ATELIER A12

PAVAGES ET SYMÉTRIES : L'EXPÉRIENCE DU LABOSAÏQUE

Paolo BELLINGERI
Maître de conférences, Université de Caen Normandie,
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Matematita, centro interuniversitario di ricerca per la
comunicazione e l'apprendimento informale della matematica
paolo.bellingeri@unicaen.fr

Emmanuelle FÉAUX DE LACROIX
Maître de conférences, Université de Caen Normandie,
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
emmanuelle.feaux-delacroix@unicaen.fr

Eric REYSSAT
Professeur des Universités, Université de Caen Normandie,
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
eric.reyssat@unicaen.fr

André SESBOÜÉ
Maître de conférences, Université de Caen Normandie,
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
andre.sesboue@unicaen.fr

Résumé

L'objectif de cet atelier était de présenter le Labosaïque, un dispositif de médiation scientifique, conçu par le Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme (Caen) pour proposer des animations en milieu scolaire et auprès du grand public. Il est constitué de matériel original, ludique et attractif, visant à faire découvrir des notions mathématiques (formes, symétrie, multiplication...) au moyen d'objets concrets. Dans cet atelier nous avons montré une version « portative » de ce dispositif que l'équipe du Labosaïque développe actuellement, avec le soutien de la fondation Blaise Pascal, sous forme de mallettes pédagogiques. Cette présentation a engagé une réflexion sur la façon dont les enseignants pourraient s'emparer de façon autonome de ce matériel pour une utilisation en classe : quels besoins de formation en amont, de fiches pédagogiques, de descriptions d'activités…

I - LE LABOSAÏQUE

Le Labosaïque est un projet visant à faire découvrir les symétries du plan et de l'espace à travers la manipulation et l'observation d'objets à la fois concrets, attrayants et ludiques. Ce matériel a pour thème l'étude des pavages et des polyèdres, mais il permet aussi d'explorer les liens entre les mathématiques et la physique des matériaux, l'art, l'architecture, la biologie… Le projet Labosaïque a pris naissance grâce au prix "Têtes chercheuses, fondation musée Schlumberger" dont notre équipe a été lauréate pour l'édition 2011. Depuis cette date le Labosaïque est très largement utilisé pour des interventions en milieu scolaire ou auprès du grand public. Nous intervenons régulièrement avec le Labosaïque dans des établissements scolaires, de l'école primaire au lycée, sur tout le territoire de l'ex Basse-Normandie. Au total, sur les cinq années 2012-2017, nous avons réalisé plus de 50 journées d'intervention en milieu scolaire ce qui a permis à plus de 4000 élèves de bénéficier d'un atelier.

1. **Le dispositif et l'action auprès du public scolaire**

Le Labosaïque propose plusieurs activités de découverte des mathématiques reliées aux pavages du plan, thème mis en valeur dans les derniers programmes scolaires. En effet dans les programmes du cycle 4, les pavages et rosaces sont mis en avant comme des notions privilégiées pour l'étude des transformations géométriques, comme mentionné dans le BO spécial n°11 du 26 novembre 2015 :

> *La symétrie axiale a été introduite au cycle 3. La symétrie centrale est travaillée dès le début du cycle 4, en liaison avec le parallélogramme. Les translations, puis les rotations sont introduites en milieu de cycle, en liaison avec l'analyse ou la construction des frises, pavages et rosaces.*

Bien que les termes « pavages et « rosaces » n'apparaissent plus explicitement dans la dernière version des programmes de cycle 4, notre dispositif expérimental garde tout son sens pour l'étude de ces transformations. En effet dans le BO n°30 du 26 juillet 2018 on précise que :

De nouvelles transformations (symétries centrales, translations, rotations, homothéties) font l'objet d'une première approche, basée sur l'observation de leur effet sur des configurations planes, essentiellement à partir de manipulations concrètes (papier calque, papier pointé, quadrillage, etc.) ou virtuelles (logiciel de géométrie dynamique). L'objectif est d'installer des images mentales qui faciliteront ultérieurement l'analyse de figures géométriques ainsi que la définition ponctuelle des transformations étudiées.

Le thème des pavages apparaît ainsi dans plusieurs activités scolaires. En particulier sur Eduscol on trouve beaucoup d'activités concernant le 4ème cycle (voir par exemple Eduscol 2016), et même des activités à partir de la grande section (Eduscol 2017). On trouve aussi des activités sur des espaces pédagogiques de différentes académies, à titre d'exemple (Nantes, 2011 et 2016) et (Rouen, 2016), avec des finalités très variées, comme l'utilisation d'algorithmes et de logiciels de géométrie ou le repérage et la reconnaissance des différentes symétries.

Le matériel du Labosaïque, entièrement conçu par notre équipe et réalisé sur mesure, se compose de plusieurs objets originaux dont les photos sont données en annexe 1 : couronne rotative, jeux de pièces permettant de réaliser les 17 types de pavages périodiques[62], équerres exotiques, chambres de miroirs, miroir articulé, jeux de pièces pour réaliser des pavages de Penrose[63]. Une partie de cet équipement (chambres de miroirs) est largement inspirée d'une expérience sur les « symétries et jeux de miroirs » développée en Italie par l'université de Milan (Bellingeri, Dedò, Di Sieno, et Turrini, 2002). D'autres objets sont des inventions de notre équipe, en particulier la « couronne rotative » qui permet l'étude des symétries des pavages [voir la vidéo (Unicaen, 2017)].

