ATELIER A14

ENSEIGNER LES NOMBRES COMME DES ‘REPRÉSENTATIONS DE LA NUMÉROSITÉ’

Alain MERCIER
Professeur émérite
Institut Français de l’Education, ENS-Lyon
alain.mercier@ens-lyon.fr

Serge Quilio
MCF, ESPE de Nice
Laboratoire (éventuellement)
serge.quilio@gmail.com

Résumé

Le texte rend compte des apports faits à un atelier. Il présente rapidement la question des artefacts permettant aux professeurs de « montrer » aux élèves ce qu’ils doivent voir. Ces artefacts sont supposés être plus simples que le réel auquel ils se substituent. Cependant, le travail collaboratif outillé d’une observation systématique des difficultés rencontrées montre un problème récurrent des élèves dans l’usage de la « ligne des nombres », en particulier dans sa version graduée. Les participants, confrontés aux observations rapportées, confirment le problème et l’animateur apporte alors des éléments d’analyse de la transposition qui ont conduit certains acteurs du projet ACE-ARITHMECOLE à abandonner l’artefact « ligne graduée des nombres » pour *la représentation des grandeurs par des segments non gradués associés à un nombre qui est la mesure de cette grandeur*. Cela permet en effet de modéliser des systèmes de relations élémentaires correspondant à ce que l’on appelle *des équations arithmétiques*.

I - LES REPRÉSENTATIONS DE LA NUMÉROSITE SONT DES ARTEFACTS

L’atelier vise à montrer le choix didactique d’enseigner les nombres comme des représentations symboliques de la numérosité des collections. Il s’agit de permettre aux élèves, dès le début du CP, d’écrire *des relations entre grandeurs mesurées*, qui représentent des comparaisons de collections constituées pour être a priori incomparables : files de cubes de couleurs variables, doigts ou dés, dés ou tours. Il s’agit de faire comprendre que le mesurage conduit à nommer ces objets par leur propriété commune, *la numérosité* : 3 (doigts) + 4 (doigts) > 6 (points). Les files de cubes 2 (rouges) + 3 (bleus) = 1 (vert) + 3 (bleus) + 1 (jaune) conduisent à la comparaison immédiate des objets représentés à la fois par une longueur et par un nombre. Le professeur organise enfin le passage rapide à la représentation de toute grandeur par un segment (une longueur) en même temps que par une somme.
Ces représentations sont *des artefacts* dont nous expérimentons les propriétés *d’objets calculables* lorsqu’ils permettent d’écrire des équations arithmétiques modélisant des situations. L’atelier rend compte de ce choix de transposition, mis en place depuis 2008 dans un « Lieu d’Education Associé » de l’Institut Français de l’Education puis dans une centaine d’écoles.

L'atelier est organisé en trois temps.

- Le problème. Un exposé rapide permet aux participants de comprendre le choix d'enseigner au CP une pratique des nombres commençant par l'écriture d'équations arithmétiques pour rendre compte d'égalités et d'inégalités.

- L'observation. Les participants travaillent sur le visionnage d'épisodes de CP et l'observation de travaux d'élèves engagés dans ces pratiques, la confrontation de leurs interprétations (en groupes de 4 ou 5), l'identification collective des problèmes didactiques posés par le choix initial.

- L'analyse. Un travail collectif des participants, visant à imaginer une suite pour le CE, à confronter aux choix qui ont été réalisés dans les classes impliquées dans le projet et aux observations qui en ont résulté.

II - LES PROBLÈMES POSÉS PAR DIVERSES REPRÉSENTATIONS

Certains travaux en sciences cognitives et en didactique ont porté sur les processus d'acquisition des nombres comme objet culturel permettant de rendre compte de « la numérosité » des « collections » autrement dit, de la mesure des quantités discrètes. Ce faisant, ils ont retrouvé les savoirs d'expérience des acteurs de l'enseignement avant la réforme moderniste des années 1970-80 : les nombres sont des mesures, et les ordres de grandeur d'un nombre correspondent donc « tout naturellement » aux ordres de grandeur des chiffres dans une numération décimale de position : ce que Tempier (2010) appelle les *unités de compte*. Mais il s'avère que l'introduction de cette idée n'est pas simple. Car la notion d'unité est perdue dans l'enseignement depuis le passage de la réforme moderniste des années 1970-1980 (Chevallard & Bosch, 2000), (Chevallard & Bosch, 2002) et il n'y a plus un professeur qui ait même été enseigné sur cette question. En explorant ce problème dans le cadre de nos recherches collaboratives avec les professeurs du LEA en réseau « École Saint Charles » et le projet ACE[69]-ARITHMECOLE, nous avons observé une difficulté supplémentaire, liée au fait que, les nombres n'étant pas des mesures, leur représentation est celle de points de graduation sur une droite. Du coup, l'écart entre deux nombres représente un opérateur sur un ensemble de nombres ou, pour le dire comme (Vergnaud, 1990) une transformation entre deux états ; et un nombre est donc d'abord l'encodage d'un état : le nom d'un point sur une droite. Ainsi la représentation des nombres par des points de l'espace développe une vision empiriste de ces objets (il n'y a qu'à bien regarder pour les comprendre) et engendre de nombreuses difficultés, attribuées bien évidemment à la complexité du rapport entre la structure des opérations sur les états et la structure des opérations sur les transformations. Ce rapport engage à rechercher une structure de groupe pour les transformations, avec l'identification de transformations inverses, mais cela demande que les états eux mêmes soient complétés par « symétrisation » ce qui conduit bien au delà des programmes élémentaires. Nous allons tenter de revivre, en accéléré, avec les participants à cet atelier, le mouvement d'analyse vécu entre professeurs et chercheurs engagés dans une collaboration de longue durée. Nous ne donnerons donc pas les transcriptions des épisodes filmés, mais seulement trois fiches d'observation qui sont pour nous, exemplaires.

[69] ACE : Apprentissage et Compréhension à l'École. Le projet ne portait que le CP et n'intégrait pas le LEA Saint Charles, où nous développions nos propres propositions. Il regroupait des didacticiens et des équipes en Sciences Cognitives. Il s'est poursuivi au cycle 2 en organisant une collaboration plus large d'écoles des académies de Bretagne, Lille, Créteil, et Aix-Marseille, et des chercheurs travaillant en collaboration avec ces écoles, sous le nom ARITHMECOLE.

