ACTES DU COLLOQUE

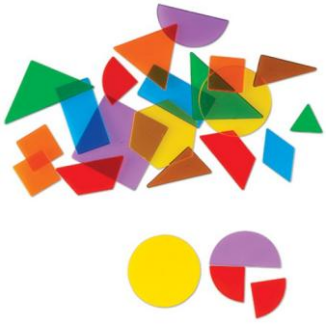
BLOIS 2018

Manipuler,

Représenter,

Communiquer :

Quelle place pour les artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?



45e COLLOQUE



BLOIS 2018

SOMMAIRE

CONFÉRENCES

CONFÉRENCE 1 *Page **8***
Passé, présent et futur des formations aux usages numériques pour les enseignants de mathématiques

CONFÉRENCE 2 *Page **35***
Travailler avec les formes en maternelle : premiers pas vers des connaissances géométriques ?

ATELIERS

ATELIER A11 *Page **57***
Beebots et Bluebots en classe : analyse de pratiques professionnelles

ATELIER A12 *Page **76***
Pavages et symétries : l'expérience du Labosaïque

ATELIER A13 *Page **89***
Analyse de pratiques enseignantes dans le cadre d'un dispositif de formation intégrant des situations de compagnonnage

ATELIER A14 *Page **133***
Enseigner Les nombres comme des 'représentations de la numérosité'

ATELIER A15 *Page **147***
Enseignement-apprentissage des notions de perpendicularité et de parallélisme en CM1 : que proposent les manuels ?

ATELIER A16 *Page **198***
Artéfacts, sémiosis et construction du système de numération de position décimale au cycle 2

ATELIER A17 *Page **207***
Quelle est la place de l'artefact dans le langage geométrique ?

ATELIER A18 *Page **240***
Un artefact pour multiplier

ATELIER A19 *Page **252***
Agir, manipuler, parler l'espace pour le construire en maternelle

ATELIER A21 *Page **281***
Utilisation des azulejos dans l'enseignement cycle 3

ATELIER A22 *Page **299***
Les bidules ou comment reproduire un solide sous contraintes

ATELIER A23 *Page **324***
L'histoire des mathématiques en classe, de la maternelle à la formation initiale des enseignants : entre mots et artefacts

ATELIER A27 *Page **346***
Analyse de manuels de cycle 2, place et fonctions de la manipulation

ATELIER A28 *Page **378***
Des entiers aux décimaux : manipuler pour comprendre les opérations au cycle 3 ? Cas de la multiplication

ATELIER A29 *Page **408***
Manipuler en maternelle : Pour quoi faire ? De l'analyse de ressources aux pratiques des ensignants : Place et fonctions de la manipulation en cycle 1.

COMMUNICATION

COMMUNICATION C11 *Page **444***
Manipuler, représenter, communiquer en rééducation orthophonique

COMMUNICATION C12 *Page **458***
Math & Manips : Favoriser l'apprentissage de l'organisation spatiale par la manipulation à l'école maternelle

COMMUNICATION C14 *Page **472***
Que nous apprennent les procédures des élèves lors de la résolution de problèmes utilisant la règle à l'école ?

COMMUNICATION C15 *Page **479***
Le terrain d'alphonse ou les infortunes de la mesure

COMMUNICATION C17 *Page **494***
Quel rôle de la manipulation dans le manuel « méthode de Singapour CP » ?

COMMUNICATION C19 *Page **514***
Quelles modalités pour construire un rituel de numération efficace au cycle 2 ?

COMMUNICATION C21 *Page **530***
Pratiques inclusives au collège : analyse didactique des diffÉrentes temporalités lors d'une séance de géométrie en classe de 5ème

COMMUNICATION C22 *Page **547***
Le rôle des croyances dans les pratiques d'une professeure des écoles à propos du calcul mental

COMMUNICATION C23 *Page **557***
Congruence et résolution de problèmes de comparaison

COMMUNICATION C24 *Page **571***
La manipulation d'objets mathématiquesdans l'environnement scratch

COMMUNICATION C25 *Page **584***
Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : Étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace

COMMUNICATION C27 *Page **604***
Quand soixante étudiants manipulent pour appréhender l'univers des grandeurs et ses aspects didactiques…

COMMUNICATION C28 *Page **616***
Les grands nombres au cycle 3 : propositionde quelques pistes de travail

COMMUNICATION C29 *Page **635***
Que nous apprennent des évaluations en numération sur les acquis des élèves en REP de CE1, CE2 et CM1 ?

COMMUNICATION P1 *Page **649***
La numéRation sécimale en formation initiale des enseignants du premier degré

COMITÉ SCIENTIFIQUE

Édith PETITFOUR, Maîtresse de Conférences, ESPE de Rouen, Université de Rouen, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), COPIRELEM, Présidente du comité scientifique

Vincent BECK, Maître de Conférences, ESPE Centre Val de Loire, Institut Denis Poisson, Université d'Orléans

Anne BILGOT, Formatrice, ESPE de Paris, Université de Paris 4, Paris Sorbonne, IREM de Paris 7, COPIRELEM

Richard CABASSUT, Maître de Conférences, Laboratoire interuniversitaire des Sciences de l'Education (LISEC), Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg, COPIRELEM

Valentina CELI, Maîtresse de Conférences, ESPE d'Aquitaine, Laboratoire E3D Épistémologie et Didactique des Disciplines, Université de Bordeaux, COPIRELEM

Pierre EYSSERIC, Formateur, ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille, Aix-Marseille Université, IREM de Marseille, COPIRELEM

Hélène GAGNEUX, Formatrice, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Pascale MASSELOT, Maîtresse de Conférences, ESPE de Versailles, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), COPIRELEM

Arnaud SIMARD, Maître de Conférences, ESPE de Franche-Comté, IREM de Franche-Comté, COPIRELEM

Frédérick TEMPIER, Maître de Conférences, ESPE de Versailles, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), COPIRELEM

Claire WINDER, Formatrice, ESPE de l'Académie de Nice, Université de Nice-Sophia Antipolis, COPIRELEM

COMITÉ D'ORGANISATION

Vincent BECK, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Lydie DURAND, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Nathalie DUTRAY, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Laure ETEVEZ, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Hélène GAGNEUX, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Chérifa KEHAILIA, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Amélie MALAPERT, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Joëlle PITEL, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Patrick TEMPLEREAU, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Jean TOROMANOFF, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

Patrick WIERUSZEWSKI, ESPE Centre Val de Loire, Université d'Orléans

BILAN SCIENTIFIQUE

Le 45e colloque de la COPIRELEM intitulé « ***Manipuler, représenter, communiquer : quelle place pour les artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?*** » s'est intéressé à la question des liens entre action, représentation et conceptualisation.

Ce colloque s'inscrit dans la continuité du précédent centré sur la dimension sémiotique de l'activité mathématique. Cette année, les questions ont porté, d'une part sur l'intérêt de l'utilisation d'artefacts pour les élèves en termes d'engagement dans les tâches et en termes d'apprentissage et de conceptualisation, d'autre part, sur l'utilisation d'artefacts dans les pratiques des enseignants ou sur les modalités de formation amenant à questionner l'utilisation de certains artefacts dans l'enseignement.

La conférence d'ouverture concernait la place des artefacts numériques dans la formation des enseignants. Fabien Emprin (Université de Reims) a interrogé le potentiel de ces artefacts pour transformer le processus d'apprentissage en mathématiques. Il a proposé des pistes pour justifier l'usage du numérique à l'école et en formation. Il a abordé les questions de l'appropriation des outils numériques par les enseignants.

La seconde conférence a exploré les potentialités d'un travail avec des formes en maternelle pour résoudre les premiers problèmes géométriques. Valentina Celi (Université de Bordeaux) a montré comment les problèmes où les modalités visuelle, haptique et verbale s'articulent permettent à l'élève d'enrichir ses appréhensions des figures géométriques. Sylvia Coutat et Céline Vendeira (Université de Genève) ont fait un zoom sur certaines situations mobilisant un matériel original conduisant les élèves à une évolution dans leur manière de voir et de penser les figures géométriques.

La troisième conférence d'Aurélien Alvarez (Université d'Orléans) prévoyait, dans le résumé proposé, de présenter des exemples concrets d'activités où l'on « expérimente les mathématiques » dans des classes de l'école primaire ou en formation de professeurs des écoles dans le cadre de « La main à la pâte ». Même si des activités d'expérimentation dans le cadre de la physique ont effectivement été présentées, la conférence n'a pas permis de faire appréhender quelles exploitations pourraient en être faites en formation, ni, plus généralement, d'ouvrir sur des questions d'enseignement des mathématiques et de formation des enseignants du premier degré.

Ce colloque a réuni 222 participants d'horizons divers (conseillers pédagogiques, maîtres-formateurs, enseignants-chercheurs, formateurs en ESPE, membres d'un groupe IREM) et cinquante-six se sont investis dans l'animation d'un atelier ou la présentation d'une communication pour partager leurs expériences dans la formation ou présenter leurs travaux de recherche. Des présentations de pratiques de formation des Professeurs des Écoles ou des présentations de recherches universitaires ont porté sur des thèmes mathématiques et aspects didactiques variés.

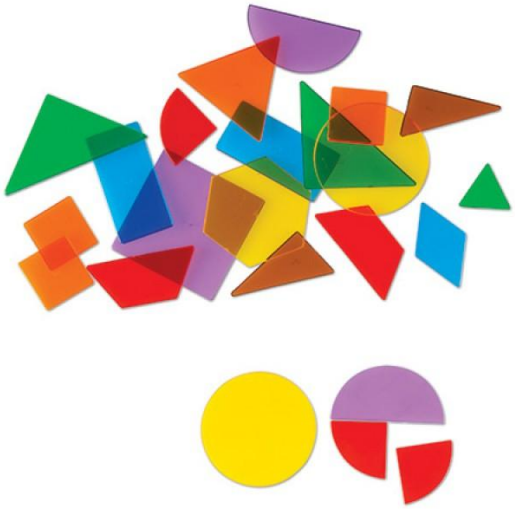
Le colloque a ainsi donné lieu à dix-huit ateliers et seize communications qui ont permis, entre autres, d'explorer le potentiel d'artefacts variés à l'usage des enseignants (manuels, textes historiques, etc.) ou à l'usage des élèves, des étudiants ou des enseignants en formation (abaque à jetons, additionneuse à roues, jeu sur les fractions, jetons, bandes, robots, formes géométriques, gabarits, carreaux articulés, « bidules », instruments de géométrie, etc.).

Les textes produits à l'issue des conférences, ateliers et communications ont été examinés par le Comité Scientifique. Les textes retenus sont disponibles sur le site de l'ARPEME, une fiche descriptive les annonce dans la Brochure des Actes.

Merci aux conférenciers, merci à tous les animateurs d'atelier et auteurs de communications pour leur travail d'écriture. Merci à tous les membres du Comité Scientifique pour leur travail de relecture et conseils aux auteurs. Merci aux membres de la COPIRELEM pour leur relecture des textes. Un grand merci également au Comité d'Organisation de ce colloque.

Édith PETITFOUR
Présidente du Comité Scientifique

CONFÉRENCES



CONFÉRENCE 1

PASSÉ, PRÉSENT ET FUTUR DES FORMATIONS AUX USAGES NUMÉRIQUES POUR LES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES

Fabien EMPRIN
MCF, Université de Reims
CEREP (EA 4692)
Fabien.emprinuniv-reims.fr
ORCID : 0000-0002-0166-8489

Résumé

La place des artefacts numériques dans la formation des enseignants pose des questions spécifiques pour les didacticiens, les formateurs et les enseignants. La vitesse de développement des technologies, les effets de mode compliquent notre travail (de chercheur, de formateur et d'enseignant). Pour répondre à cette difficulté, nous proposons, comme l'a fait Lagrange (s.d.) en partant de l'introduction du tableau noir pour comprendre la place du tableau numérique, de réfléchir à ce que le numérique apporte de spécifique ou a de commun avec les démarches antérieures.

À partir de cet « historique », nous mettons en évidence que peu de leçons ont été réellement tirées des expériences et des travaux passés, par exemple Jacquinot (1993), et que seuls quelques artefacts numériques présentent des caractéristiques ayant le potentiel pour transformer fondamentalement les processus d'apprentissage. Alors, pourquoi les outils numériques sont-ils utilisés par les enseignants ? Pour préparer les élèves à une société numérique ? Pour les motiver ? Nous proposons d'autres pistes pour justifier l'usage du numérique à l'école et en formation : parce que l'on peut faire des choses que l'on ne pouvait pas faire avant (pas facilement), parce que l'on peut faire plus vite et mieux des choses que l'on faisait avant et parce que sur certains points, la technologie a changé la donne. Pour le premier point, la géométrie dynamique propose un nouvel espace de travail, la 3D immersive permet aux élèves de « voir » des choses impossibles à voir sinon, la visioconférence permet de faire cours à des élèves que l'on n'aurait pas pu atteindre autrement. Pour le second point, les exerciseurs, les serious games, permettent à la fois suivi et autonomie pour l'automatisation notamment. Le troisième point est moins spécifique aux mathématiques : l'accès instantané et permanent à l'information peut transformer la place de l'enseignant, qui ne peut ignorer qu'à court terme, voire dès maintenant, l'élève peut avoir accès aux contenus que l'enseignant vise à transmettre. Dans ce contexte, nous abordons les questions de l'appropriation des outils numériques par les enseignants : les genèses (Rabardel, 1995) (Lagrange, 2013) et de l'analyse des formations aux technologies (Abboud et Emprin, 2010), des stratégies de formation utilisant des artefacts numériques comme les jeux sérieux et la simulation (Emprin & Sabra, 2015), ce qui nous amène à questionner les savoirs et les connaissances de formation. Quelle est la place des enseignants dans la conception des outils numériques pour leurs élèves ? Consommateurs ? Utilisateurs ? Concepteurs ou co-concepteurs ? Nous terminons par une projection vers l'avenir (proche ?) en questionnant la place du big data dans l'enseignement et la formation.

Se poser la question de la place des artefacts numériques tels que les ordinateurs, les smartphones, les logiciels de géométrie dynamique…, en tant que didacticien des mathématiques, nous amène à prendre comme focale principale, pour nos recherches, les apprentissages mathématiques des élèves. Cela ne veut pas dire que nous devons ignorer les questions sociales, sociétales, psychologiques, informatiques… qui sont inhérentes à l'introduction de ces artefacts dans le processus d'enseignement apprentissage, mais qu'elles viennent nourrir notre analyse du processus d'enseignement apprentissage.

Pour définir le terme artefact, nous utilisons la distinction faite par Rabardel (1995, p. 95) entre artefact et instrument :

> *Le point fondamental de cette définition est que l'instrument ne peut se réduire à l'artefact, l'objet technique ou la machine selon les terminologies. Nous pensons qu'il faut définir l'instrument comme une entité mixte, qui tient à la fois du sujet et de l'objet (au sens philosophique du terme) : l'instrument est une entité composite qui comprend une composante artefact (un artefact, une fraction d'artefact ou un ensemble*

d'artefacts) et une composante schème (le ou les schèmes d'utilisation, eux-mêmes souvent lies à des schèmes d'action plus généraux).

Pour aborder la complexité de cette question, nous avons fait le choix d'utiliser une approche similaire à celle proposée par Lagrange (s. d.) à propos de l'usage des tableaux numériques interactifs (TNI) ou encore de Baron (2014). Lagrange s'est d'abord intéressé à « *comment un artefact s'impose dans les usages des enseignants* ». Pour cela, il a étudié un artefact proche qui avait manifestement réussi à être utilisé par tous les enseignants : le tableau « noir ». En regardant l'histoire de l'introduction de cet artefact, on se rend compte qu'il n'est finalement pas si ancien que cela puisqu'il a été rendu obligatoire en 1850 et généralisé à la fin du XIXe siècle, mais aussi que ce sont des changements dans la manière d'enseigner et de former les enseignants que son introduction accompagne.

Dans notre cas, il s'agit de comprendre ce que l'on peut apprendre de l'introduction d'artefacts ayant des caractéristiques proches des outils numériques actuels : l'apprentissage par correspondance, les méthodes d'enseignement audio et vidéo, la micro-informatique notamment.

Avant de poser ce regard sur le passé, nous prenons trois exemples un peu « décalés » qui nous permettent de poser les jalons de notre questionnement. Dans une troisième partie, nous faisons le point sur des recherches existantes et ce qu'elles apportent par rapport aux questionnements « historiques ». Nous terminons par des propositions pour la formation des enseignants au et par le numérique.

I - TROIS EXEMPLES EN GUISE D'INTRODUCTION

Les trois exemples choisis ici n'ont pour enjeu que d'illustrer, de façon originale nous l'espérons, les questions que nous nous posons sans ambition d'en être un fondement scientifique. Il s'agit, dans un premier temps, d'une légende urbaine sur le stylo de l'espace, puis de l'analyse d'une vidéo de concepteur de TNI et enfin de quelques réponses de nos étudiants en formation.

1 Le stylo de l'espace

Voici la légende : lors de la conquête de l'espace, nul n'ignore la rivalité entre les USA et l'URSS. La NASA (agence spatiale américaine : National Aeronautics and Space Administration), lors des premiers vols habités dans l'espace, a été confrontée à un problème : les stylos ne fonctionnaient pas en apesanteur puisque la gravité était nécessaire à l'encre pour descendre jusqu'à la bille et enfin au papier. L'agence aurait alors demandé à une grande marque de stylos de trouver une solution qui aurait, avec plusieurs millions de dollars de recherche, conduit à la fabrication d'un stylo pressurisé : le Fisher space pen capable d'écrire en gravité zéro. Dans cette rivalité entre les Soviétiques et les Américains, pouvez-vous alors imaginer ce qu'ont fait les Soviétiques ? Ils sont partis dans l'espace avec des crayons à papier. ».

Le Fisher space pen existe bel et bien ; il est d'ailleurs toujours commercialisé, mais pour le reste il s'agit d'une légende urbaine pour plusieurs raisons : le graphite des crayons à papier est conducteur et la poussière qui serait produite dans l'espace sans gravité pourrait causer non seulement des courts-circuits, mais aussi réagir avec les mélanges gazeux présents dans les vaisseaux spatiaux ; le corps des crayons à papier en bois est un matériau inflammable qui est proscrit de toutes les missions spatiales ; il n'y a aucune trace ni demande de la NASA à Fisher de la production d'un tel stylo ni de fonds de recherche alloués, la société a réalisé ce produit à des fins commerciales de son propre chef.

Quoiqu'il en soit la légende est belle et elle nous permet de nous demander si parfois, dans le domaine qui nous intéresse, nous ne cherchons pas une solution technologique complexe et coûteuse à un problème qui pourrait être résolu de façon beaucoup plus simple. De façon plus sérieuse, pour la même question, nous pouvons citer De Gennes (1992) qui, dans son champ de recherche sur la matière molle, l'a souvent mise en avant. À propos de l'expérience de Franklin qui permet de trouver de façon assez précise la taille d'une molécule en mettant une petite quantité d'huile sur une grande étendue d'eau il indique :

> *Nowadays, when we are spoilt with exceedingly complex toys, such as nuclear reactors or synchrotron sources, I particularly like to describe experiments of this Franklin style to my students (De Gennes, 1992,*

p 842) que l'on peut traduire par : à une époque où nous sommes envahis d'excessivement complexes appareils tels que les réacteurs nucléaires ou les sources synchrotrons, j'aime beaucoup décrire des expériences dans le style Benjamin Franklin.

Ce premier exemple nous conduit à la question du rapport-bénéfice/coût de l'usage des technologies : pourquoi former les enseignants au numériques s'il n'y a pas de bénéfice ?

Pour complexifier cette question, il y a de plus un foisonnement d'outils numériques logiciels ou matériels comme le montre cette longue liste pourtant non exhaustive : les tablettes, les ordinateurs, les smartphones ; les drones, les robots (Thymio[1], édison[2], bluebot[3], …) ; les interfaces comme Makeymakey[4], les arduino[5] ; les logiciels dédiés comme les logiciels de géométrie dynamique (LGD) tels que Cabri ©[6], géogébra[7], carmetal[8], géométrix[9], les logiciels de calcul ; les exerciseurs (abuledu[10], mathenpoche[11]…) ; les logiciels *halfbacked* (littéralement « à moitié cuits ») permettant de produire des exerciseurs (WIMS[12], TinyTap[13], Hopotatoes[14], Langagiciels[15]…) ; les langages comme scratch[16], géotortue[17], app inventor[18] ; les manuels numériques, les tableaux numériques interactifs (TNI), les tables interactives…

Nous choisissons de regarder un des outils plus spécifiquement : le TNI

2 Analyse d'une vidéo de concepteur de TNI

Nous analysons une vidéo produite par un fabricant de TNI qui montre les usages de son artefact ; cette vidéo est visible à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=-oedQVv-XBE

Elle montre l'usage d'un rapporteur virtuel sur le TNI pour tracer ce qui est appelé (en fait traduit de l'anglais, puisque la vidéo est en anglais, doublée en français) un angle droit. Tout d'abord, l'enjeu du tracé semble être d'obtenir un secteur angulaire ayant un angle droit ou plus simplement de délimiter un quart de disque. La démonstratrice prend donc le rapporteur virtuel et le redimensionne à la taille souhaitée pour faire le quart de disque attendu puis elle trace, au travers du rapporteur, le dessin voulu comme illustré sur la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**. Elle conclut en demandant aux élèves de efaire la même chose sur leur feuille avec leur rapporteur.

[1] https://www.thymio.org
[2] https://meetedison.com
[3] https://www.tts-group.co.uk/primary/computing/bee-bot-blue-bot-pro-bot-ino-bot/
[4] https://makeymakey.com
[5] https://www.arduino.cc
[6] http://www.cabri.net
[7] https://www.geogebra.org
[8] https://carmetal.org/index.php/fr/
[9] http://geometrix.free.fr/site/index.php
[10] https://www.abuledu.org
[11] http://mathenpoche.sesamath.net
[12] http://wims.unice.fr/wims/
[13] https://www.tinytap.it
[14] https://hotpot.uvic.ca
[15] https://www.langagiciels.com
[16] https://scratch.mit.edu
[17] http://geotortue.free.fr
[18] http://appinventor.mit.edu/explore/

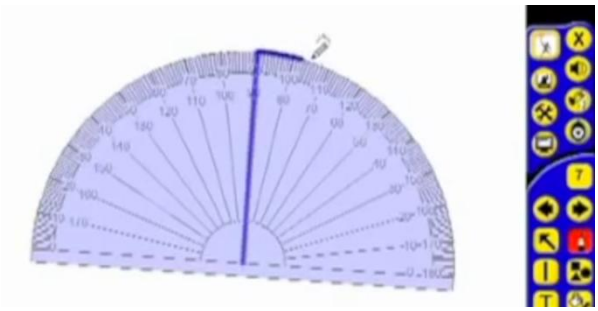


Figure 1 : copie d'écran de la vidéo analysée montrant la construction d'un quart de disque

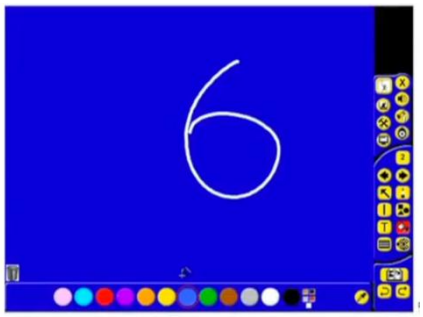


Figure 2 : exemple d'utilisation d'un TNI pour valider un tracer en blanc sur blanc

Tout d'abord on peut remarquer que l'usage qui est proposé ici est frontal : l'enseignante est au tableau et montre aux élèves ce qu'ils vont devoir faire. Ensuite, on remarque que l'usage, montré par l'enseignante, est impossible à transposer en papier crayon par les élèves : le rapporteur réel n'est pas redimensionnable et on ne peut pas tracer au travers. Même dans une démarche de type monstration, cet usage du TNI n'est pas pertinent et induit des biais dans la réalisation de la tâche des élèves.

Dans une deuxième partie de la vidéo, la démonstratrice s'adresse à des enfants jeunes, du niveau de la maternelle. Elle utilise un stylet et écrit en encre blanche sur fond blanc le chiffre 6. Puis elle demande aux élèves de dire quel chiffre elle a écrit. Pour valider, elle prend l'outil « pot de peinture » et remplit le fond avec la couleur bleue. Tout l'écran se remplit à l'exception du tracé en couleur blanche, faisant apparaître le chiffre 6 (*Figure 2*).

A priori, il peut s'agir d'une démarche originale pour fournir un rétrocontrôle aux élèves sur ce qu'ils pensent avoir vu, mais deux problèmes se posent : d'abord, c'est encore une fois l'enseignante-démonstratrice qui assume tout le processus de validation, mais surtout il faut se demander comment les élèves peuvent comprendre ce système de validation. En effet, il faut avoir l'habitude d'utiliser des logiciels de dessin sur ordinateur, non seulement pour comprendre comment fonctionne l'outil « pot de peinture », mais aussi ce que veut dire écrire en blanc sur blanc. Sans cette compréhension fine de l'usage du logiciel, la manipulation réalisée par l'enseignante s'apparente à de la magie.

Cette vidéo met aussi assez clairement l'accent sur la dimension motivation des élèves avec des exclamations du type « ce n'est pas formidable ça ! », mais elle semble induite par la scénarisation de l'enseignant plus que par l'usage réel de l'outil.

Ce n'est pas l'artefact TNI qui est en cause ici, mais bien les usages promus qui posent de nombreuses questions sur sa place comme médiateur dans le processus d'apprentissage, du côté de l'enseignant ou du côté de l'élève, sur ce que l'élève doit avoir construit comme relation avec l'artefact pour comprendre certaines interactions (que l'on peut interpréter en termes de genèses instrumentales des élèves), sur la motivation, son origine et sa place dans le processus d'apprentissage.

Cela nous conduit à une deuxième question : à quoi former les enseignants ? Quels usages et quels artefacts ?

Pour troisième exemple, nous avons extrait des informations des travaux et des réponses de nos étudiants ce qui, sans valeur statistique aucune, nous amène à poser une troisième question.

3 Quelques travaux d'étudiants stagiaires

Voici un extrait tiré d'une analyse de séance rendue cette année par un étudiant, en master 2[19] : « Intégrer des TICE au sein de ses séquences est un travail conséquent. Cela nécessite une lucidité sur les difficultés que les élèves vont rencontrer. Or, cette lucidité ne s'acquiert qu'avec l'expérience. N'en ayant pas en

[19] Étudiant fonctionnaire stagiaire, en deuxième année de master MEEF (Métier de l'Enseignement, Éducation et de la Formation), parcours second degré. À mi-temps en formation et à mi-temps en responsabilité de classes. Pour valider les unités d'enseignement liées au numérique, ces étudiants rendent des analyses de séances de classe.

étant jeune professeur, il est nécessaire de parler avec les collègues de mathématiques qui ont déjà rencontré ces écueils et peuvent donc éviter des fiascos potentiels. »

Cette vision de formation peut nous interroger : manifestement, cet étudiant considère que ce n'est que par accumulation de l'expérience, au fil des années et des rencontres des collègues que l'on apprend à enseigner, notamment avec les technologies. Si la place de l'expérience et de la pratique sont indéniables, comment faire pour accumuler les connaissances sur l'enseignement, les mutualiser, les partager, les extraire des contextes particuliers pour les rendre réellement partageables et exploitables par d'autres. Il nous semble que c'est bien la place de la recherche et de la formation que de faire ce travail de prise de distance et d'accélération de la construction de la professionnalité des enseignants.

Nous avons également mis en place un dispositif permettant de faire émerger, en début de formation, les représentations de nos étudiants de l'enseignement avec les technologies. Pour cela, nous utilisons un dispositif appelé contraposée (Emprin & Jourdain, 2010) qui permet d'éviter que les étudiants ne répondent ce qu'ils pensent que l'enseignant attend comme réponses. Au lieu de les questionner sur « comment faire réussir une séance avec les technologies ? », nous leur demandons de répondre, via un dispositif de post-it permettant de favoriser les échanges, à « comment faire échouer une séance avec les technologies ? ». Les réponses à cette question ne peuvent pas être issues de lectures ou d'anticipation des réponses attendues et sont ainsi plus révélatrices de ce qu'ils pensent vraiment. Nous obtenons, en faisant regrouper les idées par les étudiants, cinq catégories :

- Ne pas préparer sa séance (pas suffisamment)
  - Ne rien préparer/Contenus mal adaptés
- Faire une séance où le numérique n'est pas adapté
  - Pas d'intérêt : transformer la séance en jeu/ne pas la transformer en jeu
- Être confronté à un impondérable extérieur/logistique
  - Ne pas s'y être préparé
- Ne pas assurer la gestion de la classe
- Ne pas maîtriser la technologie

La formation peut alors s'appuyer sur ces catégories, bien évidemment en prenant leur négation. Une catégorie nous intéresse particulièrement, celle qui correspond à l'intérêt d'utiliser les technologies et qui contient d'ailleurs des affirmations qui sont contradictoires comme, transformer la séance en jeu et ne pas transformer la séance en jeu. Cela nous amène à faire préciser, aux étudiants, les raisons d'utiliser les technologies. Ils en proposent trois : pour préparer les élèves aux besoins de la société et à l'avenir, pour motiver les élèves, parce que c'est nouveau.

Préparer des élèves de maternelle à ce à quoi ils seront confrontés dans leur vie professionnelle ou dans la société pose le problème de l'anticipation. À quoi seront-ils confrontés dans 15 ou 20 ans (si on considère une entrée dans la vie active entre 18 et 23 ans) ? Mais si on regarde les artefacts numériques qui nous semblent actuellement naturels, combien d'entre eux existaient il y a 15 ou 20 ans ? Le 4 septembre 1998 naissait Google®, le 20 août 2002 Moodle®, Skype® en 2003, Facebook® en 2004, Twitter en 2006, quant à l'iPad, il était présenté le 27 janvier 2010. Un formateur ou un enseignant technophile de juin 1998 connaissait vraisemblablement l'ordinateur : il avait par exemple un PC avec un processeur Pentium II® avec 2 Go de disque dur (une petite clef USB actuelle) et il lui avait coûté sans doute son premier salaire, un minitel sorti en 1982, il pouvait aussi faire partie des 6,1 % de français à avoir un abonnement à internet (contre plus de 85 % aujourd'hui), grâce à un modem 56k qu'il pouvait utiliser une heure par mois à condition de ne pas téléphoner en même temps et il avait peut-être été formé sur le TO7 de Thomson qui avait été présenté en 1982. Comment cet enseignant ou formateur de 1998 pouvait-il anticiper sur les usages mobiles et les réseaux sociaux auxquels ses élèves sont maintenant confrontés en 2018 ? En conséquence, comment justifier les usages scolaires de 2018 par ce que sera la société de 2038 ?

Pour ce qui est de la motivation, sans entrer dans des recherches approfondies de psychologies, nous pouvons distinguer une motivation intrinsèque et une motivation extrinsèque. La première étant évidemment plus intéressante pour les apprentissages puisqu'elle est engendrée par la situation

d'apprentissage, par un processus interne à l'élève. En revanche la seconde, celle qui était proposée dans la vidéo de présentation du TNI, doit être sans cesse entretenue par l'enseignant qui doit alors, se renouveler, changer pour donner un aspect nouveau au risque de dévier les élèves des objets réels de l'apprentissage. Réduire la question des technologies à celle de la motivation, c'est donc les limiter à un statut cosmétique ou de récompense.

Enfin, l'idée de suivre la nouveauté, ce qui est à la mode, soumet l'enseignant à un risque de changement incessant qui n'est pas propice à l'approfondissement et à l'analyse des effets sur le long terme.

Cela nous amène à ces dernières questions : comment former les enseignants ? Quelle est la place de la formation ? de la recherche ? Que sait-on déjà ?

Ce sont les questions mises en avant dans ce premier chapitre qui vont nous guider dans cette conférence et, tout d'abord, au travers d'une analyse des technologies introduites au fil des années.

II - REGARD VERS LE PASSÉ

Le regard que nous proposons n'a pas la prétention d'être exhaustif. Nous avons choisi des éléments qui nous semblent significatifs par rapport aux questions que nous venons de mettre en évidence.

1 La formation à distance

1.1 Origine de la formation à distance

À quand peut-on dater le début de la formation à distance ? En nous appuyant sur Glikman (2002), Holmberg (2005), Peraya (2003) et Blandin (2004), nous pourrions proposer la date de 1728, car il s'agit de la publication sous forme de livre de la première méthode d'enseignant proposée par Caleb Philips pour apprendre la sténo. Mais 1840 nous semble une date bien plus importante, car c'est l'apparition du timbre-poste en Angleterre (le Penny black). Ce timbre permet à Isaac Pitman de proposer réellement une méthode de sténo en apprentissage par correspondance. Antérieurement à cette date, le courrier était payé par le destinataire et dépendait de la course qui avait été effectuée. Avec l'apparition du timbre, le coût de l'envoi est unique pour toute l'Angleterre et assumé par l'expéditeur. La méthode de Sténo de Pitman20 (et donc l'enseignement par correspondance) profite de l'apparition d'une forme simplifiée et plus commode de médiation pour se développer. En 1858, l'université de Londres reconnait les diplômes à distance. En France, est créé, en 1939, un service de scolarisation primaire et secondaire par correspondance[21], pour les réfugiés du Nord et de l'Alsace dans les régions méridionales, ce service deviendra le Centre national d'enseignement par correspondance (CNEPC en 1944) puis, après plusieurs évolutions, le Centre national d'enseignement à distance (CNED en 1986). Ce second morceau d'histoire nous amène à une deuxième conclusion sur ce qui a induit le développement de la formation à distance, le fait que les personnes ne puissent pas accéder à l'école parce qu'elles sont déplacées, réfugiées ou handicapées. La facilité du vecteur de communication et l'empêchement des individus à accéder au présentiel sont donc deux moteurs importants du développement de la formation à distance. Cela peut paraître une évidence, mais cela signifie en creux que des résistances vont apparaître lorsque les personnes formées se sentent en décalage vis-à-vis de ces deux aspects. Par exemple, lorsque des enseignements à distance sont mis en place pour remplacer, à l'identique, des cours en présence pour des raisons économiques ou quand le vecteur de communication n'est perçu comme pratique et facilitateur.

[20] Voir des exemples à l'adresse https://www.gracesguide.co.uk/Sir_Isaac_Pitman_and_Sons

[21] Voir les évolutions sur le site du CNED : http://www.cned.fr/le-cned/institution/histoire/

1.2 Avec l'audiovisuel

Nos points d'appui sont, pour cette partie, Alzouma (2012) ou Albero (2004). L'**enseignement utilisant l'audiovisuel peut aussi sembler récent, mais en réalité les premières méthodes,** sans remonter au XVIIIe avec la lanterne magique, **peuvent être attribuées à l'enseignement des langues entre** 1913 et 1918 avec le Pathégraphe (*Figure 3*).