Les activités pédagogiques que nous proposons autour de ces objets sont entièrement imaginées par notre équipe. Elles ont été créées et améliorées par retour d'expérience au fur et à mesure de nos interventions. Celles-ci se déroulent généralement sous forme d'ateliers d'une à deux heures auprès d'une classe. Lors d'un atelier nous incitons les élèves à une démarche de recherche en groupe. Notre matériel concret et ludique est un support pour aborder des problèmes différents selon les niveaux scolaires. Par ailleurs nos ateliers sont généralement l'occasion de présenter rapidement des thèmes actuels de la recherche en mathématiques et ses applications dans le monde technologique.

Le premier aspect spécifique de notre matériel est la possibilité pour les élèves de manipuler des formes géométriques données, plutôt que les découper ou les dessiner eux-mêmes. Par rapport à d'autres dispositifs de ce type comme la « Moisson des formes » (Bettinelli, 1994) ou « Atrimath », nous disposons à la fois d'une grande variété de formes (plus d'une vingtaine) et d'environ une quarantaine de pièces de

62 Il existe plusieurs documents sur la classification des pavages périodiques du plan qui sont abordables pour un public de lycéens comme (Nantes, 2011) ou (Tangente, 2018); on peut aussi citer le site de Thérèse Eveilleau, ancienne formatrice IUFM (Eveilleau 1) qui traite la classification des pavages avec une approche algorithmique.

63 Les pavages de Penrose sont très présents sur le web ; pour leur rigueur et leur accessibilité nous conseillons en particulier une page d'activités sur les pavages de Penrose crée par des membres du laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem de Rouen, avec qui nous collaborons souvent pour des activités de diffusion des mathématiques (LMRS, site internet) et une page, plus générale, sur les pavages apériodiques (Eveilleau 2).

chaque type ; de plus, les pièces du Labosaïque sont aimantées, ce qui facilite l'agencement et la manipulation et qui permet des mises en commun sur tableau devant toute la classe.

Ces choix dans la conception du matériel ont une double motivation :

- La première est de pouvoir avoir des formes identiques pour tous les participants, faciles à agencer, qui permettent d'aborder rapidement la question de la possibilité de paver le plan, mais aussi de pouvoir vérifier, par agencement ou superposition, certaines propriétés géométriques, l'égalité des angles ou encore la notion de similitude.

- La deuxième réside dans la nature de nos ateliers. Sauf situation spécifique d'un travail en amont de l'enseignant, il n'y a pas de préparation préalable des élèves ; de plus, nous intervenons dans les différentes classes sans connaitre leur niveau. Le fait de disposer d'une grande variété de jeux de pièces nous permet de moduler les activités selon les différents niveaux et porter rapidement la plupart des élèves à se poser des questionnements et à coopérer entre eux.

Le deuxième aspect spécifique est l'utilisation de plusieurs types de miroirs, de tailles différentes, articulés, assemblés pour former des chambres de miroirs. Cette panoplie de miroirs permet d'aborder les symétries axiales, leurs compositions, mais aussi les multiplications et les fractions, la notion d'angle (dans le plan ou même sur une sphère), le concept de plan infini… Dans la section 1.2, nous donnerons une brève description d'activités basées sur notre matériel et qui permettent d'aborder ces différents thèmes. Le choix de travailler avec des miroirs pour travailler sur les symétries n'est pas anodin, comme résumé par (Chesnais, 2009) :

> *En ce qui concerne la symétrie, le miroir ne permet pas de concevoir que la symétrie est une transformation du plan tout entier et pas d'un demi-plan dans un autre, ni qu'elle fonctionne "dans les deux sens". Par exemple, si les élèves associent symétrie axiale et miroir, il leur sera difficile de concevoir le symétrique d'une figure coupée par l'axe. D'autre part, un travail sur les axes de symétrie fondé sur des dessins figuratifs a pour conséquence de privilégier les cas particuliers liés aux axes verticaux et horizontaux, ceux-ci étant de loin les plus représentés dans le concept quotidien, sans que cela corresponde à une légitimité géométrique.*

Dans notre dispositif les différentes tailles de miroirs, les chambres, mais aussi la présence de fentes (dans la chambre carrée) permettent de comprendre ou au moins apercevoir les symétries comme transformation du plan tout entier. Par exemple en insérant un motif dans la chambre triangulaire (voir annexe 1, photo 3) on découvre un pavage du plan infini et on peut en observer les symétries ou « régularités ». De plus, en posant un miroir sur un motif composé de pièces (annexe 1, photo 1) on peut vérifier les symétries axiales : en utilisant la définition d'un élève, le miroir apparait alors comme une « fenêtre » sur l'autre partie du motif. D'autre part, le miroir articulé (annexe 1, photo 5), la chambre triangulaire (annexe 1, photo 3) et les chambres sphériques (annexe 1, photo 6) permettent de « découvrir » des symétries différentes de celles usuellement abordées à l'école (symétries centrales ou axiales d'axes verticaux et horizontaux). C'est peut-être justement là le point fondamental de notre démarche : la grande variété de miroirs, de pièces et d'outils de visualisation des symétries, nous permet de montrer que le monde des formes et de leurs symétries est étonnamment riche. Nous ne considérons pas encore nos ateliers comme des supports pédagogiques aux programmes scolaires (ce travail est un objectif à plus long terme), mais comme des activités de découverte des miroirs, des formes et des mathématiques sous-jacentes, sur lesquelles les enseignants peuvent revenir ensuite en classe. C'est aussi pour faciliter cette étape de réinvestissement que nous nous sommes engagés dans la construction d'une version « portative » présentée dans la section 2.

