ATELIER A21

UTILISATION DES AZULEJOS DANS L'ENSEIGNEMENT CYCLE 3

Olivier GARRIGUE
Enseignant en mathématiques, COLLEGE LA CARRAIRE
IREM D'Aix-Marseille, Groupe Collège
olivier.garrigue@ac-aix-marseille.com

Résumé

L'azulejo (carreau) d'Eduardo Nery, artiste Portugais, et ceux créés par Jorge Rezende, mathématicien Portugais, sont avant tout des merveilles de petits carreaux articulés, leurs compositions géométriques attirent l'œil du mathématicien et éveille ses sens géométriques. De multiples questions mathématiques peuvent naître de la manipulation des azulejos. Dans le but de susciter toutes ces questions, nous avons présenté ces azulejos sous la forme d'une douzaine de carreaux plastifiés à des élèves de cycle 3, (du CM1 à la 6e). Nous avons distingué trois phases de travail qui jalonnent ce parcours d'étude et qui peuvent être aussi appliquée à chaque séance afin de ritualiser le travail auprès des élèves et pour qu'ils soient plus efficaces dans leur travail : une phase d'adaptation, une phase de penser dans l'action et une phase du développement du questionnement et de la réflexion.

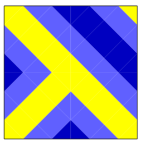
Au cours de deux phases de travail, les participants à cet atelier ont pu manipuler des azulejos, différents à chacune des phases. Le matériel, créé par les élèves, a ainsi été étudié afin d'alimenter la discussion sur les possibilités qu'offrent les azulejos pour un enseignement mathématique. L'objectif de l'atelier était donc double. Dans un premier temps, c'était l'occasion de faire vivre aux participants et en accéléré, l'expérience des élèves de collège en « parcours[83] » à partir de l'objet « Azulejos (carreaux) ». Puis, dans un deuxième temps, il s'agissait d'éprouver les questions mathématiques qui pouvaient naître et de discuter des possibilités de s'en saisir en classe pour dérouler un « parcours » avec des élèves de Primaire.

I - PREMIÈRE PHASE : PRISE EN MAIN DE DEUX AZULEJOS.

1 Présentation de la première phase.

Dans une première phase de manipulation, nous avons proposé aux participants les deux azulejos habituellement proposés aux élèves lors des deux premières séances de leur parcours d'étude Azulejos. Ces deux carreaux sont donnés aux élèves lors de deux séances différentes et ne sont pas compatibles ; pour l'atelier nous les avons distribués simultanément pour accélérer le parcours afin que les participants puissent jouer avec les deux azulejos que nous avons pour habitude de présenter aux élèves lors des deux premières séances consacrées à ce parcours d'étude (un respectivement pour chaque séance).

L'azulejo créé par l'artiste portugais Eduardo Nery (1966) :
(Chaque participant disposait de 12 azulejos)
C'est le premier azulejo que nous proposons à l'étude à nos élèves.



L'azulejo créé par le mathématicien Jorge Rezende (2012) :
(Chaque participant disposait de 12 azulejos)
C'est le deuxième azulejo que nous proposons à l'étude à nos élèves.

83 Parcours que nous différencions d'une démarche de projet. Un projet étant un parcours dont on fixe le but dès le départ.

Ainsi les participants à l'atelier, regroupés dans la mesure du possible par deux, pouvaient manipuler librement ces deux types d'azulejos, puis communiquer entre eux afin d'échanger sur les diverses possibilités de mise en œuvre au primaire.

2 Premier moment de synthèse :

Les différentes réactions et propositions des participants à cet atelier pendant et à la fin de cette première phase de manipulation sont rapportées ci-dessous[84] :

a) On peut demander aux élèves de trouver le plus de pavages possibles. La prise de photos semble faire consensus pour garder en mémoire les pavages réalisés par les élèves. En effet, cela permet à l'enseignant de prendre appui sur ces différentes productions pour les synthèses de classes. De plus, cela permet aux élèves de faire et défaire leurs pavages tout en conservant une trace de leur travail. À noter que : « Le plus de pavages possibles » peut renvoyer vers la question : « Combien y a-t-il de possibilités ? »
b) L'invention d'un codage en forme de fourche comme dans la figure 5 pour noter également la position des azulejos peut être une alternative aux photos ; il y a certes une perte de la richesse proposée par l'azulejo manipulé mais l'élève a ainsi une possibilité de communiquer plus facilement la disposition des azulejos dans un pavage ou une frise à ses camarades ou au professeur.
c) Il peut être demandé aux élèves de construire des pavages avec des axes de symétrie. Les participants ont alors évoqué la limite des 12 azulejos. En effet, avec les azulejos d'Eduardo Nery par exemple, si les élèves se limitent à 12 carreaux alors ils peuvent être limités dans le nombre d'axes s'ils se cantonnent à un pavage 3×4 et qu'ils n'ont pas l'idée d'extrapoler (« si on avait plus d'azulejos »). La question s'est alors posée : « si l'on propose plus de 12 carreaux aux élèves leurs réactions seraient-elles différentes et quel serait leur questionnement ? »
d) Élaborer un travail plus important sur les transformations du plan avec les azulejos semblait aussi naturel pour les participants. Symétrie axiale bien entendu, mais aussi : translation, rotation, symétrie glissée.
e) Certains participants ont évoqué le fait que positionner les azulejos au hasard donne toujours une figure cohérente. Le hasard est une notion qui peut être évoquée avec des élèves de cycle 3.
f) Les programmes de construction ont aussi été évoqués ainsi que des pavages « téléphonés » : un travail entre deux groupes d'élèves par exemple : un premier groupe qui propose un modèle à reconstruire à un deuxième groupe. À noter que si les élèves ont connaissance d'une notation des carreaux, en forme de fourche (figure 5) comme évoquée précédemment par exemple, celle-ci peut être utilisée de manière pertinente et ainsi légitimée.
g) La notion de construction des azulejos avec des instruments de géométrie a aussi été évoquée. Plusieurs types de travail pourront être envisagés. Notamment sur papier quadrillé puis sur papier blanc.
h) Toujours en ce qui concerne les tâches de construction géométrique : on peut aussi proposer aux élèves de réduire ou d'agrandir un azulejo donné.
i) Il est aussi évoqué le fait que les élèves peuvent se poser des questions sur l'origine de tel ou tel pavage ou « motif » ; existe-t-il un motif de base ? Ou bien, existe-t-il des motifs plus grands ?
j) Certaines constructions de pavages ou de frises peuvent faire appel à des démarches algorithmiques.
k) Quelques participants se sont posés la question du nombre de configurations possibles avec deux pièces.

---

84 A partir de mes notes et de celles qu'a bien voulu prendre Agnès Gâteau, je l'en remercie.

3 Éclaircissement sur notre pratique enseignante avec des élèves de 6e :

À ce stade, une fois ces premières observations effectuées par les participants, il nous paraît important d'apporter quelques précisions sur la façon dont nous avons abordé les azulejos avec les élèves dans des classes de 6e depuis l'année scolaire 2016-2017.

Nous nous sommes tournés vers un enseignement reposant sur les éléments suivants :
Une démarche : Au début de l'année, nous proposons aux élèves « ***un parcours*** » d'étude sur les azulejos. À raison d'une séance toutes les deux ou trois semaines environ et ceci jusqu'à la fin de l'année, les élèves vont être les acteurs de séances indépendantes de l'enseignement classique que nous leur dispensons au quotidien.
Un artefact : les azulejos plastifiés présentés au début comme un trésor caché dans une enveloppe (« habillage pédagogique »), c'est ce qui va être étudié tout au long de l'année. Au rythme des séances, les élèves découvriront différents azulejos (celui d'Eduardo Nery (1966), celui de Jorge Rezende (2012) et bien d'autres, …).
Un carnet de bord : Chaque élève dispose d'un carnet de bord tout au long du projet et il écrit dedans tout ce qu'il jugera bon pour mieux comprendre la nature de l'objet étudié. Ce carnet lui sert de fil rouge.
L'autonomie : Il était important pour nous de respecter deux points qui nous semblaient fondamentaux. Le premier est le principe de la « démarche ouverte », c'est-à-dire que ce sont les élèves qui pilotent le plus possible l'avancée du parcours et les pistes de réflexion, et le deuxième point est le respect du rythme de chaque élève. On prendra garde à une dérive standard de la mise en œuvre d'un tel dispositif à plus forte raison avec des élèves de 6e. Du fait de leur enthousiasme, les élèves peuvent rapidement partir dans toutes les directions. C'est ici que le rôle de l'enseignant prend tout son sens. Dans ce type d'enseignement, il est le garant du respect du cadre, c'est-à-dire qu'il peut lui arriver de recadrer le questionnement des élèves par le biais de ***questions stratégiques*.**

4 Du point de vu de l'enseignant et de l'enseignement, que s'est-il passé ?

Lors de notre travail avec les élèves, nous avons distingué à chaque séance trois phases. Cette ritualisation a été bénéfique dans le travail des élèves rendant plus efficace leur réflexion.

4.1 Phase d'adaptation :

Les élèves découvrent le cadre de travail et s'adaptent à la situation proposée par l'enseignant. C'est un moment clef. En ouvrant l'enveloppe ils découvrent les azulejos et se familiarisent avec l'objet. Nous remarquons le plus souvent que les élèves se posent énormément de questions durant cette phase. Dès les premières séances, l'enseignant doit montrer une grande part d'adaptabilité aux différentes réactions des élèves. Ainsi, comme les participants l'ont fait remarquer lors de cette première phase de manipulation, les élèves vont multiplier les productions, les observations et les questions. C'est à partir de cela et des photos qu'il aura prises que l'enseignant peut noter, reformuler et ordonner des ***questions stratégiques*** qu'il soumettra à l'ensemble des élèves lors de moments de synthèse et ainsi approfondir l'étude des azulejos.