> *« Le Pathégraphe consiste dans la combinaison d'un nouveau Pathéphone et d'un système particulier permettant le déroulement d'une bande de papier où sont imprimés les mots que prononce le Pathéphone en mouvement. ». Tandis que l'élève écoute l'enregistrement de la leçon sur disque, il peut en lire le texte sur un rouleau de papier qui défile de manière synchrone ; l'ensemble de ces textes sont compilés dans un livre que l'élève peut placer devant lui sur une tablette escamotable. Outre des langues étrangères (allemand, anglais, espagnol, portugais), le Pathégaphe a pu servir à l'apprentissage de la diction et du solfège.*
>
> *https://gallica.bnf.fr/html/und/objets/premiers-temps*

Figure 3 : Source Gallica BNF ; Collection Charles Cros. Phonographes (média : son). Pathégraphe ou « Autodidacte »

Carou, cité par Fumet (2012) indique que cet appareil « *[...] menace le monopole de la parole savante du maître dans sa classe* ». Cette polémique a eu pour effet de faire modifier le dispositif et d'intégrer des blancs dans la méthode pour que l'enseignant puisse mener sa classe et faire répondre des élèves. L'exemple du Pathéphone illustre les volontés des concepteurs de produire des outils permettant un apprentissage sans interventions humaines et les résistances des enseignants face à des artefacts qui les dépossèdent du monopole du savoir.

En 1912, à l'Ohio State University, les premiers cours Radio (Bordeleau, 1999) sont dispensés. Ils sont précurseurs, avec l'apparition de la télévision, du développement de cours audiovisuels. En 1945 est créé, en Grande-Bretagne, un service de télévision pédagogique qui passe en 1951 sous la tutelle du MEN (Ministère de l'Éducation Nationale), qui le confie à l'IPN (Institut de Pédagogie National) puis, en 1962, est créée la Radio Télévision Scolaire (RTS) dirigée par Henri Dieuzeide. Ces programmes sont accompagnés de fiches pédagogiques distribuées par les Centres Régionaux de Documentation Pédagogiques (CRDP). Ce qui est visé est donc une exploitation médiatisée par un enseignant. En 1994, la chaîne de télévision La Cinquième est créée pour devenir « la télévision du savoir, de la formation et de l'emploi ». En 2014, le CRDP devient le réseau Canopé. Ce parcours, jonché de transformations de structures, montre la difficulté à positionner la diffusion de programmes éducatifs, malgré la très bonne insertion du média (que ce soit la radio et la télévision), et cela même s'ils ne se mettent pas en concurrence avec l'enseignement, mais en appui et en complémentarité. La question de la conception des programmes, par des spécialistes de l'audiovisuel, par des enseignants ou par des équipes mixtes s'est naturellement posée. Des démarches ont été expérimentées comme le fait de filmer des cours donnés par des enseignants reconnus ou de construire des programmes illustrant des sujets spécifiques, en les accompagnant de fiches pédagogiques pour les enseignants. Quels enseignements ont pu être tirés de cette longue histoire alors que des dispositifs de formation en ligne reproduisent cette démarche en diffusant, via le web, des cours, des conférences ou des capsules explicatives de points spécifiques ? Il nous semble important de tenir compte des expériences et des recherches qui ont pu être menées à une grande échelle et sur un temps long.

De même, l'informatique pédagogique a également une longue histoire dont nous pouvons tirer des leçons.

2 L'informatique pédagogique

Nous nous appuyons sur les travaux de Bates (2005), Bordeleau (1999) et Garrison (1993). À partir de l'analyse de Zampa (2003), nous proposons de dater aux années 1920, l'apparition de l'enseignement automatisé avec la création de la Drum Tutor de Sidney Pressey. En effet, cette machine automatisée, à corriger les QCM, permet de conserver trace des actions, tout en laissant chaque apprenant travailler à son rythme et en lui donnant des rétroactions personnalisées, ce qui la rapproche de bien des logiciels exerciseurs ou de la machine lexidata[22] utilisés actuellement.

D'après Alvarez (2007) et en se limitant à l'informatique à proprement parler, le premier jeu est OXO créé en 1952 par A.S. Douglas, il s'agit d'un jeu de morpion contre l'ordinateur. L'odyssée, créée en 1972 par la société Magnavox, popularise un jeu de pong. Dans les mêmes années, Seymour Paper développe le courant du constructionnism (Harel & Papert, 1991) basé sur l'idée d'apprendre en se confrontant à l'action sur un artefact (c'est un néologisme pour l'époque), mais aussi par la construction de quelque chose de spécifique. Le langage LOGO et la tortue logo sont symboliques de cette époque et de ce courant qui perdure notamment avec le développement de Scratch (Resnik & *al.* 2009) de nos jours. Les caractéristiques de ce qui est appris via ces artefacts sont assez proches de ce que l'on peut rencontrer maintenant, et pourtant, ils ont été introduits dans les programmes d'enseignement puis ont disparu. Comment est-il possible d'expliquer ces phénomènes au regard des études menées à cette époque ?

Le premier monde virtuel se nomme Habita, il date de 1986 et a été créé par Lucasfilm Games en collaboration avec Quantum Computer Services (qui est devenu ensuite America Online [AOL]). Ce qui nous semble intéressant, avec cet exemple, c'est de voir que des innovations qui arrivent à certains moments ne s'imposent pas alors que « second life », un autre monde virtuel (créée en 2003) aura un très grand succès 20 années plus tard.

On peut considérer que le premier jeu sérieux est le fruit de sérendipité ; en effet, le jeu de combat de chars Army Battlezone, créé par Atari, en 1980, est programmé avec un fonctionnement suffisamment rigoureux pour que l'armée américaine choisisse de l'utiliser pour l'entraînement de ses militaires. Ce n'est donc pas une demande de formation de l'institution, mais plutôt un choix par opportunité ; c'est parce que l'artefact existe qu'il est utilisé. Depuis, ce type d'usage a continué, par exemple le jeu America's Army de la société MOVES créé en 2002 est utilisé comme un outil de recrutement à la Naval Postgraduate School de Monterey, Californie (Etats-Unis).

De grandes sociétés se sont intéressées au jeu sérieux en 1993. Loréal développe le Jeu Brandstorm pour promouvoir de nouvelles techniques dans la coiffure, la Renault Academy en 2006[23], la banque BNP et EDF pour des jeux de rôle, EDF en 2011 pour travailler les « Entretiens annuels de progrès »[24].

Avec le développement de l'Internet apparaissent les premiers MOOC (Massively Online Open Courses) basés sur l'idée d'exporter pour l'enseignement la grande réussite des MMOG (*massively multiplayer online game)* tel que *Word of Warcraft.* Dans ces jeux, des millions de joueurs interagissent, collaborent ou s'affrontent. Les MOOC exploitent ces interactions massives pour favoriser l'apprentissage. Là encore, c'est le jeu vidéo qui inspire de nouvelles stratégies de formation.

Un autre artefact est emblématique de l'utilisation des technologies, le TNI.

[22] http://www.lexidata.fr

[23] Voir par exemple l'interview https://www.journaldunet.com/solutions/intranet-extranet/serious-games-en-entreprise/serious-game-chez-renault-retour-d-experience.shtml

[24] Voir par exemple l'article : https://www.journaldunet.com/solutions/saas-logiciel/edf-serious-game-et-entretien-annuel-d-evaluation.shtml

3 Le TNI

Il ne s'agit pas une invention si récente que l'on peut penser. En 1988 Xerox Pac développe le Liveboard, qui sera commercialisé en 1991. En Grande-Bretagne, son déploiement sera accéléré par l'opération TBI PrimTice qui prévoyait de passer de 2500 TNI en 2001 à 14 000 en 2008.

Ce qui est intéressant de noter c'est le décalage entre la Grande-Bretagne et la Grande-Bretagne. En effet, au moment où nous engageons des moyens, les Anglais avaient déjà bien équipé leurs classes comme l'illustre la *Figure 4*. Ce décalage de trois années aurait pu nous permettre de tenir compte des résultats obtenus outre-Manche pour faire des choix éventuellement différents ou pour conforter nos propres choix.

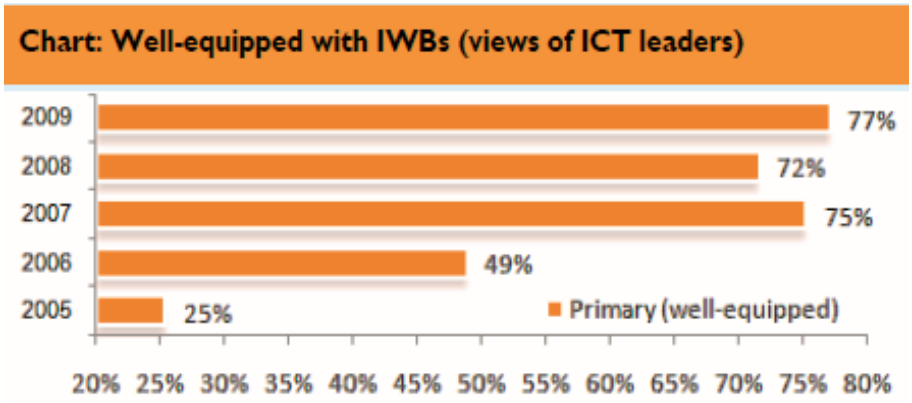


Figure 4 : BESA ICT in UK State Schools 2009 summary report http://www.besa.org.uk/besa/documents/view.jsp?item=1326

Ces trois exemples : formation à distance, informatique pédagogique et TNI, nous laissent penser que nous pourrions trouver des recherches, des études, des expériences récentes ou plus anciennes desquelles nous pourrions tirer des résultats et des enseignements.

4 Des recherches existantes

Des recherches existent effectivement sur la TV éducative pour adulte (Glikman, 1995 ; Cros, 1961 ; Prost, 1981 ; Egly, 1984) et sur le TNI, notamment citées dans l'article de Lagrange (s.d.) ou des travaux sur la formation des enseignants depuis le plan informatique pour tous (IPT) (Abboud, 1995 ; Emprin, 2007) qui a été un marqueur important dans le système éducatif français.

4.1La TV éducative pour adultes (Glikman, 1995)

Glikman (1995) explique que l'objectif principal du plan expérimental d'extension des moyens audiovisuels d'enseignement de 1963-64, avec un budget de dix millions de francs, est de pallier le manque d'enseignants et la formation insuffisante de beaucoup d'entre eux, dans le cadre de la reforme d'un système scolaire caractérisé par l'accroissement de la demande sociale en matière d'éducation et la prolongation de la scolarité obligatoire (Cros, 1961 ; Prost, 1981).

Il met également en avant des réticences des acteurs du système éducatif eux-mêmes : le ministère de l'Éducation nationale et la direction de l'IPN (Institut Pédagogique National), pour lesquels « l'audiovisuel, ça coûte cher et ce n'est pas sérieux », se méfient de ces innovations qui paraissent remettre en cause les modèles de l'enseignement traditionnel. De même, la majorité du corps enseignant est soit indifférente, soit très réticente, considérant ces émissions « palliatives » comme un moyen de contourner ses revendications en matière de recrutement et de formation et affirmant, par la voix de ses syndicats, que « la machine ne remplacera jamais le maître » (Egly, 1984).

Pour Glikman (1995), les responsables de la radiotélévision scolaire pour les adultes (RTS/Promotion) à l'IPN sont des enseignants et, à leur manière, des militants de l'éducation populaire et de la promotion sociale. Convaincus que la télévision peut assurer une mission éducative, c'est à travers leur désir d'enseigner qu'ils se passionnent pour l'audiovisuel : ils y voient le moyen de transmettre des savoirs au

plus grand nombre et pensent même, au début, que l'éducation peut engendrer un langage nouveau qui modèlera les formes de la communication télévisée.

Enfin, il attribue l'échec de cette télévision scolaire à son expansion rapide avec des enseignants non formés qui finit par être soumise à une logique de marché. Cette augmentation du nombre d'émissions induit une baisse de la qualité qui la fait rentrer dans un cercle vicieux.

Nous tirons trois enseignements de cette analyse :

- Utiliser une technologie pour pallier les manques de moyen (enseignants et formation des enseignants) n'a pas fonctionné dans le passé.
- Ne pas prendre en compte ou associer les enseignants, vouloir remettre en cause leur façon d'enseigner sans eux et sans les former, c'est risquer que les enseignants n'adhèrent pas, ou même, s'opposent.
- Il est normal que les technologies se développent grâce à des personnes, des enseignants spécialistes et convaincus ; mais limiter le développement à ces personnes risque de couper la technologie des usages réels.

4.2 Le TNI (Lagrange, s.d.)

Lagrange (s.d.) distingue deux périodes de recherche en Grande-Bretagne : 2000-2006 et 2006-2009.

Dans la première période, les façons, dont les TNI, sont analysées comme problématiques (Becta, 2010). Même si les usages des ressources numériques sont présents dans 50 % des leçons, la qualité des usages est très variable. Les TNI sont utilisés principalement pour présenter et non pour améliorer l'enseignement et l'apprentissage. En ce qui concerne les mathématiques enseignées, les observations des inspecteurs (OFSTED, 2008), dans les rapports qu'ils réalisent en 2001 et 2002, montraient que la plupart des élèves avaient l'occasion d'utiliser les TICE comme outil de résolution ou d'exploration de problèmes mathématiques. Ce n'est plus le cas en 2008 : la contribution des maths au développement de compétences TICE est relativement limitée. De plus, en dépit des avancées technologiques, le potentiel des TICE pour enrichir l'apprentissage des mathématiques est trop rarement réalisé.

Dans la deuxième période, l'impact du TNI dans la classe est caractérisé par un rythme plus rapide, mais avec des résultats contradictoires quant aux gains pour les apprentissages. Pour Shaw (2006), ces gains ne sont pas prouvés. De même pour Smith et *al*. (2006) :

> *after observing 184 primary school lessons conclude that lessons have a faster pace and that discourse is affected by interactive whiteboard use but that the impact on attainment is not yet proven.*

Pour Somekh (2007), il y a un gain sur un temps long quand le TNI devient partie prenante (embedded in) de la pédagogie de l'enseignant. Pour Miller & Glover (2007), beaucoup d'enseignants deviennent performants pour les fonctionnalités de présentation mais n'utilisent pas vraiment les possibilités du numérique, d'où des occasions perdues. Enfin, la formation est souvent réduite à l'information des fournisseurs ce qui peut poser question au regard de notre analyse de la vidéo de construction analysée en introduction.

Ces travaux nous montrent la difficulté à montrer un gain à l'usage des technologies, mais surtout l'importance d'en faire un élément partie prenante de la démarche d'enseignement apprentissage de l'enseignant. Cela nous renvoie à la question de la formation.

4.3 Les travaux sur la formation (Abboud-Blanchard, 1994) (Abboud-Blanchard et Emprin, 2009)

Le plan IPT (Informatique pour tous) a été caractérisé par un effort d'équipement des établissements mais aussi de formation des enseignants et de production de ressources. C'est donc un moment particulièrement intéressant à analyser en termes de formation aux technologies. Nous disposons de travaux sur la formation des enseignants de mathématiques au numérique à deux moments : Abboud-Blanchard (1994) sur le plan IPT et Emprin (2007) sur les années 2000. Ces études ont, toutes deux, montré que les formations étaient essentiellement menées par des formateurs militants, convaincus. Ce sont des formations qui sont souvent basées sur l'homologie (Houdement & Kuzniak, 1996) et la

confrontation entre les stagiaires et l'ordinateur est vue comme intrinsèquement formatrice. Au niveau des interactions dans la formation, les apports d'information et de situations modèles du formateur dominent et il y a peu d'échanges entre stagiaires. Les pratiques, au sens de Robert (1999 ; 2005), sont très peu questionnées alors que les questions des stagiaires révèlent un besoin. Il y a confusion des genèses instrumentales (Rabardel, 1995). Par exemple, il n'est pas distingué, durant ces formations, ce que doit savoir faire un concepteur d'outil, un enseignant ou un élève. Un décalage entre les attentes des enseignants et les potentialités des TICE présentées par le formateur est identifié (Ruthven & Hennessy, 2002 ; Lagrange & Dedeoglu, 2009)

Assude & Emprin (2013) mettent également en évidence que les résistances des enseignants sont de plusieurs types (personnelles, institutionnelles, symboliques, etc.) et que l'adhésion des enseignants semble plus grande s'ils « voient » une plus-value de ces outils dans le travail en classe (observé sur l'intégration de la calculatrice).

Connan & Emprin (2011) ont analysé tous les échanges entre formateurs et enseignants stagiaires sur un portfolio numérique de formation, au moyen d'un traitement statistique : la méthode Reinert (1986) qui consiste en une analyse factorielle sur les cooccurrences de mots dans les textes. Cette méthode permet de définir des univers lexicaux mettant en évidence les mots fréquemment utilisés ensemble ou au contraire les absences significatives (au sens de la métrique du χ^2) dans les formulations. Les 12 255 textes extraits de l'artefact numérique entre 2006 et 2010 mettent en évidence que le discours sur le numérique est complètement isolé des autres discours formatifs. Il est caractérisé par la présence des termes techniques tels que fichier, FOAD, Zipper, ressources, information et par l'absence des termes « enseignement », « élève », « séance ».

Ce résultat a été confirmé par une étude interne[25] utilisant la même démarche d'analyse statistique au moyen du logiciel IRaMuTeQ (Ratinaud & Marchand, 2012) de 320 rapports d'évaluation des stages en responsabilité du premier et du second degré. Là encore, le discours sur le numérique est complètement isolé des autres et centré sur un discours technique.

Des mémoires de recherche, que nous avons encadrés, mettent en évidence des éléments qui pourraient être une base intéressante pour de nouvelles recherches. En effet, ils mettent à jour, sur des corpus évidemment limités, des points qui doivent attirer notre attention. Un premier mémoire[26] analyse les pratiques de formateurs, soumis à une obligation institutionnelle de mise à distance de tout ou partie de leur formation, montre qu'ils reproduisent les démarches présentielles. De plus, il y a un décalage important entre les démarches qu'ils souhaitent mettre en place et celles qu'ils proposent réellement. Ces constats ont pu être faits avec des formateurs déjà impliqués dans la formation à distance avant l'obligation institutionnelle, comme avec des formateurs moins proches des outils numériques. Par ailleurs, le temps de formation spécifique à l'enseignement à distance dont ont pu bénéficier ces formateurs est très faible dans tous les cas.

Sur l'analyse des pratiques de formation lors de cours en visioconférence, un autre mémoire de master[27] montre que les démarches de formation habituelles sont également reproduites, mais avec des modifications de forme liées à la perte de la rétroaction sur l'attention et les émotions (visage) des étudiants. Les formateurs interrogent les sites distants pour prendre de l'information. Ils compensent ainsi la perte d'information, s'assurent du ressenti et de la compréhension des auditeurs. Ils vérifient également que la connexion est toujours opérationnelle. Ces stratégies ont été observées à l'échelle d'une formation à distance et donc au sein d'un groupe de formateurs. Ces formateurs adhèrent à cette démarche de formation non pas par conviction de son efficacité mais par ce qu'elle permet à des étudiants qui n'auraient jamais pu reprendre d'études, de le faire.

[25] Réalisé par la direction de la formation et du numérique de l'ESPE de l'académie de Reims, Emprin F. et Masson P.

[26] Mémoire de Master Pratiques et ingénierie de la formation parcours CIREF de F. Bisilliat-Donnet

[27] Mémoire de Master Pratiques et ingénierie de la formation parcours CIREF de P.-A. Sportiello

L'ensemble de ces travaux mettent en évidence que des recherches et surtout des résultats existent mais cela nous conduit à la question suivante : qu'est-ce qui rend leur exploitation difficile ? Peut-on les exploiter avec les artefacts actuels ?

4.4 Conclusions sur les recherches existantes

Pourquoi est-il difficile d'exploiter tous les travaux existants, sur des artefacts anciens, comme la télévision, ou plus récents, comme le TNI, mais issus du contexte anglo-saxon ?

Il semble y avoir des difficultés à atteindre, pour les sciences dans lesquelles ces travaux ont été produits, une réelle dimension cumulative. Oppenheimer (1955) met en évidence au moins deux raisons au caractère cumulatif de la science :

> *Une découverte relative au monde naturel ne supplante pas ce que nous savions auparavant, mais le transcende, parce que l'on se trouve dans un nouveau domaine d'expérience auquel on n'a pu accéder souvent que par la pleine utilisation des connaissances antérieures.*
>
> *[...]*
>
> *Dans le progrès scientifique, on s'aperçoit à chaque pas que ce qui était hier objet d'étude et d'intérêt pour soi devient aujourd'hui une sorte de postulat, compris et digne de foi, connu et familier, un outil de recherches et de découvertes nouvelles*

Oppenheimer développe ces idées à propos de sciences exactes et naturelles comme les mathématiques, la physique, la biologie mais la question de la relation entre anciennes connaissances et nouvelles, ainsi que la façon dont on s'appuie sur les travaux antérieurs pour construire de nouveaux résultats, appartient également aux démarches de la didactique et des sciences de l'éducation. Les exemples mis en avant dans toutes les parties précédentes montrent que le processus d'accumulation est freiné.

Quelles peuvent en être les causes ?

Tout d'abord il nous semble que la sensibilité des recherches aux changements de contextes rend la transposition des résultats difficiles. Si on prend les résultats d'études réalisées, même dans des pays proches comme l'Angleterre, les conditions d'enseignement, le statut des inspecteurs, les distinctions entre le privé et le public, les programmes sont autant de points à prendre en compte pour exploiter les études qui sont produites. Les questions de langues et de lieux de publication des recherches sont aussi à prendre en compte dans cette difficulté notamment pour accéder à des recherches qui ne sont pas publiées en anglais dans des revues internationales.

Des recherches transnationales ou visant la mise en réseau entre les théories à travers l'extension de la notion de praxéologie (Artigue et al., 2011), issue de la théorie anthropologique de la didactique (TAD) (Chevallard, 1999), donnent des perspectives intéressantes pour aborder la complexité de cette question.

Pour ajouter à la difficulté, les recherches impliquant les apprentissages des élèves nécessitent un temps long, lié au temps de l'apprentissage. Ce temps long est difficilement compatible avec la rapidité d'évolution des technologies numériques. La conjecture de Moore[28] prédisait, dès 1975, que le nombre de transistors des microprocesseurs sur une puce de silicium doublerait tous les deux ans augmentant ainsi la puissance de calcul et diminuant le coût de ces machines. Cette prédiction, qui s'est avérée assez exacte au moins jusque dans les années 2010, donne une échelle de la vitesse des transformations des capacités des outils numériques (tout comme notre petite et non exhaustive description des outils du paragraphe **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). Comment rendre compatible cette vitesse des emps de recherche sur le long terme, des temps de publications (et donc de validation des résultats) également longs et le temps de la décision politique d'investissement ?

Qu'est-ce qui a changé par rapport aux outils plus anciens ?

L'accès à l'information, son ampleur et sa vitesse peuvent être résumés en disant que l'on a accès « à tout, partout et tout le temps ». La télévision ou la radio donnent accès à des informations mais limitées

[28] Du nom de Gordon Earle Moore, cofondateur de la société Intel

en nombre et dans leur disponibilité. Là où il fallait accéder à une formation ou à une bibliothèque spécialisée pour disposer de certaines informations, internet les rend accessibles à la demande. Par ailleurs, ces informations ne sont plus filtrées par un processus d'édition et de publication, le vrai et le faux se côtoient. Cela peut donc changer la place de l'enseignant par rapport au savoir, de dépositaire exclusif à sélectionneur d'informations ou formateur permettant aux étudiants ou aux élèves de trouver, trier et comprendre l'information.

La communication interpersonnelle a également changé, là où un élève des années 80 pouvait passer un coup de fil à un camarade assis à côté du téléphone au milieu du salon (les téléphones avaient des fils de longueur limitée) pour se faire aider, il a maintenant accès à des réseaux d'entraide, des espaces de partage et de collaboration qui regroupent des millions de personnes.

Par ailleurs, la logique de marché, comme avec la télévision éducative, est beaucoup plus présente et peut-être à la fois plus masquée au travers des moteurs de recherche et des réseaux sociaux dont la gratuité apparente peut rendre les logiques de fonctionnement obscures pour l'utilisateur.

Nous tentons d'apporter quelques propositions issues de ces constats et de ces analyses.

III - PROPOSITIONS POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS À ET AVEC LE NUMÉRIQUE

Il nous semble qu'une métaphore, utilisée par notre collègue Hussein Sabra, est particulièrement éclairante pour illustrer notre démarche : quand le cinéma a été inventé, on ne s'est pas contenté de filmer le théâtre. Mais alors pourquoi est-ce que la formation et l'enseignement avec les outils numériques devraient être, comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, des transpositions des démarches sans outils numériques. Il nous semble plus pertinent d'aborder la question de la formation à et par le numérique en essayant d'inventer de nouvelles démarches et de nouvelles stratégies, de questionner et de repenser la formation.

1 Hypothèses pour repenser les formations

Les recherches que nous avons menées nous invitent d'abord à prendre en compte les réticences des enseignants et à ne pas se centrer sur les artefacts. Cela veut dire qu'il faut comprendre les pratiques et les modifications que vont induire l'introduction et l'usage des outils numériques pour adapter la formation. Par exemple, dans une recherche que nous avons menée dans le cadre d'un projet de construction d'un logiciel de simulation informatique de maison à domotiser Home I/O (Emprin & Riera, 2014 ; Riera & *al*., 2016), nous avons pu analyser les représentations des enseignants de la discipline « technologie » en lien avec l'usage des outils numériques conjointement au développement de l'artefact lui-même et des scénarios de formation. Il est apparu quatre types de visions des finalités de la discipline : comprendre comment ça marche ; comprendre les concepts (par exemple les économies d'énergie), faire avec des objets réels ou être capable de programmer un automate. Ces visions nous ont permis de développer l'artefact et de mettre en avant des scénarios permettant par exemple, de relier la maison virtuelle avec des systèmes réels ou de programmer au moyen d'une interface, I/O connect et récemment Scratch, la domotique de la maison. D'autres problèmes ont pu être mis en avant comme le choix que nous avons fait d'avoir un artefact aux standards du jeu vidéo en termes de qualité graphique, sonore et même de déplacement à l'intérieur de la maison. Ce choix gène certains enseignants et même certains étudiants, minoritaires néanmoins, car il questionne la frontière entre le jeu et l'apprentissage. Sans remettre en cause notre choix, cela nous indique que la formation ne peut pas ignorer ce questionnement, elle doit donc permettre aux enseignants de le formuler et de l'analyser.

La question de la plus-value des technologies est également importante à régler et notamment l'idée de réduire le décalage entre les potentialités des technologies et leur usage. Nous proposons que la formation mette également ce questionnement en évidence pour dépasser les arguments que nous avons pu extraire avec nos étudiants au paragraphe I-3.

Prendre en compte l'enseignant peut passer, quand cela est possible, par le fait de l'associer au travail de conception et de développement des outils. Une autre démarche peut être d'aborder, en formation, ses

pratiques dans toutes leurs dimensions. Dans le cadre de la double approche (Robert & Rogalski, 2002), les pratiques peuvent être vues comme la recomposition, le tout étant supérieur à la somme des parties, de cinq composantes. Deux composantes sont visibles : la composante médiative (les échanges les interactions...) et la composante cognitive (les mathématiques qui sont enseignées) des pratiques. Trois composantes sont à accès indirect : personnelle (ce que l'enseignant pense, sait, croit sur les mathématiques, sur l'enseignement.), institutionnelle (ce qu'il perçoit comme demandes, injonctions, obligations liées aux institutions programmes, inspection...) et sociales (les habitudes, ce qui se fait ou ne se fait pas dans l'établissement...). En regardant les pratiques avec ce cadre et en cherchant à aborder en formation les pratiques dans plusieurs de leurs dimensions, notre hypothèse est que l'on peut mieux les faire évoluer.

De cette hypothèse en découle une autre, c'est qu'il n'est pas souhaitable de centrer le travail sur les technologies… sur les technologies elles-mêmes. Nous proposons de les considérer au sein des pratiques et non isolément.

Reste néanmoins un point aveugle, que nos recherches actuelles cherchent à mieux comprendre, celui de l'identification et la caractérisation des savoirs et des connaissances de formation. Qu'est-ce qu'un enseignant doit connaître ou savoir pour enseigner avec les outils numériques ? Quels sont les savoirs qu'un formateur doit avoir et doit transmettre ? Les référentiels de formation mettent en évidence des compétences professionnelles à acquérir, mais si on prend comme caractérisation d'une compétence le triplet : connaissance/capacité/attitude, il nous semble que les connaissances ne sont pas clairement identifiées.

Nous faisons maintenant des propositions de plus-values des technologies.

2 Trois raisons d'utiliser les technologies

2.1 Quand on ne peut pas faire sans (ou pas de façon raisonnable)

Il y a des domaines pour lesquelles les technologies permettent de faire des choses qui ne sont pas, ou quasiment pas, possibles sans, c'est le cas par exemple des logiciels de géométrie dynamique (LGD), la simulation, l'impression 3D, la visioconférence ou de la réalité augmentée.

Nous avons déjà mis en avant que la visioconférence ou la formation à distance permettait à des personnes de suivre des formations auxquelles elles ne pourraient pas assister en présentiel. C'est d'ailleurs ce qui a été le moteur du développement de l'enseignement à distance (§ **Erreur ! Source du envoi introuvable.**). L'impression 3D permet aux élèves et aux enseignants de produire au sein de la classe des objets qui auraient nécessité des outils spécifiques et dangereux ; ils peuvent même, dans une certaine mesure, en utilisant des stylos d'impression 3D, dessiner dans l'espace en 3D (des squelettes de solides par exemple). Nous détaillons ici trois artefacts : les LGD, la simulation et la réalité augmentée.

La géométrie dynamique

Lorsque les élèves font le dessin d'un carré sur une feuille, ils obtiennent un ensemble de tracés unique. Ce tracé peut être produit par l'élève de façon conforme aux attentes sans que l'élève n'utilise d'instruments, comme l'équerre, qui montreraient qu'il cherche à conférer à son dessin des propriétés caractéristiques du carré. Mais comment peut-il produire un tracé correct sans connaitre des propriétés de l'objet mathématique ? Simplement en ayant une image prototypique du carré en mémoire. Dans un logiciel de géométrie dynamique, l'enseignant peut construire un contrat de validation lié à la résistance des objets (Laborde et Caponi, 1994 ; Laborde, 2000 ; Restrepo, 2008). Un dessin correct dans un LGD est un dessin qui conserve ses propriétés lorsque l'on bouge ses points mobiles. Pour obtenir un dessin résistant, l'élève doit utiliser des primitives de construction telles que « perpendiculaire à ... passant par ... », « point sur un objet », « point à l'intersection de deux objets ». L'obtention d'un dessin résistant est donc un critère de rétroaction et de validation puisqu'il garantit que l'élève a utilisé des propriétés caractéristiques de l'objet.

De plus, le dessin obtenu dans un LGD est une sorte de classe d'équivalence de « tous » les dessins ayant les mêmes propriétés. Ainsi l'élève manipule un nouvel objet entre le dessin et la figure (Duval, 1988 et 1993), entre le représentant unique et l'objet mathématique. De plus, le LGD fournit des outils de mesure et de vérification des propriétés qui favorisent la conjecture. La question pourrait être de savoir si les convictions obtenues au moyen d'un artefact numérique ne risquent pas de gêner le processus de démonstration mathématique au sens de Arsac (1987), Balacheff (1988) et plus récemment Pedemonte (2006), les élèves étant convaincus par le logiciel.

La simulation

Les logiciels de simulation permettent de mettre en place des situations qui ne pourraient pas être facilement organisées sans.

Home I/O

Le logiciel de simulation Home I/O (*Figure 5*) (Emprin & Riera, 2014), développé par le laboratoire CRESTIC et la société Real Game permet aux élèves d'agir sur l'ensemble des systèmes d'une maison comme le chauffage, l'alarme, les volets, le portail, les automatismes, le climat extérieur (température, humidité, ensoleillement...) et de voir en temps réel ou accéléré, l'effet sur la consommation énergétique ou la température des pièces.

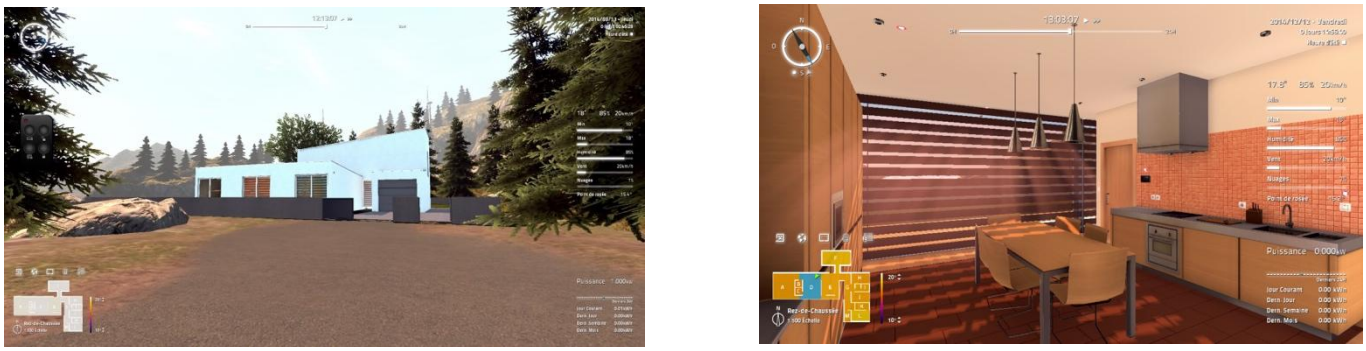


Figure 5 : vue extérieure et intérieure de la maison du logiciel HOME I/O. http://www.teachathomeio.com

Il est clair que de telles manipulations sont impossibles à faire sur un environnement réel.

Les artefacts produits par l'Équipe ERMEL

Les artefacts comme « mets-toi à la place » ou « va à ma place »[29] permettent aux élèves de voir une salle de classe, assis à la place d'un élève (à 360 degrés, cf. *Figure 6*) ou allant à la place d'un élève. Ils doivent ensuite retrouver, sur une photo de la classe vue de dessus, la place de la prise de vue. Pour cela, ils doivent faire des déductions en prenant appui sur une analyse de la vue : « il y a une table entre moi et le tableau donc je suis au deuxième rang. Quand je regarde à droite, je vois deux tables donc... ». Comment organiser ce travail sans utiliser des outils vidéo ? il faudrait bander les yeux à un élève, l'emmener dans une salle qu'il ne connait pas, lui faire regarder la classe mais que faire des autres élèves pendant ce temps-là ?

[29] Développés par l'équipe ERMEL, Ifé Ens Lyon et disponible gratuitement en interface web (http://fabien-emprin.pagesperso-orange.fr/index2.htm) ou via l'application gratuite pour tablettes et smartphones Tiny Tap (http://www.tinytap.it)



Figure 6 : vue interactive à 360° assis à la place d'un élève et vue de dessus de la classe

De la même façon, nous avons produit un outil qui permet de se déplacer dans un labyrinthe virtuel ou dans la ville de Châlons-en-Champagne (ERMEL, 2006). Les élèves doivent, en mettant en relation ce qu'ils voient en se déplaçant et les informations du plan, déterminer où ils sont, puis rejoindre des lieux donnés.