2. Description détaillée du matériel

Voici une description du matériel dont se compose le Labosaïque, accompagnée, pour chaque item, d'exemples d'activités à réaliser avec des élèves :

- Un millier de pièces aimantées pour reproduire des portions de pavages du plan et en particulier représenter chacun des 17 types de pavages périodiques. D'autres jeux de pièces très simples (triangles, quadrilatères, polygones réguliers) permettent d'étudier quelles pièces réalisent (ou ne réalisent pas) des pavages. Un plateau tournant et des miroirs sur pied permettent ensuite de reconnaître les symétries miroirs, les rotations et les translations (annexe 1, photo 1).

La vidéo (Unicaen, 2017) montre de façon complète les activités que nous développons à partir de ce matériel et qui portent sur l'étude des transformations du plan : symétries, rotations, translations.

- Des équerres exotiques qui sont des tiges plates coudées à angle droit ou non : un quart, un cinquième, un sixième de tour. Elles sont percées de trous régulièrement espacés que l'on peut marquer au stylo en les posant sur une feuille. Par glissement et rotation, les points ainsi dessinés rendent visible la notion de restriction cristallographique (impossibilité de rencontrer une rotation de cinquième de tour stabilisant un pavage périodique).
- Nous disposons aussi de plus de mille pièces pour construire des pavages de Penrose (annexe 1, photo 2) et en collaboration avec le Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem (Rouen) plusieurs activités ont été conçues pour permettre au public d'explorer (à divers niveaux, du primaire au lycée) des aspects surprenants des pavages dits « apériodiques » (LMRS, site internet cité en sitographie).
- Le miroir articulé (annexe 1, photo 5) est composé de deux miroirs plans verticaux 40 x 25 cm, articulés autour d'une charnière verticale. L'un est fixé à un socle horizontal, le deuxième glissant sur ce socle lorsqu'on le tourne autour de la charnière.

  Ce dispositif est utilisé pour faire visualiser et faire comprendre le lien entre l'angle des miroirs et le nombre d'images obtenues, notion très étonnamment peu intuitive chez les élèves de collège. Que se passe-t-il si l'élève en manipulant le miroir, change l'angle ? Si cet angle n'est pas un sous-multiple d'un tour complet ? Quelle différence si c'en est un sous-multiple pair ou impair ? Que voit-on en posant une main gauche entre les miroirs ? Le socle peut accueillir divers objets entre les miroirs, prétexte esthétique et ludique à des discussions sur la multiplication et la factorisation des entiers. Un jeu de dessins ou photos à poser aident à visualiser le « domaine fondamental » d'une rosace. L'impossibilité de reproduire certains dessins du type enjoliveurs d'autos rend visible la notion de symétrie miroir. Un troisième miroir vertical sur pied indépendant peut être ajouté aux deux précédents pour faire imaginer le passage des motifs de type rosace aux pavages du plan. Le passage du fini à l'infini est très rarement anticipé, bien sûr en primaire mais même par des lycéens ou des adultes, et source d'émerveillement et de réflexion.
- Deux chambres de miroirs, triangulaire et carrée (annexe 1, photos 3 et 4), permettent de construire des pavages infinis par symétries miroir. Chambre triangulaire : hauteur 27cm et comme base un triangle équilatéral d'environ 58 cm de côté. Cette chambre se compose de trois rectangles qui s'emboîtent. Chambre carrée : hauteur de 26 cm et base de 26 cm de côté. La chambre est une boîte ouverte avec des miroirs sur les faces verticales dont une qui présente en bas une fente de 3 mm pour insérer des dessins ou des images.

  Ce dispositif est en premier lieu utilisé pour visualiser l'infini : il suffit de placer un seul objet à l'intérieur de la chambre pour que les reflets de cet objet donnent l'illusion de le voir une infinité de fois. Cette expérience permet aussi d'aborder l'étude des compositions des symétries axiales, chaque reflet correspondant à une composition des symétries données par les miroirs constituant les parois de la chambre. Différentes activités développées à l'aide de ce matériel permettent ensuite de travailler sur la notion de symétrie. On peut par exemple proposer un dessin (carré ou triangulaire) à insérer dans la chambre et demander aux élèves de comprendre quel sera le pavage généré par cette image (annexe 2, activité 2). A l'inverse, on peut proposer aux élèves une image de pavage et leur demander de comprendre quel dessin il faut insérer dans la chambre pour reproduire le pavage (annexe 2, activité 3).

- Trois types de « chambre de miroirs sphérique » construites chacune avec trois miroirs concourants (annexe 1, photo 6) qui permettent de générer par réflexions les pavages sur une sphère[64] (d'où la terminologie de chambre « sphérique »).

  Ce dispositif permet en particulier au public de visualiser les polyèdres réguliers et nombre de polyèdres quasi-réguliers qui leur sont associés (voir annexe 2, activité 4). Il permet par ailleurs de comprendre les réflexions dans l'espace ainsi que leurs compositions, mais aussi d'avoir un aperçu de quelques notions de géométrie sphérique, en particulier que la somme des angles d'un triangle inscrit sur une sphère est toujours strictement supérieure à 180 degrés.

II - LABOSAÏQUE EN CLASSE : UNE VERSION PORTATIVE

Forte de son expérience auprès du public scolaire et devant le succès des ateliers et l'intérêt (des élèves et des enseignants) pour le matériel utilisé, l'équipe du Labosaïque a décidé de créer une version portative de plusieurs de ses ateliers en vue de diffuser ce matériel au sein des établissements scolaires et instituts de formation des maîtres, sous le nom de « Labosaïque en classe ».