4.2 Phase de penser dans l'action :

En premier lieu, comme l'ont naturellement évoqué les participants de l'atelier, cette phase peut être l'occasion de travailler de manière plus approfondie sur les pavages et la symétrie ainsi que sur les frises et les motifs glissés mais l'objectif principal de cette phase reste d'appuyer la pensée des élèves et de leur permettre de formuler explicitement leurs questions, leurs opinions. Les élèves continuent de manipuler les azulejos pour mieux expliquer à leurs camarades et/ou au professeur leurs points de vue, leurs questions. Il s'agit de montrer aux élèves qu'il faut être précis et rigoureux dans l'argumentation.

4.3 Phase d'élaboration du questionnement et de la réflexion :

À la fin de la deuxième phase, il est judicieux de faire une synthèse des réflexions des élèves. Lors de nos expérimentations, la question du dénombrement est souvent l'une des questions qui a suscité le plus d'intérêt chez nos élèves, ainsi que la façon dont les azulejos sont conçus pour avoir de telles propriétés.

L'enseignant peut alors poser la question du nombre de possibilités différentes de créer une frise de deux carreaux, puis de trois, etc. Ici, l'invention d'un système de notation efficace est effectivement décisive dans l'avancée de la réflexion des élèves. Nous avons pu constater qu'une telle notation finissait toujours par être mise en place puis utilisée par les élèves. Établir des règles rigoureuses pour construire un azulejo semble-être aussi une bonne piste de travail pour les élèves et peut être étroitement lié à la question du dénombrement. Toutefois, si nous revenons au principe d'un parcours tel que nous l'envisageons, il se peut que les élèves ne prennent pas du tout cette orientation et ce sera alors à l'enseignant d'accompagner les élèves dans de nouvelles voies.

5 En guise de transition :

Lors de cette première phase de manipulation et de ce premier moment de synthèse, les participants ont pu vivre en accélérer ce que les élèves vivent lors de ces phases de travail que nous venons de définir. Pour ensuite mieux appréhender le travail des élèves, mais aussi pour essayer de mieux comprendre en quoi consiste la troisième phase : « la phase d'élaboration du questionnement et de la réflexion », nous avons proposé une deuxième phase de manipulation aux participants.

II - DEUXIÈME PHASE DE MANIPULATION : ÉTUDE DE QUELQUES AZULEJOS SUPPLÉMENTAIRES ET DE QUELQUES PRODUCTIONS D'ÉLÈVES.

1 Présentation de la deuxième phase de manipulation.

Dans une deuxième phase de manipulation, nous avons présenté dans cet atelier deux enveloppes « n°2 » à chaque binôme (figure 1 ci-dessous) afin que les participants puissent prendre en main et toujours de façon libre des azulejos pouvant présenter d'autres caractéristiques ainsi que des azulejos créés par des élèves durant ce parcours.

Figure 1. Exemples d'enveloppes « n°2 »

2 Deuxième moment de synthèse :

Tout d'abord, les premières manipulations de ces nouveaux azulejos par les participants ont été majoritairement guidées par la recherche de pavages symétriques. Un autre objectif fort est la comparaison de ce que l'on obtient avec l'un ou l'autre des azulejos mais aussi avec les azulejos des enveloppes n°1. Si toutes les remarques et observations établies à l'issue de la première phase de manipulation sont toujours valables d'autres questions, plus en rapport avec notre expérimentation avec les élèves, ont été soulevées par les participants, voici celles que nous avons pu noter plus particulièrement :

a) Comment les élèves s'y sont pris pour fabriquer leurs propres azulejos ?
b) Se sont-ils aperçus que certains azulejos n'avaient pas le même nombre d'axes de symétrie ? Quelles conséquences cela a-t-il engendré dans leur travail ?
c) Ont-ils aussi essayé de compter le nombre de combinaisons possibles avec ces nouveaux azulejos ou avec ceux qu'ils ont créés ?

2.1 *Concrètement, quelles ont été les démarches des élèves ?*

Comme nous l'avons déjà dit, lors de notre expérimentation de ce parcours avec les élèves, nous avons pu constater que les deux principales questions sur lesquelles ils se focalisent sont :

1. Combien de possibilités avons-nous de créer des frises avec deux azulejos, trois azulejos, etc. ?
2. Comment peut-on créer nous-même des azulejos ?

Chacune de ces questions partent d'un constat lorsque les élèves manipulent les azulejos comme les participants ont pu le faire. Pour la première question, les élèves voient qu'ils peuvent créer une multitude de frises ou de pavages, « oui mais une multitude ça veut dire combien ? », si certains évoquent une infinité de possibilités, d'autres ne sont pas d'accords. Quelques groupes d'élèves ont donc la curiosité de dénombrer les possibilités pour deux, puis pour trois azulejos. Pour la deuxième question, nous pouvons rebondir sur l'une des remarques faites par les participants : « *positionner les azulejos au hasard donne toujours quelque chose de construit* ». En effet, les élèves remarques immédiatement que quel que soit la position des azulejos la « continuité » des lignes et des couleurs en particulier est toujours respectée. Les élèves essayent donc de copier les azulejos sur leur carnet de bord puis parfois de les modifier, enfin et surtout de construire leurs propres azulejos.

Par le biais des questions stratégiques, l'enseignant peut pousser naturellement les élèves à répondre successivement à ces questions de manière approfondie. Lors des deux années, si un travail sur les transformations a toujours été mené par les élèves, il en a été de même pour la recherche d'une réponse satisfaisante à ces deux questions. C'est ce que nous allons illustrer rapidement dans les paragraphes suivants.

2.2 *Travail sur les transformations du plan.*

Si la recherche de motifs particuliers est souvent ce qui revient spontanément chez les élèves lors de la toute première manipulation des azulejos, l'utilisation de transformations du plan ou bien la recherche de configuration avec des axes de symétrie est ce qui peut advenir dans un second temps. Dans le premier exemple de la figure 3, l'élève explique qu'il a disposé les 6 azulejos de droite puis qu'il a disposé les six autres de gauche comme s'il avait opérer un retournement de 180° dans le sens anti-horaire des six premiers. Il pointe du doigt avec sa main droite le centre du pavage et avec la main gauche montre le déplacement.

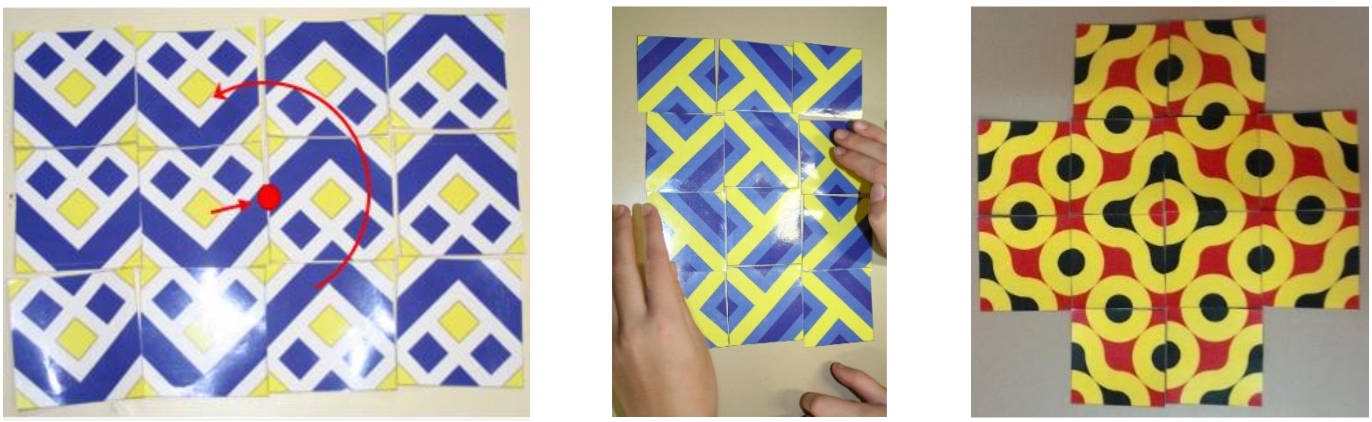


Figure 3. Exemples de travail sur les transformations du plan

Dans l'exemple n°2 de la figure 3, nous avons le cas d'un groupe d'élèves qui a créé un pavage 4 x 3 avec un axe de symétrie. Certains groupes vont essayer d'obtenir des pavages 4 x 3 avec plus d'axes de symétrie, ils pourront en obtenir 2 avec certains azulejos de Jorge Rezende. Comme les participants l'ont fait remarquer lors de la première phase de manipulation (remarque c), il est vrai que les élèves se restreignent aux douze azulejos mis à leur disposition. À ce sujet, sur les deux années où nous avons expérimenté l'utilisation des azulejos avec les élèves, à notre souvenir, seul un ou deux groupes sont allés demander des azulejos supplémentaires à l'enseignant ou aux autres élèves pour essayer de « voir au-delà » … Mais ce n'était pas dans le cadre de la recherche de symétries dans des pavages plus importants. Nous avons tout de même des élèves, comme dans l'exemple n°3 de la figure 3 qui vont obtenir une configuration avec 4 axes de symétrie en sortant de la contrainte d'un pavage 4 x 3.

Avec plusieurs classes un travail sur la translation[85] d'un motif a aussi été effectué par les élèves comme le montre la figure 4.