Dans ces deux cas, les enseignants qui le souhaitent peuvent tout à fait remplacer notre artefact par une vidéo prise assis à la place d'un élève ou l'usage de Google Street view® pour les déplacements dans une ville. L'artefact n'a que peu d'importance, mais en revanche il permet de faire émerger des stratégies de repérage dans l'espace, de les faire formuler à partir d'une expérience de l'élève.

La réalité augmentée

HP Reveal[30] (anciennement Aurasma) permet d'intégrer des éléments de réalité augmentée dans l'environnement des élèves au moyen d'un smartphone ou d'une tablette. Les élèves doivent chercher et pointer avec la caméra de la tablette des éléments de la réalité et ils voient s'incruster sur la réalité des éléments choisis par l'enseignant. La différence par rapport à l'utilisation de QR code est que l'information est ajoutée directement sur un élément de la réalité en 3D et avec des éléments sonores au lieu de renvoyer vers un lien à partir d'un code.

Ces artefacts numériques ajoutent des possibilités de conception de situations qui n'existaient pas auparavant, mais faut-il encore s'assurer de leurs potentialités en termes d'apprentissage.

2.2 Quand l'apprenant travaille de façon plus individuelle et autonome

Faire travailler un élève sur un artefact numérique procure, comme pour la machine à corriger des QCM, des possibilités d'individualisation des apprentissages. Ce qui est nouveau par rapport à la machine de Pressey, c'est la richesse du système d'interaction possible entre les réponses de l'apprenant et celles de la machine. Le projet ANR NéOPRÆVAL vise par exemple à :

> *« outiller les enseignants pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en mettant à leur disposition des outils d'évaluation diagnostique automatique utilisables dans leurs classes ainsi que des ressources appropriées aux besoins repérés des élèves. »*

Les bases d'exercices en ligne peuvent fournir plus ou moins d'interaction. Elles sont souvent produites de manière collaborative et ouverte, ce qui peut permettre aux enseignants et aux chercheurs de se les approprier. Nous pouvons citer par exemple, WIMS, Hotpotatoes, Clic 3.031, App inventor32…

[30] https://studio.hpreveal.com/landing

[31] https://clic.xtec.cat/legacy/en/index.html

[32] http://appinventor.mit.edu/explore/

Sans aller jusqu'à ce que le logiciel analyse les réponses des élèves, l'utilisation d'un exerciseur, avec des rétroactions basiques, permet néanmoins une plus-value par rapport au papier-crayon. Prenons l'exemple de l'activité droite numérique sur TinyTap[33] (Argaut et *al.*, à paraître), comme on peut voir en *Figure 7* :

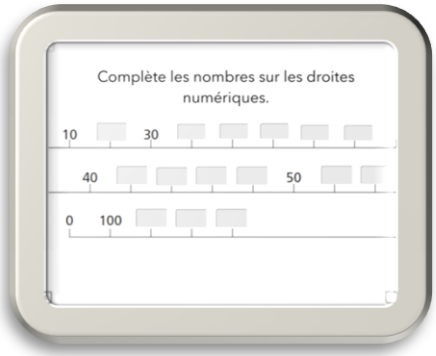


Figure 7 : copie d'écran d'un page de l'application « droite numérique » sur tinytap

Dans un extrait de vidéo[34], on peut voir comment un élève commence à remplir la première ligne en mettant évidemment 20 entre 10 et 30, puis 40, 50, etc. Il passe ensuite à la deuxième ligne et écrit 50 après 40. Le logiciel refuse sa réponse et l'empêche de continuer. Il retente puis repère le 50, réfléchit et écrit 42. Cette réponse acceptée par le logiciel, il continue avec 44, 46 et 48. À la troisième ligne, il ne se trompera pas.

Que se serait-il passé en papier crayon ? Puisqu'aucune rétroaction n'existe, l'élève aurait tout à fait pu remplir la feuille complètement avec des réponses erronées puis passer à un autre exercice. Il se serait rendu compte de son erreur lors d'une mise en commun ou par la rectification individuelle de l'enseignant qui aurait ramassé sa feuille. Il aurait donc perdu beaucoup de temps et la rétroaction différée aurait sans doute eu moins d'effet.

Pour qu'une forme d'autonomie et d'individualisation s'instaure, il faut que l'enseignant puisse définir des parcours personnalisés pour les élèves et qu'il puisse récupérer de l'information sur ce qui s'est passé sur le logiciel. C'est possible sur tinytap avec le module « courses » qui permet de choisir un itinéraire entre les exercices et un score minimal pour passer de l'un à l'autre, mais cela peut aussi être réalisé au moyen d'une feuille de route que l'élève remplit et qui lui indique les activités à réaliser et les conditions pour considérer qu'il a réussi la tâche. D'autres logiciels comme ceux du Terrier-Abuledu, notamment « à nous les nombres », permettent également d'organiser des parcours et de suivre de façon précise les résultats de l'élève. Ces outils ont été déjà présentés et analysés lors de précédents colloques COPIRELEM, notamment par Gueudet (2009) et Margolinas (2012).

Les artefacts numériques actuels permettent assez simplement de concevoir des dispositifs d'enseignement, notamment pour l'entrainement, s'adaptant aux élèves (de façon plus ou moins automatisée) et offrant à l'enseignant plus de disponibilité pour différencier, aider les élèves ou gérer les différents niveaux dans sa classe, par exemple.

Les exemples que nous venons de mettre en avant utilisent des outils déjà conçus, mais une spécificité de plusieurs d'entre eux est d'être ouverts, c'est-à-dire de laisser la place à la modification par l'enseignant qui les utilise ou même à la production de ressources. C'est un des aspects qui nous semble nouveau dans les technologies actuelles : le partage de ressources à grande échelle et la possibilité de conception pour des non-informaticiens.

[33] https://www.tinytap.it/activities/g2kwi/play/ tiré des Essentielles ERMEL CE2

[34] https://www.youtube.com/watch?v=Sof3wPxvCQU

2.3 *Quand la technologie a changé la donne*

En nous demandant ce que les technologies actuelles ont de spécifique par rapport à ce qui existait, nous avons identifié l'existence de réseaux de partage à grande échelle. Si ces réseaux existent pour les apprenants, c'est également le cas pour les enseignants qui peuvent mettre à disposition et bénéficier de multiples ressources. Ce phénomène, couplé à l'existence d'artefacts permettant à des non-informaticiens de produire leurs propres artefacts (on parle d'outil half-baked, littéralement à moitié cuit), donne aux enseignants de nouvelles possibilités dont il nous semble important qu'ils s'emparent.

Produire ses propres artefacts, c'est possible.

Dans Tinytap, par exemple, les personnes qui produisent une application ont la possibilité soit de la vendre, soit de la laisser en libre accès, mais non modifiable, soit de la fournir gratuitement et modifiable. C'est cette dernière solution que nous choisissons et qui nous semble la plus pertinente. Un enseignant peut ainsi adapter la consigne, modifier les réponses acceptées... Tinytap est très facile à utiliser pour concevoir des applications. N'utilisant aucun langage de programmation, elle en est, par la-même, limitée dans les systèmes d'interactions possibles. D'autres plateformes existent, comme App Inventor du MIT (Massachusetts Institute of Technology) qui permet de programmer en scratch des applications pour le système d'exploitation Android. Il est possible, par exemple, de télécharger l'application « grand esquimau »[35] réalisée avec cette plateforme et de l'installer sur son portable ou sa tablette Android. Toute personne ayant un compte (gratuit) sur App Inventor peut accéder au programme dans la « gallery » des applications et ainsi aux blocs de programmation (*Figure 8*) sous forme de blocs, les copier, les modifier et produire sa propre application.

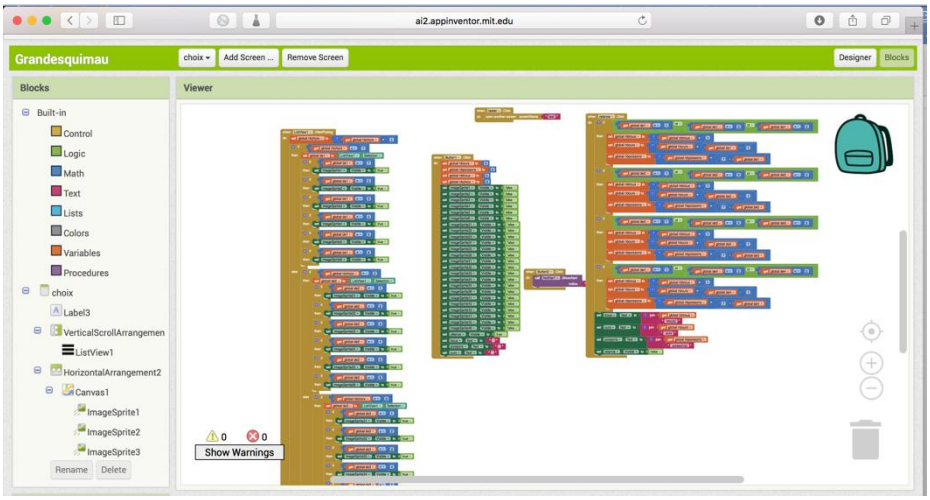


Figure 8 : copie d'écran des blocs de construction d'une des pages de l'application « grand esquimau » sous app inventor.

Même si seulement 1 % des plus de 300 000 enseignants du primaire en France produisait une ressource et la mettait à disposition de la communauté enseignante, le nombre d'applications disponibles serait de plus de 300, par niveau de classe.

L'enseignant comme ressource par rapport aux connaissances et aux savoirs

La disponibilité des connaissances et des savoirs amène de nouvelles questions qui sont peut-être un peu moins prégnantes à l'école que pour le collège, le lycée et l'université. Néanmoins une nouvelle problématique et un nouvel enjeu peuvent apparaître pour l'enseignement : celui de donner aux élèves les moyens de trouver, de sélectionner et de comprendre les informations. Ceci s'inclut dans l'éducation à l'information et aux médias et répond à la question de préparer les élèves à l'avenir comme l'ont proposé nos étudiants au I-3 mais, au lieu de leur donner des connaissances techniques sur les outils

[35] http://fabien-emprin.pagesperso-orange.fr/Grandesquimau.apk

actuels, l'objectif est de leur donner des clefs de compréhension qui leur seront utiles indépendamment des artefacts présents ou futurs.

Parmi ces apprentissages, celui du code informatique nous apparait un bon exemple. Il s'agit plus de comprendre comment un programme, un algorithme, un automate fonctionne et non pas apprendre à maîtriser un langage spécifique (qui ne sera sans doute plus utilisé dans dix ans).

Pour atteindre ce type d'objectifs, les artefacts numériques sont propices au développement d'approches différentes des connaissances.

Des approches différentes des connaissances

Il n'est pas (plus) question de faire un cours d'informatique, un cours d'électronique ou de programmation. En revanche, les artefacts numériques favorisent des démarches telles que l'approche par projet, le cours inversé ou les cours hybrides.

Il y a une grande variété de projets possibles dépendant des opportunités de chaque école. Par exemple, fabriquer un programme répondant à un besoin, une question spécifique ou un but artistique, peut constituer un projet qui amène les élèves à mobiliser des connaissances mathématiques ou d'autres disciplines. C'est ainsi que fonctionnent également les challenges tels que la coupe de robotique des écoles primaires à Lille[36]. Nous donnons ici un exemple parmi d'autres, celui de l'interface MakeyMakey qui permet de « faire de n'importe quoi, une touche d'ordinateur » (n'importe quoi de conducteur). Avec cette interface, il est possible d'interagir avec n'importe quel logiciel, par exemple Scratch. Puisque le graphite des crayons de papier est conducteur, il est possible d'agir sur des dessins ; l'humain, qui touche le dessin pour répondre, sert à fermer les circuits. Des exemples d'utilisations possibles existent déjà en ligne, mais les élèves et l'enseignant peuvent exploiter leur imagination.

Nous ne développerons pas ici les autres démarches, comme le cours inversé ou l'hybridation des cours. Nous renvoyons aux travaux, par exemple, de Lebrun (2015a ; 2015 b).

Dans une troisième partie, nous passons de l'enseignement à la formation avec les artefacts numériques.

3 Pour la formation avec le numérique ?

Les éléments que nous venons de développer donnent des pistes pour former les enseignants au numérique et nous proposons maintenant des pistes pour répondre aux questions de formation avec le numérique.

Par exemple, nous avons mis en évidence la perte de rétroaction liée à la visioconférence. Les artefacts de nouvelle génération permettent de résoudre ce problème, notamment la visioconférence immersive, qui diffuse l'image des personnes à distance à l'échelle 1 : 1 et donne donc l'illusion de la présence.

Cette amélioration de qualité ne change pas fondamentalement les stratégies de formation, contrairement aux deux outils que nous exposons maintenant.

3.1 Un constat de départ : les difficultés de mise en lien de la formation et du terrain

La formation des professeurs des écoles se déroule, en Master 2, en alternance avec un mi-temps à l'université dans une ÉSPÉ (École Supérieure du Professorat et de l'Éducation) et à mi-temps en responsabilité dans une classe (ou plusieurs classes). Que ce soit dans le cadre de l'évaluation des formations par les étudiants, les rapports de l'IGAENR, les évaluations de DGSIP, la difficulté à mettre en relation pratique et formation est avancée. En analysant les rapports de validation des stagiaires (voir au II-4.3), nous avons mis en évidence que cette difficulté caractérisait les stagiaires en difficultés.

Comment favoriser ce lien ? Comment faire entrer la pratique dans la formation en présentiel et réciproquement ? Une des premières pistes que nous avons exploitée (Emprin, 2007) est d'utiliser la vidéo de séance de classe dans les formations puis, nous nous sommes orientés vers les outils de simulation qui sont utilisés dans de nombreuses professions, même pour des métiers en lien avec des

[36] http://crep.plil.net

êtres humains (simulateur de relation client vendeur, d'entretien professionnel, de patient dans les soins infirmiers). Nous avons cherché les simulateurs existants tels que Sim School[37], TeachLive[38] et nous nous sommes intéressés aux travaux de Morge (2008), mais aucun de ces outils ne correspondait à nos attentes : simuler les interactions didactiques et permettre de questionner les différentes dimensions des pratiques. Nous avons dû nous résoudre à concevoir notre propre simulateur.

3.2 SIC : Simulateur Informatique de Classe

Nous avons donc conçu un simulateur informatique de classe (Emprin, 2011) disponible en ligne[39] permettant aux enseignants de voir les effets de leurs choix didactiques et pédagogiques sur les apprentissages des élèves. Il s'agit d'un simulateur à échelle partielle au sens de Pastré (2005) centré sur la réflexivité (Schön, 1994). Les choix se font à droite (*Figure 9*) dans une liste déterminée par les choix d'enseignants réels ayant mis en place cette situation et l'utilisateur observe, à gauche, les effets de ses choix sur les apprentissages des élèves.

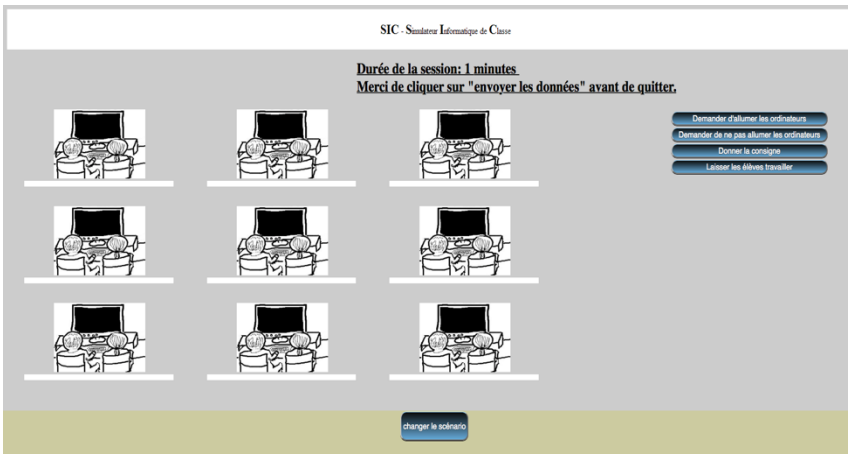


Figure 9 : copie d'écran de l'interface de SIC.

Il voit ce qu'ils font sur leur écran, il peut les interroger individuellement ou collectivement. À la fin de la simulation, il reçoit une information lui décrivant où les élèves en sont de la réalisation de la tâche, ce qu'ils ont appris et ce dont ils se souviennent une semaine plus tard.

Nous avons utilisé ce logiciel avec des étudiants de Licence 3 (pré pro), de M2 (MEEF 2D maths), des PE2 (avant la mastérisation des formations) et en formation continue premier et second degré. Les analyses nous montrent que le simulateur est reconnu comme un outil d'analyse de pratiques par les stagiaires et un accélérateur d'expérience (avec une moyenne de 4,8 essais par étudiant). Les contenus attendus émergent pendant la formation, tant au niveau des connaissances didactiques que celles sur les gestes professionnels, et les enseignants abordent bien plusieurs dimensions des pratiques.

Pour nous, ce travail vaut pour preuve de concept et vérification de nos hypothèses initiales de recherche (Sabra et Al, 2014 ; Emprin & Sabra, 2016 ; Emprin, 2018).

La relation entre formation et terrain peut être simulée autrement que par la simulation de classe, elle apparait dans le cadre de l'analyse de pratiques. C'est le second outil de formation que nous avons développé.

3.3 SAP : Simulateur d'Analyse de Pratiques

Mattéï-Mieusset (2013) et Brau-Antony et Mieusset (2013) identifient quatre dilemmes associés à l'activité d'analyse de pratique : transmettre le métier ou faire réfléchir pour permettre à l'Enseignant Stagiaire (ES) de construire sa réponse ; pointer les erreurs et les réussites de l'ES ou l'aider à les faire

[37] http://simschool.org

[38] http://teachlive.org

[39] http://cerep-sic.univ-reims.fr

émerger ; soutenir l'ES ou l'évaluer ; guider, imposer un cadre, des outils à l'ES ou le laisser libre de ses choix

SAP est programmé pour que l'utilisateur prenne conscience de ces dilemmes et qu'il identifie des savoirs qui permettent de mettre en évidence le rôle des technologies dans les apprentissages des élèves. Nous avons fait le choix de nous centrer sur l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique (LGD) dans le cadre d'une conjecture puis d'une démonstration.

Ainsi la programmation du logiciel utilise-t-elle des connaissances et des savoirs visés dans la formation qui se traduisent par des choix déterminés pour l'utilisateur en fonction des différentes postures par rapport aux dilemmes et permettant ou non de faire émerger les connaissances visées chez l'enseignant.

Nous avons utilisé le logiciel Virtual Training Software[40] qui permet de simuler une situation d'entretien avec un ou plusieurs avatars. L'utilisateur choisit parmi une liste les interventions et les actions qu'il veut faire, cette liste peut être par exemple sur la gauche, comme sur la *Figure 10*.

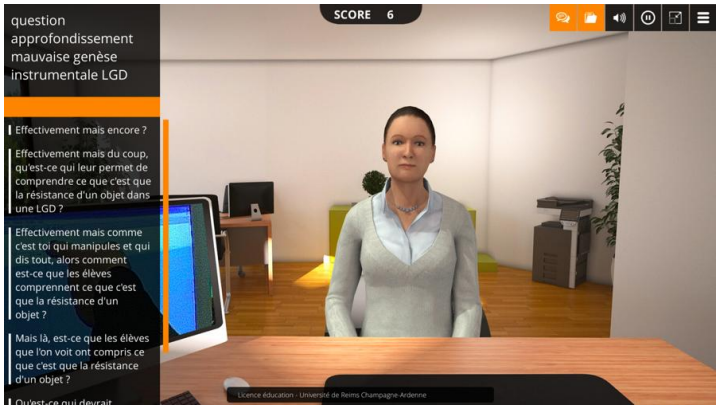


Figure 10 : capture d'écran de la simulation d'analyse de pratique.

Le contexte de l'entretien a été choisi pour correspondre aux usages de maîtres de stages qui indiquent s'installer dans un lieu isolé au calme avec leur stagiaire.

Les questions et les réponses sont entendues par l'utilisateur, les avatars présents sont animés et peuvent exprimer différents sentiments par la voix, mais aussi par les attitudes faciales, comme sur la *Figure 11* ci-dessous :

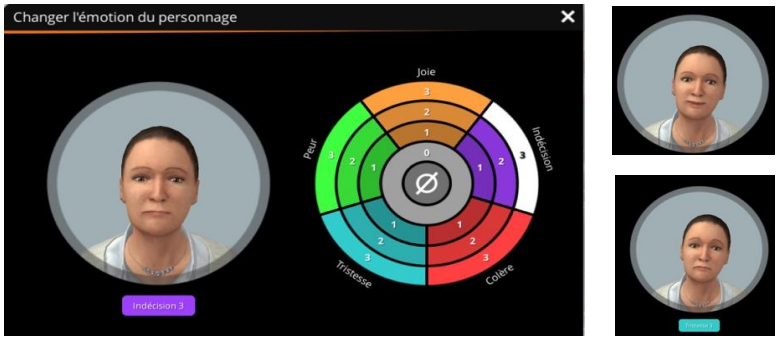


Figure 11 : attitudes faciles dans le logiciel VTS

À la fin du scénario, l'utilisateur reçoit des informations sur les effets de l'entretien. D'abord par un temps de questions-réponses, ils doivent dire s'ils pensent que leur stagiaire a repéré différents éléments pouvant être en jeu lors de l'entretien, comme indiqué dans la capture d'écran *Figure 12*. La stagiaire répond pour dire si elle a effectivement repéré ou non les différents éléments.

[40] https://www.seriousfactory.com/virtual-training-suite/, licence accordée à l'université de Reims Champagne Ardenne (URCA)



Figure 12 : questionnaire final, identifier ce que la stagiaire a repéré ou non.

Une fois le travail terminé, le logiciel renvoie à l'utilisateur son positionnement, tiré de ses choix, par rapport aux différents dilemmes. Par exemple, pour transmettre ou faire réfléchir, transmettre est au centre du diagramme radar et faire réfléchir à l'extérieur. Dans la *Figure 12*, on voit clairement que l'utilisateur est du côté de transmettre, pointer les erreurs, guider et plutôt vers évaluer. Le dernier score concerne l'appropriation des contenus didactiques possibles dans la séance. Le score de 2 sur 60 possible montre que la stagiaire n'a quasiment pas travaillé sur les concepts didactiques lors de cet entretien.

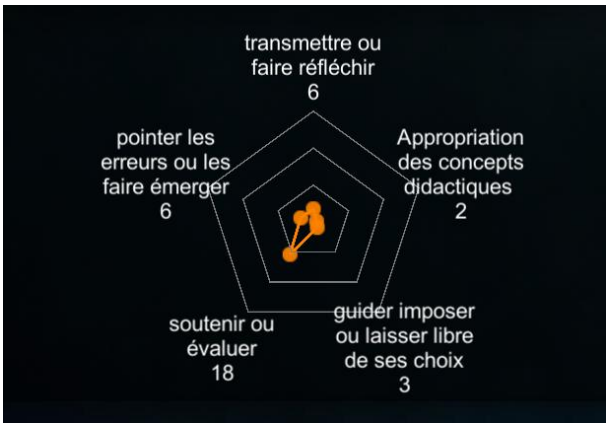


Figure 13 : diagramme final : positionnement dans les différents dilemmes.

Il est clair pour nous que ce positionnement final est discutable, chaque choix pouvant être interprété en fonction du contexte, mais c'est justement l'intérêt de ce travail qui doit permettre lors d'une formation d'engager une discussion entre stagiaires et formateur. Ces échanges doivent prendre en compte les composantes institutionnelles, personnelles et sociales des pratiques. Notre choix est donc de susciter des discussions qui mettent en jeu réellement ces composantes et qui nécessitent donc, de la part des stagiaires, de formuler des éléments personnels, liés à leurs contextes d'enseignement, leurs représentations du métier, des mathématiques, etc.

En travaillant avec un avatar et non une personne réelle, la simulation réduit les éléments affectifs à la perception des émotions programmées dans le logiciel, elle permet ainsi de se centrer sur les éléments professionnels.

Notre hypothèse peut sembler paradoxale, mais en travaillant dans un contexte neutre et dépersonnalisé, nous pensons que les utilisateurs sont plus amenés à préciser des composantes personnelles qui ont guidé leurs choix.

Nous sommes pleinement impliqués dans le développement d'artefacts et de scénarios de formation utilisant les technologies numériques, mais nous conservons une vigilance et une attention particulière quant aux exploitations et aux dérives possibles. Nous amenons quelques-unes de ces réflexions pour conclure.

IV - UNE RÉFLEXION POUR CONCLURE

Les artefacts numériques actuels ont une capacité inédite à stocker les informations liées aux apprentissages des apprenants. Cela ouvre un champ de recherche, mais aussi d'exploitation de ce gisement de données : les learning analytics.

Il s'agit notamment d'exploiter les données d'apprentissage des MOOC et des plateformes pour déterminer les processus d'apprentissage et anticiper la réussite en fonction des comportements des utilisateurs. Des études actuelles visent, par exemple, à comprendre les comportements de l'apprenant vis à vis de son dispositif numérique de formation, concevoir des algorithmes et des méthodes de rétroaction et d'adaptation qui favorisent l'apprentissage.

Le consortium APEREO développe depuis plusieurs années un projet ouvert d'analyse des données d'apprentissage[41]. Suite aux financements du M.E.N.E.S.R., pour l'étude de cette solution au sein de l'enseignement supérieur français, le consortium national ESUP-Portail commence la mise en place de la plateforme « Apereo Learning Analytics Initiative ». Elle est destinée à étudier et évaluer les possibilités offertes par les Learning Analytics dans un contexte français[42].

Ces initiatives visent à améliorer la compréhension des processus d'apprentissage et ainsi l'aide à apporter aux étudiants, mais leur potentiel prédictif, c'est-à-dire leur capacité à anticiper sur la réussite ou l'échec d'un étudiant à partir d'un échantillon de son comportement sur une plateforme, pourrait conduire à certaines dérives.

Le rappel de la CNIL (Commission National Informatique et Liberté) de mai 2017[43] nous semble un bon garde-fou par rapport à d'éventuelles dérives :

> *Dans le cadre de l'initiative Charte de confiance portée par le Ministère de l'Éducation, précisant que « compte tenu de la sensibilité de ces données, cette charte devrait se traduire par un encadrement juridique contraignant tant en ce qui concerne la non-utilisation des données scolaires à des fins commerciales, l'hébergement de ces données en France ou en Europe ou encore l'obligation de prendre des mesures de sécurité conformes aux normes en vigueur. ». Concernant l'analyse de l'apprentissage et plus particulièrement les modèles prédictifs qui en découleraient, l'article 10 de la loi informatique et libertés, propose qu'aucune « décision produisant des effets juridiques à l'égard d'une personne ne peut être prise sur le seul fondement d'un traitement automatisé de données destiné à définir le profil de l'intéressé ou à évaluer certains aspects de sa personnalité. ».*

Nous terminerons sur une note plus optimiste par une citation d'Albert Einstein : « Si tu fais toujours ce que tu as l'habitude de faire, tu récolteras ce que tu as toujours récolté ».

V - BIBLIOGRAPHIE

Abboud-Blanchard, M. (1994). *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire : symptômes d'un malaise,* Thèse de doctorat, université Paris 7.

Abboud-Blanchard, M. & Emprin, F. (2009). Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations TICE. *Recherche et formation*, 62, 125-140.

Albero, B. (2004). Technologies et formation : travaux, interrogations, pistes de réflexion dans un champ de recherche éclaté. S*avoirs*, 2 (5), 9-69.

Alvarez, J. (2007). *From Video Games to Serious Game.* Thèse de doctorat de l'Université Toulouse. Consultée à l'adresse https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01240683.

[41] https://www.apereo.org/communities/learning-analytics-initiative

[42] http://www.sup-numerique.gouv.fr/

[43] cité par Régis Chatellier, chargé des études prospectives CNIL tiré de : https://linc.cnil.fr/en/node/23673

Alzouma, G. (2012). Technologies éducatives et développement : une brève histoire de la télévision scolaire au Niger, *tic&société* [En ligne], Vol. 5, n° 2-3 | 2e sem. 2011 / 1er sem. 2012, mis en ligne le 18 juin 2012, consulté le 8 juin 2018. URL : http://journals.openedition.org/ticetsociete/1025 ; DOI : 10.4000/ticetsociete.1025

Argaut, H.-C., Douaire, J., Emprin, F., Gerdil-Margueron, G. (à paraître). *Les essentielles ERMEL CE2.* Hatier.

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 8(3), 267-312.

Artigue M., Bosch, M., Gascón J. (2011). Research praxeologies and networking theories. In, M. Pytlak, T. Rowlad & E. Swoboda (Eds), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* 281-2390. Poland: University of Rzeszów.

Assude, T. & Emprin, F. (2013). Repenser la formation aux TICE : dialectique entre recherche et formation. In J.-B. Lagrange (dir.), *Les Technologies Numériques pour l'Enseignement ; usages et genèses,* 225-240. Toulouse : Octares.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège,* Doctoral dissertation, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, Université Joseph-Fourier-Grenoble I.

Baron, G.-L. (2014). Élèves, apprentissages et "numérique". Regard rétrospectif et perspectives. *Recherches en Éducation,* 18, 91–103. http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-no18.pdf.

Bates, T. A. W. (2005). Technology, *E-learning and Distance Education (2nd ed.).* Routledge.

Becta (2010). Harnessing Technology Review 2009 The role of technology in further education and skills. Coven- try. *Becta.* http://publications.becta.org.uk/display.cfm?resID=41523&page=1835.

Blandin, B. (2004). Historique de la formation "ouverte" et à "distance". *Actualité de la formation permanente,* 189, 69-71.

Bordeleau, P. (1999). *Technologies éducatives : déjà une longue histoire*. L'éducation saisie.

Brau-Antony, S. & Mieusset, C. (2013). Accompagner les enseignants stagiaires : une activité sans véritables repères professionnels. *Recherche et formation,* 72, 27-40.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *RDM,* 19(2), 221-266.

Connan, P. Y., Emprin, F. (2011). Le portfolio numérique : quelles évolutions des usages et des représentations chez les formateurs d'enseignants ? *Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation - STICEF, 18,* 229-262.

Cros, L. (1961). "*L'explosion*" *scolaire*. Sevpen.

De Gennes, P. G. (1992). Soft matter (Nobel lecture). *Angewandte Chemie International Edition in English,* 31(7), 842-845. DOI : https://doi.org/10.1002/anie.199208421.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *In Annales de Didactique et de Sciences cognitives,* 1, 57-74.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *In Annales de didactique et de sciences cognitives,* 5, 37-65.

Egly, M. (1984). *Télévision didactique : entre le kitsch et les systèmes du troisième type ?*. Edilig.

Emprin, F. (2007). *Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique*, Thèse de didactique des disciplines, Université Paris VII – Denis Diderot.

Emprin, F. (2011). Construction d'un Simulateur Informatique de Classe (SIC) pour la formation des enseignants. *Conférence EIAH 2011 (Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain*), MONS - Belgique, 25 au 27 mai 2011.

Emprin, F. (2018). Un simulateur informatique de classe pour la formation et la recherche. Quelle place des recherches en didactique dans la conception et l'expérimentation ?, in Lagrange, J.-B. et Abboud-Blanchard, M. *Environnements numériques pour l'apprentissage, l'enseignement et la formation : perspectives didactiques sur la conception et le développement,* IREM de Paris. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS18001.pdf.

Emprin, F., Jourdain, C. (2010). Les représentations des enseignants sur l'échec scolaire : étude à partir d'une question contraposée, *Congrès international AREF (Actualité de la recherche en éducation et en formation)*, du 13 au 16 septembre 2010, Genève.

Emprin, F. & Riera, B. (2014). Process of creating educational uses by teachers from a 3D simulation of a house home automation to teach technology. *In proceedings of the 3rd international constructionism conference* (pp. 247-257).

Emprin, F., Sabra, H. (2016) Simulateur informatique de classe pour la formation des enseignants : l'enseignement de la résolution de problèmes, *In actes du XLII*ème *colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques COPIRELEM : former et se former… quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ?* ARPEME.

ERMEL (2006). *Ermel-Apprentissages Géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*. (Dir. Charnay, R. & Douaire, J.). Hatier.

Fumet, J.-C. (2012). http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2012/11/30112012Article634898584502318913.aspx

Garrison, D. R. (1993). Multifunction microcomputer enhanced audio teleconferencing: Moving into the third generation of distance education. In K. Harry, M. John, & D. Keegan (Éd.), *Distance Education: New Perspectives,* 200–208. New-York : Routledge.

Glikman, V. (1995). Les avatars de la télévision éducative pour adultes en France : histoire d'une "non-politique" (1964-1985). Revue française de pédagogie, 110, 63-74.

Glikman, V. (2014). Pédagogies et publics des formations à distance. Quelques touches historiques. Distances et médiations des savoirs. *Distance and Mediation of Knowledge,* 2(8). https://doi.org/10.4000/dms.902.

Gueudet, G. (2009). Ressources en ligne, enseignement et apprentissage des mathématiques au premier degré. *In XXXVI*ème *colloque COPIRELEM. L'enseignement des mathématiques à l'école : où est le problème ?* ARPEME.

Harel, I. E., Papert, S. E. (1991). *Constructionism*. Ablex Publishing.

Holmberg, B. (2005). *The evolution, principles and practices of distance education*. Oldenburg : Bibliotheks- und Informationssystem der Universität Oldenburg.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 16(3), 289-322.

Jacquinot, G. (1993). Apprivoiser la distance et supprimer l'absence ? ou les défis de la formation à distance. *Revue française de pédagogie*, 55-67.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics,* 44(1-2), 151-161.

Laborde C. et Capponi B. (1994) : Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 14(12), 165-210.

Lagrange, J.-B. (dir.). (2013). *Les technologies numériques pour l'enseignement. Usages, dispositifs et genèses.* Toulouse : Octarès.

Lagrange, J.-B. (s. d.). *Le tableau noir, l'ordinateur et l'internet*. Consulté mai 10, 2011, de http://jb.lagrange.free.fr/site/index.php?option=com_content&task=view&id=24&Itemid=51.

Lagrange, J.-B. & Dedeoglu, N. (2009). Usages de la technologie dans des conditions ordinaires. Le cas de la géométrie dynamique au collège. Recherches en Didactique des Mathématiques, 29(2), 189-226.

Lebrun, M. (2015a). L'hybridation dans l'enseignement supérieur : vers une nouvelle culture de l'évaluation ?. *e-JIREF*, 1(1), 65-78.

Lebrun, M. (2015 b). L'école de demain : entre MOOC et classe inversée. *Institut de pédagogie universitaire et des multimédias, université catholique de Louvain*, Belgique, 156, 41-47.

Margolinas, C. (2012). Des savoirs à l'école maternelle. Oui, mais lesquels ?, *in Actes du XXXIX*ème *colloque COPIRELEM.*. ARPEME.