1. Motivation pour la création d'une version portative

Il nous est rapidement apparu, dès les premières années d'intervention avec le Labosaïque, qu'il serait intéressant, pour plusieurs raisons, de pouvoir dupliquer notre matériel afin que d'autres acteurs puissent s'emparer du concept.

Premièrement, le matériel étant très volumineux, il est difficile de le transporter. Cela n'est qu'un problème d'organisation lorsque nous intervenons dans notre académie, mais devient un réel handicap lorsque nous sommes sollicités pour présenter nos outils dans le cadre de différentes manifestations académiques ou grand public dans d'autres régions.

Nous recevons surtout une demande croissante d'interventions de la part des enseignants, demande à laquelle nous ne pouvons plus répondre entièrement faute de temps et de disponibilité. Les demandes d'interventions se sont en particulier amplifiées de la part des collèges avec le retour des transformations géométriques dans les programmes du cycle 4.

Parallèlement à nos interventions en collège et lycée, nous avons eu de nombreuses occasions d'intervenir auprès de classes de primaires principalement lors de « sorties pédagogiques » (manifestations académiques Ecolysciences, semaine des mathématiques, visites pédagogiques au château de Crèvecoeur-en-Auge, ateliers au salon Culture et Jeux mathématiques…). Dans ce cadre-là aussi nous avons pu constater que nos ateliers, présentés comme une découverte ludique des mathématiques, ont un ancrage direct dans les programmes du cycle 3, voire même cycle 2, puisque nos activités s'appuient essentiellement sur la découverte, la manipulation et l 'étude des formes géométriques et de la symétrie.

Ainsi notre matériel, qui avait dans un premier temps été conçu dans le simple but de présenter les mathématiques sous un aspect différent et ludique, se trouve en effet être un réel outil pédagogique mobilisable par les enseignants dans le cadre des programmes scolaires. Il parait donc pertinent de pouvoir mettre directement notre matériel à disposition des enseignants de manière à ce qu'ils puissent s'approprier nos ateliers et les rendre « cohérents » avec le programme scolaire et leurs groupes d'élèves. Nous souhaitons ainsi aussi contribuer à la mise en place de « laboratoires de mathématiques » dans les établissements scolaires tels que les avait imaginés Émile Borel qui justifiait cette nécessité de la façon suivante (Borel, 1904) :

> *Il semble que la valeur éducative de l'enseignement mathématique ne pourra qu'être augmentée si la théorie y est, le plus souvent possible, mêlée à la pratique. L'élève comprendra qu'il est sans doute excellent de bien raisonner, mais qu'un raisonnement juste ne conduit à des résultats exacts que si le point de départ est lui-*

64 Les pavages ainsi obtenus présentent nécessairement les symétries de l'un des trois groupes de polyèdres platoniciens : tétraèdre, cube-octaèdre, dodécaèdre-icosaèdre : pour plus de renseignements sur ces groupes, voir le site (Mathcurve) cité dans la sitographie.

même exact ; qu'il faut par suite ne pas croire aveuglement à tout raisonnement, à toute démonstration d'apparence scientifique, mais se dire toujours que la conclusion n'a de valeur qu'autant que les données ont été scrupuleusement vérifiées par l'expérience.

Cette idée de création de « laboratoires de mathématiques » dans le cadre de l'enseignement des mathématiques a aussi été fortement défendue par plusieurs mathématiciens au cours du XXème siècle, en particulier en Italie par Emma Castelnuovo, qui soulignait l'importance d'une éducation à « savoir voir les mathématiques » (Castelnuovo, 1967). On pourra aussi noter que ce projet s'inscrit aussi dans les recommandations du récent rapport Villani-Torossian (2018), qui dans la mesure 16 préconise la mise en place dans les établissements scolaires de laboratoires de mathématiques « *en lien avec l'enseignement supérieur et conçus comme autant de lieux de formation et de réflexion (disciplinaire, didactique et pédagogique) des équipes.* »

Enfin nous sommes plusieurs fois intervenus lors de journées de formation des enseignants du premier ou second degré et nous pensons qu'il serait aussi pertinent de diffuser notre dispositif au sein des ESPE et des IREM pour qu'il puisse être utilisé dans le cadre de la formation des maitres du premier et second degré. Il s'agit là d'un nouvel aspect dans nos axes d'interventions. Bien que nous ayons mené quelques expériences dans ce domaine, nous manquons encore de recul pour définir pleinement ce nouveau champ d'action. Cependant les ateliers que nous avons pu conduire récemment en présence de formateurs, en particulier lors du colloque de la COPIRELEM à Blois, nous incitent à poursuivre dans cette voie. Notre matériel se prête en effet bien à des actions de formations car il permet d'un coté de rendre, à travers la manipulation et la visualisation, moins abstraites certaines notions de géométrie et de l'autre de proposer aux enseignants des activités de découverte et recherche mathématique transposables en classe.

2. Description détaillée du matériel de la version portative

Reproduire à grande échelle le matériel du Labosaïque à l'identique n'était absolument pas envisageable à cause du coût trop important et du volume total du matériel.

Nous avons donc créé une version portative reproduisant le concept du matériel original, mais élaborée à partir de matériaux beaucoup moins coûteux (en particulier en utilisant du miroir acrylique à la place du verre et du bois pour les chambres de miroirs). Ces nouveaux objets sont entièrement démontables ce qui facilite leur circulation. Les objets ainsi conçus sont certes un peu moins impressionnants que les originaux mais présentent les mêmes propriétés mathématiques et gardent tout leur intérêt pédagogique.