Les observations

Exemple 1

FICHE D'OBSERVATION D'UN FAIT DIDACTIQUE EN MATHEMATIQUES

Observateur : Mireille (M., Maître Formateur- Doctorante)
Conditions de l'observation

- *Lieu* : Ecole Mimet – classe CP de Chantal, professeur du jour : M.
- *Date* : 4 janvier 2017
- *Durée* approximative : 3 min
- *Matériaux* recueillis : extrait vidéo

Intitulé officiel de l'activité : module 6 Jeu des annonces avec 2 mains et 2 dés (phase écrite)
– comparaison de la mesure de la taille de deux collections
Acteurs : un élève de la classe CP + l'observateur M., en position de professeur
Matériel utilisé : ardoise

Description du fait didactique

- **Contexte, déroulement succinct**

C'est la rentrée de janvier. Les élèves reprennent le jeu des annonces avec des parties fictives proposées par M., qui provoque donc l'observation.
Il s'agit de montrer qu'une annonce est gagnante et d'engager les élèves dans un nouveau travail sur les représentations (écritures maths et schéma-ligne) pour initier un travail de comparaison d'écritures, de transformation par décomposition ou composition[70].
Pour la première partie (montrer que 5 + 2 = 6 + 1), M. laisse chercher les élèves pour voir ce qu'ils produisent. La grande majorité des élèves décomposent 2 ; les autres écrivent le résultat du calcul ; une seule élève a dessiné des points et les compte.

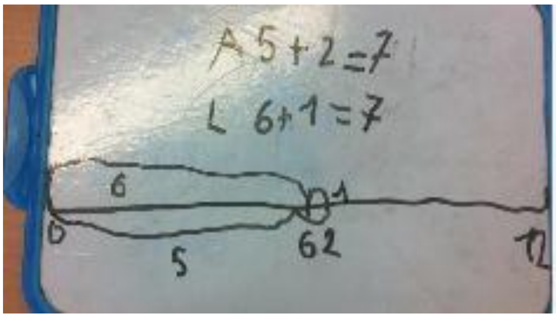


Figure 1 : Un élève compare 5 + 2 à 6 + 1, le moyen n'est pas imposé, il calcule les sommes

On voit les habitudes de la classe : utilisation du schéma-ligne avec les repères 0-6-12 (comme dans les usages de l'estimateur) et calcul du total. M. « montre » comment procéder en s'appuyant sur le schéma-ligne (allers retours entre écriture et schéma) : on peut montrer que 5 + 2 = 6 + 1[71].

---

[70] La technique de décomposition consiste à « Faire voir un nombre plus petit compris dans un nombre plus grand ». Par exemple, les élèves écrivent 5 = 3 + 2 pour « montrer 3 dans 5 » et ainsi, utiliser 3 dans la composition 5+6 qu'ils transforment en 3 + 2 + 6 = 3 + 8 pour montrer finalement que 5 + 6 est plus grand que 3 + 7.

[71] On peut commencer par faire voir 1 dans 2 et 5+1 c'est 6 ou par faire voir 5 dans 6 et 1+1 c'est 2 ou par faire voir 1 dans 5 et 4+2 c'est 6.

• **Épisode choisi** (en rapport à un fait qui a étonné ou questionné l'observateur) : M. voudrait *voir si les élèves s'emparent de cet « outil »* et laisse les élèves en recherche individuelle.
C'est la 3e partie : Annonce : 5+4 ; lancer 6+3
Quand M. arrive auprès de l'élève E. (de niveau moyen-bon), il a déjà décomposé 5 en 3+2. M. et l'élève E. agissent ensemble sur le schéma-ligne. Les gestes de M. sont les mêmes que lors de la première partie.

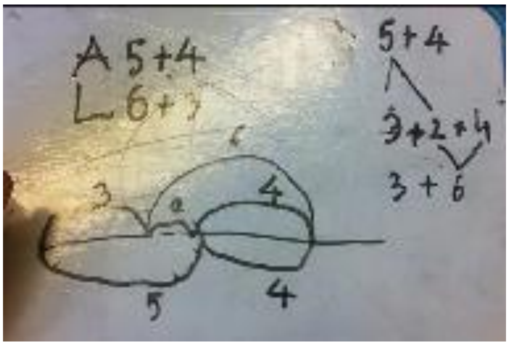


Figure 2 : La maîtresse demande d'utiliser une décomposition de 5+4 pour fabriquer un 6 et comparer à 6+3

M. demande alors à E. de « fabriquer un 6 ». Bien sûr, E. ne le « voit » pas. Pour lui 2 + 4 n'est pas 4 + 2 (car quand M. lui demande 4 + 2, il répond que ça fait 6). Et dans l'échange, M. est bien aveugle à cette ignorance de l'élève : elle le montre donc...

Nature du questionnement engendré par cette observation
Est-ce que finalement ce travail est intéressant pour les élèves ? C'est-à-dire est-ce que cela vaut le coup pour eux à ce moment là ?
D'abord je me suis aperçue qu'il y avait énormément de choses à gérer.
Les difficultés ont commencé lors de la deuxième partie (annonce 4 + 3 et lancer 6 + 1), où certains élèves avaient commencé à décomposer 4 en 2 + 2 et 3 en 2 + 1 et étaient perdus ensuite. Car aucun élève n'avait pensé que 2 + 2 + 2 c'était comme 6.

Figure 3 : La complexité du travail entrepris

Par contre, certains élèves (les plus avancés) avaient eu des stratégies différentes et étaient partis de 6 + 1 et en décomposant 6 en 3 + 3, ils avaient pu « montrer 4 » et étaient arrivés à transformer 6 + 1 en 3 + 4.

Exemple 2

FICHE D'OBSERVATION D'UN FAIT DIDACTIQUE EN MATHEMATIQUES

Observateur : Mireille (M., Maître Formateur- Doctorante)
Conditions de l'observation

- *Lieu* : école Saint - Mitre
- *Date* : 17 avril 2015
- *Durée* approximative : 1h
- *Matériaux* recueillis : photos, notes

Intitulé officiel de l'activité : création de problèmes
Acteurs : Deux classes de CE1

Description du fait didactique

- **Contexte, déroulement succinct**

Dans les deux classes, les élèves ont d'abord résolu deux problèmes (recherche du tout et recherche d'une partie) avec schéma-ligne, boîte, opération et phrase réponse (feuille photocopiée avec énoncés, schéma et boîte à compléter, ligne prévue pour écrire l'opération et ligne prévue pour écrire la phrase réponse). Correction collective. Puis création d'énoncés à partir des schéma-ligne et boîte, qui sont demandés.

