ATELIER A18

UN ARTEFACT POUR MULTIPLIER

Michel DERUAZ
Professeur HEP associé, HEP VAUD
UER MS
michel.deruaz@hepl.ch

Martine BALEGNO
Chargée d'enseignement, HEP VAUD
UER MS
martine.balegno@hepl.ch

Résumé

Beaucoup d'enseignants sont démunis lorsqu'ils doivent justifier le fonctionnement de la multiplication ou de la division posée. De plus, les liens entre la distributivité et la décomposition du nombre ne sont pas toujours disponibles. Lors du colloque 2017, nous avons proposé un artefact, que nous utilisons en formation des enseignants, pour expliquer le fonctionnement de ces opérations et les liens avec la distributivité à l'aide de planches à trous et de billes. Nous nous appuyions sur des représentations intermédiaires du nombre, construites à partir du modèle du triple code (Dehaene, 1992). Nous présentons, cette année, des expérimentations en classe de cet artefact avec des élèves, soit pour introduire la multiplication posée, soit avec des élèves qui la connaissent déjà mais qui éprouvent des difficultés à l'utiliser correctement.

I - INTRODUCTION

Cet atelier s'inscrit dans le prolongement des travaux présentés lors du précédent colloque de la Copirelem (Deruaz & Batteau, 2017). Nous avions alors proposé un artefact que nous utilisons en formation des enseignants du primaire en Suisse (Haute École Pédagogique Vaud) (Deruaz & Clivaz, 2012) pour expliquer le fonctionnement d'opérations et notamment la multiplication en colonnes. Nous avions mis en évidence ses liens avec la distributivité. Pour ce faire, nous utilisions un matériel fabriqué avec des planches à trous et des billes. En effet, comme nous le relevions déjà (Clivaz & Deruaz, 2013), beaucoup d'enseignants sont démunis lorsqu'ils doivent justifier le fonctionnement de la multiplication ou de la division posée. Par ailleurs, comme le met en évidence Constantin (2017), les liens entre la distributivité et la décomposition du nombre ne sont pas toujours disponibles chez les futurs enseignants.

Suite à ces travaux, nous avons continué notre réflexion afin de proposer une ingénierie destinée, non plus à des futurs enseignants, mais cette fois-ci, à des élèves. Nous proposons donc, dans cet atelier, de découvrir et d'analyser des expérimentations faites en classe avec cet artefact pour introduire la multiplication posée, dans un premier temps, à un chiffre puis plus brièvement à deux chiffres.

Nous allons notamment nous appuyer sur des représentations intermédiaires du nombre (Deruaz & Batteau, 2017) construites à partir du modèle du triple code (Dehaene, 1992).

II - ENJEUX DE FORMATION

Dans la formation des enseignants dispensée, dans le cadre d'un cours de mathématiques et de didactique des mathématiques, l'un des objectifs poursuivi est de démontrer que l'enseignement de la numération est un enjeu prioritaire de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. C'est pourquoi, il a tout d'abord été nécessaire de casser, auprès des étudiants, une éventuelle représentation des mathématiques et de leur enseignement. Par exemple, l'idée qu'un algorithme s'enseigne comme une recette de cuisine.

Dès lors, nous nous sommes attachés à proposer un matériel qui puisse faire lien entre le système de numération et les opérations, en bref, à donner du sens à l'enseignement des opérations. Nous avons donc utilisé un abaque pour manipuler et faire manipuler les étudiants. Dans un second temps, nous avons décidé d'étendre notre expérience avec ce matériel, dans une classe du primaire.

C'est pourquoi, pour mieux situer l'ingénierie que nous proposons en classe pour la multiplication, il est nécessaire de dire quelques mots au sujet du nombre et de ses représentations ainsi que sur l'apprentissage de la multiplication.

1 Le nombre et ses représentations

Dans les travaux, déjà cités de Deruaz & Batteau (2017), et également à la suite de Dehaene (1992), la notion de « représentation analogique » du nombre est évoquée. Ainsi lorsqu'un nombre est associé au cardinal d'un ensemble ou d'une collection d'objets, par exemple le nombre seize à n'importe quel ensemble de seize objets, nous pouvons le représenter, de manière décontextualisée, par une collection de seize points :

Une deuxième représentation du nombre, que nous avons déjà utilisée en écrivant, en lisant ou en disant, « seize », est appelée la représentation « auditive-verbale ». À noter que c'est le cas même si le nombre est écrit « 16 », car dans le langage parlé, cette désignation écrite se dira ou s'entendra « seize ».

Lorsqu'on écrit « 16 » avec des chiffres, il s'agit d'une troisième représentation du nombre, qui code le fait que l'on peut mettre en évidence un groupement de dix des seize éléments de la collection pour en faire un groupe de dix et laisser six éléments isolés comme dans la figure ci-dessous :

Nous appelons cette représentation à l'aide de chiffres, « représentation symbolique décimale » ou « représentation symbolique en base dix ». Remarquons que cette représentation est uniquement visuelle. Lorsque nous lisons le nombre « 16 », écrit comme cela, nous sommes contraints de le dire « seize » (et non « un-six ») en utilisant la représentation auditive-verbale. L'adaptation, que nous avons réalisée, du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p. 31), dans le cadre du cours destiné aux étudiants en 1ère année, permet de visualiser en un seul schéma ces trois représentations du nombre.