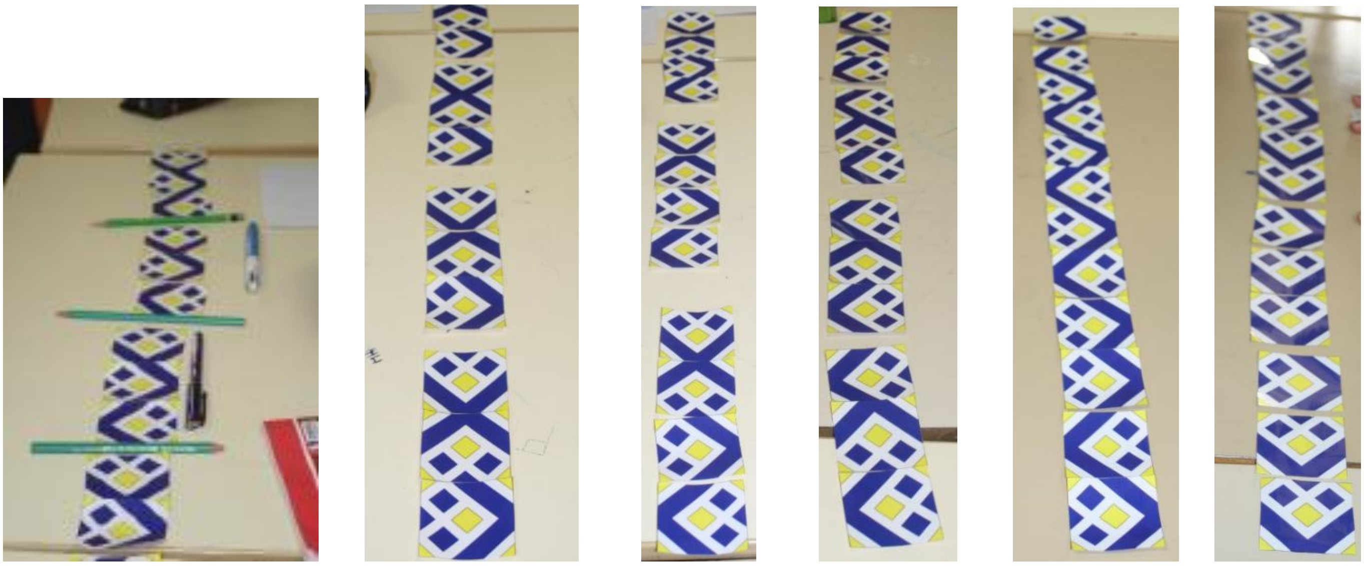


Figure 4. Travail sur des frises avec le glissement de motif.

2.3 *Travail sur le dénombrement des possibilités.*

La question du dénombrement des possibilités est toujours revenue dans le questionnement des élèves[86]. Si les élèves ne le formulent pas clairement, l'enseignant peut alors poser la question stratégique suivante : « combien y a-t-il de possibilités avec tel ou tel azulejo de faire une frise de deux azulejos, puis avec trois azulejos, etc. ?

Les méthodes des différents groupes vont de la simple énumération, jusqu'à l'invention d'une notation. Pour presque tous les groupes d'élèves nous notons des stratégies pour mieux compter : notamment laisser le premier azulejo « fixe » pendant que le deuxième « tourne ». L'énumération des 16 possibilités arrivent très vite, le professeur demande une justification orale : « Pourquoi est-ce que vous vous êtes arrêté là ?» ; « Pourquoi dites-vous qu'il y a 16 combinaisons au maximum ? » ; « Êtes-vous sûr d'avoir terminé ? » ; « Expliquez-moi comment vous avez procédé. » ; … Les justifications des élèves sont souvent très claires – explication de la stratégie - et souvent illustrées par le geste avec les azulejos. Ceux qui utilisent une notation, comme le montre la figure 5, s'appuient dessus toujours de façon pertinente. À noter que c'est quand la question du nombre de possibilités pour une frise de trois azulejos survient que les élèves constatent les limites de cette notation (figure 6). Pour être plus performant dans leurs argumentations, les élèves vont alors privilégier le texte et les « multiplications par quatre successives » (figure 7).

85 Précisons toutefois que le terme employé auprès des élèves est celui de glissement.

86 Nous renvoyons le lecteur à la lecture de trois extraits de séance avec des élèves de 6ème en Annexe 1.

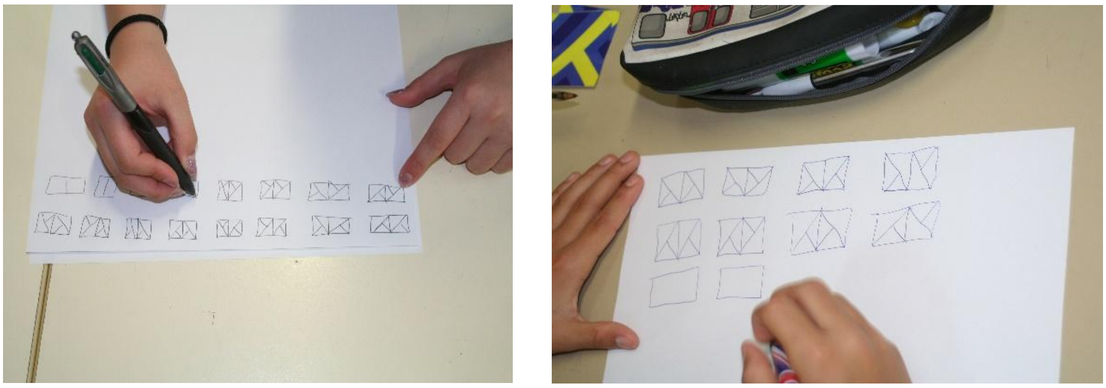


Figure 5. Utilisation d'une notation pour dénombrer et expliquer

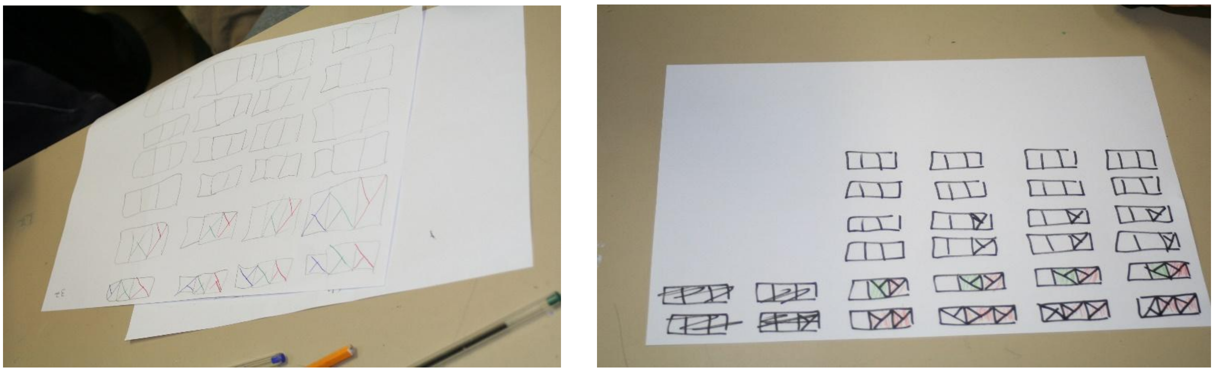


Figure 6. « Il y en a trop ! »

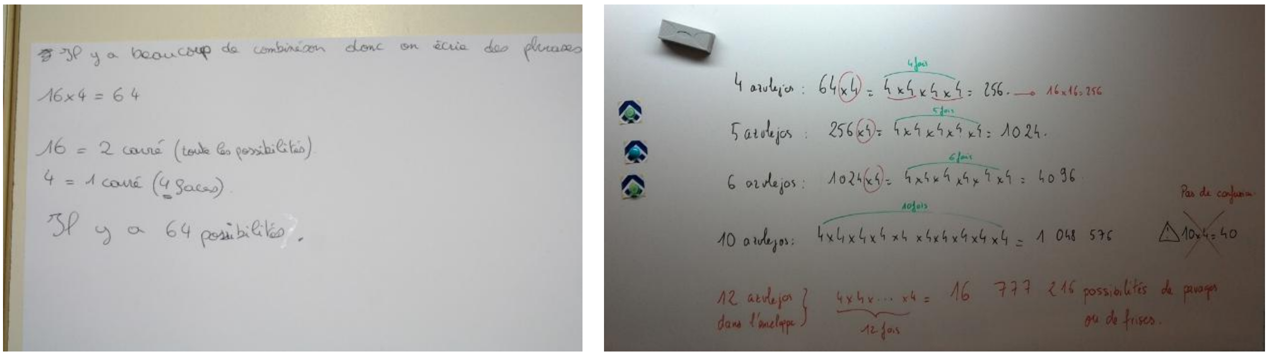


Figure 7. « Comme ça, c'est mieux ! » - Synthèse de la classe au tableau

2.4 Travail sur la construction d'un azulejo.

Comme nous l'avons évoqué dans l'atelier, deux questions principales peuvent surgir à propos de la construction d'un azulejo. Tout d'abord comment peuvent se construire géométriquement les azulejos d'Eduardo Nery et de Jorge Rezende ? Et ensuite comment construire son propre azulejo ; quelles sont les règles à respecter ? Si pour la première question nous renvoyons le lecteur à l'annexe 4, nous nous pencherons surtout sur la deuxième question que se sont posés tout naturellement les élèves lors de notre expérimentation de ce parcours. À la page suivante nous proposons une fiche conçue par des élèves de 6ème de l'année scolaire 2017–2018 (figure 8). En guise de commentaire, nous pouvons dire tout d'abord que les élèves se focalisent en premier lieu sur les bords de leurs azulejos. En effet les lignes et les couleurs doivent coïncider, mais les élèves découvrent ensuite qu'établir d'autres règles s'avère nécessaire. Par exemple, l'une des autres règles qui fait rapidement consensus auprès des élèves est que les carreaux doivent être superposables. Pour ce qui est des autres règles, les élèves les ajoutent au fur et à mesure de leurs différentes tentatives et à l'issue de moments de synthèse effectués en classe entière.