- **Épisode choisi** (en rapport à un fait qui a étonné ou questionné l'observateur) : la première phase de résolution d'un « problème de tout ». *C'est la production du schéma-ligne qui interpelle*.

Dans la première classe, il n'est peut-être pas évident que des choux à la crème et des éclairs fassent partie de la catégorie « gâteaux ». Dans la 2e classe, le problème de filles et de garçons est plus familier. Est-ce cela qui expliquerait que 8 élèves (sur 21 présents) dans la première classe mais seulement 2 dans la seconde produisent encore ce type d'erreurs ?

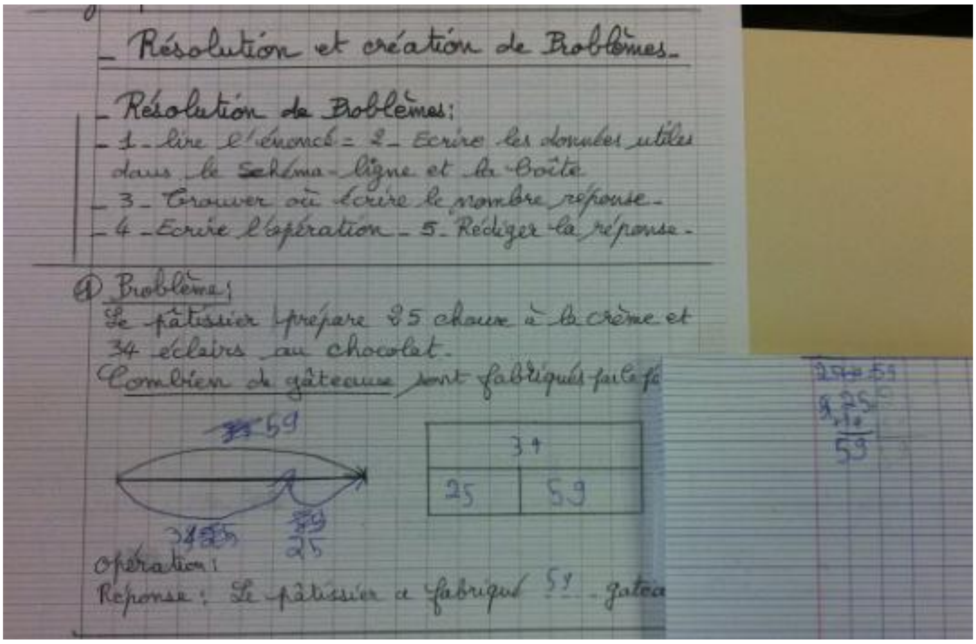


Figure 4 : Productions de la classe 1

On voit qu'au départ « 34 éclairs » est considéré comme la partie entière (c'est ensuite barré sur le schéma-ligne suite à la correction collective mais pas rectifié dans la boîte) alors que l'élève avait correctement résolu et posé avant de remplir le schéma et la boîte l'opération sur sa feuille de brouillon à côté (25 + 34 = 59 en ligne puis en colonne).

Il y a là une action massive (8 élèves dans ce cas, plus d'un tiers) : l'élève écrit les deux données de l'énoncé du problème en mettant bien le plus grand en haut (car 25 est contenu dans 34) puis le « 59 gâteaux » du résultat est inscrit dans la case vide.