Mattéï-Mieusset, C. (2013). *Les dilemmes d'une pratique d'accompagnement et de conseil en formation. Analyse de l'activité réelle du maitre de stage dans l'enseignement secondaire,* Doctoral dissertation, Université de Reims Champagne Ardenne.

Miller, D., & Glover, D. (2007). Into the unknown: The professional development induction experience of secondary mathematics teachers using interactive whiteboard technology. *Learning, Media and Technology,* 32(3), 319-331.

Morge, L. (2008). *De la modélisation didactique à la simulation sur ordinateur des interactions langagières en classe de sciences.* Habilitation à Diriger des Recherches, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II.

Office for Standards in Education [OFSTED] (2008). *How well new teachers are prepared to teach pupils with learning difficulties and/or disabilities*. London: HMSO.

Oppenheimer, J. R. (1955). *La science et le bon sens* (Vol. 30). Gallimard.

Pastré, P. (dir.) (2005). *Apprendre par la simulation : de l'analyse du travail aux apprentissages professionnels.* Toulouse : Octarès.

Pedemonte, B. (2006). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25(75), 313.

Peraya, D. (2003). De la correspondance au campus virtuel : formation à distance et dispositifs médiatiques. In Charlier B., Peraya D. (Éd.), *Technologie et innovation en pédagogie. Dispositifs innovants de formation pour l'enseignement supérieur* , 79–91. Paris : De Boeck.

Prost, A. (1981). *Histoire de l'enseignement et de l'éducation depuis 1930*. Paris : Perrin.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains,* Armand Colin, Paris.

Ratinaud, P. & Marchand, P. (2012). Application de la méthode ALCESTE à de "gros" corpus et stabilité des "mondes lexicaux" : analyse du "CableGate" avec IRaMuTeQ. *Actes des 11*e *Journées internationales d'Analyse statistique des Données Textuelles,* 835-844.

Reinert, M. (1986), Un logiciel d'analyse lexicale. *Les Cahiers de l'analyse des données*, 11 (4), 471-481.

Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., ... & Kafai, Y. (2009). Scratch: programming for all. *Communications of the ACM,* 52(11), 60-67

Restrepo, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6*e*,* Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I.

Riera, B., Emprin, F., Annebicque, D., Colas, M., Viagio, B.T. (2016). HOME I/O: a virtual house for control and STEM education from middle, *Proceeding of the 11th IFAC Symposium on Advances in Control Education,* Bratislava, Slovakia, June 1-3.

Robert, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe, *Didaskalia*, n° 15. DOI : 10.4267/2042/23878.

Robert, A. (2005). Sur la formation des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré, *Recherche et Formation,* 50, 5-90. DOI : 10.3406/refor.2005.2103

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505-528.

Ruthven, K. & Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational studies in mathematics*, 49(1), 47-88.

Sabra, H., Emprin, F., Connan, P.-Y., Jourdain, C. (2014). Classroom Simulator, a new instrument for teacher training. The case of mathematical teaching, in Futschek, G. & Kynigos, C. (eds). *Proceedings of the 3rd international constructionism conference*, August 19-23, 2014 Vienna, Austria.

Schön, D.-A. (1994). *Le praticien réflexif.* (J. Heynemand & D. Gagnon, Trads.) les éditions Logique.

Shaw, M. (2006). Board fun fails to raise game. Times Educational Supplement, (4673): 5.

Somekh, B. (2007). *Pedagogy and learning with ICT: Researching the art of innovation*. Routledge.

Smith, F., Hardman, F., Higgins, S. (2006). The impact of interactive whiteboards on teacher—pupil interaction in the National Literacy and Numeracy Strategies. *British educational research journal*, 32(3), 443-457.

Zampa, V. (2003). *Les outils dans l'enseignement : conception et expérimentation d'un prototype pour l'acquisition par expositions à des textes,* Thèse de doctorat, Université Pierre-Mendès-France, Grenoble.

CONFÉRENCE 2

TRAVAILLER AVEC LES FORMES EN MATERNELLE : PREMIERS PAS VERS DES CONNAISSANCES GÉOMETRIQUES ?

Valentina CELI
Maîtresse de Conférences, ESPE d'Aquitaine, Lab-E3D, Université de Bordeaux, COPIRELEM
valentina.celi@u-bordeaux.fr

Sylvia COUTAT
Chargée d'enseignement, Université de Genève, Équipe DiMaGe
Sylvia.Coutat@unige.ch

Céline VENDEIRA-MARÉCHAL
Chargée d'enseignement, Université de Genève, Équipe DiMaGe
Celine.Marechal@unige.ch

Résumé

En entrant dans une classe de maternelle, plusieurs sortes d'artefacts peuvent attirer notre attention : jeux d'emboîtement de formes, lots de formes isolées, assemblages de formes, crayons … En quoi ces artefacts usuels en classe de maternelle peuvent-ils devenir des instruments adaptés pour accompagner l'élève VERS ses premiers apprentissages géométriques ? C'est pour apporter des éléments de réponse à la question posée que nous verrons comment les modalités visuelle, haptique et verbale peuvent et doivent s'alterner ou s'articuler pour permettre à l'élève de construire et d'enrichir ses appréhensions des figures géométriques.
Un zoom sera ensuite fait sur un matériel original, constitué de trente-six formes non usuelles, qui permet un changement de regard sur les figures géométriques, dès le cycle 1. Ces formes, par leurs nature et variété, conduisent entre autres à travailler autour de caractéristiques telles que la convexité, la présence de bords droits ou courbes, de symétries, de côtés opposés parallèles. Quelques exemples significatifs seront présentés sur des manières dont les élèves agissent sur ce matériel et en parlent, ce qui est révélateur d'une évolution dans leur manière de penser les figures géométriques.

Dans un écrit de 1935, Vygotski affirme que « tout apprentissage suppose une période de développement embryonnaire, une période de pré-apprentissage, de préparation à l'apprentissage ». En nous posant la question « Travailler avec les formes en maternelle : premiers pas vers des connaissances géométriques ? », nous essayons de comprendre comment le travail avec les formes peut effectivement correspondre à cette période de préparation aux apprentissages géométriques.

Pour commencer, précisons la signification que nous attribuons à quelques termes utilisés par la suite et qui sont déjà présents dans le titre. En accord avec Perrin-Glorian (2015), les formes géométriques dont nous parlons sont des objets matériels de l'espace, en carton ou en plastique, manipulables, dont on néglige l'épaisseur ; ces objets (ou leur formes évidées), utilisés comme gabarits (ou pochoirs), permettent de tracer leurs contours et donc de dessiner des *figures matérielles*[44] simples.

Lorsque nous évoquons des connaissances géométriques, nous pensons à ces connaissances qui se distinguent (mais s'articulent avec) des connaissances spatiales, telles qu'elles sont définies par Berthelot et Salin (1993-1994) : elles permettent de résoudre des problèmes portant sur des objets dans l'espace physique ou dans l'espace graphique (Salin, 2008).

Enfin, « travailler avec des formes … », nous pensons notamment à l'activité de l'élève, au sens de Robert (2004), donc à ce qu'il pense, fait et dit.

[44] Nous parlons ici de *figure matérielle*, au sens de Celi et Perrin-Glorian (2014), à savoir de la représentation matérielle d'une figure géométrique, dessin particulier sur lequel on doit exercer un regard spécifique.

I - QUELQUES ÉCLAIRAGES ÉPISTÉMOLOGIQUES[45]

1 Le *potentiel sémiotique* d'un *artefact*

En entrant dans des classes de maternelle, nous trouvons de très nombreux *artefacts*[46] (Rabardel, 1995) : jeux d'emboîtement, lots de formes isolées, assemblages de formes (tels que les puzzles), gabarits et pochoirs de formes, crayons … (Figure 1). Ces artefacts, couplés à l'activité de l'élève (à ce qu'il en fait et ce qu'il en dit), deviendront ou pourraient devenir les *instruments* qui accompagnent l'élève VERS ses premiers apprentissages géométriques, si l'enseignant est ou était conscient de leur *potentiel sémiotique* (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008). À savoir qu'il est crucial d'identifier la relation entre l'utilisation de l'artefact et les connaissances mathématiques sous-jacentes à son utilisation. Avoir conscience du potentiel sémiotique d'un artefact est alors une condition nécessaire pour que l'enseignant puisse faire évoluer les *significations personnelles* des élèves VERS des *significations mathématiques*[47].



Figure 14. Des artefacts dans les classes de maternelle.

Prenons ici l'exemple d'un assemblage de formes et d'un enseignant qui propose à ses élèves de reproduire un modèle, à l'aide des sept pièces du Tangram, dans le cas où ce modèle est à une autre échelle que l'assemblage à réaliser (Figure 2).



Figure2. Reproduire un modèle à l'aide des sept pièces du Tangram.

Pour résoudre ce problème de reproduction, il ne suffit pas de reconnaître la nature des pièces et leur taille globale mais il faut s'intéresser à l'alignement éventuel de segments, au placement d'un côté par rapport à un autre. Finalement, il faut s'intéresser aux bords des pièces, comparer des bords pour reconnaître et produire des égalités et des inégalités de longueurs (Perrin-Glorian, 2015). Ici, il est alors important que l'enseignant soit conscient qu'un premier changement de regard s'opère sur les pièces du puzzle : des formes à leur bord. Nous reviendrons sur cela plus loin.

2 Modalités visuelle et haptique pour la perception et la mémoire des formes

En 1882, dans l'arrêté réglant l'organisation pédagogique des écoles maternelles publiques, dans la rubrique sur les *leçons des choses*, on prescrit l'étude de formes par le jeu et une première *éducation des sens* par des petits exercices dont, par exemple, faire discerner et comparer des formes[48]. Les formes géométriques sont aussi présentes depuis longtemps dans le discours de quelques spécialistes – tels que

[45] Cette partie est rédigée par Valentina Celi.

[46] « chose susceptible d'un usage, élaborée pour s'inscrire dans une activité finalisée […] nous utiliserons le terme d'instrument pour désigner l'artefact en situation, inscrit dans son usage » (Rabardel, 1995, p. 49).

[47] Les *significations personnelles* et les *significations mathématiques* pourraient correspondre respectivement aux *concepts quotidiens* et aux *concepts scientifiques*, au sens de Vygotski (1934-1990).

[48] https://www.persee.fr/doc/inrp_0000-0000_1982_ant_1_1_3578

des pédagogues, des didacticiens, des mathématiciens – qui se sont intéressés à l'éducation des enfants en âge préscolaire. Déjà au début du 20e siècle, en s'inspirant des travaux de Itard[49], de Fröbel[50] et de Séguin[51], Maria Montessori met au point des artefacts utiles pour ce qu'elle aussi appelle l'*éducation des sens*. À propos d'un travail sur la reconnaissance des formes, elle fait construire pour les enfants des emboîtements géométriques car, selon elle, l'association des sensations tactilo-musculaire et visuelle favorise la reconnaissance des formes : « Indubitablement, l'association du sens tactilo-musculaire au sens visuel aide beaucoup à la perception des formes et en fixe la mémoire » (Montessori, 1913?-1970[52], p. 110).

Ci-après, des images actuelles d'élèves travaillant avec un emboîtement de formes. Les photographies au centre (Figure 3b et Figure 3c) montrent l'utilisation qu'une petite fille fait de cet artefact et nous suggèrent quelques réflexions.



Figure 3a



Figure 3b



Figure 3c



Figure 3d

Par la nature même de cet artefact, la forme ne peut entrer que dans son cadre correspondant : l'enfant se trompe, elle change et semble procéder par tâtonnement. Montessori (1913?-1970) parlait d'*auto-correction*, on parle aujourd'hui de *rétroaction*[53] (Bessot, 2003) : l'artefact « contrôle chaque erreur […] l'action de se corriger soi-même concentre l'attention de l'enfant sur les différences » (Montessori, ib., p. 95) et donc sur la comparaison entre les formes en jeu.

Et cela nous renvoie alors à reconnaître quelques éléments du potentiel sémiotique de l'artefact. L'enfant manipule chaque forme en cherchant à l'ajuster dans l'espace évidé correspondant et chaque forme s'ajuste selon des conditions différentes. De son côté, l'enseignant associe à cet usage :

- la distinction de formes selon la nature du bord (droit ou courbe) ;
- la reconnaissance d'une forme, indépendamment de sa taille et de son orientation ;
- mais aussi la présence ou non d'axes de symétrie pour chaque forme[54].

---

[49] Médecin français (1774-1838).

[50] Pédagogue allemand (1782-1852).

[51] Pédagogue français (1812-1880).

[52] Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage *Pédagogie scientifique*, tome 1, publié en 1970. Cet ouvrage est la traduction de *Il Metodo della pedagogia scientifica applicato all'educazione infantile nelle Case dei Bambini*, publié en italien en 1909, 1913, 1926, 1935 et 1950. Aucune indication n'étant présente dans la version française, à propos de l'édition originale, nous nous sommes adressée à Paola Trabalzini, enseignante-chercheure en histoire de la pédagogie à l'Université LUMSA (Rome) et auteure d'une étude comparative des cinq éditions italiennes de l'ouvrage de Montessori en question. Après avoir pris connaissance de l'édition en français, elle a ainsi répondu : « Il est traduit de l'édition anglaise de 1912 ou de l'édition italienne de 1913. La traductrice, Mary Cromwell, était originaire des États-Unis et je ne sais pas si elle connaissait l'italien ou non. J'exclus que le premier volume de 1970 puisse être la traduction de l'édition italienne de 1909 parce que l'édition française contient deux chapitres qui sont ajoutés par Montessori à partir de l'édition anglaise de 1912 et de l'édition italienne de 1913. De plus, les photographies contenues dans le premier volume de l'édition de 1970 sont toutes antérieures à 1915 et certaines d'entre elles sont présentes à la fois dans l'édition anglaise de 1912 et dans l'édition italienne de 1913 ».

[53] « information qui est reçue par l'élève comme une sanction, positive ou négative, relative à son action et qui lui permet d'ajuster cette action, d'accepter ou de rejeter une hypothèse, de choisir entre plusieurs solutions » (Bessot, 2003, p. 9).

[54] Selon Gentaz et al. (2009), la reconnaissance visuelle des formes est entre autres déterminée par leur nombre d'axes de symétrie, par l'orientation des axes de symétrie par rapport au corps du sujet. C'est donc un élément important à prendre en compte pour mieux identifier les difficultés des élèves. Cela semble d'ailleurs justifier la

Et toutes ces significations peuvent aider l'enseignant pour conduire l'élève à caractériser et à catégoriser des formes.

Parmi les idées que Maria Montessori a expérimentées et exposées dès le début du 20e siècle, certaines sont aujourd'hui confortées par des travaux en sciences cognitives. En partant du constat qu'une grande partie des apprentissages scolaires fondamentaux mobilisent seulement la modalité sensorielle visuelle des jeunes enfants (cf. Figure 4), Gentaz et al. (2009) montrent que, dans une activité destinée à préparer les apprentissages géométriques, la modalité haptique manuelle (le *sens tactilo-musculaire* de Montessori) permet aux enfants de mieux se représenter les figures planes élémentaires :

> *l'introduction de la modalité haptique, dans les exercices de reconnaissance de figures et d'utilisation du vocabulaire approprié, aiderait les enfants à mieux se représenter les figures planes élémentaires grâce à son traitement analytique et/ou à son double codage (visuel et moteur).* (Gentaz et al., 2009, p. 29).

Par ailleurs « percevoir manuellement une figure implique un traitement plus analytique de l'information, contrairement à la modalité visuelle impliquant un traitement plus global » (ibid, p. 31).

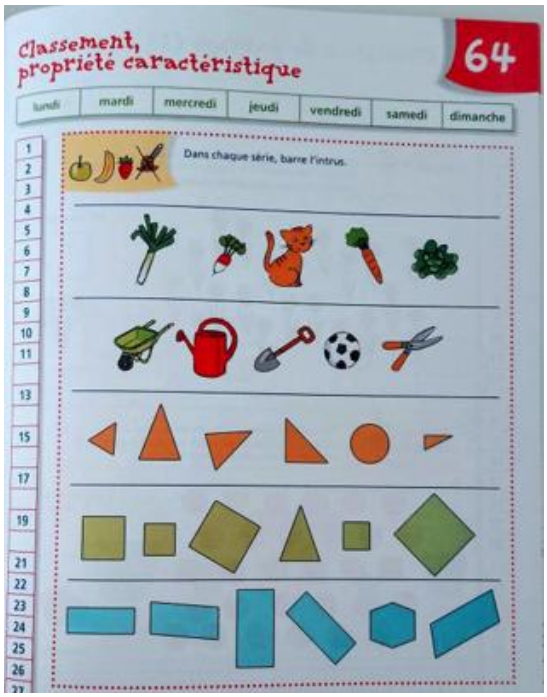


Figure 4. Un extrait de Pour comprendre les maths, GS *(Hachette, 2008) : pour accomplir la tâche, l'élève peut mobiliser seulement la modalité sensorielle visuelle.*

Analysons alors un instant d'une séance de classe où deux élèves travaillent avec des formes et leur enseignante leur propose de les reconnaître, les désigner et les nommer. Un élève (E1) vient d'identifier une forme comme étant un rectangle. L'enseignante prend alors dans ses mains deux rectangles de taille et de couleur différentes et demande à un deuxième élève (E2) :

> ***Enseignante*** *: Moi, je ne comprends pas, ça aussi c'est un rectangle ? Ce sont les mêmes ?* [Elle a un rectangle bleu dans sa main gauche, elle prend un rectangle rouge plus petit dans sa main droite] E1 hoche la tête, il est d'accord.
>
> ***Enseignante*** *: Pourquoi c'est un rectangle et ça aussi ?*
>
> ***E2*** *:* [il touche tout le bord du rectangle rouge (Figure 5)] *Parce que parce qu'il y a les différentes*
>
> ***Enseignante*** *: Qu'est-ce qui est différent ?*
>
> ***E2*** *:* [il touche encore tout le bord du rectangle rouge] *Les rectangles*
>
> ***Enseignante*** : [à nouveau] *Qu'est-ce qui est différent ?*

---

difficulté qu'ont les élèves à reconnaître un carré quelle que soit sa position et, notamment, à la confusion qu'ils font entre le carré et le losange.

E2 *:* [il continue à toucher tout le bord du rectangle rouge] *Les rectangles* [il touche deux bords parallèles du rectangle rouge avec les deux mains]
Enseignante *: Ce sont les mêmes ceux-là ?*
E2 *: Oui*



Figure 5. L'élève touche le contour du rectangle rouge.

À la question de l'enseignante, l'élève touche spontanément le contour de la forme (Figure 5). Il affine la perception de la forme mais il ne sait pas verbaliser ce qu'il perçoit par le toucher. Le traitement analytique fait par ses gestes ne trouve pas de correspondant dans ce qu'il dit. De son côté, l'enseignante semble avoir conscience du potentiel sémiotique de l'artefact qui est dans les mains de l'élève : en ayant fait preuve de la reconnaissance d'une forme, indépendamment de sa taille, elle voudrait conduire l'enfant à « décrire » la « catégorie » des rectangles. Nous reviendrons sur cet échange plus loin.

3 Des *croyances partagées*[55]

Dans leurs travaux, Gentaz et al. (2009) montrent aussi que le triangle est la figure la moins bien connue par des enfants entre 4 et 6 ans car les exemplaires non semblables d'une figure de même nature ne sont pas reconnus de façon équivalente et le triangle possède beaucoup de ces exemplaires (Figure 6).

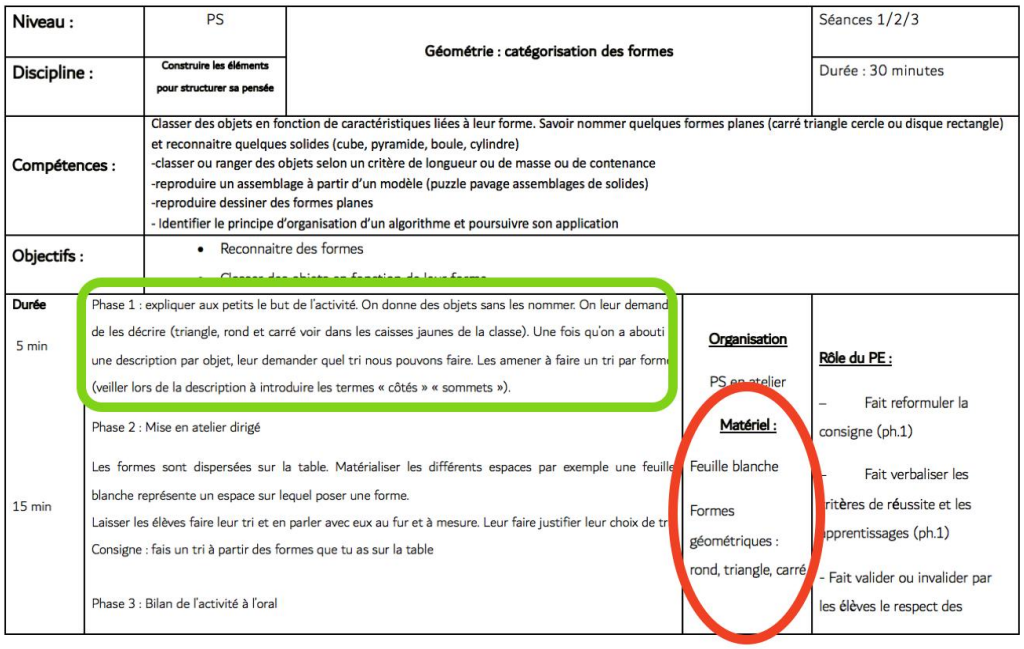


Figure 6. Quelques exemplaires de formes triangulaires.

Ce résultat nous aide alors à réfuter des croyances partagée (Vause, 2011) par bon nombre d'enseignants, à savoir que « les enfants de PS ne peuvent pas reconnaître le carré ou le rectangle car ils ne savent pas compter jusqu'à quatre » et qu'il « vaut mieux commencer le travail de reconnaissance des formes par le disque et le triangle ». Mais ces croyances en cachent une autre, voire plusieurs. Ces enseignants croient que l'étude des formes, en maternelle, doit commencer par l'analyse de leurs *caractéristiques* (au sens de Vendeira et Coutat, 2017), en se focalisant sur le nombre de côtés et de sommets et en introduisant alors rapidement des termes « savants ». De surcroît, cette analyse se fait souvent en ne prenant que des formes usuelles, en les traitant isolément les unes des autres.

[55] « idées partagées par les membres d'un groupe (social, culturel, professionnel) et tenues pour vraies sans pour autant qu'elles aient été validées empiriquement » (Vause, 2011, p. 22).

La fiche de préparation (Figure 7) est un exemple assez représentatif de ce type de croyances : le jeune enseignant se propose de demander à ses élèves de petite section (PS) de « décrire » et puis de « trier » les formes mises à leur disposition ; il ne s'agit que de ronds, triangles et carrés et l'enseignant fera grande attention à introduire, lors de la phase de description, à introduire les termes « côtés » et « sommets ».



Niveau :	PS	**Géométrie : catégorisation des formes**	Séances 1/2/3
Discipline :	**Construire les éléments pour structurer sa pensée**		Durée : 30 minutes
Compétences :	Classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme. Savoir nommer quelques formes planes (carré triangle cercle ou disque rectangle) et reconnaitre quelques solides (cube, pyramide, boule, cylindre) -classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance -reproduire un assemblage à partir d'un modèle (puzzle pavage assemblages de solides) -reproduire dessiner des formes planes - Identifier le principe d'organisation d'un algorithme et poursuivre son application		
Objectifs :	• Reconnaitre des formes • Classer des objets en fonction de leur forme		
Durée 5 min 15 min	Phase 1 : expliquer aux petits le but de l'activité. On donne des objets sans les nommer. On leur demand de les décrire (triangle, rond et carré voir dans les caisses jaunes de la classe). Une fois qu'on a abouti une description par objet, leur demander quel tri nous pouvons faire. Les amener à faire un tri par form (veiller lors de la description à introduire les termes « côtés » « sommets »). Phase 2 : Mise en atelier dirigé Les formes sont dispersées sur la table. Matérialiser les différents espaces par exemple une feuill blanche représente un espace sur lequel poser une forme. Laisser les élèves faire leur tri et en parler avec eux au fur et à mesure. Leur faire justifier leur choix de tr Consigne : fais un tri à partir des formes que tu as sur la table Phase 3 : Bilan de l'activité à l'oral	**Organisation** PS en atelier **Matériel :** Feuille blanche Formes géométriques : rond, triangle, carré	**Rôle du PE :** – Fait reformuler la consigne (ph.1) – Fait verbaliser les critères de réussite et les apprentissages (ph.1) - Fait valider ou invalider par les élèves le respect des

Figure 7. Extrait d'une fiche de préparation d'un jeune enseignant de maternelle.

4 Appréhension globale des formes

Une autre approche émerge néanmoins et fait consensus dans le discours de spécialistes, et cela depuis longtemps, à savoir que la première perception d'une forme est globale.

Montessori (1913?-1970, p. 59) écarte tout à fait l'entrée par les caractéristiques d'une forme, cela pouvant se déduire notamment d'après un extrait qui fait écho aux croyances partagées encore de nos jours par des enseignants et auxquelles nous venons de faire allusion :

> *On pourrait avoir l'idée de la forme carrée, sans savoir compter jusqu'à quatre et, par conséquent, sans considérer le nombre de côtés et des angles. Les côtés et les angles ne sont que des abstractions, qui n'existent pas par elles-mêmes ; ce qui existe, c'est ce morceau de bois d'une forme déterminée.*

Selon Van Hiele (1959, p. 200), l'enseignant et l'élève « pensent [chacun] sur un niveau différent », ce qui le conduira à identifier cinq niveaux de conceptualisation de la pensée géométrique. Au niveau de base, l'élève reconnaît les formes à leur aspect global et il les classe de façon exclusive les unes par rapport aux autres : « Au niveau de base (niveau zéro) de la géométrie, les figures [formes] sont jugées d'après leur apparence. Un enfant reconnaît un rectangle à sa forme et un rectangle lui semble différent d'un carré » (*ibid*, p. 201).

Rouche (1999), convaincu que les concepts sont susceptibles d'être acquis jusqu'à des niveaux divers de sophistication, en distingue trois : les *préconcepts*, les *objets mentaux* et les *concepts formels*. Au niveau des préconcepts, « attribué à des jeunes enfants », on reconnaît les formes à travers une perception globale. En s'appuyant sur l'exemple du rectangle, Rouche (1999, p. 33) affirme :

> *On reconnaît les rectangles à travers une perception globale […] quelqu'un qui se trouve à ce stade de développement mental manie donc familièrement le rectangle et, éventuellement, le nomme. Mais il n'est guère capable d'en parler, d'expliquer certains de ses caractères.*

C'est le cas de l'enfant que nous avons vu tout à l'heure : il sait reconnaître et nommer le rectangle mais il ne parvient pas à le caractériser. Lorsque cet enfant saura nommer le rectangle et pourra parler de ses caractéristiques, il sera, selon Rouche, au niveau des objets mentaux.

À la fin des années 1950, Van Hiele avait mis en évidence que « le professeur et l'élève parlent [chacun] un langage différent » et « ils pensent [chacun] sur un niveau différent ». En 1994, le décalage constaté entre ce que montre une figure au regard d'un élève et au regard d'un enseignant conduit Duval à préciser qu'il y a plusieurs manières de regarder une figure géométrique dont la plus immédiate est l'appréhension perceptive. Appréhension qui est toutefois, selon Duval, « trop globale ».

5 Outre l'appréhension globale

Lorsque l'élève cherche un rectangle dans un lot de formes, il doit apprendre à le reconnaître indépendamment de sa taille et de sa position sur la table : il l'appréhende de manière perceptive mais aussi, selon Duval (1994), de manière opératoire. Et tout cela par la vue. Mais ce n'est pas tout car, lorsque l'élève tente de caractériser le rectangle par le toucher, les perceptions visuelle et haptique s'articulent : une *appréhension séquentielle*[56] s'ajoute. Comme le précisent Fernandes et Vinter (2009, p. 410) :

> *Perception tactile et perception visuelle se distinguent dans le traitement des différentes propriétés d'un objet. En effet, dans la vision, toutes les propriétés sont perçues quasi simultanément, ce qui n'est pas le cas dans la modalité haptique, en raison du mode d'exploration et des incompatibilités motrices rendant la perception très séquentielle.*

C'est ainsi que l'enfant modifie la connaissance qu'il a de l'objet (Duval, ib.), par un traitement plus analytique des informations sur la figure, avec la prise en compte de son contour.

6 Formes et langage

Dès l'école maternelle, le langage est essentiel pour le développement de l'enfant et pour ses apprentissages. Les programmes actuels (MEN, 2015), en liaison avec les formes géométriques, précisent que le langage doit permettre de décrire objets et actions, en favorisant les premières caractéristiques descriptives. Donc décrire et non pas définir.

Mais, quel lexique géométrique aborder à l'école maternelle ?

Lors d'un travail avec les formes où les modalités haptique et visuelle s'alternent, une enseignante demande à un élève comment il fait à reconnaître un carré : en faisant semblant de le dessiner sur la table (cf. Figure 8), il répond : « C'est un carré parce que je fais, je fais le tour avec ma main alors je dis que c'est un carré ». Cet enfant se trouve bien au niveau des préconcepts, au sens de (Rouche, 1999), niveau où « si, à propos d'un objet rectangulaire particulier, on lui demande "c'est quoi ?", il répond volontiers "c'est pour". Si on lui demande "c'est comment ?", souvent il mime le rectangle avec les mains ou dessine un rectangle » (Rouche, 1999, p. 33).

Mais comment l'aider à franchir ce niveau ?

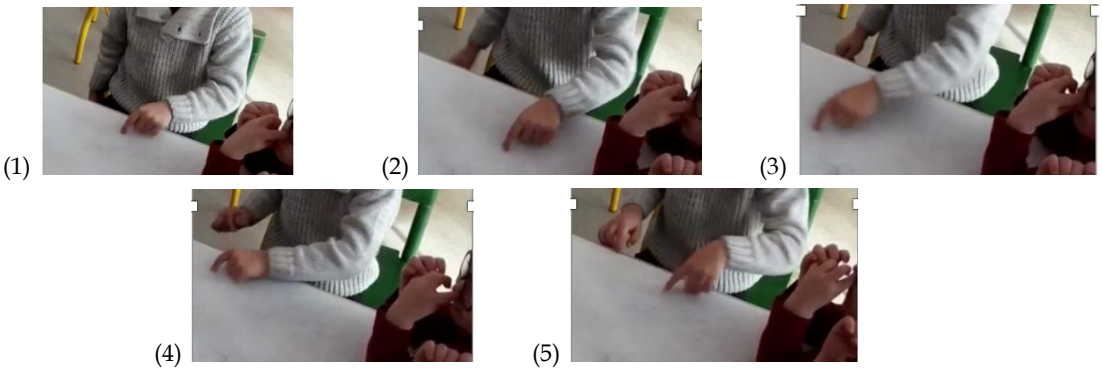


Figure 8. « C'est un carré parce que je fais, je fais le tour avec ma main alors je dis que c'est un carré ».

[56] Dans Duval (1994), l'auteur parle d'*appréhension séquentielle* pour signifier l'ordre de construction d'une figure, ordre qui dépend des propriétés géométriques de la figure ainsi que des instruments dont on dispose pour la construire. Dans le contexte de la maternelle, où les modalités visuelle et haptique jouent un rôle fondamental dans l'activité de l'enfant qui manipule des formes, cette appréhension séquentielle semble être plus proche de ce que Fernandes et Vinter (2009) nomment *perception séquentielle*, dans le but de mettre en évidence la distinction entre la perception tactile et la perception visuelle, cette dernière étant plus globale.

Lorsqu'un enseignant pense qu'il est judicieux de commencer par le triangle ou lorsqu'il prévoit d'introduire assez vite les termes « côté » et « sommet », il est évident qu'il est influencé par un regard trop « savant » sur le thème en question : le passage des significations personnelles de l'élève vers des significations mathématiques se construit progressivement, le langage qui l'accompagne aussi. Alors, il est souhaitable là aussi d'adopter un **principe de progressivité** : « en partant d'un lexique qui correspond à l'univers de l'école pour aller vers des champs lexicaux représentant le monde moins familier puis vers les éléments plus abstraits » (MEN, 2010). En d'autres termes, empruntés à Barth (2013, p. 78) :

> *Ne pas exiger certains termes avant que l'enfant ne sache ce qu'ils représentent. Cela ne veut pas dire qu'il ne faut pas exiger la dénomination correcte à un moment donné […] il y a un niveau d'acquisition qui précède l'abstraction et qu'il faut le respecter.*

7 L'emboîtement de formes et puis ?

Complétons cette première partie en faisons le point sur des artefacts à disposition d'un élève de maternelle, cela en faisant le choix de nous inspirer du programme de Montessori (1913?-1970 ; 1934-1911), qui débute avec les emboîtements géométriques[57]. Les variables didactiques à prendre en compte sont nombreuses : nous montrons ici quelques problèmes, sans toutefois passer en revue toutes les déclinaisons possibles que l'usage de ces artefacts suggère.

Avec la Figure 9 à l'appui, nous tentons alors de suivre un parcours qui démarre avec des jeux d'emboîtement de formes (Figure 9, en bas au centre) et, en passant par des lots de formes (Figure 9, en bas à gauche) et des assemblages de formes (Figure 9, en bas à droite), aboutit à des gabarits et des pochoirs (Figure 9, en haut). Ce parcours conduit entre autres l'élève à catégoriser et caractériser des formes ; à les reconnaître puis les reproduire ; à les désigner, les nommer, les décrire. Tout cela à travers une articulation de diverses appréhensions et modalités. Notamment, par le passage de la manipulation au traçage graphique, l'élève sera sensibilisé à passer d'une vision où c'est la surface qui prime vers une vision où il touche, aperçoit et puis trace le contour de celle-ci.