Ci-dessous une description détaillée du matériel proposé et de son adaptabilité en classe. Ce matériel étant très similaire au matériel originel décrit en section 1.2, nous ne nous attacherons pas ici à décrire à nouveau les activités proposées lorsqu'elles sont similaires. Nous nous focaliserons plutôt sur les différences dans la conception et éventuelles limitations imposées par un dispositif qui se veut plus mobilisable et surtout beaucoup moins coûteux.

- Le **« Palais des glaces »** (annexe 1, photo 7) : lot de chambres de miroirs démontables permettant de réaliser des pavages infinis du plan. Ces chambres de miroirs permettent de visualiser l'infini, d'étudier les symétries axiales et d'aborder la notion de domaine fondamental. Les activités possibles avec ce matériel sont adaptables ainsi à tous les niveaux : de la fin du primaire à l'Université.

  Le kit est composé essentiellement de 2 chambres de miroirs : une carrée et l'autre triangulaire (triangle équilatéral). Ces chambres sont faites en miroir acrylique (PMMA) de 3mm d'épaisseur. Ceci permet d'avoir un bon compromis entre rigidité et légèreté. Des socles sont fournis (contreplaqué de 3mm) afin de stabiliser la structure. La boîte carrée est composée de 4 panneaux de 300mm de long sur 148mm de haut emboîtables. La surface intérieure forme un carré de 210mm de côté. La boîte triangulaire est formée de 3 panneaux de 397mm de long et de 148mm de haut. La surface intérieure forme un triangle équilatéral de 297mm de côté. Chaque boîte a un de ses cotés percé d'un orifice afin de pouvoir visualiser facilement les réflexions à « l'infini » dues à la position des miroirs. Pour réaliser les activités proposées nous fournissons des jeux de pièces triangulaires en bois (MDF) peints de 3mm d'épaisseur : des triangles isocèles rectangles pour la boîte carrée et des triangles rectangles 30°-60° pour la boîte triangulaire. Des étuis sont fournis afin de ranger les miroirs.

Nous complétons notre kit avec un lot de petits miroirs sur pieds pour réaliser des activités simples sur la notion de symétrie (annexe 2, activité 1). Notons juste ici que cette utilisation de petits miroirs et les activités associées n'ont pas été conçues à l'origine pour faire partie du dispositif Labosaïque mais avaient été développées parallèlement. Suite à plusieurs interventions auprès d'élèves de cycle 2 et 3, il nous a paru judicieux d'intégrer cette activité dans la version portative.

L'ensemble tient dans un sac facilement transportable pesant environ 3kg.

- Le « **Kaléidospace** » (en cours de développement) : lot de kaléidoscopes démontables permettant de visualiser les polyèdres réguliers et les pavages de la sphère (voir photos dans l'annexe 2, activité 4).

  Nous proposons un lot de 3 « chambres de miroirs sphériques » démontables permettant de reconstruire par symétries planaires les 5 solides réguliers de l'espace : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre (voir annexe 2, activité 4). Chaque chambre (une pour le tétraèdre, un pour le cube et l'octaèdre et une pour le dodécaèdre et l'icosaèdre) est formée de 3 plaques de miroir acrylique (PMMA) de 5mm d'épaisseur. Chaque plaque est une portion de disque (entre un 1/4 et un peu plus d'un 1/4) de 450mm de rayon. En complément, des patrons de pièces à introduire dans ces kaléidoscopes seront proposés au téléchargement. Elles pourront être réalisées en carton ou papier.

  Nous n'avons pour l'instant réalisé qu'un prototype pour chacune de ces trois chambres de miroirs. Ils ont été présentés à maintes occasions dans divers salons et colloques, leur format réduit et démontable permettant leur transport sans aucune difficulté. Ces prototypes donnent un résultat tout à fait satisfaisant malgré leur taille réduite par rapport à l'original et malgré la moindre qualité du miroir utilisé ; nous n'avons par contre pas encore fait d'étude de coût pour savoir s'il est pertinent de les reproduire à plus grande échelle.

- Le « **Carreleur mathématique** » (en cours de développement) : lot de pochettes de pièces colorées permettant de réaliser différents types de pavages du plan. Ces pièces se prêtent bien au public d'école primaire pour construire des pavages et permettent d'aller plus loin avec les collégiens pour l'étude des transformations du plan.

  Nous proposerons différents ensembles de pièces colorées et aimantées permettant de construire les différents types de pavages périodiques du plan. Ces pièces seront en bois (MDF) de 3mm avec un support aimanté. Grâce à leur aimantation, ces pièces pourront facilement être utilisées à la verticale sur un tableau métallique afin de présenter certaines notions à un auditoire. Des fiches, imprimables sur transparent, seront téléchargeables sur notre site. Elles serviront à illustrer la notion de périodicité ainsi que les différentes symétries et rotations présentes dans le pavage proposé.

  Nous ne disposons pas encore de prototype complet pour ce dernier item mais, à terme, nous envisageons de reproduire des pièces de forme et taille quasiment similaires à celles présentes dans la version originale du Labosaïque, visibles dans la vidéo (Unicaen, 2017). Nous avons longtemps buté sur le coût de production qui nous a été proposé pour la fabrication de cette version originale ; toutefois de récents essais sur un matériel différent nous laissent entrevoir la possibilité de produire suffisamment de pièces à coût raisonnable. Nous n'avons par contre pas encore de solution technique pour remplacer de manière tout à fait satisfaisante la couronne rotative que nous associons aux lots de pièces pour l'étude des translations et rotations (couronne dont la présentation est principalement l'objet de la vidéo [Unicaen, 2017]). Cependant l'utilisation simple des fiches transparentes (voir la vidéo) donnera des explications déjà assez efficaces pour l 'étude des rotations et translations laissant un pavage invariant.