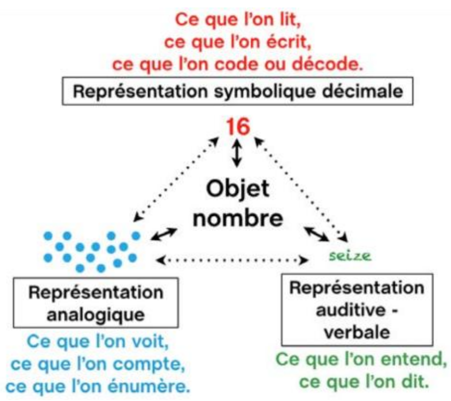


Figure 1. Représentations du nombre adapté du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p. 31)

Dans ce qui suit, nous nous intéressons essentiellement au passage entre représentation analogique et représentation symbolique, en mettant en évidence un certain nombre de représentations intermédiaires qui nous apparaissent comme importantes. En effet, dans nos travaux, nous avons cherché à faire des liens entre ces représentations analogique et symbolique afin de faciliter la compréhension dans l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication.

Nous classons ces représentations intermédiaires en deux catégories : la première contient les représentations qualifiées d'« iconiques » puisque les points sont encore présents, la seconde comporte celles qualifiées de « symboliques », qui font intervenir l'aspect positionnel de l'écriture symbolique décimale du nombre.

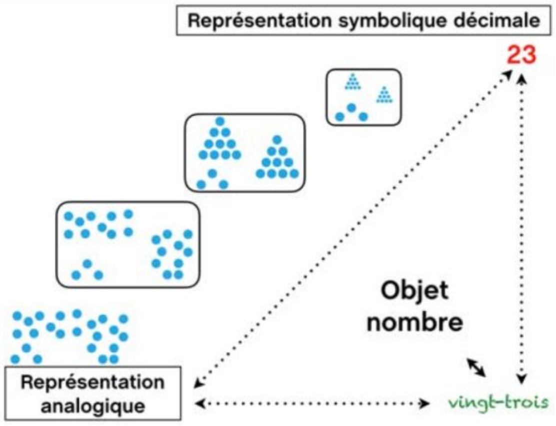


Figure 2. Représentations intermédiaires iconiques

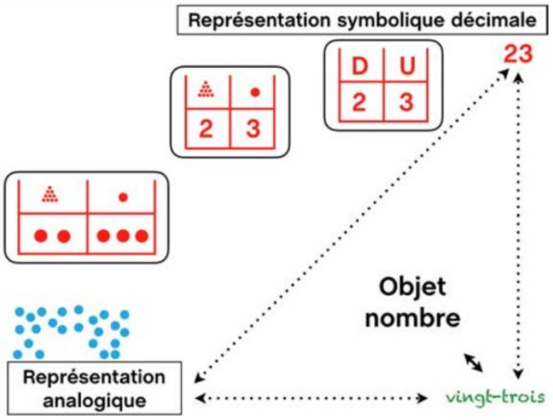


Figure 3. Représentations intermédiaires symboliques

2 La multiplication posée

Dans sa thèse, Clivaz (2011) a mis en avant le manque de connaissance des enseignants au sujet de la multiplication. Il a notamment mis en évidence que ce faible niveau de connaissances se répercute sur la manière d'enseigner l'algorithme de la multiplication. En effet, la propriété de la distributivité, ainsi que la représentation de la multiplication sous forme de produit cartésien, sont peu présentes chez les enseignants alors qu'elles sont nécessaires à un bon enseignement, ceci afin de permettre un réel apprentissage auprès des élèves.

La représentation de la multiplication à l'aide du produit cartésien est travaillée à l'aide de tâches comme « Friandises » (Danalet & al, 1998, p. 6)

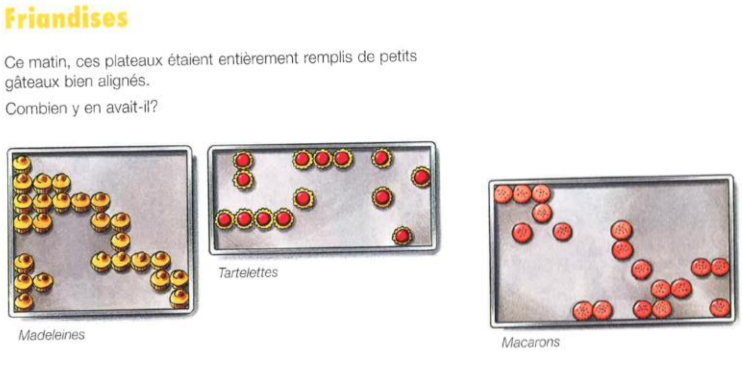


Figure 4. Friandises

De telles tâches peuvent être résolues en utilisant une représentation analogique du nombre. Par exemple, comme l'illustre la figure ci-dessous :