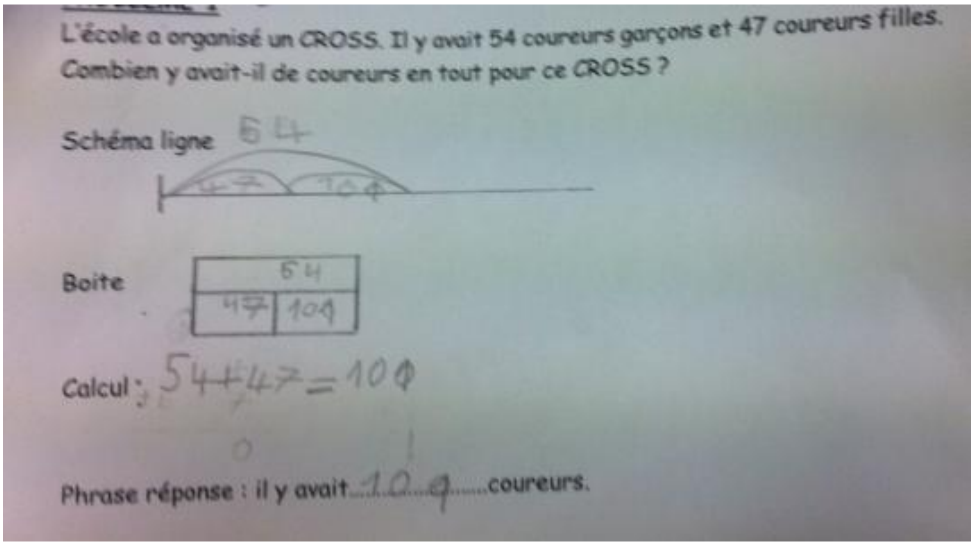
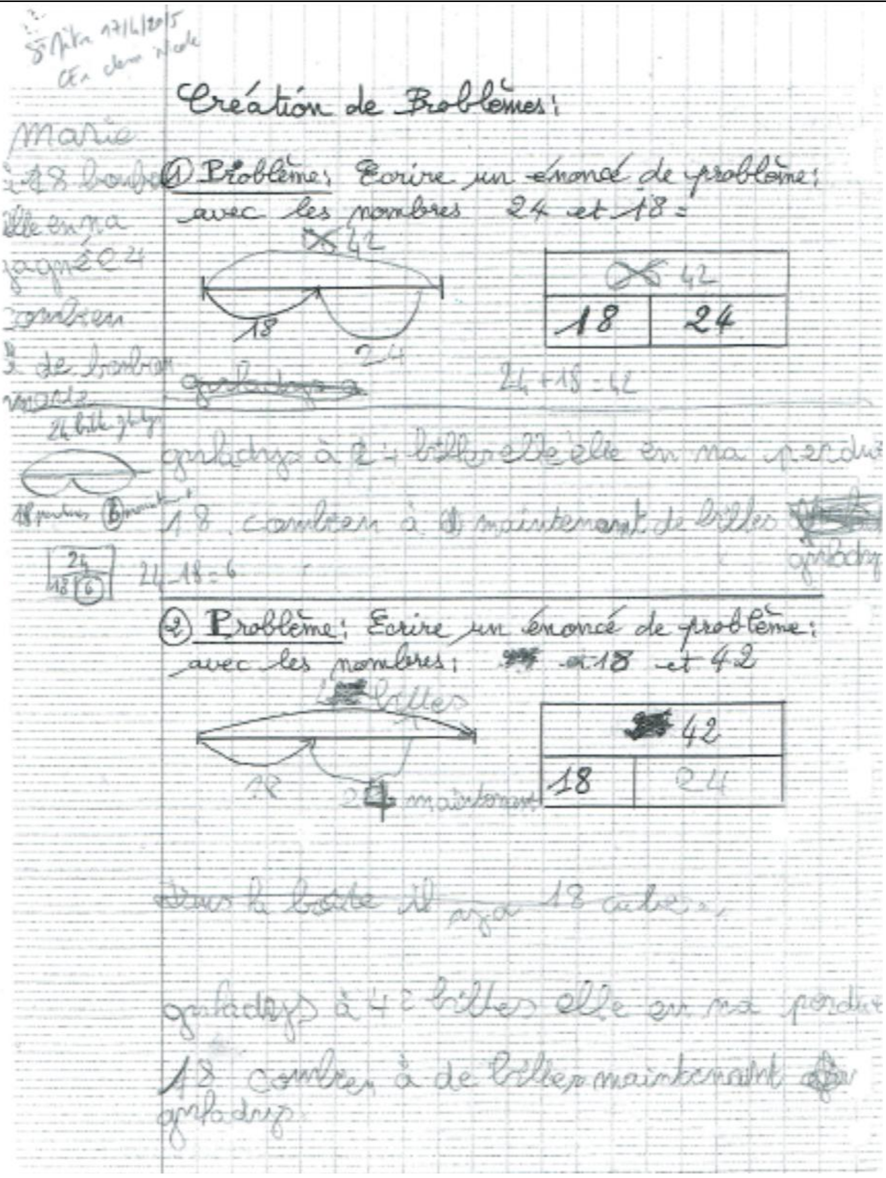


Figure 5 : Productions de la classe 2

L'erreur s'observe aussi pour deux élèves de l'autre classe, qui écrivent d'abord les deux nombres de l'énoncé avant de noter le « résultat » de l'addition dans la case de droite.
Je suis intervenue lors de la phase de correction d'abord pour m'assurer de la catégorisation (on a recherché des noms de gâteaux), puis pour « raconter » le schéma erroné en écrivant les unités « 59 gâteaux », « 25 choux à la crème », « 34 éclairs » et en disant : « 25 choux et 59 gâteaux ensemble font 34 éclairs ». Non ! Ça ne va pas !

Nature du questionnement engendré par cette observation
Je trouve préoccupant ce genre de production : les élèves trouvent le résultat correct et savent résoudre le problème mais *remplissent par contrat le schéma et la boîte*. Ces représentations ne semblent pas utiles à ces élèves. Peut-être que ces représentations devraient être celles de la réflexion de certains élèves seulement (qui en auraient besoin sous la direction du prof) avant la résolution, ou après pour argumenter éventuellement. Que les élèves s'en emparent individuellement ne serait pas à exiger.


Création de Problèmes :

① Problème : Ecrire un énoncé de problème : avec les nombres 24 et 18 :

42	
18	24

24+18=42

gladys à 42 billes elle en na perdu 18 combien à maintenant de billes gladys

24-18=6

② Problème : Ecrire un énoncé de problème : avec les nombres 18 et 42

42	
18	24

~~Dans la boîte il y a 18 cubes~~

gladys à 42 billes elle en na perdue 18 combien à de billes maintenant gladys

Figure 6 : des erreurs constantes dans les représentations des problèmes, pourtant créés par les élèves

Est-ce que l'utilisation systématique de ces représentations ne va pas à l'encontre de leur usage d'écrits productifs, comme on l'observe ici ?

On peut voir que, lorsque l'élève observée écrit pour elle-même les représentations du problème (elle cherche à fabriquer un énoncé), elle contrôle ce qu'elle fait. Elle part des quantités 18 et 24 (dont la différence est 06, comme on le voit calculé en marge à gauche du problème 1 et au dessus du schéma-ligne). Mais elle n'arrive pas à formuler une question. L'élève renonce donc dans un premier temps à écrire un problème de soustraction, mais comme manifestement c'est son projet, elle reprend le modèle additif obtenu au premier problème (18+24=42) pour le transformer en 42-18=24 qui donne le traitement du problème 2, avec la compréhension que le premier temps est l'avoir de 42 billes (et pas 18) ; ce qui fait que le résultat 24 est ce que Gladys a *maintenant.* Le schéma-modèle une fois posé, son interprétation en termes de succession d'états et de transformations permet le raisonnement, et la production de l'énoncé.

Exemple 3

FICHE D'OBSERVATION D'UN FAIT DIDACTIQUE EN MATHEMATIQUES

Observateur : SQ
Conditions de l'observation:

- *Lieu :* CP Gardanne
- *Date :* Novembre 2013
- *Durée* approximative : 1h
- *Matériaux* recueillis : CR Enseignante

Intitulé officiel de l'activité : Réduire des écritures additives pour former une écriture du nombre dans le système conventionnel.
Acteurs : élèves CP + prof
Matériel utilisé : Document support de l'ingénierie ACE Module 4

Description du fait didactique

- **Contexte, déroulement succinct**

Séances de jeu : Dans l'ensemble, les élèves n'ont pas eu de problème pour écrire, dans une partie fictive, une annonce à 3 termes en respectant les contraintes du jeu. J'ai cependant d'abord proposé ce travail sur l'ardoise avant que les élèves n'aient une fiche de jeu individuelle. Certains ont confondu la somme totale avec un terme de l'annonce notamment avec le 6. Le recours aux mains leur a permis de corriger leur erreur et de proposer une nouvelle annonce sans difficulté. J'ai procédé moi-même à la correction des fiches étant donné que les élèves les moins avancés ont du mal à se concentrer et repérer les erreurs de leurs camarades.
La représentation à l'aide du schéma ligné et des boîtes a été bien comprise par les élèves lors de la mise en commun.