III - QUELLES FICHES PÉDAGOGIQUES – QUELLE FORMATION EN AMONT ?

Le matériel du Labosaïque en classe ne sera pleinement utilisable qu'une fois accompagné de fiches pédagogiques et fiches d'activités permettant aux enseignants d'utiliser le dispositif « clés en main ». Il convient ici de distinguer deux types de fiches :

En premier lieu, le matériel est accompagné des « fiches d'activités » nécessaires à la réalisation des activités que nous proposons lors de nos ateliers. Il s'agit par exemple de différentes images que l'on place entre les miroirs ou que l'on doit reproduire à l'aide des miroirs. Plusieurs échantillons de ces fiches sont donnés en annexe 2. Ces fiches sont accompagnées d'instructions simples, destinées aux élèves comme aux enseignants, pour réaliser l'activité proposée en autonomie. Malgré tout, ces fiches seules ne peuvent suffire à une appropriation en totale autonomie de notre dispositif. Si des enseignants ont déjà assisté à nos ateliers, par exemple si nous sommes intervenus dans leur classe, ils pourront sans difficulté reproduire ces ateliers.

En second lieu nous comptons proposer, associées aux fiches d'activités, des fiches pédagogiques qui permettront aux enseignants de découvrir eux-mêmes et comprendre les concepts associés à notre matériel. La conception de ces fiches est en cours de réflexion avec le centre Matematita, centre italien inter universitaire sur l'apprentissage non formel des mathématiques. Depuis sa création en 2005, le centre Matematita (www. matematita.it) mène une réflexion sur l'apprentissage informel, vu comme une des conditions préalables à toute acquisition ultérieure de connaissances plus formalisées. Dans ce but ses membres essayent d'identifier des contenus et des méthodes adaptés à la communication en milieu scolaire et grand public, en particulier de concevoir, mettre en œuvre et diffuser des produits de vulgarisation (expositions, livres, magazines, matériel multimédia) et étudier leur impact sur les différents niveaux impliqués. La collaboration que nous avons entreprise avec le centre Matematita a déjà donné lieu à une présentation à Bologne de la version portative du Labosaïque (qui en était encore alors à l'état de prototype) lors du XXXIème colloque Incontri con la matematica (Bellingeri, Benvenuti, Féaux de Lacroix et Renieri, 2017).

Nous envisageons par ailleurs de proposer des « sessions de formation » aux enseignants intéressés par le matériel, sur le modèle de l'atelier que nous avons mené lors du colloque de la COPIRELEM. Voici un descriptif du déroulement de ces sessions de formation.

Dans un premier temps nous faisons une petite introduction sur les concepts mathématiques associés à notre matériel : pavages, pavages périodiques du plan, pavages de la sphère, isométries et classification des pavages ; il est possible ici d'aller plus loin en expliquant où ces problématiques interviennent en lien avec les autres sciences (cristallographie en particulier). Cette approche disciplinaire a été semble-t-il très appréciée lors de notre exposé à la COPIRELEM. En effet les thèmes mentionnés ci-dessus ne sont pas toujours bien connus des enseignants, aussi bien du premier que du second degré, voire même universitaires.

Nous passons ensuite à la partie « manipulation » en demandant aux enseignants d'effectuer eux-mêmes les différentes activités que nous proposons aux élèves, ce qui nous permet de montrer un panel d'activités que nous proposons avec notre matériel tout en discutant avec les participants du niveau scolaire auquel il est pertinent de proposer telle ou telle activité.

Dans un souci de progressivité, nous présentons d'abord les activités à réaliser avec un seul miroir : visualisation des axes de symétries et reproduction de dessins symétriques à l'aide d'un miroir (annexe 2, activité 1). Les échanges avec les enseignants conduisent à la conclusion que ces activités sont particulièrement pertinentes en cycle 3. Certains participants les rapprochent d'une activité qu'ils pratiquent eux-mêmes avec des élèves : création de dentelles par pliages et découpages.

Nous présentons ensuite les activités réalisables à l'aide de deux miroirs. Il s'agit d'expliquer ici les activités basées sur la manipulation du miroir articulé. Nous ne disposons pas dans la version portative de véritable miroir articulé, mais deux petits miroirs sur pied, accolés, permettent de remplacer ce dispositif. Nous déclinons pour les participants, l'ensemble des questions que nous posons généralement aux élèves à l'aide de ce dispositif, questions basées essentiellement sur le lien entre l'angle des miroirs et le nombre d'images obtenues lorsque l'on place des objets entre les deux miroirs. Les enseignants sont intéressés par les potentialités du dispositif en termes de visualisation des symétries et de leurs compositions mais surtout par un aspect beaucoup plus inattendu : cet outil nous permet tout simplement de faire faire du calcul mental aux élèves. En cycle 3, après avoir identifié les positions du miroir qui permettent de multiplier les images par 3, 4, 5, 6, nous déclinons des questions, amenant à faire des multiplications, du type « si je mets 3 coquillages entre les miroirs, combien verrais-je de coquillages en tout ? » ou, pour les divisions, du type « comment puis-je me débrouiller pour voir en tout 24 coquillages ? ». En cycle 4, les questions incitent plutôt à diviser le nombre 360 : quels diviseurs ? quels quotients ?