Conception de deux azulejos identiques : Rappel des règles de construction.

Cette fiche sert à :

1) ***Se souvenir des règles et des observations faites en classes sur la conception de deux azulejos identiques.***
2) ***Utiliser les conseils pour mieux accomplir le travail demandé.***
3) ***Autoévaluer son travail en se servant des 4 colonnes de droite.***

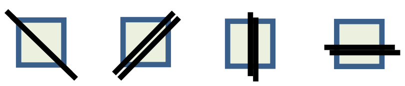
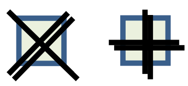
Règles	Conseils	👍☺	☺	😐	☹
1) Les dimensions de l'azulejo doivent-être facilement divisibles.	✎ Par exemple : 12 cm, 15 cm ou 16 cm.				
2) Les deux azulejos doivent-être identiques dans le sens de « superposables ».	💣 Attention ! Superposables ne veut pas dire symétriques.				
3) Il doit y avoir continuité des lignes d'un azulejo à l'autre quel que soit leur orientation l'un par rapport à l'autre.	✎ Préparer un brouillon en plaçant des repères sur les côtés des deux azulejos, les découper et faire des essais avant de mettre au propre le travail.				
4) Il doit y avoir continuité des couleurs d'un azulejo à l'autre quel que soit leur orientation l'un par rapport à l'autre.					
5) Utiliser des formes géométriques simples pour composer l'azulejo.	✎ Exemples : Des quarts de cercles ou des demi-cercles, des triangles rectangles, des rectangles…				
6) Pour être « intéressant » un azulejo ne doit pas posséder trop d'axes de symétrie. « Intéressant » veut dire qu'il y a plusieurs possibilités d'assemblages.	✎ Exemples : Avec un axe de symétrie :  Avec deux axes de symétrie :  💣 Mais pas avec quatre axes de symétrie.				
7) Utiliser au maximum trois couleurs en jouant sur les contrastes, les couleurs complémentaires. Une couleur doit être appliquée de manière uniforme et soignée.	✎ Exemples de couleurs complémentaires : Bleu/orange, Jaune/violet, Rouge/vert. ✎ L'utilisation du noir ou du blanc peut s'avérer utile. (Mais pas des deux en même temps.) ✍ Il faut s'appliquer !				

Figure 8. Fiche d'aide pour construire un azulejo – Synthèse classe année 2017/2018

Les élèves se servent le plus souvent de cette fiche comme un moyen d'autoévaluer leur production. Si les élèves choisissent de produire deux azulejos superposables, c'est pour mieux vérifier leur travail.

Voici, ci-dessous, quelques exemples de productions d'élèves manipulés lors de l'atelier. À noter que certaines productions étaient présentées en « grand format » aimantés au tableau pour permettre aux participants de mieux apprécier le recul que peuvent prendre les élèves lorsque l'enseignant procède à des moments de synthèse au tableau et soumet certaines de ces productions à toute la classe après l'accord des élèves concernés :

En classe, les élèves remarquent que si un azulejo à « trop d'axes de symétrie », les possibilités de créer des frises diminuent, ils vont même jusqu'à classer les azulejos qu'ils ont étudiés et ceux qu'ils ont créés (figure 9).

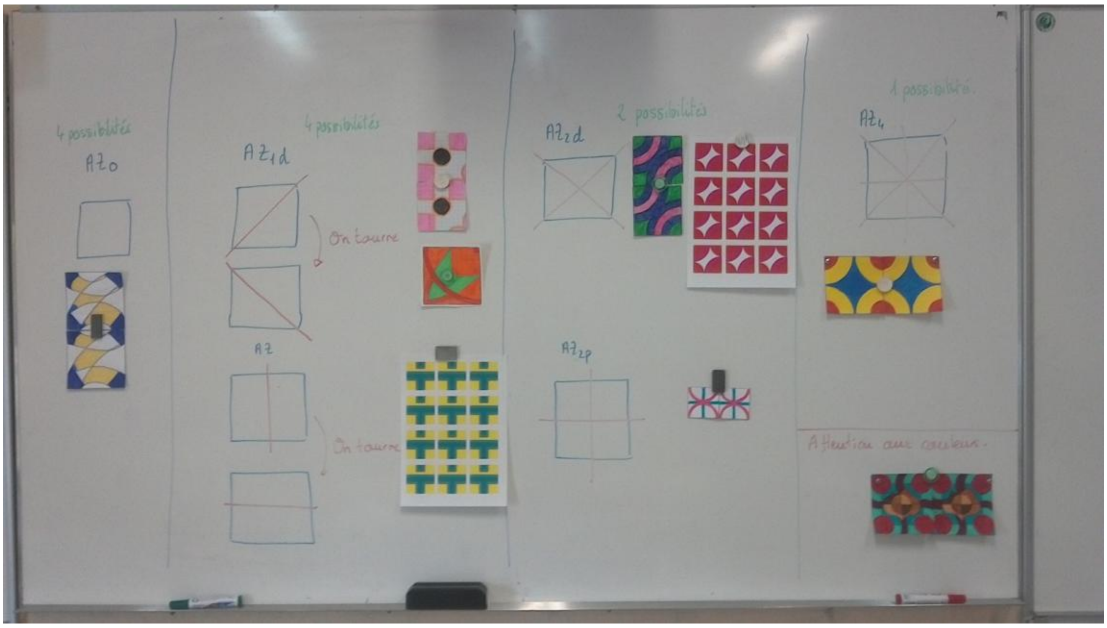


Figure 9. Les élèves se lancent dans une classification

Pour clore ce paragraphe, il faut insister sur le fait que ce ne sont pas les seules démarches possibles des élèves. Certaines classes peuvent se lancer dans la création d'exposés, de panneaux à partir des azulejos créés par les élèves et bien d'autres choses encore. Rappelons que selon le principe du parcours tel que nous l'avons défini plus haut les élèves peuvent prendre d'autres directions lors de l'étude des azulejos. Les démarches que nous avons donc exposées ici sont celles qui sont revenues lors de nos deux années d'expérimentation.

III - PROLONGEMENTS ET CONCLUSION

À la fin de l'atelier, dans le temps qui nous était imparti, nous avons soumis brièvement aux participants quelques expérimentations ponctuelles effectuées avec des élèves de cycle 4, plus particulièrement des élèves de 3ème. Ceci afin d'avoir une vision plus large de l'utilisation qui peut être faite des azulejos dans l'enseignement des mathématiques.

1 Première proposition de prolongement : lors de séances informatiques.

Lors d'un travail de groupes, des élèves de 3e ont pu manipuler ces azulejos plastifiés, il leur a ainsi été proposé sur deux séances la question suivante :
Quel type de programme simple pourrait-on proposer à des utilisateurs (des élèves de sixièmes par exemple) ou à des spectateurs (des adultes venant apprécier le travail des élèves de 6e et de 3e par exemple) afin de vivre et partager une partie de l'expérience vécue par les élèves de 6e lorsqu'ils ont étudié les azulejos cette année ?
À noter que plusieurs idées ont été échangées par les élèves du groupe, trois idées principales ont été retenues :

1) « Créer un programme où l'utilisateur peut « cliquer » sur un des azulejos du pavage déjà en place pour le tourner autant qu'il veut ; si c'est une tablette ce sera encore mieux. »
2) « Créer un programme où l'ordinateur construit au fur et à mesure le pavage en demandant à chaque fois à l'utilisateur quelle position il doit donner aux azulejos. »
3) « Créer un programme qui, une fois lancé, agit de façon autonome pendant une heure en exposant aux spectateurs un pavage qui évolue toutes les secondes de façon aléatoire. »

Ces programmes ont été exécutés tour à tour sur tablette et en vidéo-projection aux participants de l'atelier afin de mieux apprécier le travail des élèves (Annexe 2).

2 Deuxième proposition de prolongement : Travail de recherche.

Un devoir à la maison (Annexe 3) est donné aux élèves sous la forme d'un travail de recherche. Ils ont un délai d'une dizaine de jours pour remettre leur travail. Pendant le temps de la recherche, les élèves peuvent aller poser des questions aux élèves de sixième ou aux élèves de cinquième qui ont travaillé sur les azulejos l'année précédente. Nous précisons que l'élève Lydia évoquée dans le sujet (Annexe 3) est une élève réelle et a bien travaillé sur les azulejos l'année précédente (2016-2017). Elle détiendra d'ailleurs, pendant ces dix jours, une douzaine des azulejos qu'elle a créé dans le cas où des élèves de troisième venaient à lui poser des questions. Ils peuvent aussi consulter les programmes qui ont été développés par les élèves de troisièmes lors des séances informatiques et qui sont donnés en pièce-jointe par l'intermédiaire du cahier de texte en ligne.

CONCLUSION

L'atelier nous a permis d'étudier différents azulejos et d'explorer des pistes d'enseignement au niveau du cycle 3 principalement. Nous avons également évoqué quelques pistes de travail au niveau du cycle 4. Bien d'autres pistes peuvent être exploitées notamment autour d'un travail multidisciplinaire mais nous ne sommes pas allés plus loin dans cet atelier. Cependant, d'autres documents sur le sujet peuvent être consultés sur le site de l'IREM d'Aix-Marseille comme mentionnés dans la première note de bas de page. Ces documents seront mis à jour ces prochaines années au grès de nos expériences futures si cela semble utile ou nécessaire.

Les deux années d'expérimentation (2016-2017 et 2017-2018) ont été vécues certes différemment sur la forme, ne serait-ce que parce que lors de la première année, le travail n'a commencé qu'à partir de la moitié de l'année scolaire. Par contre, au niveau du fond, au vu du contenu des premières séances et ce qu'il en ressort à la fin de ces deux années, nous pouvons dire que les idées générales mises en œuvre par les élèves sont identiques et sont celles qui ont été évoquées durant cet atelier.