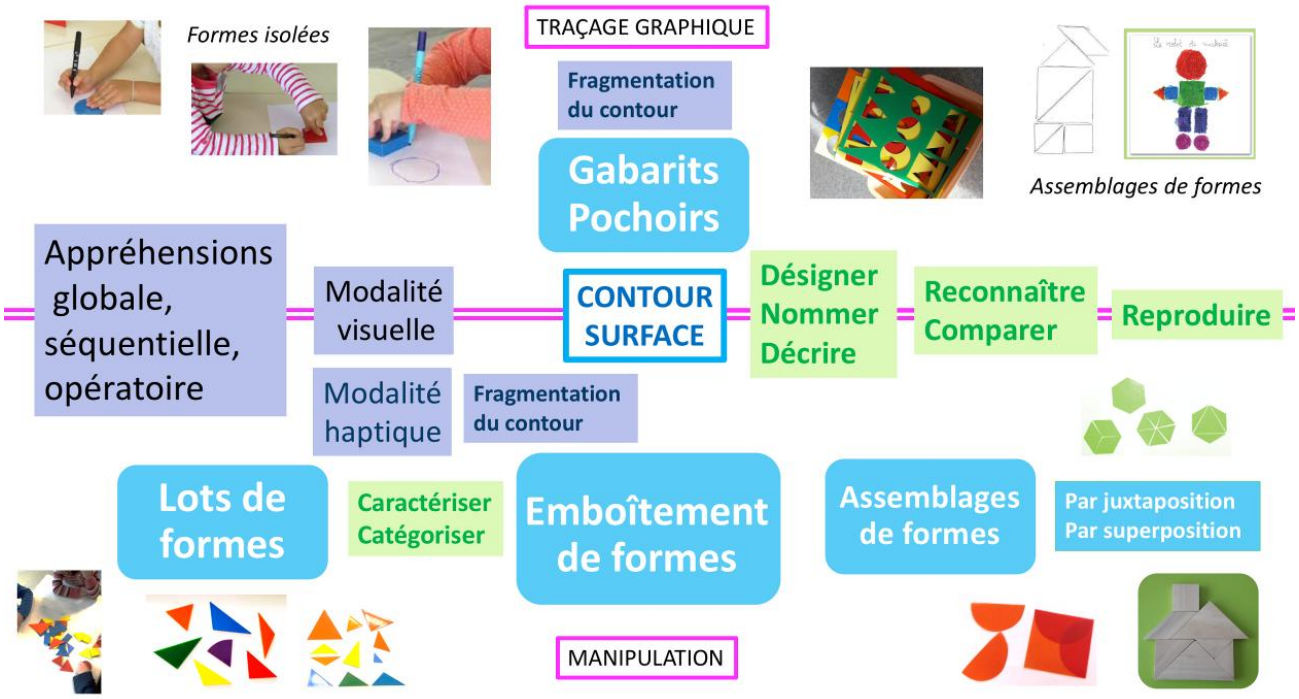


Figure 9. De l'emboîtement des formes aux gabarits et pochoirs.

[57] Bien sûr, cette entrée par les emboîtements n'est pas la seule possible.

7.1 Jeux d'emboîtement de formes

Avec la manipulation de jeux d'emboîtement de formes (Figure 9, en bas au centre), les modalités visuelle et haptique s'articulent permettant ainsi d'appréhender les formes de façon globale et opératoire (si l'artefact prend en compte l'orientation et la taille des formes) ; ils permettent aussi une appréhension séquentielle, en commençant à percevoir une fragmentation des bords, dans le cas de formes polygonales ou mixtes. Puisque chaque forme ne s'ajuste que dans son cadre correspondant et que les formes n'ont pas le même nombre de façons de s'ajuster à leur cadre (selon la présence ou non d'axes de symétrie), l'activité de l'élève le conduit à « une comparaison constante entre les formes » (Montessori, 1934-2011, p. 21) et puis aux premières catégorisations et caractérisations, par contraste et par analogie.

7.2 Lot de formes

Ces jeux d'emboîtement sont constitués des formes et de leurs espaces évidés. En mettant de côté ces derniers, les élèves pourront travailler avec des lots de formes (Figure 9, en bas à gauche). L'activité avec ces artefacts, par des modalités visuelles et/ou haptiques, renforce l'articulation entre les diverses appréhensions. Et, à nouveau, plusieurs compétences entrent en jeu : reconnaître et comparer les formes dans le but de les caractériser, de les catégoriser[58], par contraste et par analogie.

Outre des catégorisations libres (c'est à l'élève ou à un groupe d'élèves de choisir les critères de catégorisation), on pourrait demander aux élèves de catégoriser par noms de formes connus. Tous les triangles, par exemple : dans ce cas, il est intéressant de prendre en compte les choix des élèves, corrects ou erronés, afin de les conduire à caractériser les formes triangulaires.

Mais d'autres exercices peuvent être proposés dont voici quelques exemples :

- dans un lot de formes variées, l'enseignant pourrait demander à un élève de lui montrer une forme en particulier ou bien lui demander le nom d'une forme du lot ou encore de lui montrer une forme qui est « pareille » ou qui « n'est pas pareille » à celle qu'il a dans sa main ;
- dans un petit lot de formes de même nature, l'enseignant pourrait introduire un « intrus » et demander aux élèves de l'identifier. Par exemple, parmi des triangles variés, il pourrait introduire une portion de disque ou un losange « très allongé » ou encore un rhomboïde[59] ;
- dans un sac rempli de formes, l'enseignant pourrait demander à l'élève d'extraire une forme donnée ; ou bien de choisir une forme et de la nommer avant de l'extraire du sac.

Le travail sur le lexique prend tout son sens au cours de ces exercices où les élèves seront encouragés à désigner, à nommer et à caractériser les formes en jeu.

7.3 Assemblages de formes

En ne servant toujours que des formes des jeux d'emboîtement, on peut envisager un travail d'assemblage de celles-ci (Figure 9, en bas à droite) : libre ou pour reproduire un modèle, par juxtaposition ou par superposition, c'est encore l'occasion pour l'élève d'appréhender de façon opératoire mais aussi séquentielle, de le conduire à des observations plus analytiques des formes et de leurs bords. De même ici, un travail sur le lexique demeure essentiel.

En cas de reproduction d'un modèle, la situation peut se décliner de différentes manières : par exemple, les pièces pour le reproduire sont fournies ou bien c'est à l'élève de les reconnaître parmi celles qui sont à sa disposition ; ou bien, si les pièces sont à la même échelle que le modèle, l'enseignant pourrait permettre à l'élève de poser convenablement les pièces sur le modèle ou bien à côté de celui-ci.

7.4 Gabarits et pochoirs de formes

Emboîtement de formes, lots de formes, assemblage de formes mais ce n'est pas tout : si l'on prend à la fois la forme et son cadre évidé, avec l'ajout d'une feuille et d'un crayon, on obtiendra le gabarit et le

[58] Pour des exemples de problèmes de catégorisation, nous invitions le lecteur à consulter (Cèbe, Paour et Goigoux, 2004) où la transposition au contexte géométrique conduira à envisager un éventail de problèmes intéressant et riche.

[59] Un quadrilatère ayant un seul axe de symétrie.

pochoir (Figure 9, en haut). On passe alors d'artefacts permettant des manipulations matérielles vers des artefacts permettant un traçage graphique, ce qui constitue un saut cognitif important : on contrôle davantage la nature de la forme et le passage d'une vision « surface » à une vision « contour » de la forme s'accentue car, outre le geste, on produit une figure matérielle, un dessin sur la feuille. Par une appréhension séquentielle de la forme, la fragmentation du contour s'accentue aussi (Perrin-Glorian, 2015, p.13) :

> *Le tracé du contour de gabarits et de pochoirs permet de travailler l'affinement du regard que les enfants portent sur les formes : d'une vision globale, ils apprennent progressivement à distinguer le contour puis à le segmenter pour voir des points singuliers, les sommets, qui délimitent les côtés.*

Lorsqu'il trace plusieurs fois le contour d'un gabarit, en modifiant sa position, ou lorsqu'il vérifie avec un même gabarit que différents tracés conviennent à une même forme, l'élève travaille sur la reconnaissance d'une forme et de son dessin, indépendamment de leur position (Perrin-Glorian, 2015).

8 Conclusion de la première partie

Avec la franchise qui l'a toujours distingué, Grelier (2004, p. 3), a écrit :

> *Le matériel mettant en jeu des compétences géométriques ne manque pas : les armoires en sont pleines ! Le problème est que ce matériel, quand il est utilisé, l'est "en sensibilisation", comme une activité d'éveil, ou pire pour "occuper" les élèves, et que les concepts mathématiques restent la plupart du temps implicites.*

C'est sans détour mais il reprend bien le point de départ de mes réflexions. L'élève de maternelle affine son regard et ses gestes – en emboîtant des formes, en les touchant, en les assemblant, en traçant leurs contours –, il commence à les déconstruire en affinant sa pensée ; il entre ainsi « dans un processus cognitif fondamental pour les savoirs géométriques » qui suivront (Duval & Godin, 2005, p. 22). Dans la perspective d'accompagner l'élève VERS des connaissances géométriques, qu'il me semble alors important et essentiel :

- de mettre à sa disposition une grande variété de formes et d'assemblages de formes, car c'est à partir de contrastes que les représentations mentales s'affinent peu à peu ;
- d'avoir conscience du potentiel sémiotique des artefacts que l'on met dans ses mains ;
- de l'aider à aiguiser son regard, ses gestes et sa pensée à travers des problèmes variés où diverses modalités (visuelle, haptique et verbale) et diverses appréhensions (globale, séquentielle, opératoire) s'articulent ou s'alternent ;
- de ne pas oublier que l'introduction d'un lexique approprié, non nécessairement mathématique, doit se faire progressivement.

Ces points suggèrent à la fois des perspectives pour l'enseignement, la formation et la recherche.

II - EXEMPLE D'UNE RECHERCHE AUTOUR DE LA RECONNAISSANCE DE FORMES GÉOMETRIQUES EN MATERNELLE[60]

Nous poursuivons cet article en présentant une recherche menée dans des classes du cycle 1. La suite de notre texte sera constituée de deux parties. La première vise à justifier la création d'un artefact à utiliser avec des élèves de la maternelle et la seconde expose notre cadre d'analyse autour duquel nous présentons de nombreux exemples issus de nos interventions en classes. Nous pourrons dès lors conclure en mettant en évidence ce que notre recherche fait émerger de nouveau pour travailler la géométrie avec des élèves de la maternelle.

Tout d'abord, différents travaux de didactique des mathématiques pointent une rupture dans l'enseignement de la géométrie entre l'école primaire et le collège. Nous postulons qu'il est dès lors possible d'intervenir en géométrie dès la maternelle afin de réduire cette rupture. Pour ce faire, nous avons créé un artefact spécifique que nous présentons ci-dessous.

[60] Cette partie est rédigée par Sylvia Coutat et Céline Vendeira-Maréchal.

1 Création d'un artefact

L'hypothèse principale sur laquelle repose la création de cet artefact est qu'il permettrait un changement de regard sur les figures (Duval 2005), tel que présenté en première partie de cet article.

Nous nous appuyons également sur les travaux de Pinet et Gentaz (2007), dans lesquels ces chercheurs développent un entrainement multi sensoriel (modalités haptique et visuelle) pour la reconnaissance de formes géométriques simples (carrés, ronds, triangles) avec des élèves de 5-6 ans. Les résultats de cette étude montrent que des élèves ayant bénéficié de cet entrainement multisensoriel ont développé une meilleure reconnaissance des formes simples que ceux qui n'avaient bénéficiés que d'un entrainement visuel. Pour cette raison nous avons développé un artefact manipulable qui permet d'exploiter la modalité haptique.

Cet artefact se compose de pièces encastrables avec une partie pleine et une partie évidée.

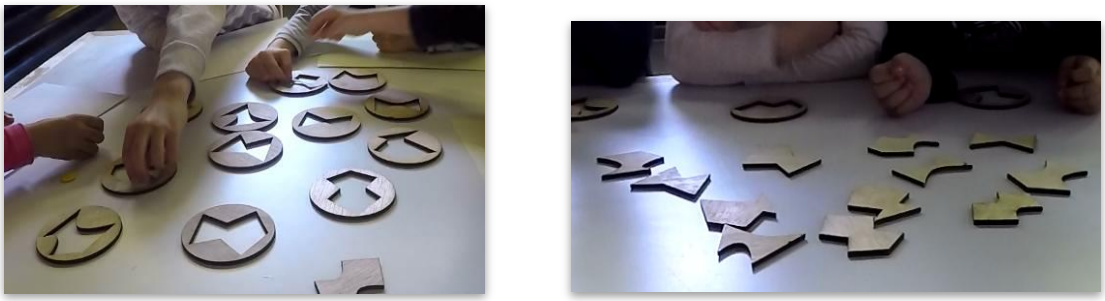


Figure 10. Matériel constitué d'une partie évidée (à gauche) et pleine (à droite).

Dans ce qui suit, nous présentons trois expériences qui ont été décisives dans le développement de cet artefact.

1.1 Deux exemples autour de l'utilisation de formes usuelles prototypiques

Dans les classes, il est d'usage de faire travailler les élèves avec des formes dites usuelles, soit le carré, le triangle, le rectangle et le rond. En ce qui concerne le triangle, ce sont souvent les triangles isocèles ou équilatéraux qui sont massivement utilisés et qui deviennent, par conséquent, représentatifs de leur classe. Le premier exemple, illustré lors de la conférence à partir d'une vidéo, porte sur la non reconnaissance du triangle rectangle comme appartenant à la classe des triangles. Ci-dessous, nous tentons de décrire au mieux le déroulement d'un passage significatif lors d'une séance de classe avec un petit groupe d'élèves de 5-6 ans. Leur tâche consiste à classer des formes géométriques simples, soit des carrés, des ronds et des triangles rectangles selon un (ou des) critère(s) de leur choix. Les formes distribuées sont au nombre de douze avec quatre carrés, quatre ronds et quatre triangles rectangles de couleurs et tailles différentes (Figure 11).



Figure 11. Matériel mis à disposition des élèves.

Une discussion s'engage chez les élèves autour des triangles rectangles afin de décider s'ils sont ou non des triangles. Après l'échange de différents points de vues, un élève commente qu'il s'agit d'« un triangle mais seulement qu'il est tordu ». Il prend ensuite le triangle dans sa main et le dispose selon une orientation qui lui permet de reconstituer un triangle isocèle à partir de deux triangles rectangles (Figure 12).



Figure 12. Reconstitution d'un triangle isocèle à partir de deux triangles rectangles.

Il explique alors avec des gestes de la main que (1) « c'est presque un triangle » (2) « seulement qu'il est coupé » (Figure 13). La chercheuse demande s'il s'agit finalement d'un triangle ou non. A cette question l'élève répond « oui, mais il manque l'autre bout » traduisant ainsi la confusion qui perdure quant à la reconnaissance de ce qu'est un triangle pourtant travaillé depuis les débuts de la scolarité. Ainsi, il semblerait que tout triangle qui diffèrerait trop du triangle prototypique ne serait pas considéré comme un triangle.



Figure 13. Gestes (1) et (2) qui accompagnent le discours de l'élève.

Le deuxième exemple concerne des tests passés dans des classes de CE2-CM1 avec des élèves de 8-10 ans. Dans l'un des exercices du test, les élèves doivent entourer tous les triangles et barrer les autres formes (Figure 14). Dans les quatre classes testées, des résultats relativement similaires sont obtenus, à savoir que les élèves de cet âge reconnaissent tous le triangle isocèle dans sa position prototypique (c'est-à-dire disposé sur sa petite base, soit le triangle n°1) et, quasiment tous, un triangle identique disposé sur l'un de ses sommets (triangle n°2). Les deux autres triangles (quelconque (triangle n°3) et rectangle (triangle n°4)) sont nettement moins fréquemment reconnus comme appartenant à la classe des triangles avec une reconnaissance encore moins fréquente pour le triangle rectangle. A plusieurs reprises la question de savoir si le triangle rectangle est un triangle nous a été explicitement posée par des élèves.

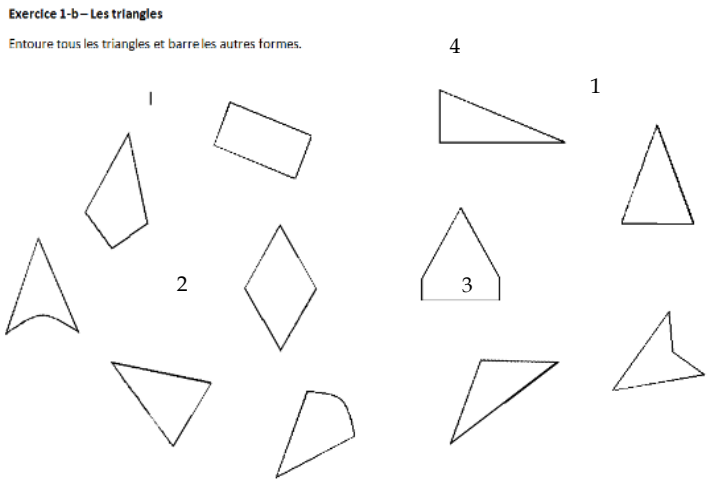


Figure 14. Partie du test concernant la reconnaissance des triangles.

Ces deux premiers exemples permettent de mettre l'accent sur le fait qu'il est nécessaire de présenter une variété de formes et pas seulement celles prototypiques.

1.2 Un exemple autour de l'utilisation de formes usuelles ou celle appariables à un objet connu

La troisième expérience s'est déroulée dans une classe de grande section (GS) avec des élèves de 5-6 ans. Nous leur avions proposé le jeu du « Qui est-ce ? » avec une planche plus ou moins classique pour travailler la géométrie.

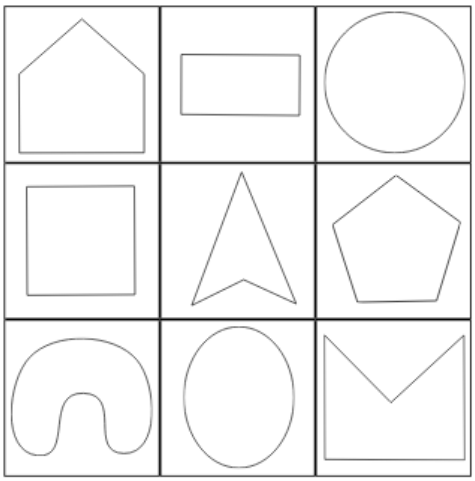


Figure 15. Planche caractéristique du « Qui est-ce ? » géométrique que l'on trouve dans divers manuels.

Avec le type de planche proposé en Figure 15, les élèves posent des questions comme « Est-ce que c'est le rond ? », « Est-ce que c'est la maison »?, « la flèche ? » Ne permettant d'éliminer qu'une forme après l'autre plutôt que de trouver une caractéristique permettant d'éliminer plusieurs formes simultanément. Ainsi, le fait de nommer les formes bloque l'entrée dans les caractéristiques. Dès lors, nous avons proposé une planche différente (Figure 16) pour laquelle l'usage d'un nom géométrique n'était pas possible et la ressemblance d'une forme à un objet connu ne suffisait plus. Par exemple, dans cette planche certains élèves reconnaissent plusieurs formes qui ressemblent à des ronds (c, e, f, voir aussi g et h) ou encore des montagnes (a, b et d). Les élèves sont ainsi contraints d'entrer dans les caractéristiques des formes ou alors sont bloqués et ne parviennent plus à jouer.

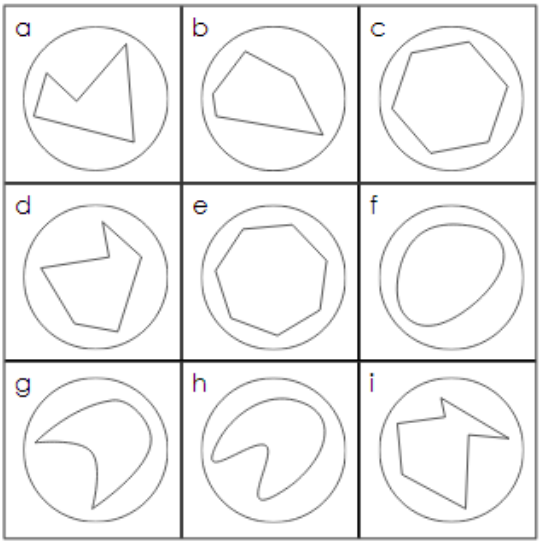


Figure 16. Nouveau type de planche proposé pour remédier aux constats précédents.

Cette dernière expérience a été décisive dans notre choix de travailler avec un artefact dans lequel les formes seraient différentes de celles utilisées d'ordinaire avec la particularité de ne pas pouvoir être nommées par les élèves.

2 Une collection de 36 pièces

Ces considérations ont donné lieu à la création d'une collection de 36 pièces représentées en Figure 17.

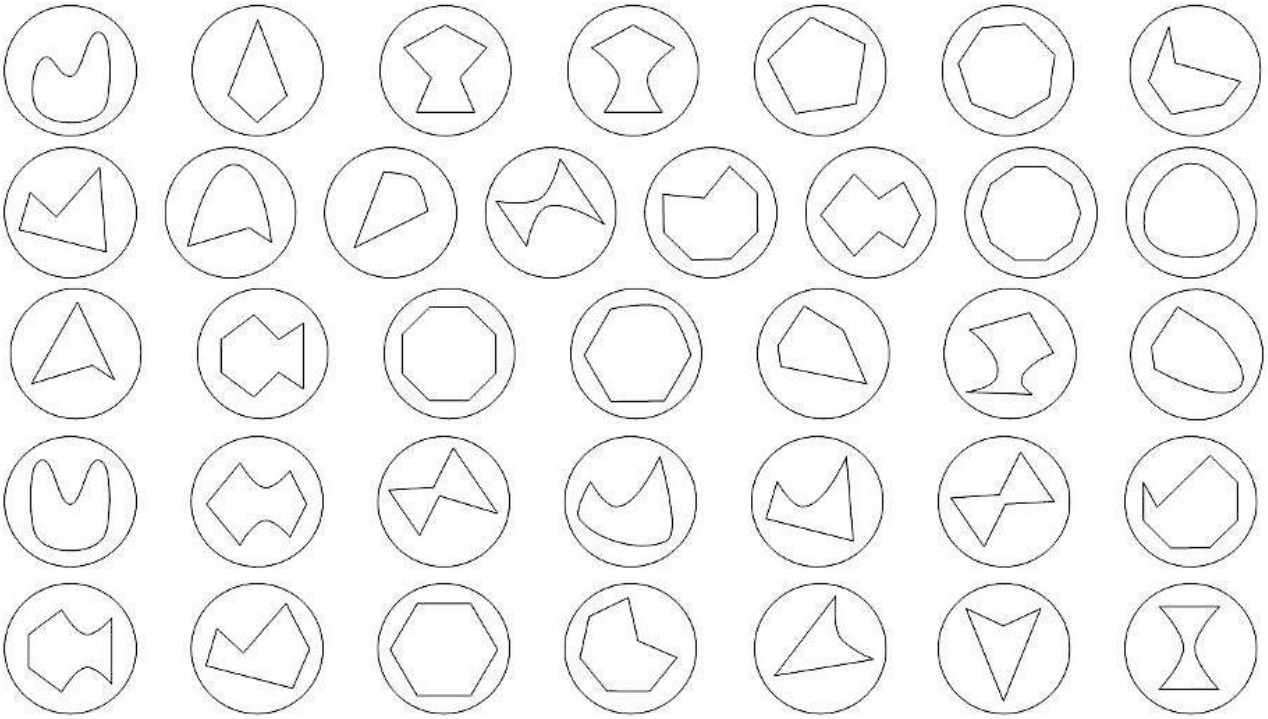


Figure 17. Assortiment des 36 pièces.

Elles sont toutes non nommables par des élèves de la maternelle qui ne connaissent pas les termes pentagone, hexagone, octogone ou encore cerf-volant ou fer de lance. De plus, si les élèves souhaitent identifier une forme à partir de sa ressemblance à un objet familier, comme « un poisson » ou « un vase », le fait que la collection en comporte plusieurs de ce type (présentés Figure 18), rend l'utilisation de ce terme non efficace selon les pièces à disposition des élèves dans la situation proposée.



Figure 18. Exemple d'un assortiment de pièces où toutes les formes sélectionnées pourraient ressembler à « un poisson ».

De plus, nous avons opté pour l'utilisation de disques comme support des formes afin qu'il n'y ait pas d'orientation favorisée.



Figure 19. Trois orientations différentes d'une même pièce.

3 De nombreux exemples issus de nos interventions en classes

Une fois la collection de pièces manipulables créée impliquant des formes non usuelles et non nommables, différentes tâches classiques ont été proposées dans des classes du cycle 1. Parmi les tâches, est proposée une tâche d'encastrement simple : les élèves doivent associer la pièce évidée à la pièce pleine correspondante. Cette tâche d'encastrement comporte de nombreuses variantes construites à partir d'un jeu sur les variables didactiques (le nombre d'essais possible, la rapidité ou non dans la

recherche des formes, la vision simultanée ou non des différentes pièces…). Nous jouons notamment sur la modalité haptique en introduisant des pièces pleines dans un sac forçant l'élève à les découvrir par le toucher uniquement. Des tâches impliquant la communication sont également introduites, avec le jeu du « Qui est-ce ? » ainsi que des variantes selon les degrés scolaires concernés. Dans ces tâches les élèves doivent donner des informations à un autre joueur afin de trouver une forme particulière parmi un ensemble de formes.

Dans ce qui suit, nous présentons des observations de classes lorsque les élèves utilisent le matériel présenté ci-dessus. Afin d'interpréter ce qu'il se joue lors de ces séances en classe et démêler les nombreuses données récoltées, nous reprenons l'idée d'appréhension globale des formes (Duval, 2005), qui nous permet d'avoir une compréhension des *manières de voir* les objets géométriques chez des élèves de la maternelle. Nous empruntons aux travaux de Bernié (2002) les *manières d'agir*, *de parler* et *de penser* nécessaires à la notion de communauté discursive. En effet, l'apprentissage est associé à la construction collective d'une pratique sociale et culturelle reliée à des manières spécifiques d'agir, de parler, de penser, culturellement déterminées. Ci-dessous nous proposons un tableau (Figure 20) prenant en compte ces différents aspects auquel nous ajoutons les manières de voir empruntées à Duval (2005). Nous postulons qu'il existe un rapport direct entre les manières de voir/agir/parler et une manière de penser les objets géométriques par les élèves. L'idée étant de mieux appréhender vers quelle manière de penser les élèves doivent tendre afin d'éviter la rupture pointée dans l'enseignement de la géométrie entre l'école primaire et le collège.

Manière de voir	Vision iconique (10) (vision première de la surface)	Vision non iconique
Manière d'agir		
Manière de parler		



Manière de penser		

Figure 20. Les manières de voir, agir et parler sont constitutives d'une manière de penser les objets géométriques chez les élèves.

La manière de voir étant définie par Duval (2005), nous insérons dans le tableau les visions iconique et non iconique. Duval postule que pour entrer dans les propriétés géométriques il est nécessaire de changer de regard sur les figures impliquant un passage d'une vision iconique à une vision non iconique. La vision iconique correspond à une vision des formes par leur surface alors qu'elles s'en détachent dans la vision non iconique. Les manières d'agir, parler et penser restent à définir. Nous allons pour ce faire vous présenter des exemples de ces manières d'agir et parler observées chez des élèves dans le but de compléter progressivement le tableau de la Figure 20 ci-dessus.

3.1 Premier exemple : les propriétés des figures géométriques

Nous débutons avec un premier exemple classique en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un problème géométrique dont l'énoncé est le suivant :

> *Une figure représentant un parallélogramme ABCD et un rectangle CDEF. Est-ce que les deux droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires ?*

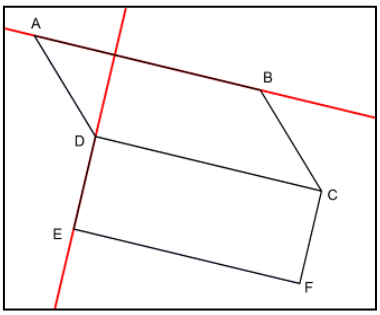


Figure 21. Exemple illustrant une manière de penser les objets géométriques par leurs propriétés (non caractéristique de l'école maternelle).

Il importe ici de démontrer que les droites rouges sont perpendiculaires. Pour cela il est nécessaire de s'appuyer sur les propriétés du parallélogramme (pour établir que (AB) est parallèle à (CD)) et les propriétés du rectangle (pour établir que (DE) est perpendiculaire à (CD)) puis utiliser la propriété impliquant que « si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre », permettant ainsi de conclure que les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires.

A partir de ce premier exemple, nous concluons que cette manière d'agir ne concerne pas vraiment les élèves de la maternelle qui ne se situent pas encore au niveau des propriétés des figures géométriques, que ce soit au niveau de l'action comme du langage. Toutefois, nous pouvons déterminer que le langage associé à cette manière de voir correspond à un lexique géométrique conventionnel (les termes) et formel (« si … alors ») et que les actions sont faites par démonstrations avec des propriétés géométriques.

Cette manière de penser les objets géométriques se fait par les propriétés, elle n'est pas celle visée à l'école primaire. Dès lors, il est nécessaire d'ajouter une nouvelle manière de penser non pas déjà par les propriétés mais par ce qu'on pourrait nommer « les caractéristiques » qui définissent ainsi plus finement l'état de conceptualisation des objets géométriques à cet âge-là. Nous qualifions de *globale* la manière de penser « associée à une vision des objets géométriques par leur surface (vision iconique). Ces nouvelles données sont introduites dans le tableau de la figure 22.

Manière de voir	Vision iconique (vision première de la surface)	Vision non iconique	
Manière d'agir			Démonstration à l'aide des propriétés géométriques
Manière de parler			Lexique géométrique conventionnel et formel

⇕

Manière de penser	**globale**	**par les caractéristiques**	**par les propriétés**

Figure 22. Mise en évidence des différentes manières de penser les objets géométriques dont celle non caractéristique de l'école maternelle impliquant les propriétés des figures.

3.2 Deuxième exemple : langage associé aux manières de penser globale et par les caractéristiques

L'exemple suivant permet d'illustrer le langage associé aux manières de penser globale et par les caractéristiques. Lors de la conférence un court extrait vidéo d'une tâche d'encastrement avec une élève de grande section (GS) a été projeté (Figure 23). On y entend une élève signaler la différence entre deux pièces afin d'expliquer son erreur d'encastrement « là elle est arrondie et là elle a des triangles ».



Figure 23. Encastrement erroné réalisé par l'élève dans l'extrait proposé.

Lorsque l'élève évoque les bords arrondis elle est clairement en train de convoquer des caractéristiques des formes. Par contre, lorsqu'elle évoque les triangles, il est fort possible que ce soit la vision de la surface triangulaire qui soit évoquée et non pas encore les caractéristiques.

Dans un second extrait vidéo, nous observons une mise en commun avec des élèves de grande section (GS) où deux codages différents sont discutés. Cette courte vidéo met en évidence la richesse et la variété du lexique utilisé par six élèves et donc la nécessité d'intégrer cette dimension langagière dans les analyses. Les élèves emploient, pour le premier codage du dé (à gauche dans la Figure 24) les termes « un trou », « une vague » et « arrondi » probablement pour signifier la courbure des bords et la non convexité de la forme. Pour le second codage (à droite dans la Figure 24) ils utilisent « des traits », « tout droit » et « c'est une ligne » pour signifier une droite ou un segment.

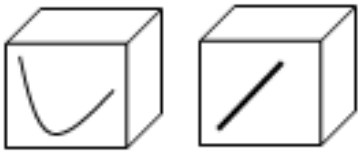


Figure 24. Codages discutés lors de la mise en commun.

Certains mots n'ont pas d'ambiguïté et nous assurent que les élèves sont sur les caractéristiques. D'autres sont plus ambigus. Est-ce que l'utilisation du terme « trou » pourrait se transformer en « bosse » si on lui fait subir une rotation? Et de même pour « une vague », est-ce que cela deviendrait plutôt « un nez » après une rotation de 90 degré ? Pour cette raison, ces deux termes sont plutôt représentatifs d'une manière de parler propre à une manière globale de penser, alors que les autres sont propres à une manière de penser par les caractéristiques, notamment parce qu'ils sont opérants quel que soit leur orientation.



Figure 25. Est-ce que les termes « un trou » et « une vague » associés au codage gauche de la figure 24 pourraient devenir « un nez » et « une bosse » après avoir subi une rotation?

Nous pouvons donc déterminer que le lexique utilisé dans la manière globale de penser les objets géométriques est lié à l'apparence «ça ressemble à » alors que dans une manière de penser par les caractéristiques le lexique fait appel à des caractéristiques des formes avec un lexique courant et spontané.

3.3 Troisième exemple : manières d'agir représentatives de manières de penser

Dans l'exemple suivant, nous nous intéressons aux manières d'agir représentatives de manières de penser. Lors de la conférence nous avons proposé trois courts extraits vidéo avec un élève de grande section (GS) dans un jeu de reconnaissance de formes par encastrement le plus rapidement possible. Dans ces extraits nous voyons que l'élève a besoin de changer de point de vue afin de donner la même orientation aux deux pièces qu'il doit encastrer. Il bouge ainsi son corps et sa tête afin d'y parvenir. Un peu plus tard, ce même élève se permet de modifier l'orientation du gabarit et des pochoirs afin qu'elle coïncide. Nous pouvons conclure que cet élève ressent la nécessité de donner une orientation (soit en se déplaçant soit en déplaçant les formes) afin de faire correspondre et encastrer deux formes. Que ce soit pour trouver une pièce ou valider un choix, cette manière d'agir est représentative d'une manière de penser globale.

Dans l'exemple suivant, la tâche consiste toujours à associer une pièce pleine avec sa pièce évidée correspondante, mais se déroule cette fois-ci en salle de motricité avec des pièces grand formats (1,80 de diamètre). Dans l'extrait choisi, on voit un élève identifier une caractéristique qui diffère entre deux formes sélectionnées pour l'encastrement (Figure 25). Il pointe dès lors cette différence par un geste en suivant la ligne brisée avec sa main pour l'une des pièces et ensuite la ligne courbe pour l'autre. Ses gestes démontrent une prise en compte des bords droits ou courbes, représentatifs d'une manière de penser par les caractéristiques.



Figure 25. Activité d'encastrement en salle de motricité avec des pièces grand format.

Ces différents exemples permettent de caractériser ce qui constitue les différentes manières de voir, agir et parler représentatifs d'une manière de penser les objets géométriques à l'école, récapitulés Figure 26.

Manière de voir	Vision iconique (vision première de la surface)	Vision non iconique	
Manière d'agir	Nécessité de donner une orientation à la forme	Gestes liés à certaines caractéristiques des formes	Démonstration à l'aide des propriétés géométriques
Manière de parler	Lexique lié à l'apparence «ça ressemble à»	Lexique courant et spontané lié aux caractéristiques	Lexique géométrique conventionnel et formel
⇕			
Manière de penser	**globale**	**par les caractéristiques**	**par les propriétés**

Figure 26. Récapitulatif des éléments constitutifs des différentes manières de voir, agir et parler représentatifs d'une manière de penser les objets géométriques.

À ce stade, il importe de préciser que, selon les situations, les élèves ne sont pas que dans une seule manière de penser les objets géométriques. Par exemple, concernant la pièce ci-dessous (Figure 27), il n'est pas rare d'entendre des descriptions de ce type :

> *Ca ressemble à un poisson avec un nez* [manière globale de penser] *plat* [manière de penser par les caractéristiques] *et un corps* [manière globale de penser] *arrondi* [manière de penser par les caractéristiques].

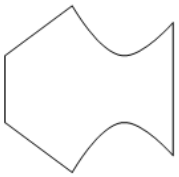


Figure 27. Pièce de la collection souvent identifiée comme ressemblant à un poisson.

On peut donc voir cet élève utiliser conjointement un lexique associé à deux manières distinctes de penser. Pour cette raison, il est nécessaire d'introduire une manière *hybride* de penser les objets géométriques où les élèves convoquent tour à tour différentes manières de penser selon les besoins de la situation.