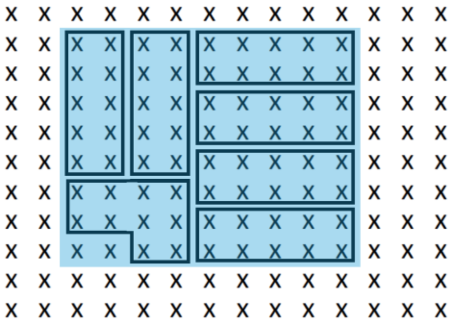


Figure 5. Exemple de résolution de la tâche Friandises (Madeleines)

Le produit cartésien associé à une représentation analogique des nombres permet aussi d'illustrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (Deruaz & Clivaz, 2018, p. 153) :

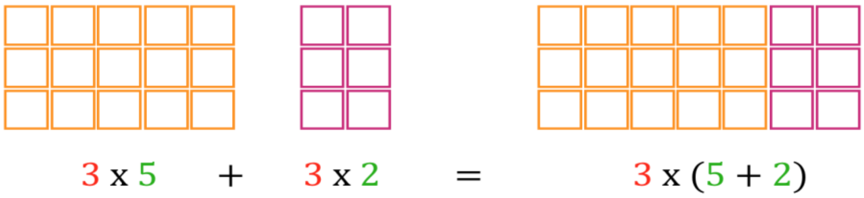


Figure 6. Produit cartésien et distributivité

Pour la multiplication, les liens entre la distributivité et le calcul posé sont souvent présentés comme la continuité de ce qui se fait en calcul mental. Nous faisons l'hypothèse que cette continuité n'est pas toujours présente lors de la multiplication posée par un nombre à un chiffre. Par exemple, dans le manuel Archimaths (Andrieu et *al.*, 2018, p. 118), la multiplication posée par un nombre à un chiffre est introduite à l'aide de l'exemple « 232 x 3 » :

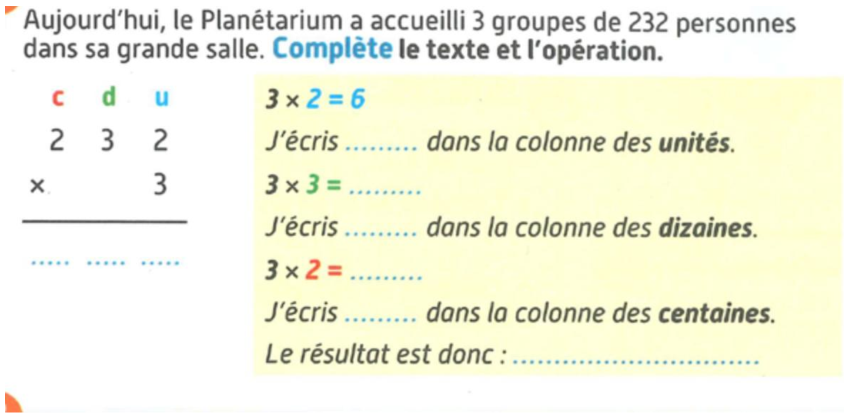


Figure 7. Multiplication par un nombre à un chiffre

Les trois chiffres du nombre « 232 » sont traités séparément, les uns après les autres, en commençant par la droite, en disant qu'on multiplie 3 par 2 (sous-entendu unités), 3 par 3 (dizaines) et pour finir, 3 par 2 (centaines). On n'écrit pas (3x2) + (3x30) + (3x200). Ce qui est dit en effectuant la multiplication posée est différent de ce qui est dit en réalisant cette même multiplication en calcul mental. La propriété de distributivité est donc implicite. Cette situation peut se rapprocher d'une tâche dans laquelle il serait demandé de tripler une collection de deux pommes, trois poires et deux melons, obtenant six pommes, neuf poires et six melons. Les centaines, dizaines et unités sont momentanément considérées comme des unités indépendantes les unes des autres et les regroupements, s'ils s'avèrent nécessaires, ne sont introduits que dans un second temps. Par exemple, à l'aide d'un calcul plus complexe (Andrieu et *al.*, 2018, p. 118) :