- **Épisode observé**

Le CR du professeur signale une difficulté. « *Parties fictives : Nous avions abordé les parties fictives après les vacances (module 4) et j'avais rajouté le schéma ligné sur la fiche individuelle des élèves ce qui était un peu trop rapide, d'autant que c'était la première fois qu'ils utilisaient uniquement ce mode de représentation sans le train. Ayant rajouté le schéma ligné au dernier moment à côté des calculs, il était trop petit et il n'y en avait qu'un pour l'annonce et le lancer (représenté en jaune) ce qui élevait l'exercice à un degré de complexité trop élevé.*

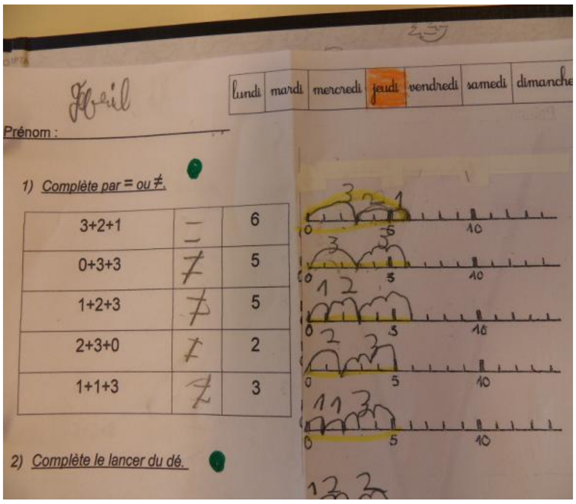


Figure 7 : le schéma ligné rajouté pose problème

Les élèves avaient bien compris les enjeux du module quant aux égalités et comparaisons d'une addition à trois termes et un nombre inférieur ou égal à 6. C'est la représentation qui leur a posé problème. L'erreur la plus fréquente a été de ne plus tenir compte du lancer du dé et de représenter un lancer systématiquement égal à l'annonce. »

« J'ai donc proposé à la séance suivante un schéma ligné « effaçable » sous pochette transparente et nous avons travaillé uniquement sur la représentation d'une annonce à plusieurs termes sur ce schéma ligné. »

Les erreurs les plus fréquentes ont été les suivantes :

- se repérer en « comptant » les traits (comptage du trait 0) au lieu des intervalles ;
- laisser un espace libre lorsque l'on trace les ponts entre les graduations (comme ci-dessous) ;
- commencer à la graduation 1 pour compter 0 (comme ici, où l'élève obtient l'égalité 0+2+4=7) »

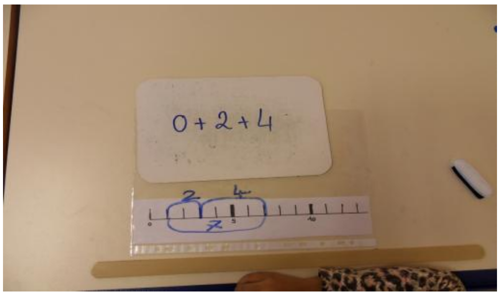


Figure 8 : Les erreurs type sur une copie…

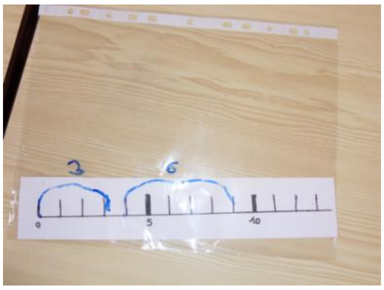


Figure 9 : Comment représenter 0, que les élèves savent pourtant manipuler par ailleurs ?

Nature du questionnement engendré par cette observation
La présence des graduations perturbe visiblement autant les élèves que le professeur (« se repérer en comptant les traits au lieu des intervalles » écrit-elle dans son compte-rendu). L'écriture additive ne représente pas une somme de mesures, le passage du calcul des trains de cubes à la droite graduée ne fonctionne pas.

Les trois observations sont choisies parmi beaucoup d'autres et données aux participants, afin de voir s'ils font le même diagnostic que les chercheurs et les professeurs qui collaborent dans le projet ACE-ARITHMECOLE autour du Léa « École Saint Charles », à Marseille. On remarque que les élèves travaillent les « compositions et décompositions » de nombres de manière à « faire voir » un nombre plus petit dans un nombre plus grand, pour libérer le nombre représentant la différence et pouvoir le composer ailleurs : un travail de type algébrique proposé dès le Cycle 2. Mais le système des « ponts » sur la ligne graduée ne fonctionne pas aisément s'il n'est pas contrôlé par la connaissance préalable des résultats qu'il est supposé démontrer.

III - DES QUESTIONS RELATIVES AUX REPRÉSENTATIONS ET À LEURS USAGES

Nous avons vu que les élèves se voyaient proposer deux types de représentations, les « schémas-ligne » et les « boites ». Ces deux formes figurent dans ACE parce qu'elles ont été proposées aux professeurs indépendamment, par les Professeurs d'ESPE et les professeurs des écoles d'un côté (les lignes) et par un psychologue de l'autre (la boite). Cependant, les deux formes posent semble-t-il une difficulté commune : leur usage contractuel en a fait perdre le sens, et elles n'aident pas les élèves à traiter « le problème » qui leur est posé ; ils le font donc par d'autres moyens. Ces formes ne deviennent pas « les modèles des systèmes étudiés » lorsqu'elles ne sont pas produites par les élèves « de leur propre mouvement ».

Deux questions doivent donc être traitées.

- Pourquoi les professeurs introduisent-ils des représentations non numériques des problèmes ?
- Comment les élèves résolvent-ils donc les problèmes et quels outils mobilisent-ils ?