Pour finir ce travail semble pouvoir être réinvesti dans le contexte de la formation initiale de futurs professeurs d'école mais notre inexpérience en la matière ne nous permet pas de préciser davantage cette question (pour cela nous laissons le lecteur seul juge)[87].

BIBLIOGRAPHIE

Convay, J.H., Burgiel, H. et Goodman-Strauss, C. (2018) The Symmetries of Things, A K Peters/CRC Press.

Deledicq, A. et Raba, R. (2014) Le monde des pavages – Les voir et les faire – ACL – Les éditions Kangourou.

EDUSCOL Ressources pour l'évaluation en mathématiques. http://eduscol.education.fr/ressources

EDUSCOL, Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer, un exemple de tâche intermédiaire, Analyse et Construction d'un pavage, http://eduscol.education.fr/ressources.

Grunbaum, B et Shepard, G. C. (2016) Tilings and Patterns, Dover Books on Mathematics.

Guenais, M. (2018) Un aller-retour au pays des pavages, Images de Mathématiques, CNRS, http://images.math.cnrs.fr/Un-aller-retour-au-pays-des-pavages.html

Rezende, J. (2012) A Contribution for a mathematical classification of square tiles, arXiv :1206.3661v1 [math.HO]

Schattschneider, D. The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation, American Mathematical Monthly, Volume 85, issue 6, 439-450.

Sites :

REZENDE, J. http://polyedros.blogspot.fr/

L'Art de l'Azulejo au Portugal, Centre Virtuel de l'Instituto Camões, http://cvc.institutocamoes.pt/azulejos/fr/index.html

Pavages 2: un logiciel libre pour réaliser des pavages du plan. http://pascal.peter.free.fr/pavages.html

87 *Ce travail est le fruit d'une collaboration au sein de l'IREM d'Aix-Marseille, Groupe Collège. Y ont directement participé : Olivier Garrigue, Professeur de Mathématiques au collège La Carraire de Miramas (13) et ses élèves, Jorge Rezende, Universidade de Lisboa et Ricardo Lima, Dream & Science Factory et CNRS, Marseille. Merci à Myriam Quatrini pour ses encouragements.*

ANNEXE 1 : TROIS EXTRAITS SUR LE DÉNOMBREMENT.

1. Lors de la première séance, classe 6ème B.

Les élèves s'intéressent aux possibilités offertes par les azulejos, certains essayent d'obtenir des petits carrés « le plus possibles » (sixième exemple), d'autres font naturellement un pavage 4x3 : « 12 c'est 4x3, vas-y, fais un rectangle de 4 sur 3 ». « C'est comme un puzzle. ». Certains groupes commencent à chercher des variantes possibles d'assemblage.

Une fois chaque production photographiée, le professeur enchaine « Mais alors combien peut-il y avoir de pavages différents ? » Beaucoup d'élèves lèvent la main pour dire « une infinité ! » Trois-quatre élèves semblent ne pas être d'accord, l'un d'eux lève la main : « Il ne peut pas y avoir une infinité de possibilités, il n'y a que douze azulejos. » Un autre veut prendre la parole : « Oui ça limite les possibilités. » Le professeur : « Pourquoi ? » Le premier élève : « B'hein douze azulejos c'est pas infini. » L'enseignante de technologie : « On peut les mettre comme on veut non ? », un élève : « oui mais en fait chaque azulejo n'a que quatre possibilités donc ça n'ira pas jusqu'à l'infini. » Le professeur : « tu en es sûr ? ». L'élève : « Oui, douze carreaux avec chacun quatre possibilités, ça fait beaucoup mais ça ne fait pas l'infini. » Le professeur : « Est-ce que tu veux aller plus loin dans ton idée ? » L'élève : « Non. »

2. Lors de la troisième séance, classe 6ème B.

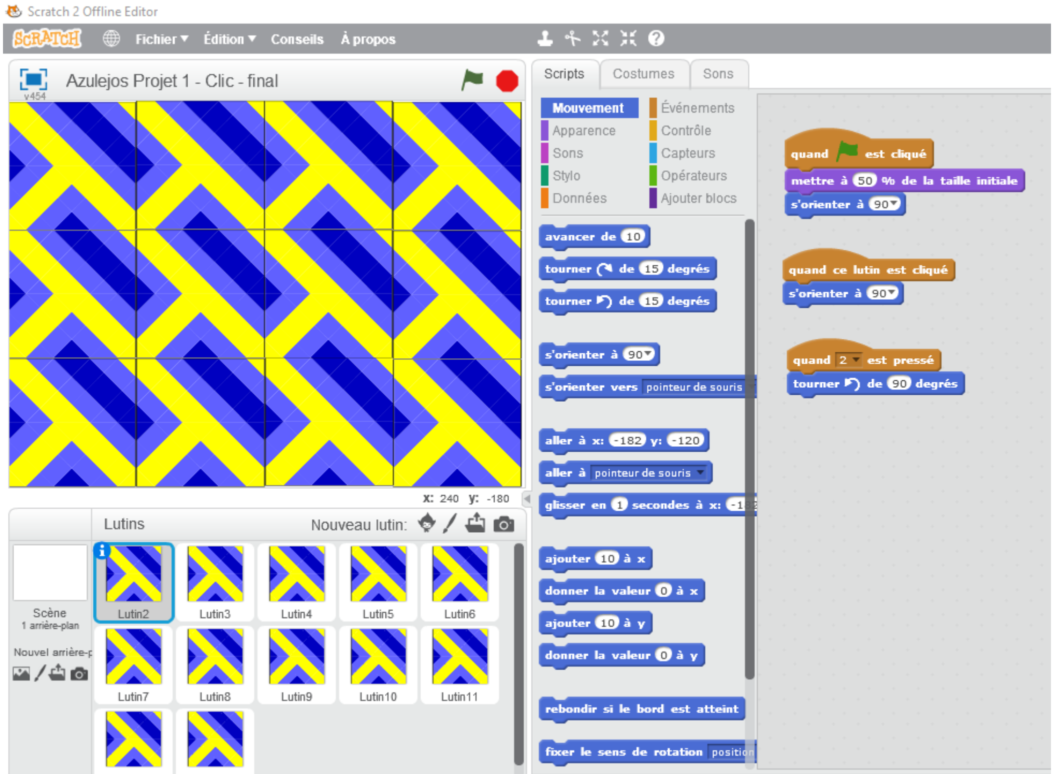
Beaucoup d'élèves veulent s'exprimer, le professeur choisi de rester au tableau pour mieux gérer le débat. Jusqu'à la fin de la séance, il notera les suggestions des élèves sur le tableau blanc. Une élève (du binôme n°8) qui jusque-là ne s'était pas exprimée tient à expliquer pourquoi on doit obtenir 64 combinaisons.

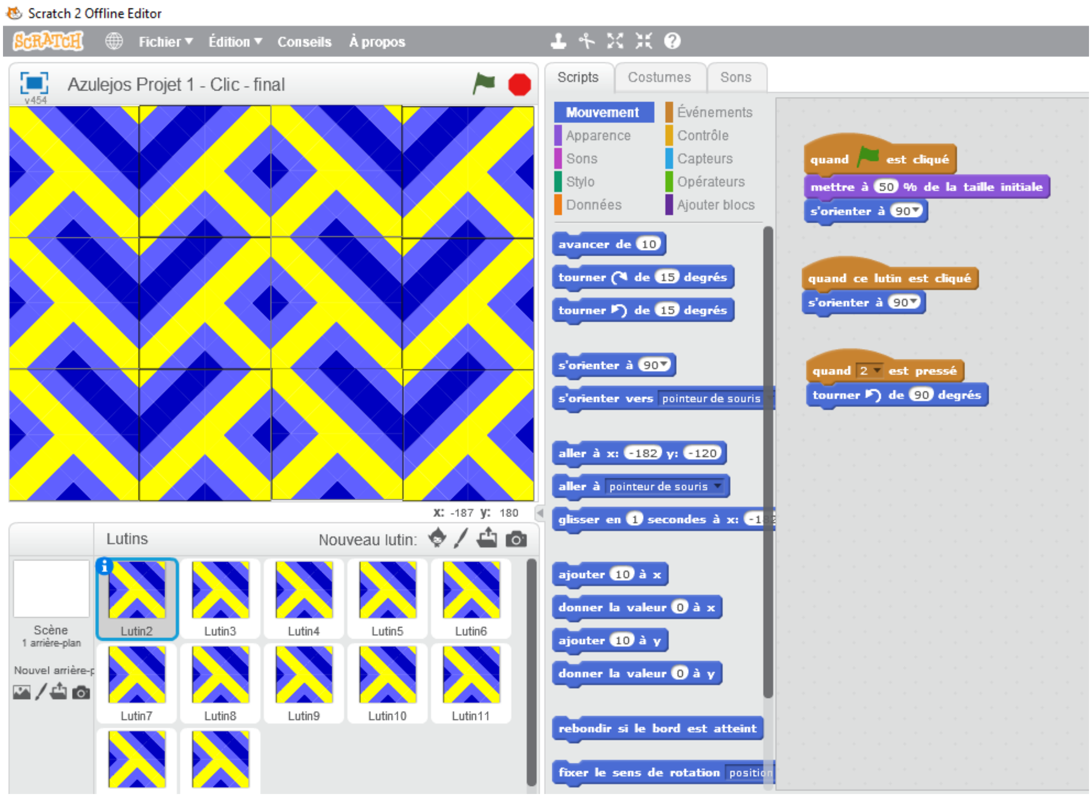
- « Le raisonnement est identique, pour deux azulejos ont a 4 × 4 = 16 possibilités, donc pour trois on doit calculer 4 × 4 × 4, du coup, on sait déjà que 4 × 4 = 16, on doit juste calculer 16 × 4. »
- « Et ça fait 56 ! » Dit son voisin.
- « Non ça fait 64 ! » Reprend l'élève interrogée.