4 Conclusion de la deuxième partie

L'objectif de notre recherche consistait à réduire la rupture pointée entre l'école primaire et le collège. Pour ce faire, nous prenons le pari qu'il est nécessaire d'agir dès l'école maternelle. A ce stade de notre recherche, nous ne pouvons pas mesurer les effets de nos interventions à long terme. Toutefois, nos expérimentations montrent qu'en nous appuyant sur un artefact spécifique qui se compose de formes non prototypiques et non nommables, les élèves développent une manière de penser par les caractéristiques peu représentatives ordinairement à cet âge-là. Nos observations permettent également de mettre en évidence que l'enjeu n'est pas dans le passage d'une manière de penser globale vers une manière de penser par les caractéristiques mais le développement d'une mobilité entre ces deux manières de voir pouvant se traduire par une manière de penser hybride.

BIBLIOGRAPHIE

Barth, B-M. (2013). *L'apprentissage de l'abstraction*. Retz.

Bartolini Bussi, M. et Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*. New York. 746-783.

Bernié, J.-P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ?. *Revue française de pédagogie*, *141*, 77-88.

Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1993-1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, *53*, 39-56.

Bessot, A. (2003). *Une introduction à la théorie des situations didactiques*. Les cahiers du laboratoire Leibniz, 91.

Blanc, J.-P., Blanc, N., Bramand, P., Lafont, É., Maurin, C., Peynichou, D. & Vargas, A. (2008). *Pour comprendre les mathématiques GS*. Hachette Éducation

Cèbe, S., Paour, J.-L. et Goigoux, R. (2004). *Catégo*, Hatier.

Celi, V. et Perrin-Glorian, M.-J. (2014). Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie. *Spirale Revue de recherche en éducation*, *54*, 151-174.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, *17*, 121-138.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10*, 5- 53.

Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7-27.

Fernandes, M. et Vinter, A. (2009). Développement des représentations graphiques réalisées par des enfants à partir d'une exploration tactile ou visuelle de formes bidimensionnelles. *L'année psychologique*, *109*(3), 407-429.

Gentaz, É., Bara, F., Palluel-Germain, R., Pinet, L. et Hillairet De Boisferon, A. (2009). Apports de la modalite haptique manuelle dans les apprentissages scolaires. *Cognito*, *3*(3), 1-38.

Grelier, J.-F. (2004). *Apprentissages géométriques*. Scérén, CRDP Midi-Pyrénées.

MEN (2010). *Ressources pour enseigner le vocabulaire à l'école maternelle*. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/vocabulaire_maternelle/03/4/Ecole_Ressources_VocabEcoleMaternelle_Lexique_153034.pdf

MEN (2015). Programmes de l'école maternelle. *Bulletin officiel spécial du 26 mars 2015*, *2*.

Montessori, M. (1913?-1970). *Pédagogie scientifique, Tome 1*. Les éditions ESF.

Montessori, M. (1934-2011). *Psychogéométrie*. AMI Desclée de Brouwer.

Perrin-Glorian, M.-J. (2015). *Jouer avec des formes en maternelle : premiers pas vers la géométrie.* <hal-01296515>.

Pinet, L. et Gentaz, E. (2007). La reconnaissance de figures géométriques planes (cercle, carré, rectangle et triangle) chez des enfants de cinq ans. *Grand N, 80*, 17-24.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Robert, A. (2004). Une analyse de séance de mathématiques au collège à partir d'une vidéo filmée en classe. *Petit x*, *65*, 52-79.

Rouche, N. (1999). *Formes et mouvements. Perspectives pour l'enseignement de la géométrie*. CREM.

Salin, M.-H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège : le facteur temps. *Bulletin Vert de l'APMEP*, *478*, 647-671.

Van Hiele, P.M. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'APMEP*, *198*, 199-205.

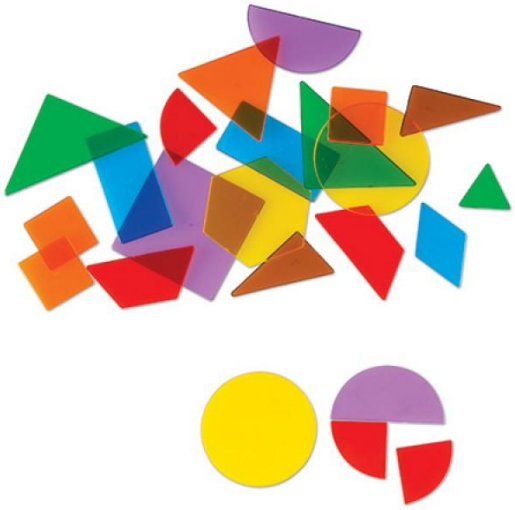
Vause, I. (2011). *Des pratiques aux connaissances pédagogiques des enseignants : les sources et les modes de construction de la connaissance ouvragée*. Thèse de doctorat en éducation. Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.

Vendeira, C. et Coutat, S. (2017), « C'est une montagne ou une trompette ? » entre perception globale et caractéristiques des formes au cycle 1 et 2. *Grand N*, *100*, 79-104.

Vygotski, L. S. (1934-1990). *Pensiero e Linguaggio*. Laterza.

Vygotski, L. S. (1935-1995). Apprentissage et développement à l'âge préscolaire. *Société française*, *2*(52), 36-45.

ATELIERS



ATELIER A11

BEEBOTS ET BLUEBOTS EN CLASSE : ANALYSE DE PRATIQUES PROFESSIONNELLES

Cécile BERROUILLER
PREC ESPE d'Aix Marseille Université
cecile.berrouiller@univ-amu.fr

Pierre EYSSERIC
PRAG, ESPE d'Aix Marseille Université
COPIRELEM
pierre.eysseric@univ-amu.fr

Résumé

Au cours de l'année scolaire 2016-2017, dans le cadre d'un dispositif de formation continue basé sur l'accompagnement d'équipes d'enseignants appelé « Chantier mathématique » (Eysseric, 2018), nous avons travaillé avec une vingtaine d'enseignants qui ont utilisé dans leurs classes de petits automates (les Beebots et les Bluebots) dans le cadre des apprentissages mathématiques relatifs au repérage et aux déplacements dans le plan (voir Chantier Maths - Robotique pédagogique - Marseille 6). Nous avons proposé dans cet atelier un travail d'analyse de quelques pratiques professionnelles à partir des observations (données filmées) lors d'une séance dans les classes (cycles 1 et 2) de ces PE. L'attention portée à la dimension sémiotique de l'activité mathématique (Assude, 2018) a guidé ce travail : repérage des registres d'ostensifs en jeu dans les situations d'apprentissage proposées, des types de signes convoqués dans ces activités mathématiques. Les analyses effectuées nous ont conduits à questionner les apprentissages réalisés par les élèves dans ces situations, la valeur ajoutée apportée par l'utilisation des artefacts tels que les robots dans les apprentissages relatifs au repérage spatial, l'intérêt d'une initiation à la programmation par le biais de ces activités.

L'atelier a débuté par un bref temps d'appropriation du matériel (Beebots et Bluebots) par les participants. Ce moment leur a permis d'identifier les connaissances et compétences en jeu dans les situations d'apprentissage articulées autour de la programmation du déplacement d'un robot. Il est intéressant à propos de ce moment de l'atelier de relever les divers registres sémiotiques utilisés par nos collègues dans la résolution du petit problème qui leur était proposé. Ce sera l'objet de la première partie de ce compte-rendu.

Les participants ont ensuite visionné par groupes plusieurs vidéos provenant de classes de cycle 1 et 2. Ils devaient les analyser en s'intéressant plus particulièrement aux supports des déplacements, aux modalités de codage, aux registres sémiotiques et à la plus-value apportée dans les apprentissages par l'utilisation de ces robots. Nous présenterons dans une deuxième partie ces analyses que les petits groupes ont mutualisées au cours de l'atelier.

Enfin nous conclurons ce compte-rendu en présentant nos propres analyses de quelques situations filmées telles que nous les avons proposées et mises en discussion en fin d'atelier.

I - PRISE EN MAIN DU MATÉRIEL

1 Appropriation des robots par les participants

Un premier temps divisé en deux phases a permis tout d'abord de confronter les participants à l'outil comme pourraient l'être des élèves à travers une manipulation libre puis de mettre en évidence les connaissances et compétences en jeu par la résolution d'un défi.

1.1 Découverte du fonctionnement des robots



Figure 1. Bluebot et Beebot

La découverte par manipulation libre des robots Beebots et Bluebots est proposée sans réelle consigne à raison d'un robot pour 4 ou 5.

Cette première phase d'appropriation du matériel permet de mettre en évidence les différentes commandes des robots et les actions qui en découlent :

- quatre commandes de déplacement :
  « avance », « recule », « pivote à droite » (à 90°) et « pivote à gauche » (à 90°) ; les élèves doivent appuyer autant de fois sur les touches que de déplacements souhaités ;
- deux commandes fonctionnelles :
  vider la mémoire de programmation « X » et lancer le programme « Go » ;
- une commande intermédiaire :
  pause d'une seconde dans la programmation, rarement utilisée en maternelle ;
- la longueur régulière des pas du robot ;
- les touches  avec le sens de « pivoter » à différencier de « tourner » (sens courant de la flèche dans les exercices sur quadrillage : tourner et avancer d'un pas en une même action).

1.2 *Mise en situation : résolution d'un petit problème*

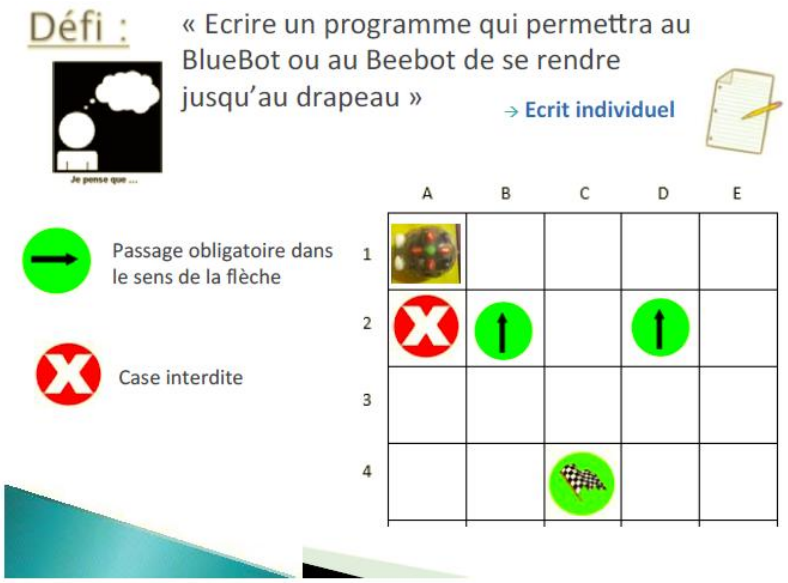


Figure 2. Diapositive présentant le défi

Pour faire suite à la découverte de l'objet, un défi est proposé : écrire un programme qui permet au Beebot ou au Bluebot de se rendre d'une case départ dans laquelle le robot est positionné et orienté à une case « arrivée » en passant par des cases obligatoires et en évitant une case interdite.

Cette mise en situation a pour objectifs de mettre en évidence les connaissances et compétences en jeu dans les situations d'apprentissages autour de la programmation des robots et de relever les différents registres sémiotiques utilisés par les participants.

Les connaissances et compétences mises en jeu qui sont apparues

Cette mise en activité a permis de mettre en évidence quelques connaissances importantes dans des situations utilisant les Beebots ou les Bluebots :

- les Bluebots ou Beebots sont des objets orientés (présence des yeux qui indiquent l'avant du robot) ;
- la prise de repère se fait par rapport au robot et non par rapport à soi ;
- les déplacements du robot sont relatifs et non absolus : souvent dans les tâches proposées sur quadrillage, les flèches représentent des déplacements absolus vers le haut, le bas, la droite ou la gauche ;
- l'absence de correspondance action du robot et changement de case : la commande « pivote » permet au robot de pivoter sur place, sans avancer (et donc sans changer de case sur quadrillage).

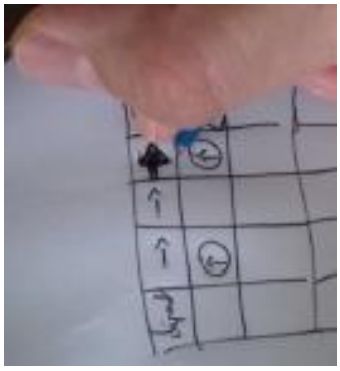
Les situations d'apprentissage avec ces artefacts vont faire travailler les élèves sur les compétences

- prendre des repères spatiaux (grâce à la taille du robot, ces repères peuvent être pris en un seul regard ; le travail s'effectue dans le micro-espace) ;
- comprendre la nécessité d'un code commun pour communiquer ;
- anticiper le déplacement du robot lors du codage du déplacement ;
- coder le déplacement d'un robot ;
- lire un code et le saisir.

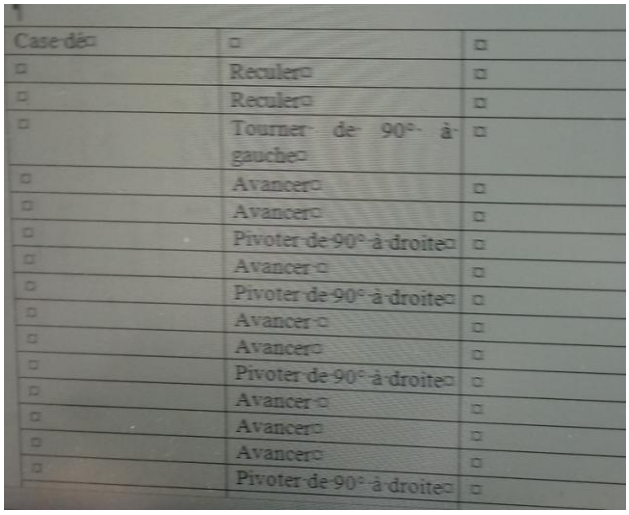
La maitrise de ces deux dernières compétences implique de différencier le sens de la trajectoire et le sens de l'écriture du code (conventionnellement le code va être écrit de gauche à droite alors que le déplacement s'effectue dans quatre directions).

Différents codages apparus chez les participants

Il nous a semblé intéressant de relever les différents types de codage qui ont été utilisés par les participants au cours de cette activité car on retrouvera cette variété dans les codes utilisés spontanément par les élèves ou proposés par les enseignants à leurs élèves. D'autre part, on va retrouver derrière ces codes certains des registres sémiotiques présents dans les situations de classe analysées dans la seconde partie de l'atelier (le registre langagier, le registre du dessin et celui des instructions machines).

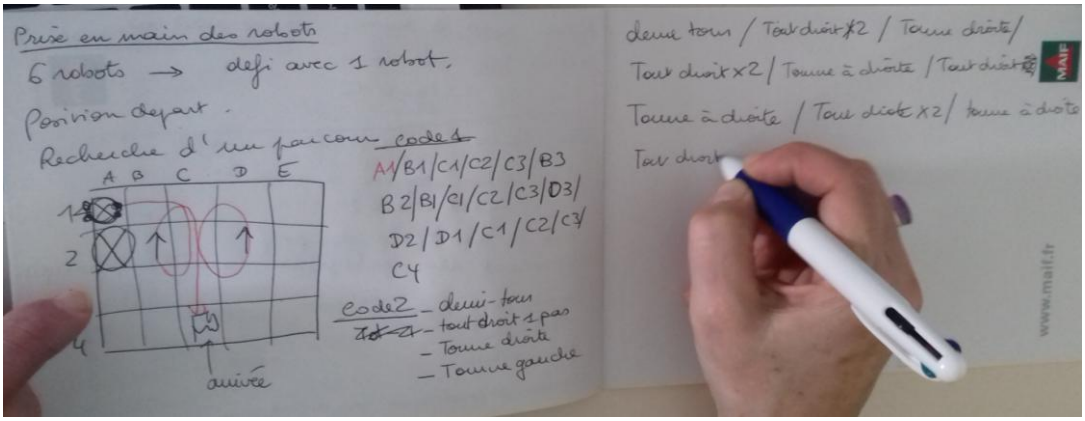


Les signes utilisés (des flèches sur un quadrillage retracé) sont encore très liés au dessin du parcours : on n'est pas encore dans le registre des instructions machines.



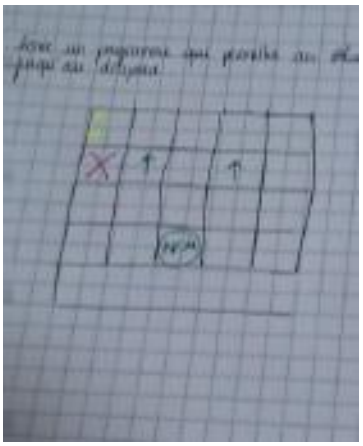
Case déc	
	Reculer
	Reculer
	Tourner de 90° à gauche
	Avancer
	Avancer
	Pivoter de 90° à droite
	Avancer
	Pivoter de 90° à droite
	Avancer
	Avancer
	Pivoter de 90° à droite
	Avancer
	Avancer
	Avancer
	Pivoter de 90° à droite

Ici seul le registre langagier est présent : on a une succession de commandes verbales saisies verticalement dans un tableau (verbes à l'infinitif et indication de rotation en degré).
On peut relever un changement lexical important : pour la troisième instruction, le verbe « tourner » est utilisé et il est par la suite remplacé par le verbe « pivoter » qui traduit mieux le séquençage du mouvement par le robot.

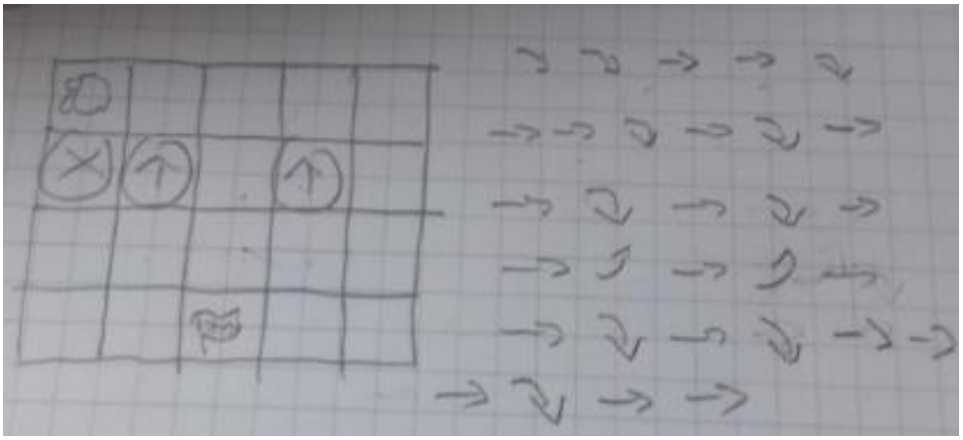


Sur le document ci-dessus, apparaissent plusieurs registres :

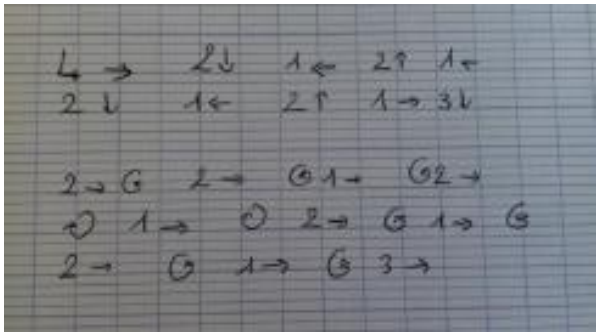
- on commence par un dessin du parcours ;
- puis la succession des cases que le robot doit parcourir est codée en numérotant les lignes de 1 à 4 et les colonnes de A à E ;
- enfin on trouve une succession de commandes verbales écrite en lettres dans le sens de l'écriture (exemple : tout droit 2 / tourne droite...).



Dans ce quatrième document, on retrouve le registre du dessin mais on s'en détache très vite : le dessin ne sert que de mémoire de la situation-problème et le collègue ne dessine pas la trajectoire du robot. Il commence l'écriture du programme dans le registre langagier (« reculer – reculer »), puis tente un passage aux instructions-machines (flèches) avant d'écrire son programme à l'aide d'une succession de lettres codant les actions (ex : R-R-G-A pour reculer - reculer – pivoter à gauche – avancer...) ; on peut penser que ce codage constitue un intermédiaire entre le registre langagier et celui des instructions machines.

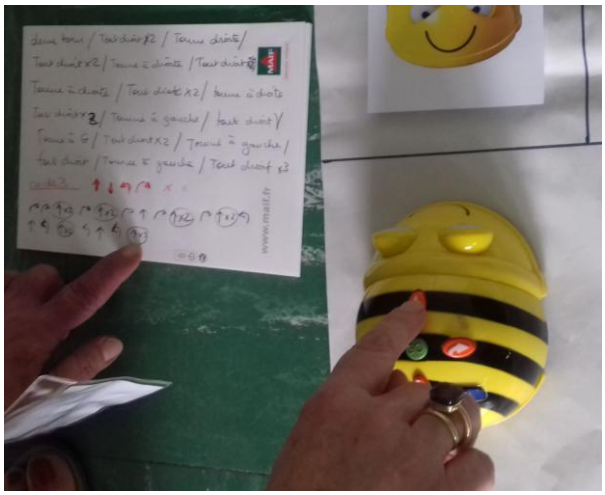


Comme dans le document précédent, le dessin n'est là que pour rappeler le problème mais cette fois, le registre langagier est abandonné et le programme est entièrement écrit avec les instructions machines (succession de flèches se suivant dans le sens de l'écriture).



Le document ci-contre présente une évolution du codage précédent : on a toujours des flèches se suivant dans le sens de l'écriture mais lorsque plusieurs actions semblables se succèdent, on ne répète plus le code ; on indique le nombre de répétitions par un nombre écrit avant la flèche.

Au cours de l'activité, la modalité de codage utilisée par un participant a pu évoluer :



On voit sur l'image ci-dessus deux écritures successives du même programme par la même personne : d'abord dans le registre langagier puis dans le registre des instructions machines avec utilisation des nombres pour éviter les répétitions d'un code.

Lors de l'atelier, on a aussi pu assister à des mouvements d'épaule des participants et des mouvements de mains pour confirmer les déplacements relatifs du robot et la prise de repère par rapport au robot. Le registre de l'action n'est donc pas absent même si les photographies présentées ne le donnent pas à voir.

Enfin la mise en activité des participants a mis en évidence le rôle important des erreurs dans ces situations ; celles-ci permettent d'avancer dans l'apprentissage grâce aux rétro-actions apportés par le matériel lors de la mise en œuvre des programmes préalablement écrits. Ce sont donc des aller-retour entre le registre de l'action et des registres plus symboliques qui permettent à chacun d'avancer dans la résolution du problème.

II - ANALYSE DES VIDÉOS DE CLASSE DANS L'ATELIER

Au cours de l'année scolaire 2016-2017, une vingtaine d'enseignants issus de cinq écoles de deux circonscriptions de Marseille se sont engagés dans un dispositif de formation continue basé sur l'accompagnement d'équipes (voir Eysseric, 2018) appelé « chantier mathématique ». Dans ce cadre, les PE de ces écoles avaient choisi de travailler autour des apports potentiels de l'utilisation d'automates pour les apprentissages mathématiques. Dans les classes de cycle 1 et de cycle 2, les enseignants ont essentiellement travaillé sur le repérage et les déplacements dans le plan et nous les avons accompagnés avec le concours d'une ERUN (Enseignante Ressource pour les Usages du Numérique) dans la conception, la mise en œuvre et l'analyse de situations d'apprentissage intégrant l'utilisation de Beebots ou de Bluebots. Au cours de cet accompagnement, nous avons pu recueillir quelques traces du travail de ces enseignants sous forme de photographies ou de petits films.

1 Les vidéos proposées dans l'atelier

Les sept petits films sur lesquels nous avons travaillé étaient de courts extraits des pratiques observées dans les classes de ce « chantier mathématiques » ; à l'exception de l'un d'entre eux, les images étaient présentées sans commentaire et/ou montage.

Afin de guider le travail d'analyse effectué en petits groupes dans l'atelier, nous avions proposé quatre items : les supports des déplacements, les modalités de codage, les registres sémiotiques et la plus-value.

1.1 Vidéo 1 : déplacement d'un Beebot en ligne droite en PS

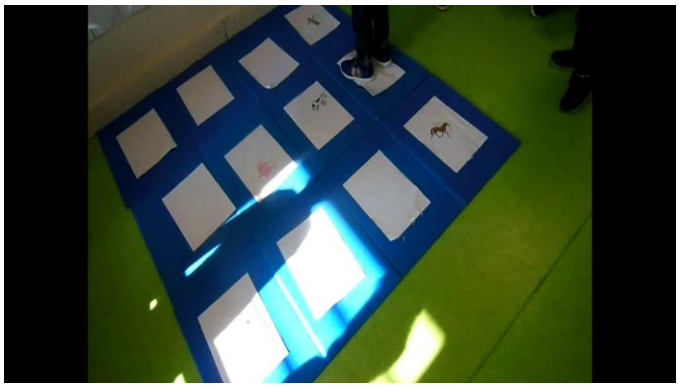
Dans ce film d'une durée de deux minutes, les élèves de PS doivent faire avancer le Beebot sur une piste constituée de carrés de couleur dont les dimensions correspondent à la longueur du pas de l'automate. Il faut faire avancer le Beebot jusqu'à la case de la couleur demandée.



1.2 Vidéo 2 : déplacement d'un « enfant robot » en MS

Ce film de quatre minutes a été présenté avec des sous-titres car les propos des élèves ne sont pas très audibles. Un enfant donne une liste d'instructions à un autre (« l'enfant-robot ») qui doivent le conduire sur une case d'un quadrillage au sol préalablement choisie mais non connue de l'« enfant-robot ». Les instructions doivent indiquer comment on se déplace et ne pas désigner par des mots et/ou des gestes les cases sur lesquelles on se déplace.

On peut remarquer des images d'animaux sur certaines cases : elles sont utilisées par l'enseignante pour indiquer la case d'arrivée à l'élève qui donne les instructions ; si on n'a pas ce type de repère (qui pourrait être remplacé par des couleurs), certains élèves oublient la case visée pendant qu'ils donnent les instructions.



1.3 Vidéo 3 : déplacement d'un Bluebot sur quadrillage en MS

La piste utilisée dans cette classe est un quadrillage représentant divers éléments d'une ferme ; la longueur du côté d'une case correspondant à la longueur d'un pas de l'automate. Il s'agit d'un support proposé par les diffuseurs des Bluebots et Beebots. Dans ce film de cinq minutes, les élèves doivent saisir sur le Bluebot les instructions pour qu'il se déplace de son point de départ à une partie de la ferme indiquée par l'enseignante ; il est aussi possible d'imposer à l'élève en plus du lieu d'arrivée, un point de passage intermédiaire obligatoire (par exemple : « aller voir les chevaux en passant devant les moutons »).



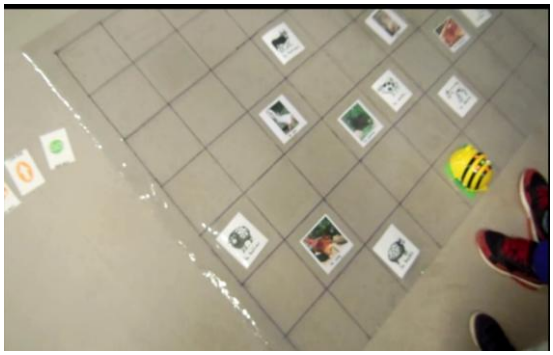
1.4 Vidéo 4 : déplacement d'un Beebot sans quadrillage en GS

Dans ce film de trois minutes, on voit un groupe d'enfant travaillant en autonomie avec un Beebot. Ils doivent trouver la liste des instructions à donner à l'automate pour qu'il se déplace de la case « départ » à la case « arrivée » d'une piste « labyrinthe » balisée par des Kaplas. Ici le déplacement s'effectue sur une piste non quadrillée. Les instructions doivent être transmises par les élèves à l'enseignante sous forme d'un message écrit. Pour valider le travail effectué, l'enseignante saisira sur le Beebot la liste des instructions données sur le message et on lancera le déplacement du Beebot.



Le choix d'un support non quadrillé a au départ été fait pour ne pas donner aux élèves la longueur du pas du Beebot car l'enseignante avait prévu de le faire estimer aux élèves dans une autre séquence. Mais ce choix s'est révélé intéressant pour éviter l'obstacle rencontré sur les supports quadrillés ; nous y reviendrons dans la partie Analyse.

1.5 Vidéo 5 : codage et décodage du parcours d'un Beebot en GS



Le Beebot se déplace ici sur une piste quadrillée. Les dimensions des cases correspondent à la longueur du pas de l'automate. Sur certaines des cases du quadrillage, se trouvent des animaux ; pour chaque animal, on va trouver une case avec le mâle et une case avec la femelle ; la case verte représente le point de départ du Beebot.

Le travail proposé aux élèves dans ce film de presque neuf minutes s'appuie sur une situation de communication : un élève choisit un couple d'animaux et, à l'aide de cartes codant les instructions du Beebot, il doit indiquer à un autre élève le parcours à faire effectuer au Beebot pour qu'il aille successivement sur les cases des deux animaux choisis en partant de la case « départ ».



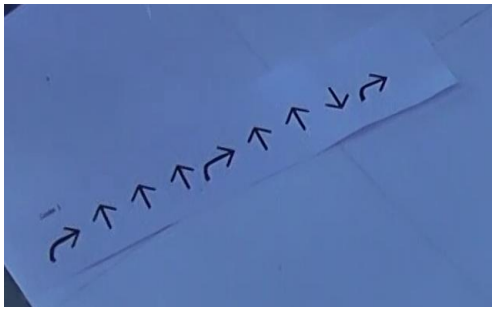
Il y a donc un élève qui code le déplacement et un autre qui le saisit pour faire déplacer le Beebot. Si ces deux tâches sont correctement réalisées, l'élève décodeur doit pouvoir découvrir le couple d'animaux choisi en observant le déplacement du Beebot.

1.6 Vidéo 6 : tracer un carré avec un Bluebot en CP

Dans ce petit film, les élèves de CP doivent donner à un Bluebot une liste d'instructions pour que celui-ci fasse le tour d'un carré (c'est-à-dire le programmer pour qu'il « trace » un carré) sur une piste quadrillée dont les dimensions des cases correspondent à la longueur du pas de l'automate.

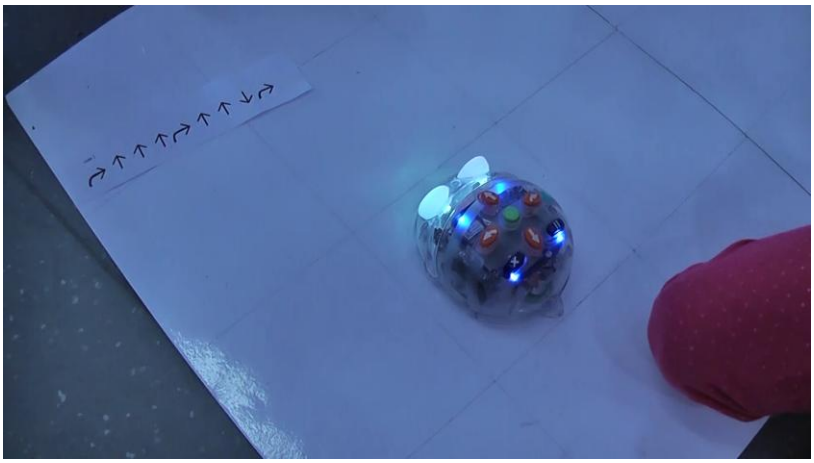


1.7 Vidéo 7 : utilisation d'un code écrit en CP



Les élèves utilisent la même piste quadrillée que dans la vidéo précédente. Cette fois le parcours à faire effectuer au Bluebot leur est fourni par l'intermédiaire d'un message écrit comportant des flèches codant des déplacements ; ils doivent utiliser ce message pour prévoir le point d'arrivée du Bluebot lorsqu'on lui aura implémenté cette liste d'instructions.

La validation du décodage se fera par le déplacement du Bluebot..



2 Analyses des vidéos par les participants

2.1 Les supports des déplacements

La discussion a porté principalement sur deux variables repérées pour les supports utilisés : le nombre de dimensions du support (déplacement sur une ligne droite ou déplacement dans une portion de plan) et la présence ou non d'un quadrillage.

Toutes les vidéos proposent un support bidimensionnel pour les déplacements à l'exception de la vidéo 1 où les déplacements s'effectuent en ligne droite.

L'intérêt de ce support simplifié est de limiter les types de déplacements effectués par le Beebot : a priori, on n'utilise pas les instructions de pivotement et on se limite à avancer ou reculer.

La piste dans la vidéo 1 est constituée de cinq cases, chacune d'une couleur différente. Le lien entre la taille de la case et la longueur d'un pas reste implicite mais une fois que les enfants ont compris qu'un pas du Beebot permet de passer d'une case à une autre, l'activité se limite à un dénombrement de cases (nombre de cases du début de la piste à la case choisie).

Ce support semble surtout permettre une découverte du Beebot et du lien entre l'action sur certaines touches et le déplacement de l'automate. Mais les relations entre boutons d'actions, cases et déplacement sur la piste devraient être davantage explicitées.

Lorsque le support est bidimensionnel, il s'agit presque toujours d'un quadrillage dont les cases carrées ont un côté de longueur égale à celle d'un pas de l'automate. Plusieurs remarques sont apparues au sujet de ces supports quadrillés :

Tous les enseignants ont proposé un déplacement sur les cases du quadrillage ; aucun n'a proposé un déplacement le long des lignes du quadrillage.

La question de la longueur du pas de l'automate est entièrement prise en charge par l'enseignant alors que l'utilisation d'un support non quadrillé conduit les élèves à estimer la longueur d'un pas pour anticiper l'effet des instructions saisies sur le déplacement de l'automate. À ce sujet, signalons que le choix d'un support non quadrillé par l'enseignante de la vidéo 4 a été en partie motivé par le travail d'estimation de la longueur d'un pas de la Beebot qu'elle avait prévu dans sa progression.

Le quadrillage induit un problème pour gérer les changements de direction qu'on ne retrouve pas dans la classe qui utilise un support non quadrillé : les élèves croient souvent que le fait d'appuyer sur la commande « à droite » ou « à gauche » va faire passer l'automate d'une case à une autre. Nous reviendrons au paragraphe 2.3 sur l'analyse de cette difficulté.

2.2 Les modalités de codage

Dans les situations où un codage des déplacements de l'automate est utilisé, les participants ont relevé plusieurs variables :

- La présence d'un codage des quatre mouvements possibles pour l'automate sur des cartes préparées par l'enseignant et mises à la disposition des élèves. Ceux-ci doivent aligner les cartes correspondant aux instructions à saisir sur le Beebot afin d'obtenir le parcours souhaité. Les cartes proposées comportent toutes une flèche ; pour savoir à quelle action correspond une carte il faut l'orienter correctement et pour cela, il faut s'appuyer sur la « lecture du mot « BEE BOT » figurant au bas de chaque carte.

  La vidéo montre que ce n'est pas toujours évident pour les élèves : certains utilisent uniquement les cartes « avance » en modifiant l'orientation en fonction du déplacement souhaité.