Ces questions sont essentielles en didactique, parce qu'elles interrogent tous les « matériels didactiques » qui montrent la lune, tandis que les élèves regardent le matériel sans identifier ce qu'il est supposé montrer. En clair, l'enseignement cherche toujours une technique qui permettrait de dire seulement « regarde » (la réponse), plutôt que de d'engager les élèves à rencontrer une question (dans le cadre d'une situation) et à chercher des éléments de réponse (dans leurs savoirs disponibles). C'est une dérive empiriste dénoncée depuis fort longtemps, par Piaget d'abord, par Brousseau aussi bien sûr (Brousseau, 2004), et par tous les didacticiens présents à l'atelier. Pourtant il est toujours aussi difficile d'en sortir. Peut-on imaginer des formes utiles ? La question est posée, et les participants à l'atelier entrent rapidement dans le problème des professeurs et des chercheurs des projets ACE puis aujourd'hui ARITHMECOLE, en particulier ici le problème posé par l'équipe du réseau de l'Institut Français de l'Education « Léa Saint Charles », autour de Marseille.

IV - LES REPRÉSENTATIONS DOIVENT ÊTRE CALCULABLES

La question est posée depuis longtemps ; nous ferons d'abord référence aux travaux de Simon Stevin et à son *Arithmétique* (Stevin & Girard, 1625) ou « comment expédier rapidement et sans rompus tous comptes utiles aux affaires des hommes », puisque cet auteur termine son opuscule en proposant qu'une loi impose des systèmes de mesure en sous-unités et sur-unités décimales pour toutes les grandeurs. Mais la mobilisation des savoirs de cette expérience collective ou plutôt, sa reconstruction, demande que l'enseignement considère de nouveau que *les nombres sont des mesures de grandeurs* (Lebesgue, 1935). Or, les choix de transposition qui ont été produits dans les années modernistes n'ont pas été étudiés dans leurs conséquences sur ce point, sinon par (Chevallard & Bosch, 2000) ; (Chevallard & Bosch, 2002) mais surtout pour le Collège. Nous avons identifié deux types de problèmes didactiques qui proviennent pourtant de ces questions :

- Ceux qui sont relatifs au mesurage des collections, une idée qui s'évanouit lorsque les nombres (entiers naturels) sont présentés comme des « cardinaux d'ensembles » et que les décimaux ne sont ensuite qu'une « base de filtres » pour les réels (Association Française pour l'avancement des sciences, 1963) ; (Courtial, Guelfie, & Riche, 1970).
- Mais aussi ceux qui procèdent de l'introduction systématique de la distinction « état/transformation » (Vergnaud, 1990) pour les entiers naturels, qui conduit à représenter les états comme les points de graduation d'une droite et les opérateurs comme des déplacements sur cette droite (Bussi & Sun, 2018).

La représentation des grandeurs disparaît ainsi, car l'opération physique de mesurage qui consiste à porter un segment sur une graduation et à définir sa longueur comme la distance entre les graduations extrêmes ne peut plus être décrite de manière élémentaire. Nous l'observerons dans l'atelier et nous verrons comment ces phénomènes ont été identifiés, ainsi que comment nous avons proposé de changer les choix d'enseignement anachroniques.

Car la représentation analogique de toutes les grandeurs physiques par des segments de droite est une « représentation calculable » au sens de (Vergnaud, 1974), puisque c'est un ensemble d'objets (une espèce de grandeur) que l'on peut doter (comme toutes les espèces de grandeur) des mêmes opérations que les nombres (considérés comme des mesures de grandeur) : un calcul (Stevin & Girard, 1625) ; (Chevallard & Jullien, 1990) ; (Waldegg, 1999) ; (Friedelmeyer, 2001). Le calcul sur les segments (que Euclide nomme des droites) est un travail physique que chacun imagine, parce qu'il a l'expérience de l'ajout d'un objet possédant une longueur à un autre objet doté de cette même propriété. Autrement dit, chaque élève sait que les longueurs s'ajoutent, l'objet composé ayant pour longueur la somme des longueurs de chacun des éléments. Chacun sait aussi que (pour deux objets en tous cas) l'ordre des objets n'intervient pas plus que leurs propriétés supplémentaires, et peut représenter cela par un schéma qui n'a pas besoin d'être « un dessin à l'échelle » pour faire preuve, parce qu'il suffit de l'appel à l'expérience commune. Mais déjà dans les Éléments de Euclide (Vitrac, 1990), l'un des tout premiers théorèmes porte sur la construction de la somme de deux segments « à la règle et au compas ». Car Euclide limite par principe les calculs sur les segments aux opérations sur ces objets que l'on peut réaliser à l'aide de ces seuls instruments. La règle permet d'obtenir une ligne droite joignant deux points, de manière à représenter leur distance (la mesure du chemin le plus court possible) par ce segment droit, et de prolonger cette ligne autant que de besoin. Le compas permet d'orienter un segment en gardant fixe une de ses extrémités, ce qui conserve sa longueur.