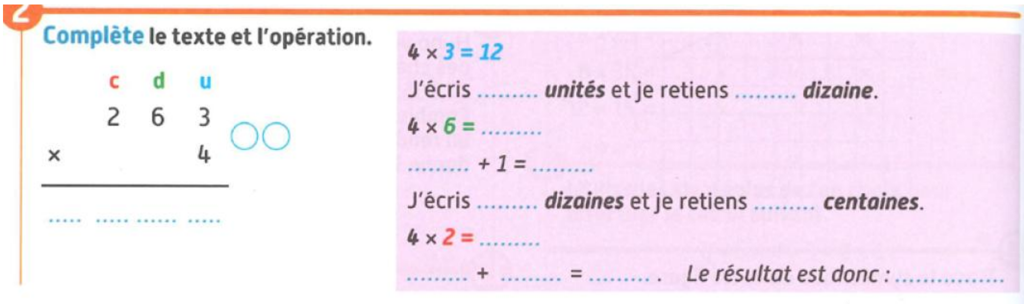


Figure 8. Multiplication par un nombre à un chiffre avec retenues

En revanche, dans ce même manuel (p. 145), pour introduire la multiplication par un nombre à deux chiffres à partir de l'exemple « 358 x 24 », la distributivité est bien mise en évidence pour la seconde étape (décomposition de « 24 » en « 4 + 20 »). Il est écrit « 358 x 20 » (et non « 358 x 2 », sous-entendu 2 dizaines), et l'égalité « 358 x 24 = 358 x 4 + 358 x 20 » est proposée.

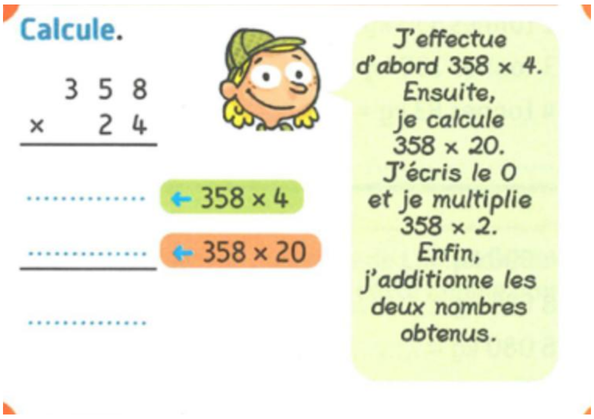


Figure 9. Multiplication par un nombre à deux chiffres

Cette procédure se rapproche d'une procédure de calcul mental : « trois-cent-cinquante-huit multiplié par vingt-quatre est égal à trois-cent-cinquante-huit multiplié par vingt auquel on ajoute trois-cent-cinquante-huit multiplié par quatre ». La multiplication posée s'écrit comme la multiplication effectuée mentalement se dit (en changeant l'ordre des termes de l'addition).

3 La multiplication par 10

Dans l'enseignement de l'algorithme de la multiplication d'un nombre par un nombre à deux chiffres, l'une des difficultés, aussi bien dans l'explication donnée par l'enseignant, que dans la compréhension du côté de l'élève, est la signification donnée au zéro ou au décalage vers la gauche, dans le résultat lorsque l'on multiplie par « le chiffre des dizaines » du second nombre. Selon Deruaz & Clivaz (2018) :

> *Pour multiplier 23 par 10, il faut prendre dix fois 23, soit dix fois les trois unités, qui deviennent ainsi trois dizaines, et dix fois les deux dizaines, qui deviennent ainsi deux centaines. Autrement dit, multiplier 23 par 10 revient à transformer les unités en dizaines et les dizaines en centaines. Ainsi, en écrivant 23 dans le tableau de nombres, la multiplication par dix revient à décaler le nombre d'une colonne vers la gauche. (...) Ce n'est qu'en supprimant le tableau et en écrivant « 230 » que l'on a réellement l'impression d'avoir ajouté un zéro à droite du 23.* (pp. 182-183)

Le schéma qui suit permet de mettre en évidence qu'il s'agit bien du décalage d'une colonne vers la gauche du tableau de numération et pas de l'ajout d'un zéro à droite du nombre que l'on multiplie par 10.

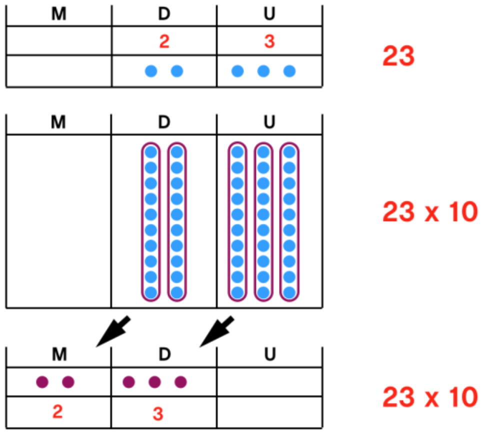


Figure 10. Multiplication par 10

III - PRÉSENTATION DE L'ATELIER

Cet atelier se déroule en quatre phases distinctes :

- une introduction théorique au sujet de la représentation du nombre et de la multiplication ;
- un moment où les participants peuvent manipuler le matériel et réfléchir à celui-ci dans le cadre de la multiplication par un nombre à un chiffre ;
- la présentation d'une expérience menée dans une classe ;
- un second moment où les participants testent brièvement le matériel dans le cadre de la multiplication par un nombre à deux chiffres.