Viennent naturellement à la suite les activités concernant les deux chambres de miroirs, carrée et triangulaire (annexe 1, photo 7). Les participants sont particulièrement séduits par l'aspect esthétique des images que l'on peut réaliser grâce à ce dispositif. Les activités proposées avec ces chambres de miroirs (annexe 2, activités 2 et 3) sont jugées très intéressantes pour la visualisation des symétries axiales, mais difficiles. Des discussions s'engagent par ailleurs sur les aspects techniques concernant le matériel qu'il est pertinent de fournir pour accompagner ce dispositif.

Nous changeons ensuite de registre en présentant les activités réalisables à l'aide des pièces permettant de construire différents types de pavages. Les activités consistent essentiellement à repérer à l'aide de transparents, les rotations et translations conservant chaque pavage. Les enseignants jugent cette technique particulièrement efficace pour visualiser la notion de transformation laissant un dessin invariant.

Enfin nous abordons des notions de géométrie dans l'espace en faisant visualiser différents polyèdres et les liens qui les relient entre eux (dualité, troncature...). Pour cela, nos chambres de miroirs sphériques sont un outil très performant (annexe 2, activité 4). Cette dernière partie est un peu plus en marge des programmes scolaires et est plutôt proposée en guise d'activité récréative pour son côté à la fois magique et esthétique. Les participants sont très impressionnés par l'effet produit par ces dernières chambres de miroirs.

Ces échanges confirment l'importance d'un dialogue, sous forme de retour d'expériences et partage de pratiques, avec les enseignants utilisant notre matériel. Nous veillerons donc à entretenir des échanges avec les utilisateurs ; une possibilité à l'étude est celle de créer un réseau, en collaboration avec les ESPE et les IREM, au sein duquel chacun pourra aussi apporter sa propre contribution en termes d'activités et de pratiques pédagogiques.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Bellingeri, P., Benvenuti, S., Féaux de Lacroix E. et Renieri, A. (2017). *Tassellazioni e simmetrie: l'esperienza francese del Labosaïque.* Atti XXXI convegno Incontri con la Matematica, Castel S. Pietro Terme, 159-160.

Bellingeri, P., Dedò, M., Di Sieno S. et Turrini C. (2002). *Symétries et jeux de miroirs*. Edition POLE.

Bettinelli, B. (1994). *La moisson des formes*. Grand N. Num. 56. p. 33-41.

Borel E. (1904). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. R*evue générale des sciences pures et appliquées*, 10, 431–440.

Castelnuovo E. (1967). È possibile un'educazione al "saper vedere"in matematica? *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 22 (4), 539–549.

Chesnais A. (2009). L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves, Thèse de doctorat - Paris VII.

Tangente (2018). Découpages et pavages. Entre art et géométrie. Tangente hors-série n^0 64. Editions POLE.

Torossian C. et Villani C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (Rapport du 12/02/2018).

V - SITOGRAPHIE

Eduscol(2015). http://videos.education.fr/MENESR/eduscol.education.fr/2015/DVDs/2010_apprendre_parler/apprendreparler10_S1.mp4

Eduscol(2016). http://cache.media.education.gouv.fr/file/Geometrie_plane/19/1/RA16_C4_MATH_geo_plane_inter_frise_569191.pdf

Eveilleau 1, http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pavage_17_types.htm

Eveilleau 2, http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/penrose.htm

LMRS, http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Penrose/penrose.htm

Mathcurve, https://www.mathcurve.com/polyedres/regulier/regulier.shtml

Nantes (2011). https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/activites-pedagogiques/frises-et-pavages-683435.kjsp?RH=PEDA

Nantes (2016). https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/groupe-de-recherche/actions-nationales-2015-2016/mur-et-pavages-963477.kjsp

Rouen (2016). http://maths.spip.ac-rouen.fr/spip.php?article674

Unicaen (2017). La couronne rotative --- dispositif de médiation scientifique, vidéo réalisée par le service de la DSI de l'université de Caen, https://www.youtube.com/watch?v=N5587xQ8hXA

VI - ANNEXES

Annexe 1 – Photos du matériel

1. Couronne rotative et pièces aimantées

2. Pavage de Penrose

3. Chambre de miroirs triangulaire

4. Chambre de miroirs carrée

5. Miroir articulé

6. Chambre de miroirs sphérique

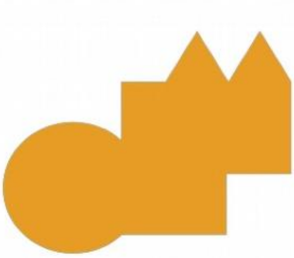
7. Version portative – kit « Palais des glaces » :
chambres de miroirs carrée et triangulaire + lot de miroirs sur pieds et fiches d'activités

Annexe 2 – Exemples d'activités proposées

Activité 1 - Jeu de symétrie - matériel nécessaire : un petit miroir

Labosaïque en classe

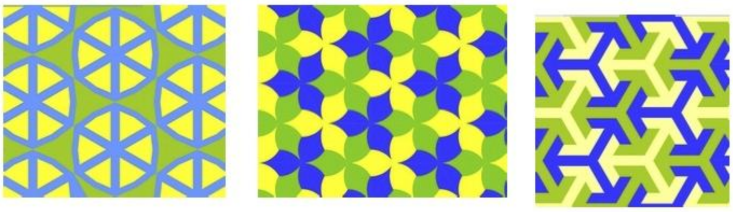
Place le miroir sur la figure pour trouver le dessin recherché



Activité 2- Jeu d'appariement -
matériel nécessaire : chambre de miroirs triangulaire et fiches à insérer

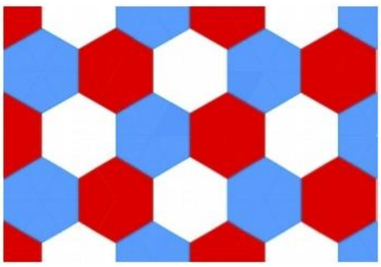
Qui va avec qui ?
Lorsque l'on place dans la chambre triangulaire chacun des dessins proposés, quel pavage obtient-on par réflexion dans les miroirs ?