- L'utilisation d'un code écrit donné par l'enseignant sous forme de flèches dessinées sur une feuille avec quatre orientations possibles, les différents signes étant alignés suivant les conventions de l'écriture (c'est-à-dire de gauche à droite).
- La production d'un codage écrit par les élèves eux-mêmes qui, dans la vidéo 4, codent les ordres à donner à la Beebot par une suite de flèches dessinées sur leur feuille.
- Enfin, l'enseignante, dans la vidéo 3, ajoute un code de couleur sur la Bluebot pour « aider » à la distinction gauche/droite : on va dire « tourner du côté bleu » au lieu de dire « tourner à droite ». On peut se demander s'il s'agit vraiment d'une aide ou au contraire d'un code supplémentaire que les élèves vont devoir s'approprier.

Il ressort de ces premières analyses, l'importance, pour ce codage écrit des actions de l'automate, d'une explicitation des conventions d'écriture : orientation des cartes, sens de lecture des messages.

2.3 Les registres sémiotiques

Le principal point relevé dans l'atelier a été la non congruence entre deux registres en présence dans les situations sur quadrillage : la représentation du parcours au travers de la suite des cases traversées par l'automate d'une part et la liste des touches sur lesquelles on appuie pour communiquer à l'automate le parcours à effectuer d'autre part.

En effet, un changement de cases correspond parfois à une action (avancer ou reculer), tantôt à deux actions (à droite puis avancer ou à gauche puis avance) ; cela conduit certains élèves (comme on l'a remarqué au paragraphe 2.1) à oublier une action « avancer » lors des changements de direction. Ce phénomène se produit aussi bien lorsque l'élève donne directement les ordres à l'automate que lorsqu'il les code en passant par l'intermédiaire du registre des cartes codes ou des codes écrits sur une feuille message.

Cette non congruence des registres a conduit les enseignants des classes avec lesquelles nous avons travaillé à adopter une plus grande précision lexicale lors de l'utilisation du registre de l'oral pour formuler les déplacements des automates. Plutôt de de dire « tourner à droite » ou « tourner à gauche », on va choisir une formulation congruente avec le séquençage du mouvement par le robot en utilisant « pivoter à droite » ou « pivoter à gauche » pour les changements de directions. Ainsi, on a deux types d'actions des beebots et bluebots : celles qui le font changer de direction sans changer de case (pivoter) et celles qui le font changer de case sans changer de direction (avancer ou reculer). Et le mouvement non séquencé de « tourner à droite » se décomposera en « pivoter à droite » puis « avancer ».

2.4 La plus-value

Se poser la question de la plus-value apportée par l'introduction dans les classes d'un travail ces automates, c'est ici se demander en quoi ces situations améliorent les apprentissages mathématiques pour lesquels on sollicite ces artefacts. Les échanges au cours de l'atelier ont fait apparaitre des différences importantes pour l'appréciation de cette plus-value en fonction des différentes situations proposées.

Déplacement ligne en PS (vidéo 1)

Ici la situation proposée permet essentiellement un début d'appropriation de l'artefact mais elle n'apporte rien en ce qui concerne les compétences mathématiques en jeu (déplacement sur une piste, dénombrement des cases).

Déplacement d'un enfant-robot ou d'un Bluebot sur quadrillage en MS (vidéos 2 et 3)

La comparaison entre les deux situations favorise l'appréciation de la plus-value apportée par l'artefact : celle-ci se situe essentiellement au niveau du séquençage de l'action imposé par l'automate ; celui-ci permet de mieux distinguer les passages d'une case à une autre des changements de direction.

Codage des déplacements en GS (vidéos 4 et 5)

Le fait de donner les instructions de déplacements à un automate et non à un autre élève contraint à davantage de précision dans le codage ; en effet, il ne peut pas y avoir de place pour l'implicite comme ce pourrait être le cas entre deux élèves qui se comprendraient tout en employant des formulations incorrectes.

Enfin l'introduction des artefacts dans les situations d'apprentissage proposées est un des ressorts du caractère auto-validant de celles-ci.

Travail en classe de CP (vidéos 6 et 7)

La plus-value apportée par l'artefact apparait moins nettement dans ces deux situations.

La mise en œuvre de la situation de la vidéo 7 en remplaçant le Bluebot par un élève ne changerait pas grand-chose car ici la validation avec ou sans artefact repose entièrement sur l'enseignante.

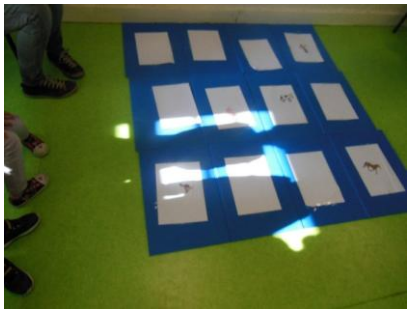
Dans la situation « faire le tour du carré » de la vidéo 6, l'introduction de l'artefact oblige les élèves, comme dans les situations proposées en GS, à formuler ces instructions sans implicites. De plus, on fait ici le tour d'un carré dont on n'a aucune trace ; cela peut conduire les élèves à penser le carré autrement : comme itération 4 fois d'une même séquence d'action et non plus comme un dessin ayant certaines régularités.

III - ÉLÉMENTS D'ANALYSE PROPOSÉS

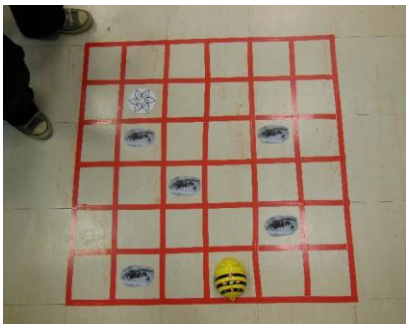
Dans la dernière partie de l'atelier, nous avons proposé aux participants un regard :

- la variété des supports utilisés dans les différentes classes avec lesquelles nous avons travaillé avec les avantages et inconvénients de chacun d'eux ;
- les différentes modalités de codage rencontrées dans les classes afin de réfléchir à leur pertinence ;
- nos analyses de certaines des situations sur lesquelles les participants ont travaillé dans l'atelier.

1 Les supports pour les déplacements



Des cases rectangulaires au sol dont les dimensions correspondent approximativement à la longueur du pas d'un enfant.



Un quadrillage au sol non mobile avec des cases carrées aux dimensions du pas d'un Beebot. Un écueil de ce type de piste pourrait être la prise de repère extérieur à la piste pour les déplacements du Beebot (par exemple : vers la porte…) alors qu'il s'agit ici de penser les déplacements du point de vue du Beebot.



Un quadrillage au sol mobile avec des cases carrées aux dimensions du pas d'un Beebot. De plus chaque case est une pochette transparente susceptible de recevoir une image ; cela permettra de construire des parcours sur ce quadrillage.



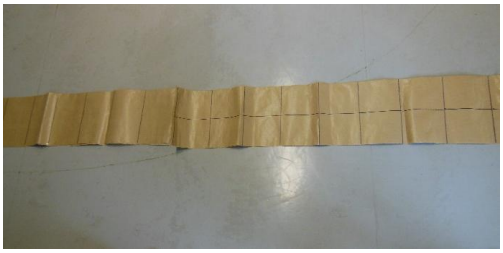
Un quadrillage au sol mobile avec des cases carrées aux dimensions du pas d'un Beebot. Des images ont été placées sur certaines des cases afin de servir d'indicateurs pour les parcours à faire effectuer au Beebot.



Un quadrillage au sol mobile avec des cases carrées aux dimensions du pas d'un Beebot. Cette piste est commercialisée par les diffuseurs des Beebots et Bluebots. Elle met en scène différents lieux dans une ferme et le robot va effectuer des déplacements de l'un à l'autre. Cette volonté d'ancrer la situation dans une réalité trouve vite ses limites, par exemple lorsqu'on voit des parcours du robot le conduisant à traverser les murs.



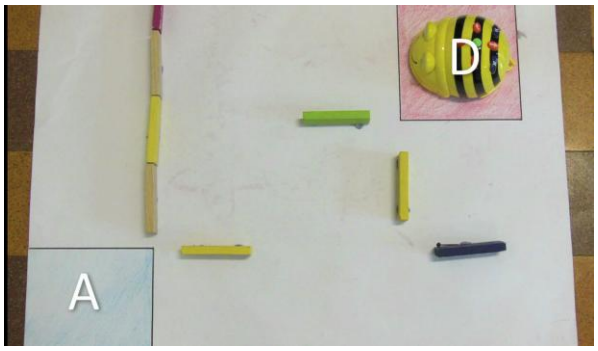
Comme précédemment, on a ici un quadrillage mobile avec des cases carrées aux dimensions du pas d'un Beebot mais celui-ci n'est plus utilisé au sol : il est posé sur une table. De plus, des accessoires sont utilisés pour indiquer le parcours à effectuer (aller chercher les fleurs) et dans certaines situations, on n'utilise qu'une colonne, afin de ne travailler que sur les commandes « avancer » et « reculer ».





Ces deux pistes correspondent à une volonté des enseignants de ne par aborder tout de suite les pivotements à droite et à gauche et de commencer la prise en main du robot par des déplacements en ligne droite. Cependant la piste de gauche comporte deux lignes de cases : on n'a pas perçu de véritable intérêt à ce type de support intermédiaire entre la ligne de cases et le rectangle quadrillé.

De plus il semble important de remarquer que la piste en ligne (image de droite ci-dessus) n'empêche pas l'utilisation du pivotement : une fois le Beebot arrivé sur la case jaune, pour revenir à son point de départ, on peut le faire reculer mais on peut aussi le faire pivoter deux fois du même côté puis avancer.



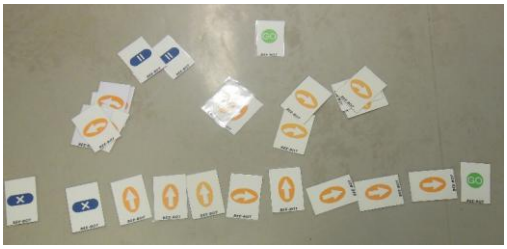
Sur cette dernière photo, on a un parcours balisé prenant la forme d'un labyrinthe sans cases dessinées en dehors de celle du départ et celle de l'arrivée. Remarquons que les baguettes servant au balisage ont une longueur sans lien avec celle du pas du Beebot.
Ce type de support va permettre de déconnecter la situation des tâches "classiques" de déplacement sur un quadrillage avec prise de repères absolus et non relatifs au sujet qui se déplace – tâches qui relèvent seulement du repérage des lignes et des colonnes et qui déboucheront à plus long terme sur le repérage d'un point par abscisse et ordonnée. Avec un Beebot, on travaille sur le repérage par rapport au sujet en mouvement.
De plus ce type de support évite aux élèves d'associer chaque mouvement du robot à un changement de case : dans les classes utilisant un support quadrillé, cela a systématiquement posé un problème pour l'appropriation des instructions de pivotement que les élèves de cette classe n'ont pas rencontré.

2 Les modalités de codage

On a retrouvé dans les classes, la variété des codages rencontrée chez les participants au cours de la première partie de l'atelier. Nous revenons ci-dessous sur certains d'entre eux.



Des cartes sur lesquelles on retrouve les différentes commandes des Beebots et Bluebots mais avec un graphisme modifié. De plus, l'orientation des cartes est donnée implicitement par le texte "BEE BOT" placé au bas de chacune des cartes. L'illustration ci-contre montre que cet implicite est loin d'être automatiquement partagé par les élèves.



Sur cette deuxième illustration, on voit même que les élèves n'ont pas du tout perçu la nécessité de disposer de 4 cartes différentes pour coder les différents déplacements : la même carte est utilisée en changeant son orientation, aussi bien pour indiquer d'avancer que pour indiquer de pivoter.



Dans cette classe, les cartes utilisées pour coder les déplacements n'utilisent aucune flèche.

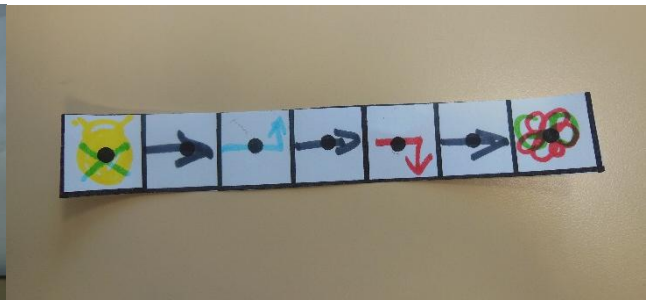
Deux registres différents sont utilisés :

- Pour les instructions « avancer » et « reculer », on trouve sur la carte, écrite en majuscule, la première lettre du mot utiliser pour dire l'instruction.
- Pour les instructions de pivotements, on trouve un code couleur : le rectangle rouge sur la carte indique un pivotement à gauche et le rectangle bleu un pivotement à droite.

On peut remarquer qu'alors que le mouvement d'avancée ou de recul est évoqué symboliquement par les lettres utilisées sur les cartes, le mouvement de pivotement n'est pas du tout évoqué sur les cartes correspondantes ; le code utilisé vise uniquement à distinguer les directions "gauche" et "droite".

L'utilisation des couleurs se veut une aide au repérage de la droite et de la gauche ; mais ne substitue-t-on pas à l'appropriation du lexique gauche-droite, l'appropriation d'un code supplémentaire dont rien ne prouve d'une part qu'il sera plus simple à intégrer, d'autre part qu'il aidera à l'acquisition du lexique relatif à la latéralisation ?



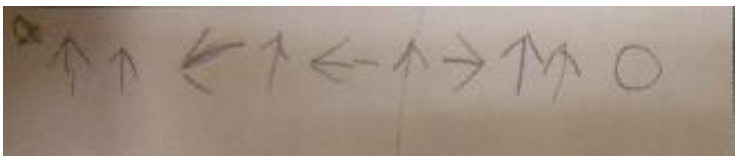


Sur la photo de gauche ci-dessus, on voit les différentes sortes de cartes dont disposent les élèves pour coder les déplacements du robot :

- Des cartes avec une flèche droite de couleur noire : celles-ci servent à coder les mouvements en avant du robot ; on peut remarquer que les élèves disposent ces cartes en positionnant les flèches suivant le sens d'écriture alors que dans les cartes de la page précédente, la convention utilisée était « flèche vers le haut pour avancer », « flèche vers le bas pour reculer ». Ce positionnement est tout à fait conforme avec le code utilisé par la PE pour transmettre aux élèves un programme de déplacement du Bebot (voir photo de droite ci-dessus).
- Des cartes avec une flèche coudée pour coder les pivotements. Pour renforcer la distinction gauche-droite, la différence d'orientation du pivotement est redoublée sur ces cartes par un code couleur (bleu pour la gauche et rouge pour la droite) ; celui-ci est rappelé par des gommettes de couleur collées sur les Beebots utilisés.

On peut aussi remarquer sur la photo de droite une contradiction entre les sens de déplacement du Beebot induits par les codes utilisés sur les deux premières cases du programme donné aux élèves : sur la première case, le Beebot est dessiné avec la tête vers le haut de la feuille et sur la deuxième case, on trouve une flèche droite placée dans une direction orthogonale au sens du robot sur la première case ; cela pourrait laisser croire que le Beebot change de direction alors qu'il n'en est rien.





Sur la photo ci-dessus, on voit les codes utilisés par des élèves de GS pour coder les instructions à donner au Beebot pour lui faire effectuer un parcours dans un labyrinthe sur support non quadrillé. Seules des flèches droites sont utilisées. La signification de celles-ci change en fonction de l'orientation donnée à la flèche : vers le haut pour avancer, vers la gauche ou vers la droite pour les pivotements. Ce code ressemble à celui souvent utilisé dans les classes pour coder des déplacements sur un quadrillage : dans ce cas, toutes les flèches utilisées indiquent un changement de case et l'orientation de la flèche fournit la direction du déplacement. Ici le même code est employé en un sens très différent puisque les flèches à gauche et à droite n'indiquent plus des directions absolues de déplacement mais donnent le sens de pivotement du robot : la direction dans laquelle le robot va se déplacer va être relative à sa position. La lecture de ce code n'a pas posé de problème à l'intérieur du petit groupe qui l'avait produit mais on peut se demander comment il serait interprété par un élève le recevant sans avoir participé à sa production.

3 Analyse de trois vidéos de classe

3.1 Déplacement d'un enfant-robot sur les cases d'un quadrillage

Dans cette vidéo (classe de MS), coexistent deux registres :

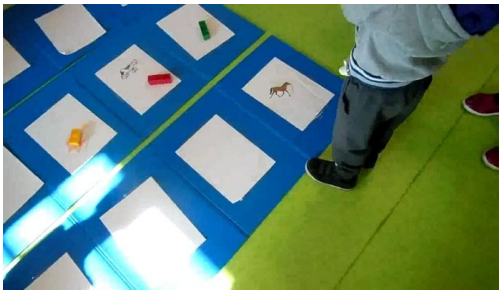
- le registre du corps avec les mouvements effectués : avancer, reculer, de combien de cases, tourner (pivoter), de quel côté ;
- le registre langagier avec les instructions données pour réaliser un parcours.

Plusieurs modalités sont observées :

1. Instructions données une à une par l'élève à celui qui se déplace.
2. Instructions données globalement : « l'élève programme l'élève-robot pour qu'il arrive sur une case préalablement choisie ou indiquée par la PE ».



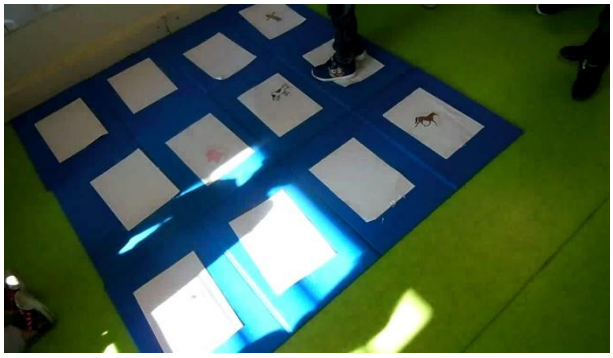
3. Visualisation préalable du parcours à indiquer en plaçant un lego dans chacune des cases du parcours.



4. Un élément susceptible de changer la modalité : l'élève-robot sait-il où il doit arriver ou la cible n'est-elle connue que de son instructeur ?

On voit dans le film que passer du discours à l'action est loin d'être évident.

Si l'élève-robot connait la cible, le discours de l'instructeur peut entrer en conflit avec la représentation qu'il a du parcours à effectuer.



Le marquage par les légos du parcours, s'il est une aide pour l'instructeur, peut donc s'avérer un obstacle à l'écoute du discours de l'instructeur par l'élève-robot.

De même, l'élève instructeur peut être tenté de substituer le geste (montrer où il faut aller) au verbe (dire les déplacements à effectuer).

Pour le pivotement, on rencontre une difficulté particulière dans le passage du discours à l'action :

- Pour pivoter vers la droite (vers le gant[61]), je commence par bouger la jambe gauche (celle qui n'est pas du côté du gant).

Ainsi, le discours entendu peut entrer en conflit avec le discours « intérieur » de la verbalisation des mouvements effectués.

3.2 Déplacement d'un Bluebot sur les cases d'un quadrillage

On trouve cette fois quatre registres :

- le registre de l'action : avancer, reculer, de combien de cases, tourner (pivoter), de quel côté ;
- le registre langagier : verbalisation des instructions données au robot et description du trajet ;
- le registre du parcours dessiné sur le support quadrillé ;
- le registre des instructions machines : les différentes touches et leur effet sur la Blue-Bot.

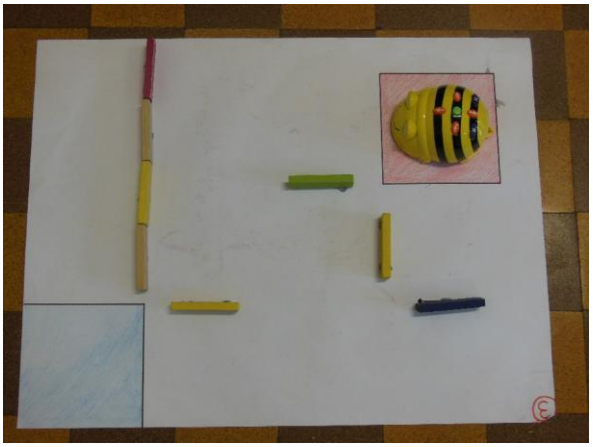
Le registre de l'action était déjà présent dans la vidéo précédente mais une différence importante apparait lorsqu'on passe de l'enfant au robot : les déplacements du robot sont séquencés c'est-à-dire que chaque instruction correspond à un mouvement alors que les déplacements de l'enfant ne le sont pas naturellement ; il en résulte que pivotement et changement de cases ont tendance à se fondre en un seul mouvement lorsque c'est l'enfant qui se déplace sur le quadrillage.

Les flèches des boutons de programmation sont souvent lues par les élèves non pour le mouvement qu'elles codent mais comme indicatrices d'une direction de déplacement.

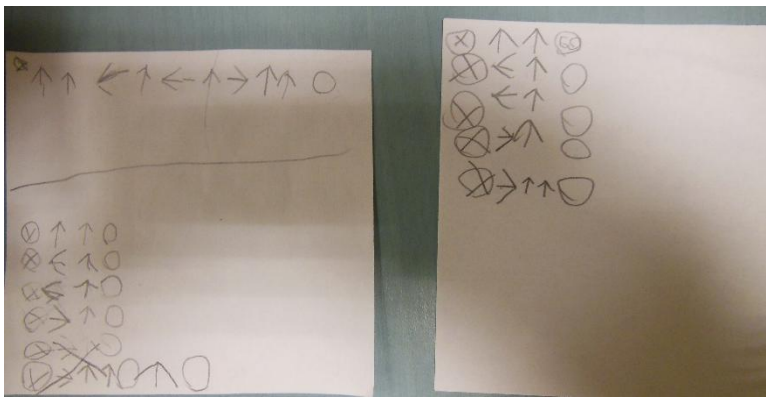
Cela est renforcé par la non congruence entre les deux derniers registres. En effet le dessin du parcours sur le support quadrillé conduit l'élève à lire le parcours comme une succession de cases parcourues sans prendre en compte l'orientation du robot. Or la suite des instructions machines n'est pas en correspondance terme à terme avec celle des cases parcourues : lorsque le robot avance ou recule, on a cette correspondance case/instruction mais ce n'est plus le cas dès lors qu'on a des pivotements puisqu'on a alors des instructions machines non associées à un changement de case.

61 Dans cette classe de MS, l'enseignante met un gant à la main droite de l'élève qui se déplace afin d'aider à la distinction des deux mains.

3.3 Déplacement d'un Beebot sans quadrillage



Dans cette dernière vidéo, un nouveau registre apparaît, celui du code avec les signes utilisés par les élèves pour écrire le programme du déplacement de la case rouge à la case bleue.



L'absence de quadrillage lève le problème de non congruence repéré dans la vidéo précédente puisque le dessin du parcours n'est plus lu par les élèves comme une succession de cases. Cela semble favoriser le recentrage des élèves sur une lecture des déplacements avec pour référent le robot. On le voit dans la vidéo lorsque les élèves modifient l'orientation de la feuille sur laquelle ils ont codés le parcours pour la faire coïncider avec l'orientation du robot.

IV - PERSPECTIVES

À l'issue de cet atelier, force est de constater l'ampleur du travail restant à effectuer autour des apports potentiels de ces artefacts (Bluebot, Beebot et autres robots programmables) aux apprentissages mathématiques à l'école.

Il s'agit d'une nouveauté dans les programmes qu'une part importante des enseignants comme des formateurs n'a pas encore totalement investie et le travail d'analyse des quelques expérimentations existantes a seulement été amorcé.

Ce vaste chantier devrait pouvoir se poursuivre en explorant deux directions :

- reprendre les travaux effectués dans les années 80 autour des robots de sol en les confrontant aux avancées de la recherche relative à la didactique des savoirs mathématiques en jeu lors de l'utilisation de ces artefacts à l'école ;
- approfondir le travail d'analyse autour des vidéos d'enseignants intégrant ces artefacts dans leur pratique afin de produire des ressources utilisables en formation.

V - BIBLIOGRAPHIE

Assude, T. (2018). Relations entre systèmes sémiotiques, milieux et techniques mathématiques : malentendus, hybridité, inventivités – Conférence, *Actes du 44e colloque COPIRELEM, Épinal 13-15 Juin 2017.*

Eysseric, P. (2018). Les chantiers Mathernelle : une formation continue des PE par l'accompagnement d'équipes – Communication C37, *Actes du 44e colloque COPIRELEM, Épinal 13-15 Juin 2017.*

http://www.marseille-6.ien.13.ac-aix-marseille.fr/spip/spip.php?article487, page internet du chantier mathématique et robotique pédagogique, circonscription de Marseille 06.

ATELIER A12

PAVAGES ET SYMÉTRIES : L'EXPÉRIENCE DU LABOSAÏQUE

Paolo BELLINGERI
Maître de conférences, Université de Caen Normandie,
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Matematita, centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica
paolo.bellingeri@unicaen.fr

Emmanuelle FÉAUX DE LACROIX
Maître de conférences, Université de Caen Normandie,
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
emmanuelle.feaux-delacroix@unicaen.fr

Eric REYSSAT
Professeur des Universités, Université de Caen Normandie,
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
eric.reyssat@unicaen.fr

André SESBOÜÉ
Maître de conférences, Université de Caen Normandie,
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
andre.sesboue@unicaen.fr

Résumé

L'objectif de cet atelier était de présenter le Labosaïque, un dispositif de médiation scientifique, conçu par le Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme (Caen) pour proposer des animations en milieu scolaire et auprès du grand public. Il est constitué de matériel original, ludique et attractif, visant à faire découvrir des notions mathématiques (formes, symétrie, multiplication...) au moyen d'objets concrets. Dans cet atelier nous avons montré une version « portative » de ce dispositif que l'équipe du Labosaïque développe actuellement, avec le soutien de la fondation Blaise Pascal, sous forme de mallettes pédagogiques. Cette présentation a engagé une réflexion sur la façon dont les enseignants pourraient s'emparer de façon autonome de ce matériel pour une utilisation en classe : quels besoins de formation en amont, de fiches pédagogiques, de descriptions d'activités…

I - LE LABOSAÏQUE

Le Labosaïque est un projet visant à faire découvrir les symétries du plan et de l'espace à travers la manipulation et l'observation d'objets à la fois concrets, attrayants et ludiques. Ce matériel a pour thème l'étude des pavages et des polyèdres, mais il permet aussi d'explorer les liens entre les mathématiques et la physique des matériaux, l'art, l'architecture, la biologie… Le projet Labosaïque a pris naissance grâce au prix "Têtes chercheuses, fondation musée Schlumberger" dont notre équipe a été lauréate pour l'édition 2011. Depuis cette date le Labosaïque est très largement utilisé pour des interventions en milieu scolaire ou auprès du grand public. Nous intervenons régulièrement avec le Labosaïque dans des établissements scolaires, de l'école primaire au lycée, sur tout le territoire de l'ex Basse-Normandie. Au total, sur les cinq années 2012-2017, nous avons réalisé plus de 50 journées d'intervention en milieu scolaire ce qui a permis à plus de 4000 élèves de bénéficier d'un atelier.

1. Le dispositif et l'action auprès du public scolaire

Le Labosaïque propose plusieurs activités de découverte des mathématiques reliées aux pavages du plan, thème mis en valeur dans les derniers programmes scolaires. En effet dans les programmes du cycle 4, les pavages et rosaces sont mis en avant comme des notions privilégiées pour l'étude des transformations géométriques, comme mentionné dans le BO spécial n°11 du 26 novembre 2015 :

> *La symétrie axiale a été introduite au cycle 3. La symétrie centrale est travaillée dès le début du cycle 4, en liaison avec le parallélogramme. Les translations, puis les rotations sont introduites en milieu de cycle, en liaison avec l'analyse ou la construction des frises, pavages et rosaces.*

Bien que les termes « pavages et « rosaces » n'apparaissent plus explicitement dans la dernière version des programmes de cycle 4, notre dispositif expérimental garde tout son sens pour l'étude de ces transformations. En effet dans le BO n°30 du 26 juillet 2018 on précise que :

De nouvelles transformations (symétries centrales, translations, rotations, homothéties) font l'objet d'une première approche, basée sur l'observation de leur effet sur des configurations planes, essentiellement à partir de manipulations concrètes (papier calque, papier pointé, quadrillage, etc.) ou virtuelles (logiciel de géométrie dynamique). L'objectif est d'installer des images mentales qui faciliteront ultérieurement l'analyse de figures géométriques ainsi que la définition ponctuelle des transformations étudiées.

Le thème des pavages apparaît ainsi dans plusieurs activités scolaires. En particulier sur Eduscol on trouve beaucoup d'activités concernant le 4ème cycle (voir par exemple Eduscol 2016), et même des activités à partir de la grande section (Eduscol 2017). On trouve aussi des activités sur des espaces pédagogiques de différentes académies, à titre d'exemple (Nantes, 2011 et 2016) et (Rouen, 2016), avec des finalités très variées, comme l'utilisation d'algorithmes et de logiciels de géométrie ou le repérage et la reconnaissance des différentes symétries.

Le matériel du Labosaïque, entièrement conçu par notre équipe et réalisé sur mesure, se compose de plusieurs objets originaux dont les photos sont données en annexe 1 : couronne rotative, jeux de pièces permettant de réaliser les 17 types de pavages périodiques[62], équerres exotiques, chambres de miroirs, miroir articulé, jeux de pièces pour réaliser des pavages de Penrose[63]. Une partie de cet équipement (chambres de miroirs) est largement inspirée d'une expérience sur les « symétries et jeux de miroirs » développée en Italie par l'université de Milan (Bellingeri, Dedò, Di Sieno, et Turrini, 2002). D'autres objets sont des inventions de notre équipe, en particulier la « couronne rotative » qui permet l'étude des symétries des pavages [voir la vidéo (Unicaen, 2017)].

Les activités pédagogiques que nous proposons autour de ces objets sont entièrement imaginées par notre équipe. Elles ont été créées et améliorées par retour d'expérience au fur et à mesure de nos interventions. Celles-ci se déroulent généralement sous forme d'ateliers d'une à deux heures auprès d'une classe. Lors d'un atelier nous incitons les élèves à une démarche de recherche en groupe. Notre matériel concret et ludique est un support pour aborder des problèmes différents selon les niveaux scolaires. Par ailleurs nos ateliers sont généralement l'occasion de présenter rapidement des thèmes actuels de la recherche en mathématiques et ses applications dans le monde technologique.

Le premier aspect spécifique de notre matériel est la possibilité pour les élèves de manipuler des formes géométriques données, plutôt que les découper ou les dessiner eux-mêmes. Par rapport à d'autres dispositifs de ce type comme la « Moisson des formes » (Bettinelli, 1994) ou « Atrimath », nous disposons à la fois d'une grande variété de formes (plus d'une vingtaine) et d'environ une quarantaine de pièces de

62 Il existe plusieurs documents sur la classification des pavages périodiques du plan qui sont abordables pour un public de lycéens comme (Nantes, 2011) ou (Tangente, 2018); on peut aussi citer le site de Thérèse Eveilleau, ancienne formatrice IUFM (Eveilleau 1) qui traite la classification des pavages avec une approche algorithmique.

63 Les pavages de Penrose sont très présents sur le web ; pour leur rigueur et leur accessibilité nous conseillons en particulier une page d'activités sur les pavages de Penrose crée par des membres du laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem de Rouen, avec qui nous collaborons souvent pour des activités de diffusion des mathématiques (LMRS, site internet) et une page, plus générale, sur les pavages apériodiques (Eveilleau 2).

chaque type ; de plus, les pièces du Labosaïque sont aimantées, ce qui facilite l'agencement et la manipulation et qui permet des mises en commun sur tableau devant toute la classe.

Ces choix dans la conception du matériel ont une double motivation :

- La première est de pouvoir avoir des formes identiques pour tous les participants, faciles à agencer, qui permettent d'aborder rapidement la question de la possibilité de paver le plan, mais aussi de pouvoir vérifier, par agencement ou superposition, certaines propriétés géométriques, l'égalité des angles ou encore la notion de similitude.

- La deuxième réside dans la nature de nos ateliers. Sauf situation spécifique d'un travail en amont de l'enseignant, il n'y a pas de préparation préalable des élèves ; de plus, nous intervenons dans les différentes classes sans connaitre leur niveau. Le fait de disposer d'une grande variété de jeux de pièces nous permet de moduler les activités selon les différents niveaux et porter rapidement la plupart des élèves à se poser des questionnements et à coopérer entre eux.

Le deuxième aspect spécifique est l'utilisation de plusieurs types de miroirs, de tailles différentes, articulés, assemblés pour former des chambres de miroirs. Cette panoplie de miroirs permet d'aborder les symétries axiales, leurs compositions, mais aussi les multiplications et les fractions, la notion d'angle (dans le plan ou même sur une sphère), le concept de plan infini… Dans la section 1.2, nous donnerons une brève description d'activités basées sur notre matériel et qui permettent d'aborder ces différents thèmes. Le choix de travailler avec des miroirs pour travailler sur les symétries n'est pas anodin, comme résumé par (Chesnais, 2009) :

> *En ce qui concerne la symétrie, le miroir ne permet pas de concevoir que la symétrie est une transformation du plan tout entier et pas d'un demi-plan dans un autre, ni qu'elle fonctionne "dans les deux sens". Par exemple, si les élèves associent symétrie axiale et miroir, il leur sera difficile de concevoir le symétrique d'une figure coupée par l'axe. D'autre part, un travail sur les axes de symétrie fondé sur des dessins figuratifs a pour conséquence de privilégier les cas particuliers liés aux axes verticaux et horizontaux, ceux-ci étant de loin les plus représentés dans le concept quotidien, sans que cela corresponde à une légitimité géométrique.*

Dans notre dispositif les différentes tailles de miroirs, les chambres, mais aussi la présence de fentes (dans la chambre carrée) permettent de comprendre ou au moins apercevoir les symétries comme transformation du plan tout entier. Par exemple en insérant un motif dans la chambre triangulaire (voir annexe 1, photo 3) on découvre un pavage du plan infini et on peut en observer les symétries ou « régularités ». De plus, en posant un miroir sur un motif composé de pièces (annexe 1, photo 1) on peut vérifier les symétries axiales : en utilisant la définition d'un élève, le miroir apparait alors comme une « fenêtre » sur l'autre partie du motif. D'autre part, le miroir articulé (annexe 1, photo 5), la chambre triangulaire (annexe 1, photo 3) et les chambres sphériques (annexe 1, photo 6) permettent de « découvrir » des symétries différentes de celles usuellement abordées à l'école (symétries centrales ou axiales d'axes verticaux et horizontaux). C'est peut-être justement là le point fondamental de notre démarche : la grande variété de miroirs, de pièces et d'outils de visualisation des symétries, nous permet de montrer que le monde des formes et de leurs symétries est étonnamment riche. Nous ne considérons pas encore nos ateliers comme des supports pédagogiques aux programmes scolaires (ce travail est un objectif à plus long terme), mais comme des activités de découverte des miroirs, des formes et des mathématiques sous-jacentes, sur lesquelles les enseignants peuvent revenir ensuite en classe. C'est aussi pour faciliter cette étape de réinvestissement que nous nous sommes engagés dans la construction d'une version « portative » présentée dans la section 2.