Après une introduction théorique, les participants reçoivent le matériel, visible sur la photo ci-dessous :

Figure 11. Matériel à disposition

Ce matériel est le même que celui utilisé dans la séquence conduite dans une classe de 5ème année suisse (élèves de 9 ans) décrite plus tard. Il y a un abaque, réalisé avec des planches en bois perforées, sur lesquelles des billes sont posées et des récipients (verres en plastique). Un des avantages de ce matériel est qu'il permet d'effectuer des groupements (paquets de billes). De ce fait, les représentations analogiques sont utilisées. Sur la photo, une fiche avec les colonnes « millier, centaine, dizaine et unité » remplies de petites croix, est visible. Les participants reçoivent également la reproduction d'une page du livre de l'élève des moyens d'enseignement de 5ème année primaire, avec la tâche intitulée "Friandises" (Figure 4).

Avec tout ce matériel, les participants doivent construire une séquence pour introduire la multiplication posée. Nos objectifs étaient les suivants :

- Dans un premier temps, permettre aux participants de se familiariser avec ce matériel innovant et comprendre comment l'utiliser.
- Dans un deuxième temps, les amener à réfléchir au lien avec les différentes représentations du nombre présentées ci-dessus autrement dit : situer le registre du triple code de Dehaene dans lequel on se situe.
- Pour finir, les inciter à apporter un regard critique sur ce matériel en répondant aux questions : que remarque-t-on quand on fait l'activité ? À quoi se réfère-t-on ? Quel avis sur ce matériel ? Comment l'améliorer ?

Dans la suite de ce texte, nous présentons comment l'abaque fonctionne pour la multiplication à un chiffre. Nous décrivons ensuite une expérience conduite en classe avec ce matériel. Puis nous parlons de l'utilisation de l'abaque pour la multiplication à deux chiffres. Pour terminer, nous décrivons quelques observations faites dans l'atelier avec les participants.

Pour effectuer la multiplication « 253 × 4 » avec l'abaque, on pose « 253 » (2/5/3) en entête de colonnes de l'abaque avec les billes et le « 4 » tout à droite (figure 12). On complète alors les différentes cases de l'abaque en respectant dans chaque case le nombre de colonnes et de lignes. Cela permet d'éviter de se référer au répertoire mémorisé des tables de multiplication en auditif-verbal. En outre, l'utilisation de la représentation de la multiplication en lignes-colonnes sur chaque plaque de l'abaque permet de donner du sens au produit cartésien. Comme on travaille en base dix, on fait des groupements de dix billes à chaque fois que c'est possible et on ajoute un élément par groupement dans la colonne à sa gauche. La retenue dans une multiplication est « matérialisée », elle représente un groupement de dix billes ou une poignée de dix billes. Le nombre « 1012 » correspond au résultat de la multiplication de « 253 » par « 4 ».

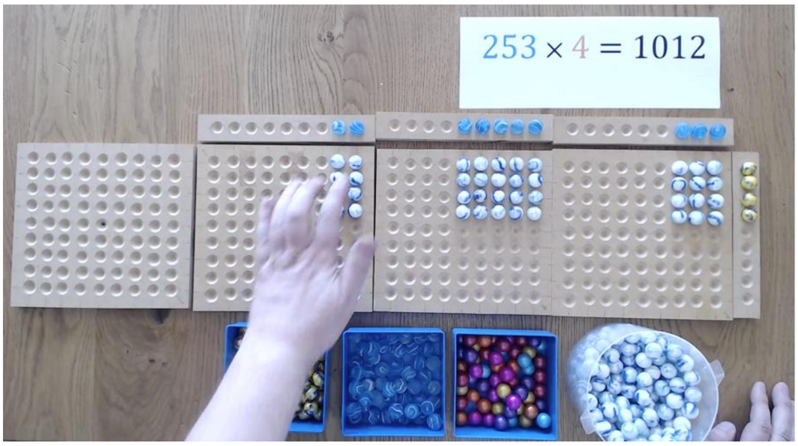


Figure 12. Dispositif pour la multiplication par un nombre à un chiffre

1. Présentation d'une séquence menée dans une classe de 5ème année primaire

Cette séquence s'est déroulée dans une classe de 23 élèves. Elle est composée de 6 leçons d'environ 45 minutes chacune. Le but de celle-ci est d'introduire et de formaliser l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication par un nombre à un chiffre. À noter qu'à ce stade, les élèves connaissent seulement une partie des résultats des tables de multiplication. En effet, ils sont en cours d'apprentissage de ces dernières et ne connaissent par cœur que celles de : 2, 4, 5, 10 et 3. Ce matériel permet d'introduire la multiplication posée sans la maîtrise totale des tables de multiplication et décharge cognitivement de cette tâche, notamment les élèves en difficulté.

Etant donné que le cœur de cette séquence était la manipulation de billes avec les abaques présentés plus haut, nous avons dû préparer un peu les élèves à ce nouveau matériel. Pour ce faire, lors de la première leçon, nous avons proposé aux élèves de dénombrer des jetons distribués et de donner leur réponse à l'aide d'un code : « 1 jeton vert = 10 jetons rouges », 1 jeton bleu = 10 jetons verts ». Ce travail permet d'une part, de vérifier qu'ils connaissent la méthode de groupement par dix et d'autre part, qu'ils sont capables de procéder à des échanges nécessaires pour mettre une retenue dans la multiplication avec l'abaque. Dans la deuxième partie de cette leçon, nous avons distribué une feuille d'exercices avec des plateaux de friandises (figure 4).