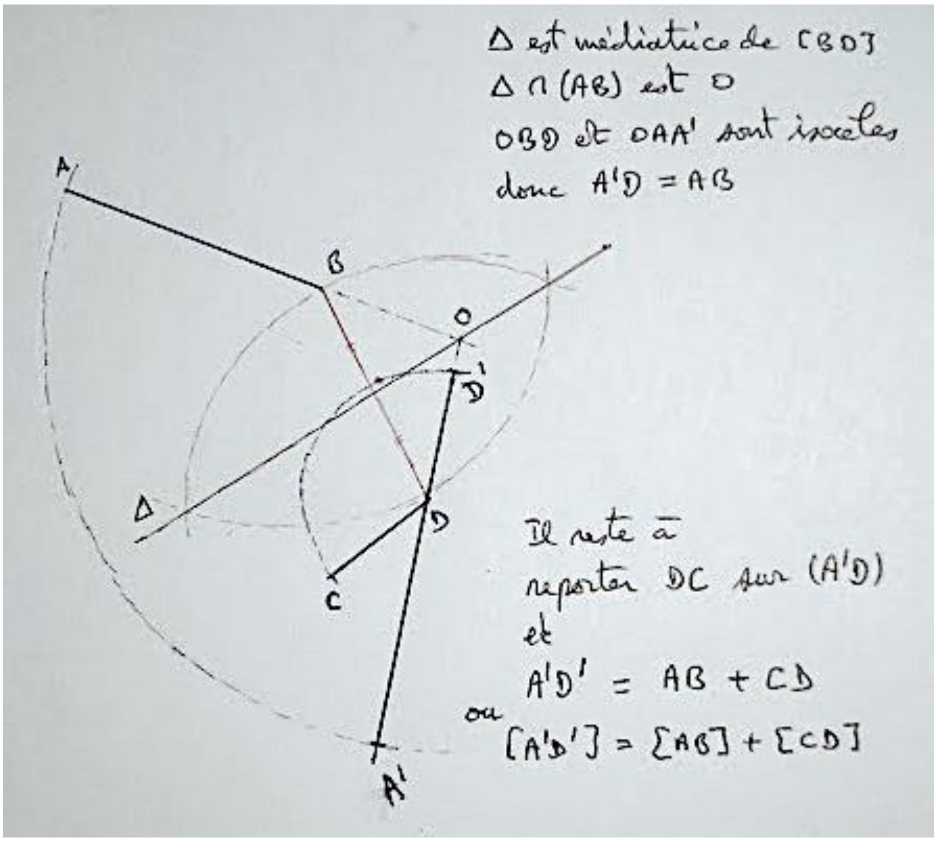


Figure 10 : Le transport d'un segment dans le prolongement d'un autre, soit le « calcul » de leur « somme »

On a ainsi *démontré* la possibilité de *transporter un segment en conservant sa longueur* : en rouge la construction de O sur la médiatrice de [BD] et la droite (AB), en bleu la construction de A' par le triangle isocèle AOA′ d'où A′D = AB puis en noir la construction de D′ par le triangle isocèle CDD′. Ainsi, A′D′ = AB + CD, cette expression signifiant que la somme des longueurs des segments [AB] et [CD] a été obtenue par la fabrication d'un segment somme, [A′C′].

Cependant, dans les classes les professeurs ont appris à utiliser « la droite des nombres » c'est-à-dire une droite graduée, au lieu de segments. De ce fait, les longueurs sont des différences entre deux graduations, ou des distances entre deux points, et cela fait bien inutilement problème, comme nous l'avons observé de manière récurrente jusqu'à ce que nous identifions le phénomène transpositif derrière les observations multiples.

L'objet de l'atelier était justement de faire voir des phénomènes relatifs au manque de sens de certains « artefacts à usage didactique », et en particulier, cet artefact presque universel qu'est « la droite des nombres ». Nous avons tenté d'apporter avec les participants des éléments de réponse, que nous imaginerions à partir des observations et des éléments mathématiques rendus disponibles. Nous avons fonctionné ainsi en « groupe travaillant à améliorer l'enseignement » s'intéressant à un problème des professeurs, et collaborant donc à l'amélioration de la dimension épistémologique de leur action. Dans le cas de la boite, la question n'a pas été abordée, mais elle a été instruite dans le cas de la *droite numérique graduée*, un artefact qui manifestement n'est pas la représentation convenable de « la ligne des nombres », au fondement selon certains psychologues cogniticiens des connaissances numériques. Donc, la ligne n'est pas un objet naturel mais un objet culturel, un artefact didactique, et sa graduation ne va pas de soi. Comment alors l'enseigner ? Eh bien, en tentant de laisser les élèves en explorer l'efficacité, qui n'existe pour un outil sémiotique que si ce que désigne cet outil existe et est déjà pratiqué par ailleurs. Ce « quelque chose qui est désigné », c'est l'inégalité des mesures, qui est explorée depuis le commencement du jeu des annonces. Une comparaison de grandeurs inégales dont les techniques se sont développées avec les opérations. Ainsi, la ligne numérique ne peut se développer que comme signe alternatif des opérations. Deux segments mis bout à bout forment un segment somme, sans graduation mais avec seulement la trace de leur jonction, qui permet de montrer par exemple comment chacun des deux nombres est plus petit que la somme. Mais qui permet aussi de définir une soustraction, et de bénéficier d'un modèle universel de la relation « a+b=c ». Ce modèle ne demande pas de remplacer les nombres par des lettres, mais des grandeurs par une longueur, qui est une grandeur mesurable d'un coup d'œil ou presque (par une estimation). On dispose alors d'un moyen de comparaison facile, la juxtaposition. A partir de cela, on peut décider de la ligne de conduite à tenir face à tout exercice, sachant qu'une représentation imposée peut embrouiller les choses en substituant au problème un problème nouveau.

Ces remarques invalident aussi l'artefact que l'on a appelé dans ACE « l'estimateur » <http://blog.espe-bretagne.fr/ace/?page_id=1445>. En effet, l'estimateur vise à travailler avec les élèves l'idée que la numérosité des collections d'objets est estimée par le cerveau humain en analogie avec le processus d'estimation (la comparaison sans mesure) de bien d'autres grandeurs physiques comme l'intensité d'une source lumineuse, la puissance d'une source sonore, ou la distance d'un objet. Cette compétence innée peut s'améliorer avec un entraînement adéquat, et c'est l'enjeu d'un ensemble de tâches de comparaison. Seulement, au lieu de comparer des segments selon leur longueur, ces segments se voyant ensuite attribuer un nombre ce qui entraîne à une analogie plus fine entre mesures de numérosités et mesures de longueurs, l'estimateur de ACE développe l'idée d'une ligne des nombres en faisant estimer des positions sur une ligne qui peu à peu devient « la file des entiers ».

Notre idée est en quelque sorte un développement des propositions de (Tempier, 2013) pour le CE2 qu'elle relie à celles de (Margolinas & Wozniak, 2012) pour le premier Cycle. La proposition de segments comme analogie de toute grandeur et en particulier d'abord, de la numérosité, est intéressante parce que c'est une représentation calculable et depuis Euclide au moins, ce calcul peut être démontré par une construction géométrique réglée par un système de principes déclarés. Le passage d'une telle représentation à quelque chose qui relèverait de la droite numérique relève d'une autre approche, que nous proposons de construire bien plus tard dans la scolarité : lorsque l'on s'autorisera les nombres négatifs et la relation de Chasles. Cependant, pour que la manipulation des segments considérés pour leur longueur ne se confonde pas avec celle des distances entre points d'une droite graduée il faut plusieurs conditions :

- que les segments servent à comparer des grandeurs (ici, des numérosités) en les plaçant « en parallèle », comme lorsque l'on compare deux trains, deux lignes de cubes, deux tours de bureaux, ou généralement deux grandeurs « estimées » ;
- que les sommes de segments soient utilisées sans que les segments ne soient mesurés ni tracés à la règle, pour représenter la somme de grandeurs de manière à conserver l'idée d'estimation ;
- que ces représentations soient laissées à la libre initiative des élèves, et que le professeur qui les introduit sans y insister les fasse utiliser au tableau par des élèves d'abord, pour que leur usage ne se fasse pas « en réponse à une demande du professeur ».