Quinze minutes après.

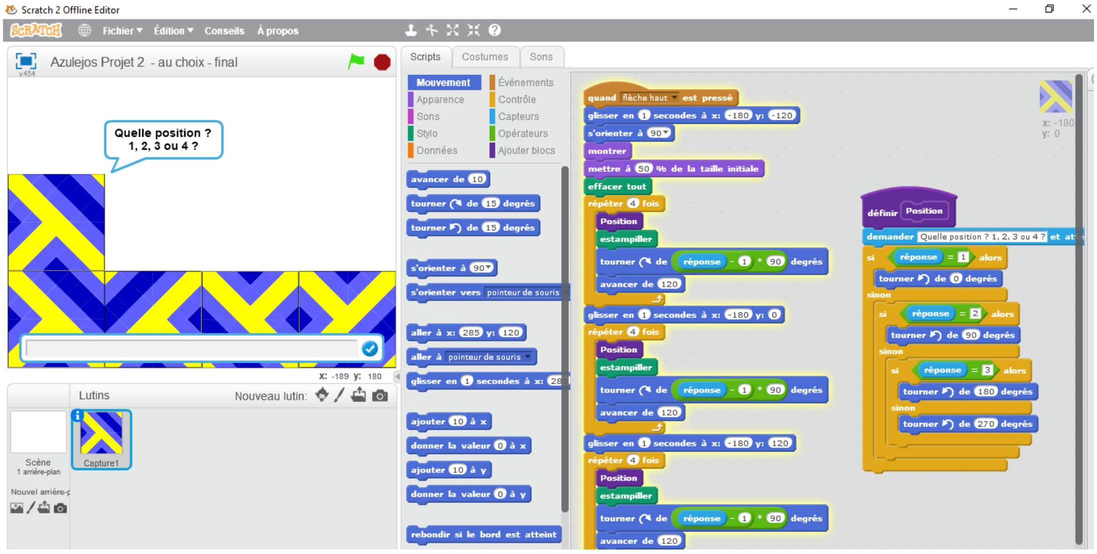
Le professeur : « Est-ce que tout le monde est d'accord ? »
Elève #1 : « C'est finalement plus facile de compter le nombre de possibilités que de noter toutes les combinaisons… »
Le professeur : « Je ne sais pas, qu'est-ce que tu en penses ? » « Les autres, qu'est-ce que vous en pensez ? »
Elève #2 : « Moi je préfère compter, en plus, on peut assembler les multiplications par 4.»
Le professeur : « C'est intéressant ce que tu dis, par exemple, si je te demande de me donner le nombre de combinaisons pour six azulejos, qu'est-ce que tu peux me répondre ? » (Au milieu du tableau)
Elève #2 : « Pour quatre azulejos, j'aurais fait 4 × 4 × 4 × 4 ça donne 16 × 16 et enfin le résultat c'est 256. »
Le professeur : « Et tu as fait le calcul de tête ? »
Elève #2 : « Non j'ai pris ma calculatrice pour 16 × 16. »
Le professeur : « D'accord, mais et pour six azulejos alors ? »
Elève #3 : « alors là on reprend comme pour trois azulejos, on sait que : 4 × 4 × 4 = 64 donc là je fais 4 × 4 × 4 × 4 × 4 × 4 ça donne 64 × 64 = 4096. Mais là j'ai aussi pris ma calculatrice pour 64 × 64. »
Elève #4 : « Oui, quand les calculs se répètent c'est intéressant quand même la calculatrice… »
Le professeur : « Puisqu'il reste un peu de temps (10h51) qui peut m'expliquer : si je veux calculer : 4 × 4 × 4 × 4 × 4 × 4 ×4 × 4 × 4 × 4, comment je fais ? »
Elève #5 : « On regroupe par 2, ça donne : 16 × 16 × 16 × 16 × 16, et après 64 × 64… il en reste un, il faut encore écrire …× 16. »
Elève #6 : « C'est long quand même ! »
Elève #7 : « Mais il y a pas une histoire de puissance ? »
Elève #8 : « Non de racine carrée ! »
Le professeur : « C'est très intéressant ce que vous dites, mais est-ce que vous savez de quoi de vous parlez ? »
Elève #9 : «C'est pas la racine carrée, c'est une sorte de 'V' comme ça (l'élève fait le symbole de la racine carrée). »
Le professeur au tableau : « comme ça ? »
Elève #9 : Oui comme ça !
Le professeur : « Alors, puissance ou racine carrée ? »
Elève #7 : « Moi je pense que c'est la puissance. »
Les autres élèves ne se prononcent pas mais parlent entre eux. La séance touche à sa fin.
Le professeur : « Je propose que d'ici la semaine prochaine vous réfléchissiez à ça, faites vos recherches et on en reparlera. »
[Fin de la séance]

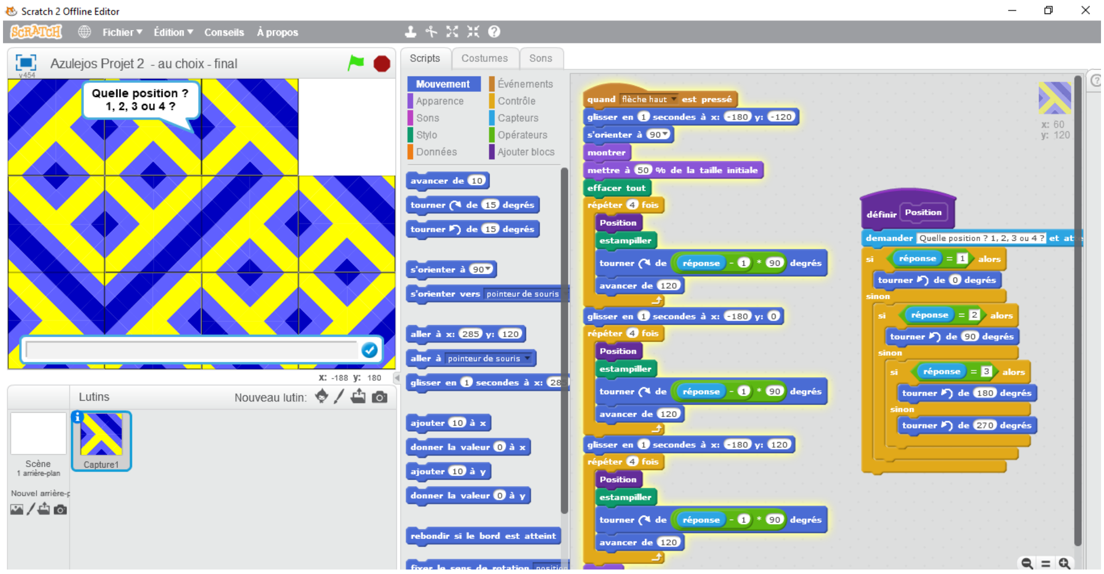
Projet n°1


Scratch 2 Offline Editor
Fichier
Édition
Conseils
À propos
Azulejos Projet 1 - Clic - final
Scripts
Costumes
Sons
Mouvement
Événements
Apparence
Contrôle
Sons
Capteurs
Stylo
Opérateurs
Données
Ajouter blocs
avancer de 10
tourner de 15 degrés
tourner de 15 degrés
s'orienter à 90
s'orienter vers pointeur de souris
aller à x: -182 y: -120
aller à pointeur de souris
glisser en 1 secondes à x:
ajouter 10 à x
donner la valeur 0 à x
ajouter 10 à y
donner la valeur 0 à y
rebondir si le bord est atteint
fixer le sens de rotation
quand est cliqué
mettre à 50 % de la taille initiale
s'orienter à 90
quand ce lutin est cliqué
s'orienter à 90
quand 2 est pressé
tourner de 90 degrés
x: 240 y: -180
Lutins
Nouveau lutin:
Scène
1 arrière-plan
Lutin2
Lutin3
Lutin4
Lutin5
Lutin6
Lutin7
Lutin8
Lutin9
Lutin10
Lutin11

