distinctes, tracer leurs médiatrices, puis prendre la longueur du segment d'extrémités le point d'intersection des médiatrices et l'intersection d'une médiatrice avec le cercle comme rayon.

3 Inscrire un polygone dans un cercle/disque

Le carré

En fonction des instruments disponibles, les procédures possibles sont les suivantes.

- 1) Le pliage
 - a) Le disque est plié en quatre
 - b) Les bouts des plis sont reliés à la règle ou par pliage.
- 2) À l'équerre et à la règle graduée
 - a) Tracer un angle droit inscrit dans le cercle
 - b) Tracer la corde sur laquelle il s'inscrit. C'est un diamètre du cercle
 - c) Mesurer la moitié du diamètre et marquer son milieu
 - d) Tracer la droite passant par ce milieu et perpendiculaire au diamètre
 - e) Relier les extrémités du diamètre avec les points d'intersection du cercle avec la perpendiculaire au diamètre
- 3) À la règle non graduée et au compas
 - a) Tracer une corde
 - b) Construire sa médiatrice. C'est un diamètre du cercle
 - c) Construire la médiatrice de ce diamètre.
 - d) Relier les extrémités des deux diamètres pour obtenir un carré
- 4) Procédures diverses contenant des éléments de ces trois procédures.

Le triangle

- 1) Par pliage
 - a) Procédure 1 : replier trois « bouts » du disque de sorte qu'ils se touchent en un point
 - b) Procédure 2 :
 - i) Trouver le centre du cercle par pliage
 - ii) Ramener le bout d'un des deux plis sur le cercle. Plier.
 - iii) Le pli ainsi obtenu est un des côtés du triangle.
- 2) À la règle graduée et au compas. Cette procédure est essentiellement la même que la deuxième procédure par pliage, en remplaçant le pliage par la construction des axes de symétrie à la règle et au compas.
- 3) À la règle non graduée et au compas
 - a) Trouver le centre du cercle par une des procédures décrites ci-dessus.
 - b) Construire la rosace à 6 branches.
 - c) Relier un sommet sur deux de la rosace.