On vérifie ensuite par l'expérience les solutions proposées par les élèves.

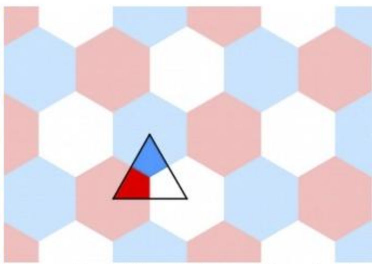


Activité 3- Jeu de type « tangram » - matériel nécessaire : chambre de miroirs triangulaire et pièces colorées

On dispose de pièces triangulaires toutes de forme identiques et on doit placer ces pièces à l'intérieur de la chambre de miroir de manière à ce que les réflexions dans les miroirs montrent le pavage cherché.



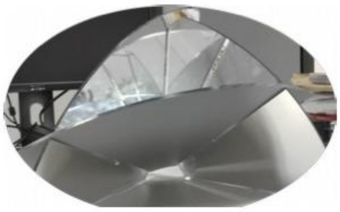
Pavage à reproduire



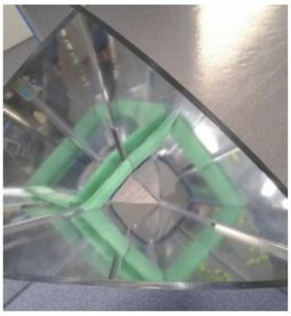
Les pièces doivent être positionnées dans le triangle de manière à former la figure De base ci-dessus

Activité 4 – Visualisation de polyèdres -
matériel nécessaire : chambres de miroirs sphériques et bâtons de mousse

+



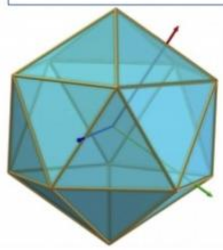
=



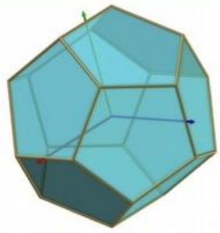
Es-tu capable de faire apparaître les polyèdres ci-dessous juste en mettant un bâton dans une des chambre de miroirs ? Attention à choisir la bonne chambre !
(exemple ci-dessus pour le cube)

Octaèdre

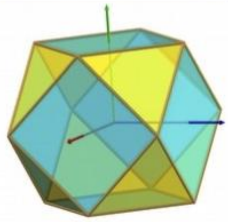
Icosaèdre



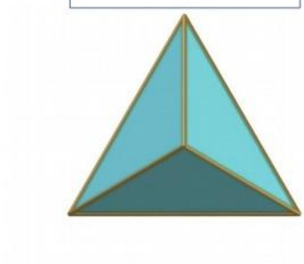
Dodecaèdre



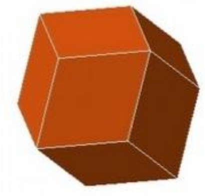
Cuboctaèdre



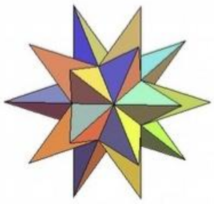
Tetraèdre



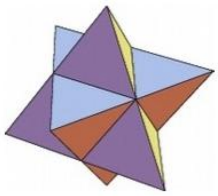
Dodecaèdre rhombique

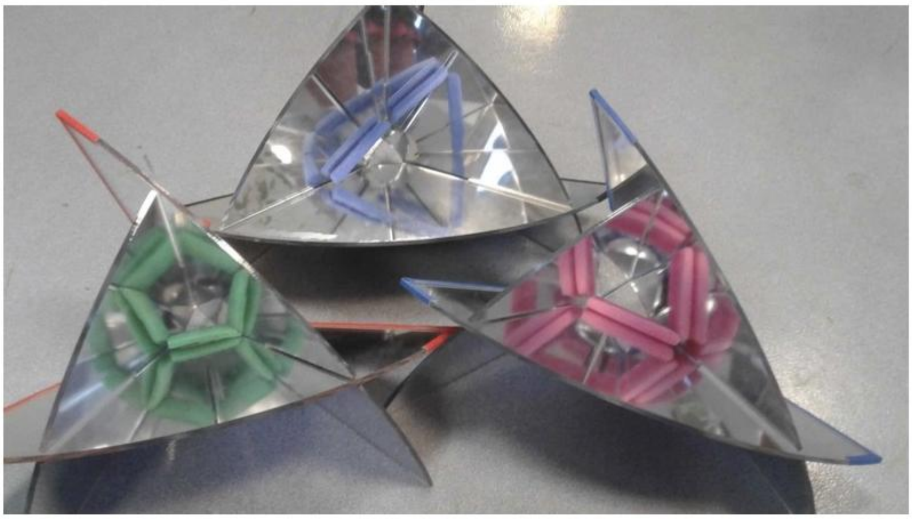


Grand dodecaèdre étoilé



Octaèdre étoilé





Quelques unes des solutions