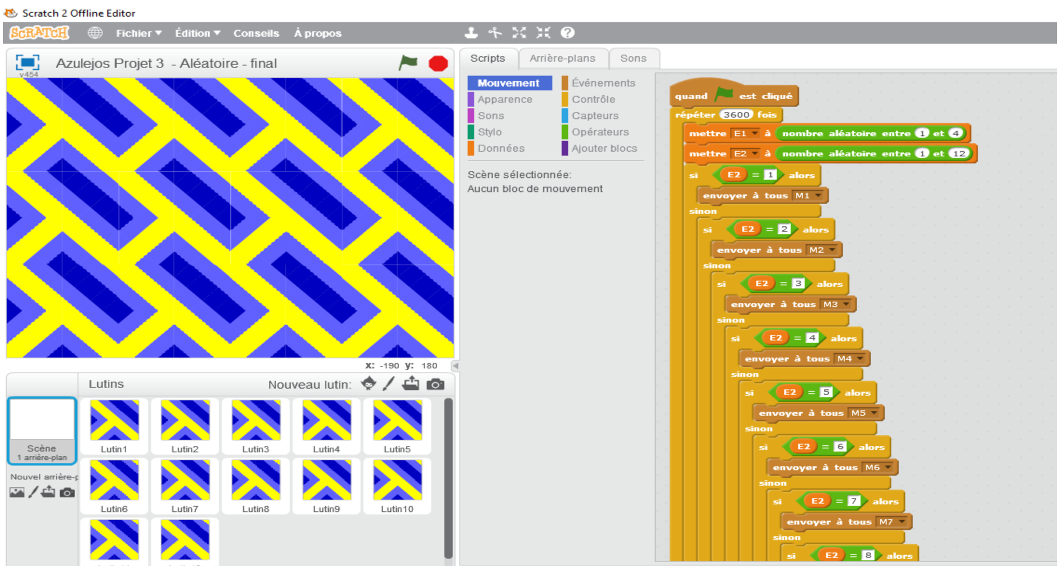

Scratch 2 Offline Editor
Fichier
Édition
Conseils
À propos
Azulejos Projet 1 - Clic - final
Scripts
Costumes
Sons
Mouvement
Événements
Apparence
Contrôle
Sons
Capteurs
Stylo
Opérateurs
Données
Ajouter blocs
avancer de 10
tourner de 15 degrés
tourner de 15 degrés
s'orienter à 90
s'orienter vers pointeur de souris
aller à x: -182 y: -120
aller à pointeur de souris
glisser en 1 secondes à x:
ajouter 10 à x
donner la valeur 0 à x
ajouter 10 à y
donner la valeur 0 à y
rebondir si le bord est atteint
fixer le sens de rotation
quand est cliqué
mettre à 50 % de la taille initiale
s'orienter à 90
quand ce lutin est cliqué
s'orienter à 90
quand 2 est pressé
tourner de 90 degrés
x: -187 y: 180
Lutins
Nouveau lutin:
Scène
1 arrière-plan
Lutin2
Lutin3
Lutin4
Lutin5
Lutin6
Lutin7
Lutin8
Lutin9
Lutin10
Lutin11

Projet n°2

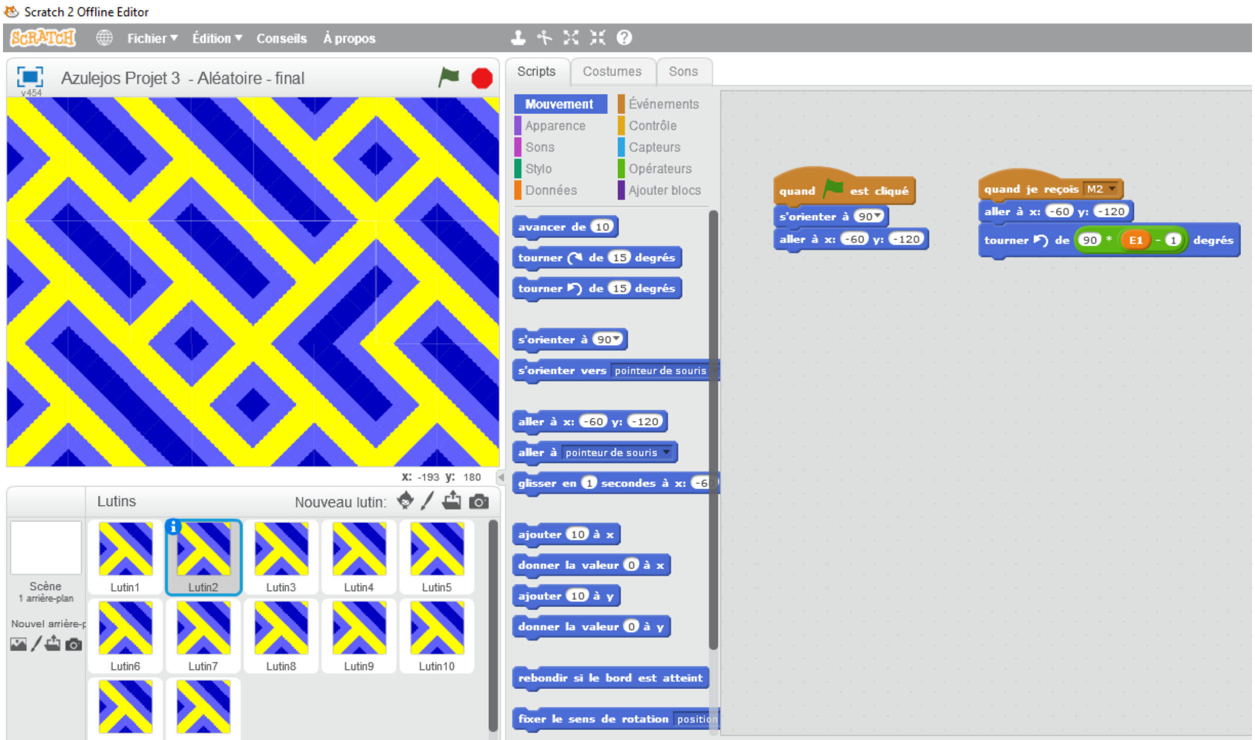




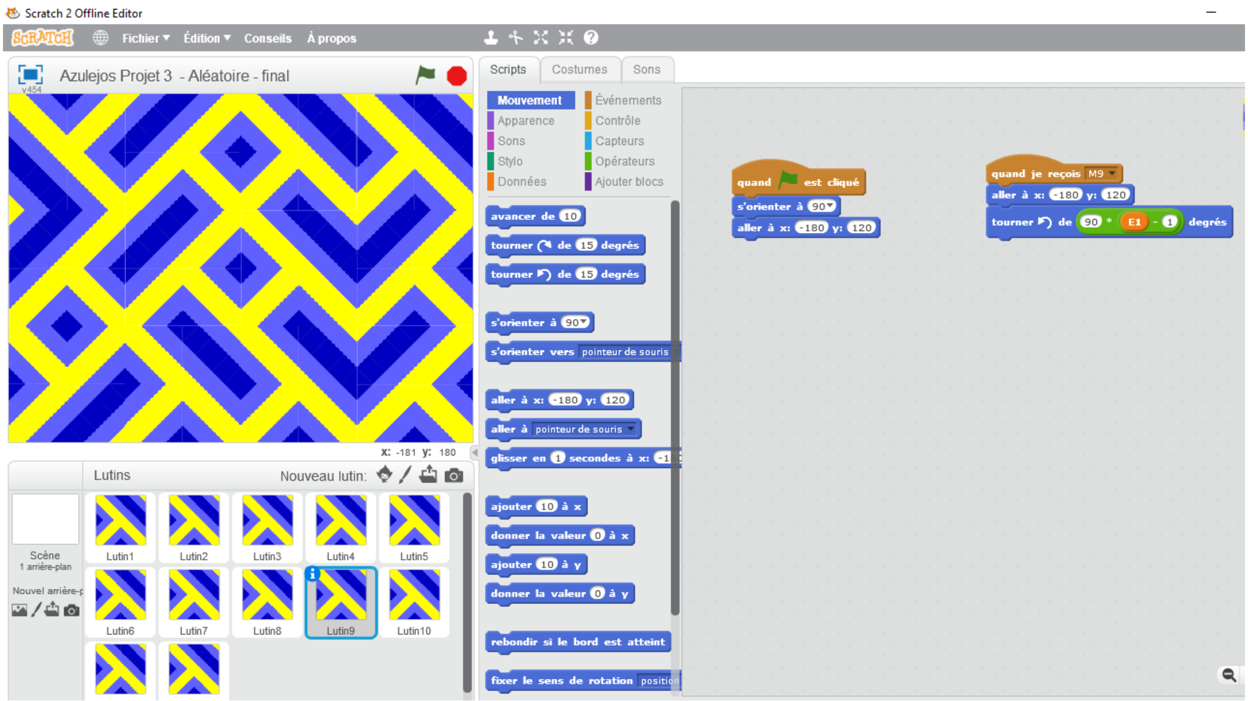
Projet n°3



Après exécution du programme du projet 3 :

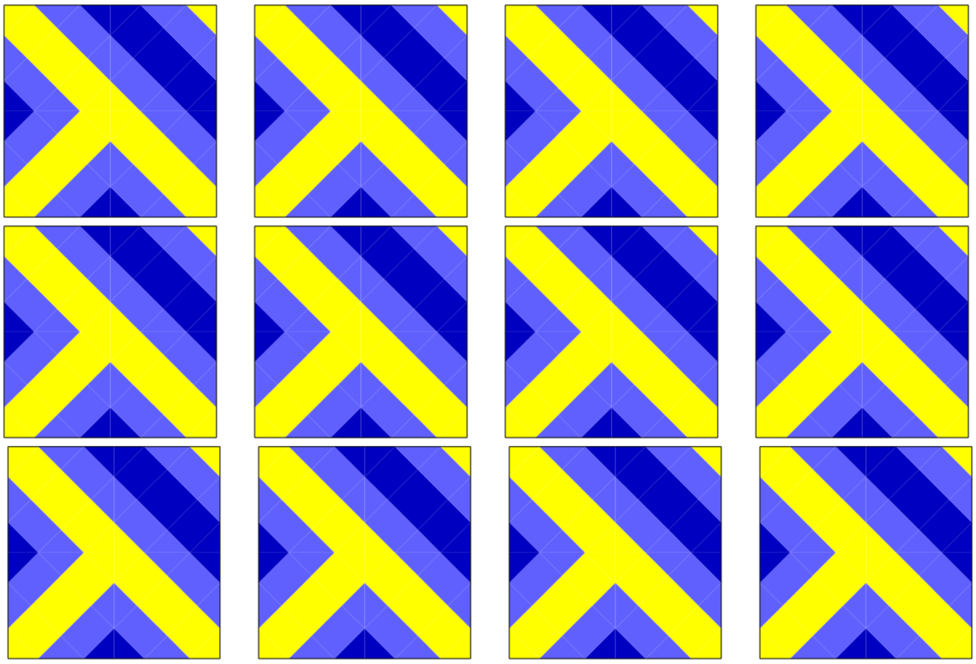


Puis …



ANNEXE 3 : SUJET DONNÉ AUX ÉLÈVES POUR LE TRAVAIL DE RECHERCHE.