On peut alors se rappeler que naguère, les plus anciens s'en souviennent, les « problèmes arithmétiques » des classes primaires de préparation au CEP et des classes primaires supérieures étaient traités par ce type de modélisation « pré-algébrique » qui aidait à résoudre certains problèmes relevant de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues. Cela demande de renoncer aux analyses des problèmes additifs en termes d'état-transformation telles que Vergnaud les a conduites dans les temps où la question était centrale, en raison de choix de transposition aujourd'hui disparus. Les remarques des participants sont complétées par les apports relatifs aux choix didactiques qui ont finalement été faits et les hypothèses sur leur efficacité (Mercier & Quilio, 2018).

V - EN CONCLUSION : UN CHOIX RADICAL EST PROPOSÉ

L'observation des difficultés récurrentes relatives au schéma fondé sur la ligne numérique et à la modélisation des problèmes par une « boite » sans signe d'opération a engagé les acteurs sur le terrain, appuyés sur l'apport théorique relatif aux opérations sur les segments, à s'engager peu à peu vers l'arrêt de l'usage des représentations graduées pour aller vers la représentation des *équations arithmétiques* par l'apposition de deux sommes de segments non gradués. Ce type de schéma permet en effet de représenter aussi bien une grandeur connue qu'une grandeur inconnue satisfaisant à une relation.

Pierre a gagné 12 euros et Jacques 33, tandis que Jean en a gagné 20. Combien Jean doit-il encore gagner pour avoir autant que Pierre et Jacques ensemble ?

I_________12_____________I_____________________33_________________________I

I______________20__________________I_____________________________________I

Jean a plus que Pierre, on peut donc faire voir 12 dans 20 : 12 + 8 = 20.

I_________12_____________I______8____I_____________________________________I

Jean a donc déjà 8 des 33 euros que Jacques apporte à Pierre, il lui en faut encore 33 – 8 que l'on calcule en faisant voir 8 dans 33.

I______8____I_____________________________________I

33 = 30 + 3 = 25 + 5 + 3 = 25 + 8 donc 33 – 8 = 25, ce que Jean doit gagner encore.

Figure 11 : Un problème, sa représentation par une équation arithmétique, et des opérations sur les segments avec l'indication de leur valeur numérique. Puis, la résolution par la manipulation parallèle des deux systèmes de représentation.

Les participants se sont sans doute trop peu exprimés, faute de temps : l'atelier était donc trop ambitieux, bien que le temps prévu soit important. D'ailleurs, certains participants ont trouvé que « les didacticiens » avaient monopolisé la parole, ce qui signifie qu'il était difficile d'entrer en matière pour quelqu'un qui n'était pas habitué à ce type de raisonnement sur la transposition On le qualifie d'analyse « ascendante » parce qu'il part de l'observation d'une difficulté pour enquêter sur son origine en la cherchant dans les mathématiques qui fondent ces « objets à manipuler » ou « représentations » qui sont supposés, en classe, vivre tout naturellement et venir en aide aux élèves. Souvent ces artefacts manquent leur but, et les professeurs qui font confiance aux moyens d'enseignement qui leur sont proposés sont hélas trop souvent conduits à attribuer indûment les difficultés aux élèves.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Association Française pour l'avancement des sciences. (1963). *Colloques de calcul numérique et mathématiques appliquées tenus dans le cadre des congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences (Caen 1955, Grenoble 1960, Reims, 1961, Paris 1962)*. Service de documentation scientifique et technique de l'armement.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 241-277. Consulté à l'adresse http://id.erudit.org/iderudit/012669ar

Bussi, M. G. B., & Sun, X. H. (2018). *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades: The 23rd ICMI Study*. Springer.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2000). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, *55*, 5–32. Consulté à l'adresse http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/55/55x1.pdf

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, *59*, 43–76. Consulté à l'adresse http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/59/petitx59.pdf#page=44

Chevallard, Y., & Jullien, M. (1990). Autour de l'enseignement de la géométrie au college. *Petit x*, *27*, 41–76.

Courtial, C., Guelfie, F., & Riche, E. (1970). *Mathématiques, Classes De Seconde (2de, 2è, 2ème, 2ième, 2 È, 2 Ème, 2 Ième) - Nouveau Programme.* Paris: Hatier.

Friedelmeyer, J. P. (2001). Grandeurs et nombres: l'histoire édifiante d'un couple fécond. *Repères*, *44*, 5–1.

Lebesgue, H. (1935). Sur la mesure des grandeurs. *Enseignement Mathématique*, *34*, 176–219.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle* (de Boeck). Bruxelles. Consulté à l'adresse http://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00779683/

Mercier, A., & Quilio, S. (2018). *mathématiques élémentaires pour l'école, nombres, mesures, calculs* (Presses Universitaires de Rennes (PUR)). Rennes.

Stevin, S., & Girard, A. (1625). *L' arithmétique de Simon Stevin, revue corrigée et augmentée par Albert Girard*. Leyde: Imprimerie des Elzeviers.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire: une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Paris 7. Consulté à l'adresse http://www.theses.fr/2013PA0700XX

Vergnaud, G. (1974). calcul relationnel et représentation calculable. *Bulletin de Psychologie*, *28*, 378- 387.

Vergnaud, G. (1990). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. *Développement et fonctionnement cognitif chez l'enfant. Paris, PUF*, 261–277.

Vitrac, B. (1990). *Euclide d'Alexandrie, Les Éléments.* Presses Universitaires de France.

Waldegg, G. (1999). L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin. In *La pensée numérique* (Vol. 8-1). Peiresc: Librairie Blanchard. Consulté à l'adresse http://www.peiresc.org/beta/wp-content/uploads/2014/06/Waldegg.pdf