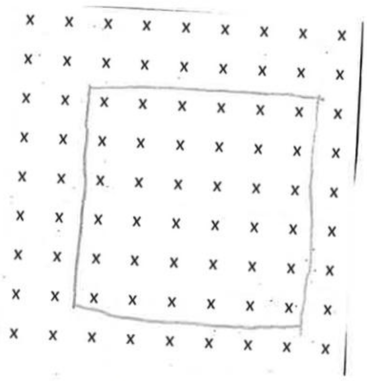


Figure 13. Un plateau de friandises représentées par des croix

Les élèves doivent indiquer le nombre de friandises présentes sur le plateau ainsi que leur démarche. Diverses procédures ont été relevées :

- utilisation de l'addition itérée
- multiplication avec mobilisation des tables de multiplication
- dénombrement de toutes les croix
- multiplication avec une résolution à l'aide de calcul réfléchi
- utilisation de groupements de dix et addition de ceux-ci

Cette dernière procédure a permis de faire le lien avec l'utilisation de l'abaque et des billes lors de la leçon suivante. Lors de celle-ci, les élèves sont partagés en deux demi classes et répartis en binômes. Cette séance a pour but de faire manipuler les élèves et de leur permettre d'appréhender plusieurs représentations du nombre. Elle permet de rendre explicites et visibles les différentes étapes de la multiplication. Elle est aussi un événement phare dans la séquence qui doit servir d'expérience commune à toute la classe et servir de référence lors du passage à la multiplication posée par écrit.

Tout d'abord, l'enseignant présente l'abaque et son utilisation avec pour commencer une multiplication assez simple du type « 6 x 4 ». Ensuite, les élèves effectuent le calcul « 27 x 4 » à l'aide de l'abaque. Une fois cette étape réussie, ils reçoivent une fiche avec le calcul « 37 x 5 ». Ils peuvent s'ils le désirent s'aider de l'abaque pour trouver ou contrôler leur réponse.

Figure 14. Utilisation de l'abaque pour 37 x 5

Pour finir, ils inventent des calculs sur une fiche.

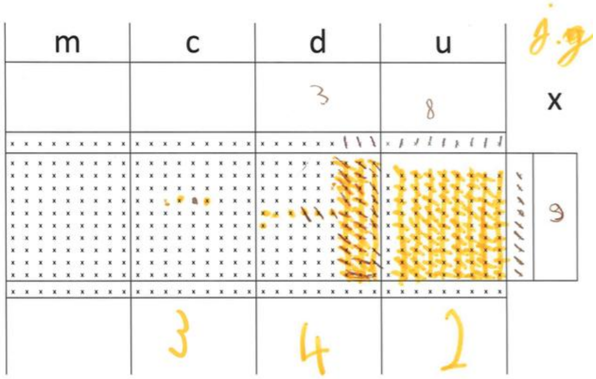


Figure 15. Exemple de fiche avec un calcul inventé par des élèves

À la troisième leçon, les élèves retravaillent à l'aide de la fiche et, pour les élèves en difficulté, des abaques sont proposés. Les élèves qui ont de la facilité peuvent essayer de résoudre un calcul à l'aide de la multiplication posée, ce qui les amène à transposer ce qu'ils ont vu au travers de l'usage de l'abaque et la représentation sur la fiche.

Lors la quatrième leçon, l'algorithme de la multiplication est expliqué au tableau. Pour ce faire, il est explicitement fait référence au travail réalisé avec l'abaque ainsi que celui avec la fiche. Les gestes, lorsqu'on remplace un groupement de billes (vider le récipient) par une autre bille (retenue) sont également réinvestis.

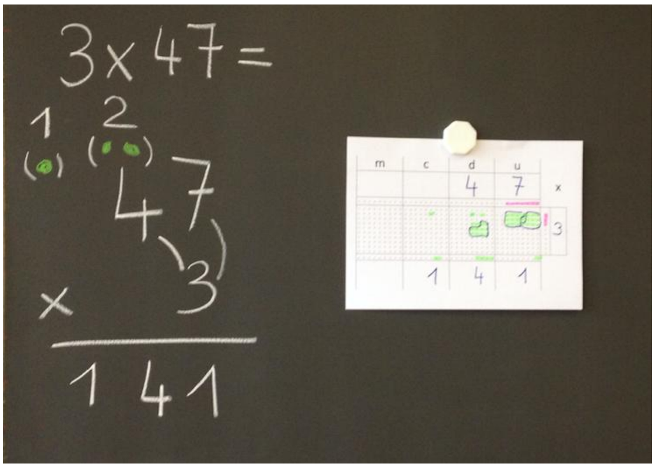


Figure 16. Trace au tableau noir

Pour finir, les élèves effectuent des exercices d'entraînement plus traditionnels avec des multiplications posées. Très rapidement, nous voyons un type d'erreur, plutôt inhabituel, apparaître chez beaucoup d'élèves : ils oublient les retenues lorsqu'ils multiplient les centaines, mais pas lorsqu'ils traitent les unités ou dizaines. Nous pouvons facilement expliquer cela par le fait que, lors de la phase de manipulation et lors du travail sur les fiches, il n'y avait pas de nombre à trois chiffres. Afin de remédier à cette erreur, nous reprenons donc un exemple au tableau (447 x 3) en collectif. Dès lors, nous constatons que cette erreur disparaît dans les exercices suivants et qu'il y a globalement peu d'erreurs de retenues.