Eduardo Nery est un artiste Portugais (2 septembre 1938, Figueira da Foz, Portugal - 2 mars 2013, Lisbonne, Portugal) qui, avec d'autres artistes, consacra une partie de son œuvre à « *la revalorisation esthétique des espaces urbains quotidiens…* » « *Nery réutilise les azulejos pour la création d'ambiances actualisées, dans un premier temps par l'exploration de mécanismes optiques purs, puis par l'analyse du sens des images traditionnelles sur les azulejos du XVIIIème siècle ([1] et [3]).* » Voici un pavage avec 12 exemplaires identiques de l'un des azulejos (carreaux) créés en 1966 par Eduardo Nery :



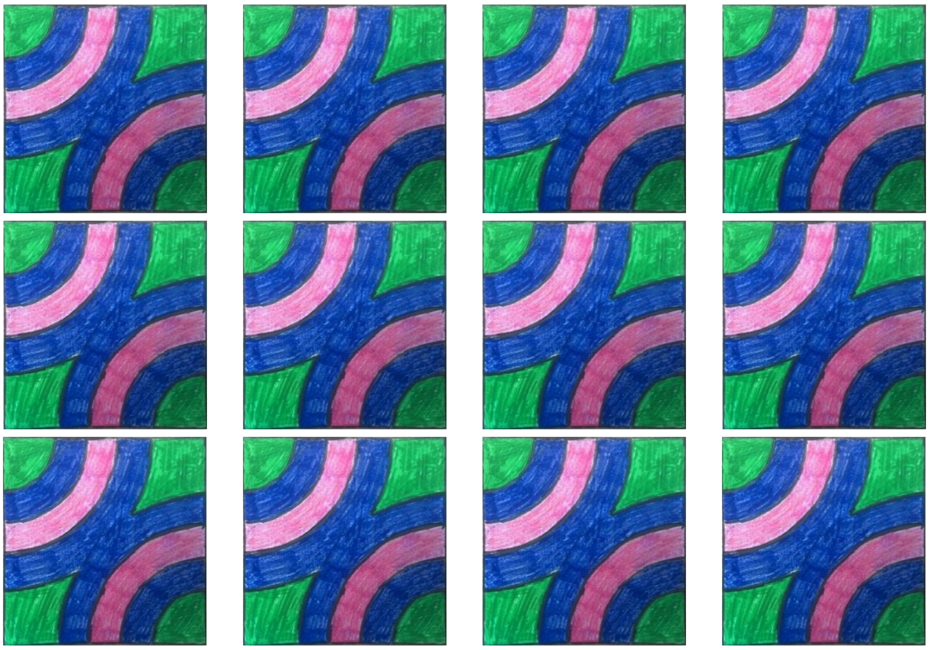
Pavage d'Eduardo Nery

Jorge Rezende, mathématicien à l'Université de Lisbonne, étudie les propriétés mathématiques des frises et des pavages construits avec ce type d'azulejos depuis environ six ans. (Voir en particulier le lien suivant : http://polyedros.blogspot.fr/)

Vous pourrez utiliser les trois programmes informatiques sous Scratch présents en pièces jointes sur votre cahier de texte en ligne pour vous aider à trouver les réponses aux questions présentes dans ce devoir ou bien découper les douze azulejos ci-dessus si vous préférez.

1) Prenez uniquement les deux premiers azulejos en haut et à gauche du pavage d'Eduardo Nery ci-dessus. Combien de frises différentes pouvez-vous former avec ces deux azulejos ? Avez-vous une façon de vérifier qu'il n'y a pas deux dessins identiques dans les frises que vous avez construites ?
2) Maintenant, prenez les trois premiers azulejos en haut à gauche du même pavage. Combien de frises différentes pouvez-vous former avec ces trois azulejos ? Comment pouvez-vous être sûr de ne pas avoir oublié quelques possibilités ?
3) Comment continuer ce calcul pour une frise de quatre, cinq etc. azulejos ? Finalement, comment arriver jusqu'au nombre de combinaisons de frises avec les douze azulejos présents dans le pavage précédent ?
4) [BONUS] Si vous vouliez montrer en classe toutes les possibilités avec les douze azulejos, lequel des trois programmes sous Scratch choisiriez-vous ? Pourquoi ? Combien de temps il vous faudrait pour montrer toutes les possibilités avec les douze azulejos ? (Donner une estimation.)

Parmi d'autres élèves de 5ème, Lydia G. de 5ème B a eu l'idée de créer un azulejo en essayant de suivre les mêmes principes de conception d'Eduardo Nery. Voici son travail :



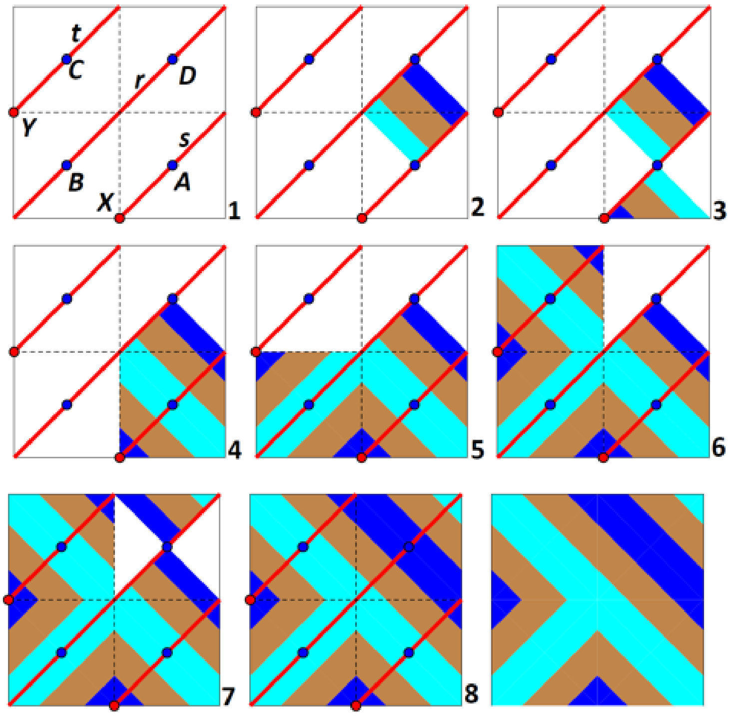
Pavage de Lydia G. 5ème B. *Année scolaire 2016/2017.*

(Ces azulejos pourront être découpés pour être manipulés et pour permettre de mieux répondre aux questions de ce devoir.)

5) Prenez uniquement les deux azulejos en haut à gauche du pavage de Lydia. Combien de frises différentes vous pouvez former avec ces deux azulejos ?
6) Maintenant, prenez les trois premiers azulejos en haut à gauche du pavage de Lydia. Combien de frises différentes vous pouvez former avec ces trois azulejos ?
7) Quelle est la différence entre l'azulejo d'Eduardo Nery et celui de Lydia qui justifie des résultats différents dans les deux cas ?

ANNEXE 4 : EXTRAITS DU TRAVAIL DE JORGE REZENDE SUR LA CONSTRUCTION GEOMÉTRIQUE DE QUELQUES AZULEJOS.

Azulejo d'Eduardo Nery :



Soient les transformations du plan suivantes :

Rotations d'angle π au tour d'un centre de rotation d'ordre 2 : A, B, C et D.

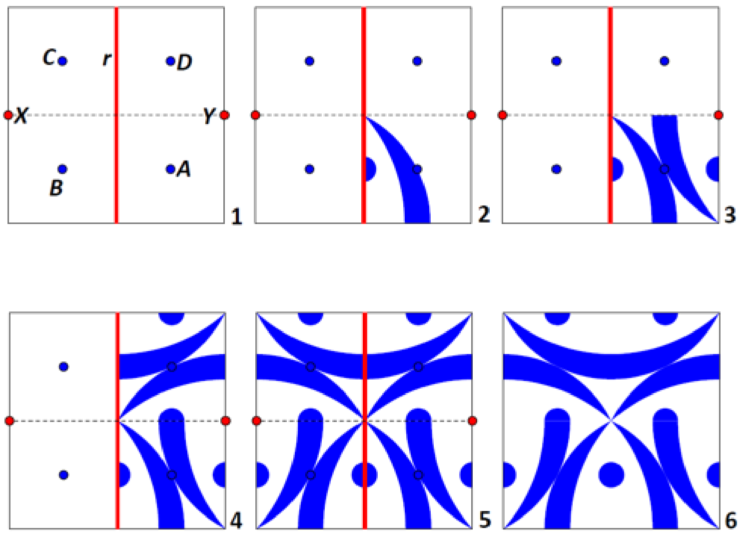
Rotations d'angle $\pi/2$ au tour d'un centre de rotation d'ordre 4 : X et Y.

Réflexions d'axe r, s, t. (facultatives, mais si la réflexion

Ainsi, l'azulejos d'Eduardo Nery peut se construire de cette façon :

- De 1 à 2: Le huitième de l'azulejo.
- De 2 à 3: en utilisant A
- De 3 à 4: en utilisant s
- De 4 à 5: en utilisant X
- De 5 à 6: en utilisant Y
- De 6 à 7: en utilisant D
- De 7 à 8: en utilisant r
- De 8 à 9: Bingo!

Azulejo de Jorge Rezende :



Soient les transformations du plan suivantes :

Rotations d'angle π au tour d'un centre de rotation d'ordre 2 : A, B, C et D.

Rotations d'angle $\pi/2$ au tour d'un centre de rotation d'ordre 4 : X et Y.

Réflexion d'axe r

Ainsi, l'azulejos de Jorge Rezende peut se construire de cette façon :

- De 1 à 2 : Le huitième de l'azulejo.
- De 2 à 3 : En utilisant A.
- De 3 à 4 : En utilisant Y.
- De 4 à 5 : En utilisant r.
- De 5 à 6 : Bingo!