De plus, l'erreur, généralement assez fréquente, qui consiste à multiplier la retenue au lieu de l'additionner est quasiment inexistante. Nous faisons l'hypothèse que la manipulation et la visualisation des billes permettent de mieux comprendre la signification de la retenue et de ce fait, de passer outre cette difficulté.

2. Présentation du dispositif pour la multiplication par un nombre à deux chiffres

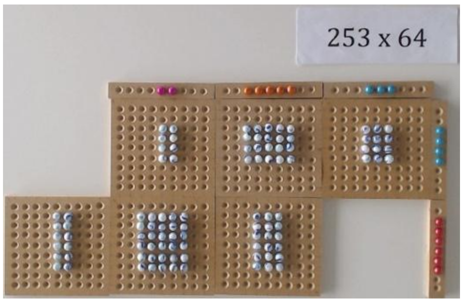
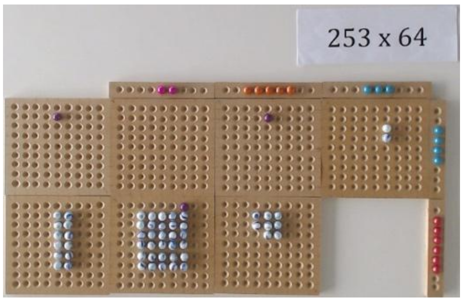
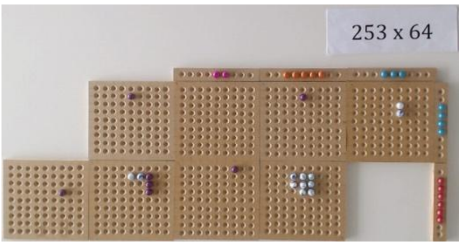
	Dans un premier temps, on procède comme pour la multiplication par un nombre à un chiffre en complétant les cases de l'abaque. Lorsque l'on a complété la seconde ligne, on l'a fait comme pour une multiplication par 6 alors que l'on multiplie par 6×10. Il faut donc décaler les colonnes d'un cran vers la gauche.
	On procède également aux groupements de dix billes si nécessaire et on utilise, pour la seconde ligne de l'abaque, le même procédé.
	Le nombre « 1012 » correspond au résultat de la multiplication de 253 par 4 et le nombre « 1518 » au résultat de la multiplication de 253 par 6. Le nombre « 15180 » correspond lui au résultat de la multiplication de 253 par 60. On additionne en regroupant dans chaque colonne les résultats obtenus sur chaque ligne. Le nombre « 16192 » correspond bien au résultat de la multiplication de 253 par 64.

Figure 17. Dispositif pour la multiplication, par un nombre à deux chiffres, posée

Avec ce matériel, les différentes étapes permettent de bien visualiser en multipliant, case après case, ce qui correspond à la distributivité. De plus, le décalage des plaques de la seconde ligne d'un rang vers la gauche qui correspond à la multiplication par un nombre de dizaines est selon nous porteur de sens. En effet, nous avons pu l'observer dans une classe de 6ème année primaire dans laquelle des stagiaires ont utilisé ce matériel avec un petit groupe d'élèves en difficulté (Brandt & Girard, 2018). Après la manipulation de l'abaque, les élèves oublient moins de décaler d'une colonne par exemple.

IV - BILAN ET CONCLUSION

Lors de cet atelier, les participants ont tout d'abord cherché comment le matériel fonctionnait puisque nous ne leur avions pas présenté comment il s'utilisait. Nous souhaitions, par cette approche par immersion, absolument pas guidée, les amener spontanément à déceler les limites et les forces de cet outil. Nous avons pu constater qu'ils entraient facilement dans l'activité, mais pas forcément directement comme prévu pour effectuer des multiplications. À l'instar de la photo ci-dessous, ils essaient d'abord de se répartir les planches et de travailler individuellement.

Figure 18. Participants au travail de manière individuelle

Un des points de discussion a été au sujet du choix des couleurs des billes. Certains participants souhaitaient utiliser des couleurs différentes : une pour les billes qui représentaient des unités et une autre pour celles qui représentaient des dizaines, etc. Au contraire, d'autres étaient totalement opposés à cette idée, car cela allait, selon eux, à l'encontre du système de numération et de sa valeur de position. Cela risquerait donc de forger de fausses conceptions chez les élèves.

Sur les photos ci-dessous, un groupe a choisi des couleurs de billes différentes pour représenter la valeur de chaque chiffre que cela soit pour le multiplicateur ou le multiplicande et un autre groupe utilise seulement les billes transparentes.

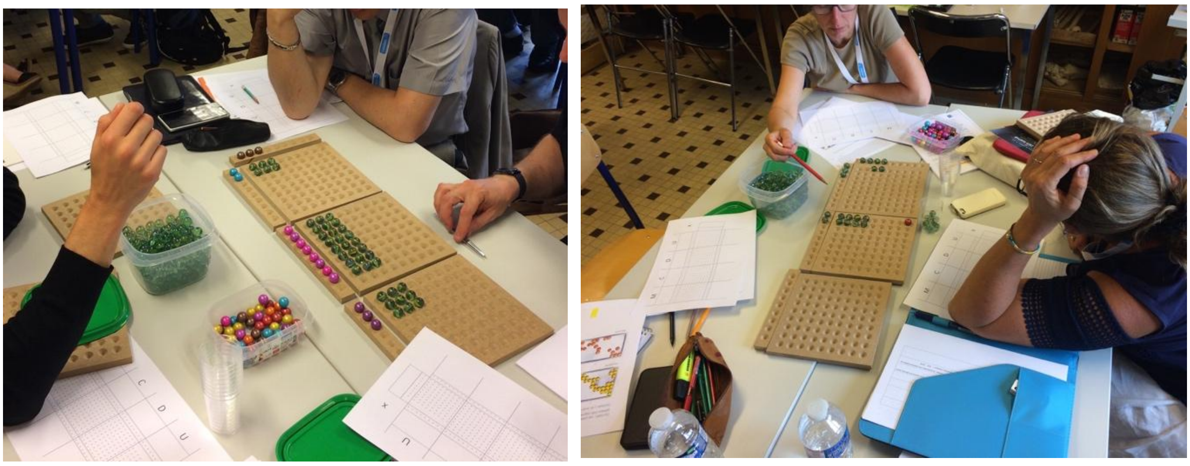


Figure 19. Traces du travail des participants

Le matériel présenté a été apprécié par son aspect innovant. En effet, le fait qu'il permette de matérialiser les algorithmes et semble apporter une meilleure compréhension est particulièrement intéressant.

Lors de cet atelier, les participants ont souligné la pertinence de l'abaque pour la multiplication à un chiffre. Ils ont vu le potentiel en termes de compréhension et d'apprentissage que la manipulation de ces billes peut engendrer. Ils ont, en revanche, émis plus de réserve au sujet du dispositif pour la multiplication à deux chiffres. Ils ont notamment remis en question le fait de décaler les planches à gauche pour rendre explicite le zéro de décalage.

En ce qui concerne nos observations lors de l'expérience avec des élèves, nous pensons que contrairement à ce qui est souvent cru, à savoir que la manipulation d'objets est chronophage, cela peut plutôt être un gain de temps. De plus, il est possible d'introduire cet algorithme plus tôt dans l'année vu qu'il n'est plus nécessaire, dans un premier temps, de maîtriser les tables de multiplications, pour d'une part, le comprendre mais d'autre part, obtenir des réponses justes.

Pour finir, il est nécessaire d'utiliser les fiches avec les élèves comme des intermédiaires entre les manipulations sur l'abaque et la multiplication posée classiquement en colonnes sur une feuille. Nous supposons que c'est la diversité des supports et surtout les liens explicitement faits et montrés par l'enseignante entre ces derniers qui facilitent l'apprentissage.

V - BIBLIOGRAPHIE

Andrieu, L., François, R., Kiffer, O., Vidal, S., Méhée, L. (2018). *Archimaths*. Paris : Magnard.

Brandt, J. & Girard, M. (2018). *L'abaque, un artefact pour faciliter l'apprentissage de la multiplication ?* Mémoire de Bachelor. Haute école pédagogique du Canton de Vaud, Lausanne.

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève.

Clivaz, S. & Deruaz, M. (2013). Des mathématiques à leur enseignement l'algorithme de la multiplication. *Grand N*, n° 92, pp. 15-23.

Constantin, C. (2017). La distributivité : Quelles connaissances pour enseigner la multiplication à l'école primaire ?. *Grand N*, n° 100, pp. 105-130.

Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998). *Mathématiques 3ème année : livre de l'élève*. Neuchâtel : COROME.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. Cognition, n° 44, pp. 1-42.

Deruaz, M. & Batteau, V. (2017). Dix ou 10 : quelle est la question ? atelier A31, *Actes du 44e colloque COPIRELEM, Épinal 13-15 Juin 2017.*

Deruaz, M. & Clivaz, S. (2012). Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maîtres du primaire. In J.-L. Dorier & C. Sylvia (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT1, pp. 183–194).

Deruaz, M. & Clivaz, S. (2018). Des mathématiques pour enseigner à l'école primaire. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.