2. Description détaillée du matériel

Voici une description du matériel dont se compose le Labosaïque, accompagnée, pour chaque item, d'exemples d'activités à réaliser avec des élèves :

- Un millier de pièces aimantées pour reproduire des portions de pavages du plan et en particulier représenter chacun des 17 types de pavages périodiques. D'autres jeux de pièces très simples (triangles, quadrilatères, polygones réguliers) permettent d'étudier quelles pièces réalisent (ou ne

réalisent pas) des pavages. Un plateau tournant et des miroirs sur pied permettent ensuite de reconnaître les symétries miroirs, les rotations et les translations (annexe 1, photo 1).

La vidéo (Unicaen, 2017) montre de façon complète les activités que nous développons à partir de ce matériel et qui portent sur l'étude des transformations du plan : symétries, rotations, translations.

- Des équerres exotiques qui sont des tiges plates coudées à angle droit ou non : un quart, un cinquième, un sixième de tour. Elles sont percées de trous régulièrement espacés que l'on peut marquer au stylo en les posant sur une feuille. Par glissement et rotation, les points ainsi dessinés rendent visible la notion de restriction cristallographique (impossibilité de rencontrer une rotation de cinquième de tour stabilisant un pavage périodique).
- Nous disposons aussi de plus de mille pièces pour construire des pavages de Penrose (annexe 1, photo 2) et en collaboration avec le Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem (Rouen) plusieurs activités ont été conçues pour permettre au public d'explorer (à divers niveaux, du primaire au lycée) des aspects surprenants des pavages dits « apériodiques » (LMRS, site internet cité en sitographie).
- Le miroir articulé (annexe 1, photo 5) est composé de deux miroirs plans verticaux 40 x 25 cm, articulés autour d'une charnière verticale. L'un est fixé à un socle horizontal, le deuxième glissant sur ce socle lorsqu'on le tourne autour de la charnière.

  Ce dispositif est utilisé pour faire visualiser et faire comprendre le lien entre l'angle des miroirs et le nombre d'images obtenues, notion très étonnamment peu intuitive chez les élèves de collège. Que se passe-t-il si l'élève en manipulant le miroir, change l'angle ? Si cet angle n'est pas un sous-multiple d'un tour complet ? Quelle différence si c'en est un sous-multiple pair ou impair ? Que voit-on en posant une main gauche entre les miroirs ? Le socle peut accueillir divers objets entre les miroirs, prétexte esthétique et ludique à des discussions sur la multiplication et la factorisation des entiers. Un jeu de dessins ou photos à poser aident à visualiser le « domaine fondamental » d'une rosace. L'impossibilité de reproduire certains dessins du type enjoliveurs d'autos rend visible la notion de symétrie miroir. Un troisième miroir vertical sur pied indépendant peut être ajouté aux deux précédents pour faire imaginer le passage des motifs de type rosace aux pavages du plan. Le passage du fini à l'infini est très rarement anticipé, bien sûr en primaire mais même par des lycéens ou des adultes, et source d'émerveillement et de réflexion.
- Deux chambres de miroirs, triangulaire et carrée (annexe 1, photos 3 et 4), permettent de construire des pavages infinis par symétries miroir. Chambre triangulaire : hauteur 27cm et comme base un triangle équilatéral d'environ 58 cm de côté. Cette chambre se compose de trois rectangles qui s'emboîtent. Chambre carrée : hauteur de 26 cm et base de 26 cm de côté. La chambre est une boîte ouverte avec des miroirs sur les faces verticales dont une qui présente en bas une fente de 3 mm pour insérer des dessins ou des images.

  Ce dispositif est en premier lieu utilisé pour visualiser l'infini : il suffit de placer un seul objet à l'intérieur de la chambre pour que les reflets de cet objet donnent l'illusion de le voir une infinité de fois. Cette expérience permet aussi d'aborder l'étude des compositions des symétries axiales, chaque reflet correspondant à une composition des symétries données par les miroirs constituant les parois de la chambre. Différentes activités développées à l'aide de ce matériel permettent ensuite de travailler sur la notion de symétrie. On peut par exemple proposer un dessin (carré ou triangulaire) à insérer dans la chambre et demander aux élèves de comprendre quel sera le pavage généré par cette image (annexe 2, activité 2). A l'inverse, on peut proposer aux élèves une image de pavage et leur demander de comprendre quel dessin il faut insérer dans la chambre pour reproduire le pavage (annexe 2, activité 3).

- Trois types de « chambre de miroirs sphérique » construites chacune avec trois miroirs concourants (annexe 1, photo 6) qui permettent de générer par réflexions les pavages sur une sphère[64] (d'où la terminologie de chambre « sphérique »).

  Ce dispositif permet en particulier au public de visualiser les polyèdres réguliers et nombre de polyèdres quasi-réguliers qui leur sont associés (voir annexe 2, activité 4). Il permet par ailleurs de comprendre les réflexions dans l'espace ainsi que leurs compositions, mais aussi d'avoir un aperçu de quelques notions de géométrie sphérique, en particulier que la somme des angles d'un triangle inscrit sur une sphère est toujours strictement supérieure à 180 degrés.

II - LABOSAÏQUE EN CLASSE : UNE VERSION PORTATIVE

Forte de son expérience auprès du public scolaire et devant le succès des ateliers et l'intérêt (des élèves et des enseignants) pour le matériel utilisé, l'équipe du Labosaïque a décidé de créer une version portative de plusieurs de ses ateliers en vue de diffuser ce matériel au sein des établissements scolaires et instituts de formation des maîtres, sous le nom de « Labosaïque en classe ».

1. Motivation pour la création d'une version portative

Il nous est rapidement apparu, dès les premières années d'intervention avec le Labosaïque, qu'il serait intéressant, pour plusieurs raisons, de pouvoir dupliquer notre matériel afin que d'autres acteurs puissent s'emparer du concept.

Premièrement, le matériel étant très volumineux, il est difficile de le transporter. Cela n'est qu'un problème d'organisation lorsque nous intervenons dans notre académie, mais devient un réel handicap lorsque nous sommes sollicités pour présenter nos outils dans le cadre de différentes manifestations académiques ou grand public dans d'autres régions.

Nous recevons surtout une demande croissante d'interventions de la part des enseignants, demande à laquelle nous ne pouvons plus répondre entièrement faute de temps et de disponibilité. Les demandes d'interventions se sont en particulier amplifiées de la part des collèges avec le retour des transformations géométriques dans les programmes du cycle 4.

Parallèlement à nos interventions en collège et lycée, nous avons eu de nombreuses occasions d'intervenir auprès de classes de primaires principalement lors de « sorties pédagogiques » (manifestations académiques Ecolysciences, semaine des mathématiques, visites pédagogiques au château de Crèvecoeur-en-Auge, ateliers au salon Culture et Jeux mathématiques…). Dans ce cadre-là aussi nous avons pu constater que nos ateliers, présentés comme une découverte ludique des mathématiques, ont un ancrage direct dans les programmes du cycle 3, voire même cycle 2, puisque nos activités s'appuient essentiellement sur la découverte, la manipulation et l 'étude des formes géométriques et de la symétrie.

Ainsi notre matériel, qui avait dans un premier temps été conçu dans le simple but de présenter les mathématiques sous un aspect différent et ludique, se trouve en effet être un réel outil pédagogique mobilisable par les enseignants dans le cadre des programmes scolaires. Il parait donc pertinent de pouvoir mettre directement notre matériel à disposition des enseignants de manière à ce qu'ils puissent s'approprier nos ateliers et les rendre « cohérents » avec le programme scolaire et leurs groupes d'élèves. Nous souhaitons ainsi aussi contribuer à la mise en place de « laboratoires de mathématiques » dans les établissements scolaires tels que les avait imaginés Émile Borel qui justifiait cette nécessité de la façon suivante (Borel, 1904) :

> *Il semble que la valeur éducative de l'enseignement mathématique ne pourra qu'être augmentée si la théorie y est, le plus souvent possible, mêlée à la pratique. L'élève comprendra qu'il est sans doute excellent de bien raisonner, mais qu'un raisonnement juste ne conduit à des résultats exacts que si le point de départ est lui-*

64 Les pavages ainsi obtenus présentent nécessairement les symétries de l'un des trois groupes de polyèdres platoniciens : tétraèdre, cube-octaèdre, dodécaèdre-icosaèdre : pour plus de renseignements sur ces groupes, voir le site (Mathcurve) cité dans la sitographie.

même exact ; qu'il faut par suite ne pas croire aveuglement à tout raisonnement, à toute démonstration d'apparence scientifique, mais se dire toujours que la conclusion n'a de valeur qu'autant que les données ont été scrupuleusement vérifiées par l'expérience.

Cette idée de création de « laboratoires de mathématiques » dans le cadre de l'enseignement des mathématiques a aussi été fortement défendue par plusieurs mathématiciens au cours du XXème siècle, en particulier en Italie par Emma Castelnuovo, qui soulignait l'importance d'une éducation à « savoir voir les mathématiques » (Castelnuovo, 1967). On pourra aussi noter que ce projet s'inscrit aussi dans les recommandations du récent rapport Villani-Torossian (2018), qui dans la mesure 16 préconise la mise en place dans les établissements scolaires de laboratoires de mathématiques « *en lien avec l'enseignement supérieur et conçus comme autant de lieux de formation et de réflexion (disciplinaire, didactique et pédagogique) des équipes.* »

Enfin nous sommes plusieurs fois intervenus lors de journées de formation des enseignants du premier ou second degré et nous pensons qu'il serait aussi pertinent de diffuser notre dispositif au sein des ESPE et des IREM pour qu'il puisse être utilisé dans le cadre de la formation des maitres du premier et second degré. Il s'agit là d'un nouvel aspect dans nos axes d'interventions. Bien que nous ayons mené quelques expériences dans ce domaine, nous manquons encore de recul pour définir pleinement ce nouveau champ d'action. Cependant les ateliers que nous avons pu conduire récemment en présence de formateurs, en particulier lors du colloque de la COPIRELEM à Blois, nous incitent à poursuivre dans cette voie. Notre matériel se prête en effet bien à des actions de formations car il permet d'un coté de rendre, à travers la manipulation et la visualisation, moins abstraites certaines notions de géométrie et de l'autre de proposer aux enseignants des activités de découverte et recherche mathématique transposables en classe.

2. Description détaillée du matériel de la version portative

Reproduire à grande échelle le matériel du Labosaïque à l'identique n'était absolument pas envisageable à cause du coût trop important et du volume total du matériel.

Nous avons donc créé une version portative reproduisant le concept du matériel original, mais élaborée à partir de matériaux beaucoup moins coûteux (en particulier en utilisant du miroir acrylique à la place du verre et du bois pour les chambres de miroirs). Ces nouveaux objets sont entièrement démontables ce qui facilite leur circulation. Les objets ainsi conçus sont certes un peu moins impressionnants que les originaux mais présentent les mêmes propriétés mathématiques et gardent tout leur intérêt pédagogique.

Ci-dessous une description détaillée du matériel proposé et de son adaptabilité en classe. Ce matériel étant très similaire au matériel originel décrit en section 1.2, nous ne nous attacherons pas ici à décrire à nouveau les activités proposées lorsqu'elles sont similaires. Nous nous focaliserons plutôt sur les différences dans la conception et éventuelles limitations imposées par un dispositif qui se veut plus mobilisable et surtout beaucoup moins coûteux.

- Le **« Palais des glaces »** (annexe 1, photo 7) : lot de chambres de miroirs démontables permettant de réaliser des pavages infinis du plan. Ces chambres de miroirs permettent de visualiser l'infini, d'étudier les symétries axiales et d'aborder la notion de domaine fondamental. Les activités possibles avec ce matériel sont adaptables ainsi à tous les niveaux : de la fin du primaire à l'Université.

  Le kit est composé essentiellement de 2 chambres de miroirs : une carrée et l'autre triangulaire (triangle équilatéral). Ces chambres sont faites en miroir acrylique (PMMA) de 3mm d'épaisseur. Ceci permet d'avoir un bon compromis entre rigidité et légèreté. Des socles sont fournis (contreplaqué de 3mm) afin de stabiliser la structure. La boîte carrée est composée de 4 panneaux de 300mm de long sur 148mm de haut emboîtables. La surface intérieure forme un carré de 210mm de côté. La boîte triangulaire est formée de 3 panneaux de 397mm de long et de 148mm de haut. La surface intérieure forme un triangle équilatéral de 297mm de côté. Chaque boîte a un de ses cotés percé d'un orifice afin de pouvoir visualiser facilement les réflexions à « l'infini » dues à la position des miroirs. Pour réaliser les activités proposées nous fournissons des jeux de

pièces triangulaires en bois (MDF) peints de 3mm d'épaisseur : des triangles isocèles rectangles pour la boîte carrée et des triangles rectangles 30°-60° pour la boîte triangulaire. Des étuis sont fournis afin de ranger les miroirs.

Nous complétons notre kit avec un lot de petits miroirs sur pieds pour réaliser des activités simples sur la notion de symétrie (annexe 2, activité 1). Notons juste ici que cette utilisation de petits miroirs et les activités associées n'ont pas été conçues à l'origine pour faire partie du dispositif Labosaïque mais avaient été développées parallèlement. Suite à plusieurs interventions auprès d'élèves de cycle 2 et 3, il nous a paru judicieux d'intégrer cette activité dans la version portative.

L'ensemble tient dans un sac facilement transportable pesant environ 3kg.

- Le « **Kaléidospace** » (en cours de développement) : lot de kaléidoscopes démontables permettant de visualiser les polyèdres réguliers et les pavages de la sphère (voir photos dans l'annexe 2, activité 4).

  Nous proposons un lot de 3 « chambres de miroirs sphériques » démontables permettant de reconstruire par symétries planaires les 5 solides réguliers de l'espace : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre (voir annexe 2, activité 4). Chaque chambre (une pour le tétraèdre, un pour le cube et l'octaèdre et une pour le dodécaèdre et l'icosaèdre) est formée de 3 plaques de miroir acrylique (PMMA) de 5mm d'épaisseur. Chaque plaque est une portion de disque (entre un 1/4 et un peu plus d'un 1/4) de 450mm de rayon. En complément, des patrons de pièces à introduire dans ces kaléidoscopes seront proposés au téléchargement. Elles pourront être réalisées en carton ou papier.

  Nous n'avons pour l'instant réalisé qu'un prototype pour chacune de ces trois chambres de miroirs. Ils ont été présentés à maintes occasions dans divers salons et colloques, leur format réduit et démontable permettant leur transport sans aucune difficulté. Ces prototypes donnent un résultat tout à fait satisfaisant malgré leur taille réduite par rapport à l'original et malgré la moindre qualité du miroir utilisé ; nous n'avons par contre pas encore fait d'étude de coût pour savoir s'il est pertinent de les reproduire à plus grande échelle.

- Le « **Carreleur mathématique** » (en cours de développement) : lot de pochettes de pièces colorées permettant de réaliser différents types de pavages du plan. Ces pièces se prêtent bien au public d'école primaire pour construire des pavages et permettent d'aller plus loin avec les collégiens pour l'étude des transformations du plan.

  Nous proposerons différents ensembles de pièces colorées et aimantées permettant de construire les différents types de pavages périodiques du plan. Ces pièces seront en bois (MDF) de 3mm avec un support aimanté. Grâce à leur aimantation, ces pièces pourront facilement être utilisées à la verticale sur un tableau métallique afin de présenter certaines notions à un auditoire. Des fiches, imprimables sur transparent, seront téléchargeables sur notre site. Elles serviront à illustrer la notion de périodicité ainsi que les différentes symétries et rotations présentes dans le pavage proposé.

  Nous ne disposons pas encore de prototype complet pour ce dernier item mais, à terme, nous envisageons de reproduire des pièces de forme et taille quasiment similaires à celles présentes dans la version originale du Labosaïque, visibles dans la vidéo (Unicaen, 2017). Nous avons longtemps buté sur le coût de production qui nous a été proposé pour la fabrication de cette version originale ; toutefois de récents essais sur un matériel différent nous laissent entrevoir la possibilité de produire suffisamment de pièces à coût raisonnable. Nous n'avons par contre pas encore de solution technique pour remplacer de manière tout à fait satisfaisante la couronne rotative que nous associons aux lots de pièces pour l'étude des translations et rotations (couronne dont la présentation est principalement l'objet de la vidéo [Unicaen, 2017]). Cependant l'utilisation simple des fiches transparentes (voir la vidéo) donnera des explications déjà assez efficaces pour l 'étude des rotations et translations laissant un pavage invariant.

III - QUELLES FICHES PÉDAGOGIQUES – QUELLE FORMATION EN AMONT ?

Le matériel du Labosaïque en classe ne sera pleinement utilisable qu'une fois accompagné de fiches pédagogiques et fiches d'activités permettant aux enseignants d'utiliser le dispositif « clés en main ». Il convient ici de distinguer deux types de fiches :

En premier lieu, le matériel est accompagné des « fiches d'activités » nécessaires à la réalisation des activités que nous proposons lors de nos ateliers. Il s'agit par exemple de différentes images que l'on place entre les miroirs ou que l'on doit reproduire à l'aide des miroirs. Plusieurs échantillons de ces fiches sont donnés en annexe 2. Ces fiches sont accompagnées d'instructions simples, destinées aux élèves comme aux enseignants, pour réaliser l'activité proposée en autonomie. Malgré tout, ces fiches seules ne peuvent suffire à une appropriation en totale autonomie de notre dispositif. Si des enseignants ont déjà assisté à nos ateliers, par exemple si nous sommes intervenus dans leur classe, ils pourront sans difficulté reproduire ces ateliers.

En second lieu nous comptons proposer, associées aux fiches d'activités, des fiches pédagogiques qui permettront aux enseignants de découvrir eux-mêmes et comprendre les concepts associés à notre matériel. La conception de ces fiches est en cours de réflexion avec le centre Matematita, centre italien inter universitaire sur l'apprentissage non formel des mathématiques. Depuis sa création en 2005, le centre Matematita (www. matematita.it) mène une réflexion sur l'apprentissage informel, vu comme une des conditions préalables à toute acquisition ultérieure de connaissances plus formalisées. Dans ce but ses membres essayent d'identifier des contenus et des méthodes adaptés à la communication en milieu scolaire et grand public, en particulier de concevoir, mettre en œuvre et diffuser des produits de vulgarisation (expositions, livres, magazines, matériel multimédia) et étudier leur impact sur les différents niveaux impliqués. La collaboration que nous avons entreprise avec le centre Matematita a déjà donné lieu à une présentation à Bologne de la version portative du Labosaïque (qui en était encore alors à l'état de prototype) lors du XXXIème colloque Incontri con la matematica (Bellingeri, Benvenuti, Féaux de Lacroix et Renieri, 2017).

Nous envisageons par ailleurs de proposer des « sessions de formation » aux enseignants intéressés par le matériel, sur le modèle de l'atelier que nous avons mené lors du colloque de la COPIRELEM. Voici un descriptif du déroulement de ces sessions de formation.

Dans un premier temps nous faisons une petite introduction sur les concepts mathématiques associés à notre matériel : pavages, pavages périodiques du plan, pavages de la sphère, isométries et classification des pavages ; il est possible ici d'aller plus loin en expliquant où ces problématiques interviennent en lien avec les autres sciences (cristallographie en particulier). Cette approche disciplinaire a été semble-t-il très appréciée lors de notre exposé à la COPIRELEM. En effet les thèmes mentionnés ci-dessus ne sont pas toujours bien connus des enseignants, aussi bien du premier que du second degré, voire même universitaires.

Nous passons ensuite à la partie « manipulation » en demandant aux enseignants d'effectuer eux-mêmes les différentes activités que nous proposons aux élèves, ce qui nous permet de montrer un panel d'activités que nous proposons avec notre matériel tout en discutant avec les participants du niveau scolaire auquel il est pertinent de proposer telle ou telle activité.

Dans un souci de progressivité, nous présentons d'abord les activités à réaliser avec un seul miroir : visualisation des axes de symétries et reproduction de dessins symétriques à l'aide d'un miroir (annexe 2, activité 1). Les échanges avec les enseignants conduisent à la conclusion que ces activités sont particulièrement pertinentes en cycle 3. Certains participants les rapprochent d'une activité qu'ils pratiquent eux-mêmes avec des élèves : création de dentelles par pliages et découpages.

Nous présentons ensuite les activités réalisables à l'aide de deux miroirs. Il s'agit d'expliquer ici les activités basées sur la manipulation du miroir articulé. Nous ne disposons pas dans la version portative de véritable miroir articulé, mais deux petits miroirs sur pied, accolés, permettent de remplacer ce dispositif. Nous déclinons pour les participants, l'ensemble des questions que nous posons généralement

aux élèves à l'aide de ce dispositif, questions basées essentiellement sur le lien entre l'angle des miroirs et le nombre d'images obtenues lorsque l'on place des objets entre les deux miroirs. Les enseignants sont intéressés par les potentialités du dispositif en termes de visualisation des symétries et de leurs compositions mais surtout par un aspect beaucoup plus inattendu : cet outil nous permet tout simplement de faire faire du calcul mental aux élèves. En cycle 3, après avoir identifié les positions du miroir qui permettent de multiplier les images par 3, 4, 5, 6, nous déclinons des questions, amenant à faire des multiplications, du type « si je mets 3 coquillages entre les miroirs, combien verrais-je de coquillages en tout ? » ou, pour les divisions, du type « comment puis-je me débrouiller pour voir en tout 24 coquillages ? ». En cycle 4, les questions incitent plutôt à diviser le nombre 360 : quels diviseurs ? quels quotients ?

Viennent naturellement à la suite les activités concernant les deux chambres de miroirs, carrée et triangulaire (annexe 1, photo 7). Les participants sont particulièrement séduits par l'aspect esthétique des images que l'on peut réaliser grâce à ce dispositif. Les activités proposées avec ces chambres de miroirs (annexe 2, activités 2 et 3) sont jugées très intéressantes pour la visualisation des symétries axiales, mais difficiles. Des discussions s'engagent par ailleurs sur les aspects techniques concernant le matériel qu'il est pertinent de fournir pour accompagner ce dispositif.

Nous changeons ensuite de registre en présentant les activités réalisables à l'aide des pièces permettant de construire différents types de pavages. Les activités consistent essentiellement à repérer à l'aide de transparents, les rotations et translations conservant chaque pavage. Les enseignants jugent cette technique particulièrement efficace pour visualiser la notion de transformation laissant un dessin invariant.

Enfin nous abordons des notions de géométrie dans l'espace en faisant visualiser différents polyèdres et les liens qui les relient entre eux (dualité, troncature...). Pour cela, nos chambres de miroirs sphériques sont un outil très performant (annexe 2, activité 4). Cette dernière partie est un peu plus en marge des programmes scolaires et est plutôt proposée en guise d'activité récréative pour son côté à la fois magique et esthétique. Les participants sont très impressionnés par l'effet produit par ces dernières chambres de miroirs.

Ces échanges confirment l'importance d'un dialogue, sous forme de retour d'expériences et partage de pratiques, avec les enseignants utilisant notre matériel. Nous veillerons donc à entretenir des échanges avec les utilisateurs ; une possibilité à l'étude est celle de créer un réseau, en collaboration avec les ESPE et les IREM, au sein duquel chacun pourra aussi apporter sa propre contribution en termes d'activités et de pratiques pédagogiques.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Bellingeri, P., Benvenuti, S., Féaux de Lacroix E. et Renieri, A. (2017). *Tassellazioni e simmetrie: l'esperienza francese del Labosaïque.* Atti XXXI convegno Incontri con la Matematica, Castel S. Pietro Terme, 159-160.

Bellingeri, P., Dedò, M., Di Sieno S. et Turrini C. (2002). *Symétries et jeux de miroirs*. Edition POLE.

Bettinelli, B. (1994). *La moisson des formes*. Grand N. Num. 56. p. 33-41.

Borel E. (1904). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. R*evue générale des sciences pures et appliquées*, 10, 431–440.

Castelnuovo E. (1967). È possibile un'educazione al "saper vedere"in matematica? *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 22 (4), 539–549.

Chesnais A. (2009). L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves, Thèse de doctorat - Paris VII.

Tangente (2018). Découpages et pavages. Entre art et géométrie. Tangente hors-série n^0 64. Editions POLE.

Torossian C. et Villani C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (Rapport du 12/02/2018).

V - SITOGRAPHIE

Eduscol(2015). http://videos.education.fr/MENESR/eduscol.education.fr/2015/DVDs/2010_apprendre_parler/apprendreparler10_S1.mp4

Eduscol(2016). http://cache.media.education.gouv.fr/file/Geometrie_plane/19/1/RA16_C4_MATH_geo_plane_inter_frise_569191.pdf

Eveilleau 1, http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pavage_17_types.htm

Eveilleau 2, http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/penrose.htm

LMRS, http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Penrose/penrose.htm

Mathcurve, https://www.mathcurve.com/polyedres/regulier/regulier.shtml

Nantes (2011). https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/activites-pedagogiques/frises-et-pavages-683435.kjsp?RH=PEDA

Nantes (2016). https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/groupe-de-recherche/actions-nationales-2015-2016/mur-et-pavages-963477.kjsp

Rouen (2016). http://maths.spip.ac-rouen.fr/spip.php?article674

Unicaen (2017). La couronne rotative --- dispositif de médiation scientifique, vidéo réalisée par le service de la DSI de l'université de Caen, https://www.youtube.com/watch?v=N5587xQ8hXA

Annexe 1 – Photos du matériel



1. Couronne rotative et pièces aimantées



2. Pavage de Penrose



3. Chambre de miroirs triangulaire



4. Chambre de miroirs carrée



5. Miroir articulé



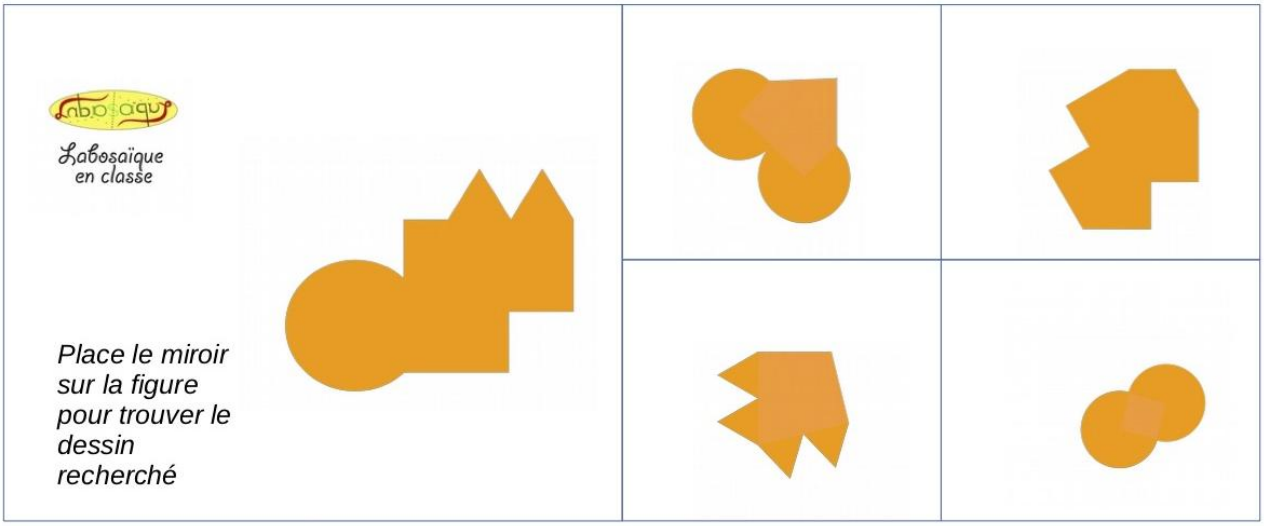
6. Chambre de miroirs sphérique



7. Version portative – kit « Palais des glaces » :
chambres de miroirs carrée et triangulaire + lot de miroirs sur pieds et fiches d'activités

Annexe 2 – Exemples d'activités proposées

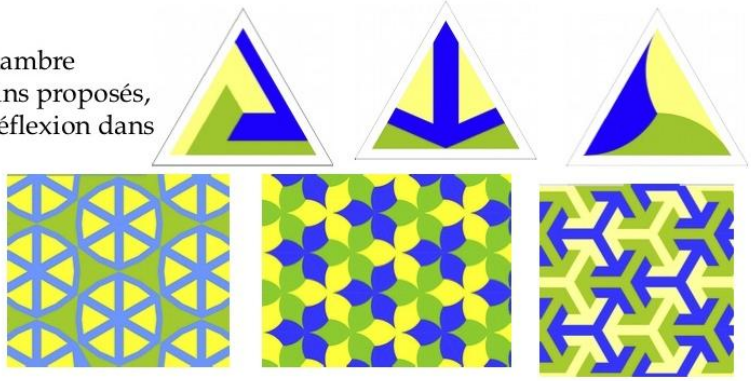
Activité 1 - Jeu de symétrie - matériel nécessaire : un petit miroir



Activité 2- Jeu d'appariement -
matériel nécessaire : chambre de miroirs triangulaire et fiches à insérer

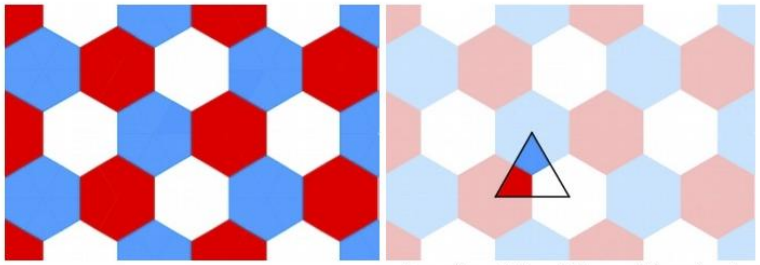
Qui va avec qui ?
Lorsque l'on place dans la chambre triangulaire chacun des dessins proposés, quel pavage obtient-on par réflexion dans les miroirs ?

On vérifie ensuite par l'expérience les solutions proposées par les élèves.



Activité 3- Jeu de type « tangram » - matériel nécessaire : chambre de miroirs triangulaire et pièces colorées

On dispose de pièces triangulaires toutes de forme identiques et on doit placer ces pièces à l'intérieur de la chambre de miroir de manière à ce que les réflexions dans les miroirs montrent le pavage cherché.



Pavage à reproduire

Les pièces doivent être positionnées dans le triangle de manière à former la figure De base ci-dessus

Activité 4 – Visualisation de polyèdres -
matériel nécessaire : chambres de miroirs sphériques et bâtons de mousse

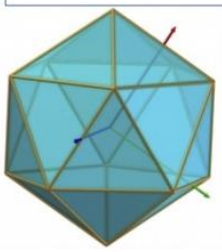


Es-tu capable de faire apparaître les polyèdres ci-dessous juste en mettant un bâton dans une des chambre de miroirs ? Attention à choisir la bonne chambre !
(exemple ci-dessus pour le cube)

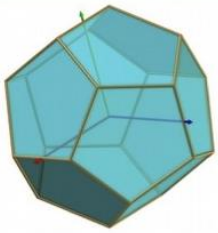
Octaèdre



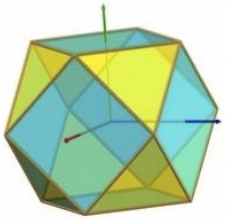
Icosaèdre



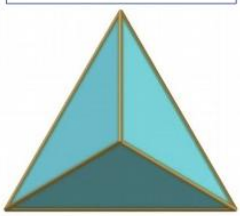
Dodecaèdre



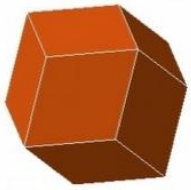
Cuboctaèdre



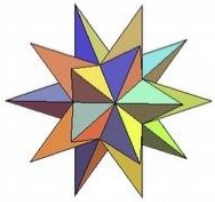
Tetraèdre



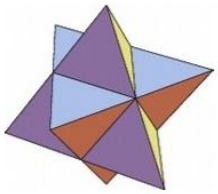
Dodecaèdre rhombique

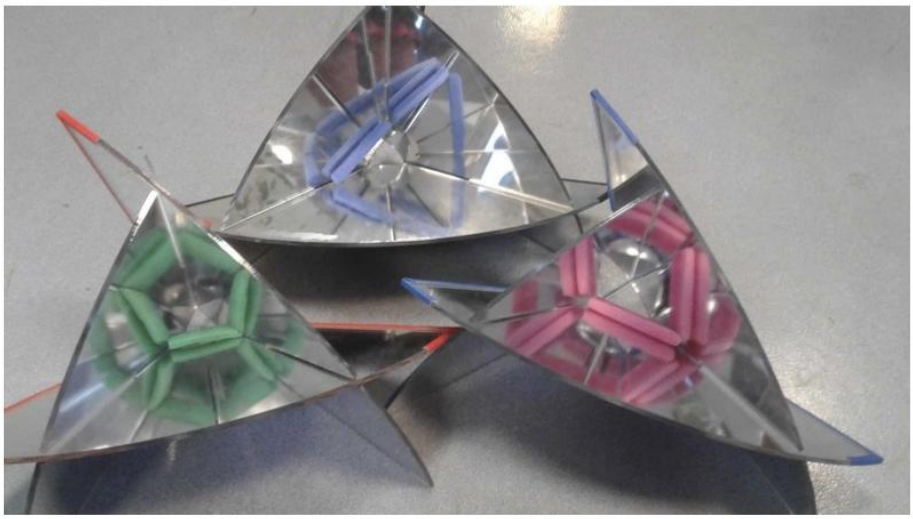


Grand dodecaèdre étoilé



Octaèdre étoilé





Quelques unes des solutions

ATELIER A13

ANALYSE DE PRATIQUES ENSEIGNANTES DANS LE CADRE D'UN DISPOSITIF DE FORMATION INTÉGRANT DES SITUATIONS DE COMPAGNONNAGE

Christine MANGIANTE-ORSOLA
Maitre de Conférence, ESPE LNF
Laboratoire de Mathématiques de Lens
christine.mangiante@espe-lnf.fr

Karine VIEQUE
Conseillère Pédagogique
Circonscription de Béthune 1- Académie de Lille
karine.vieque@ac-lille.fr

Résumé

Cet atelier prend appui sur des travaux qui ont développé une approche de l'enseignement de la géométrie (Perrin-Glorian & Godin, 2014, Duval & Godin, 2006) et sur une recherche qui vise à interroger les conditions de diffusion dans l'enseignement ordinaire de situations conçues en lien avec cette approche (Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014).
Motivées par des questions de formatrices cherchant à identifier des exemples de dispositifs de formation susceptibles d'améliorer les pratiques ou d'installer les conditions d'un enrichissement futur (Butlen, Mangiante-Orsola, Masselot, 2017), nous présentons un dispositif de formation continue portant sur l'enseignement de la géométrie et intégrant des situations de compagnonnage (avec des moments de prise en main conjointe de la classe). Nous proposons ensuite de décrire les pratiques d'une enseignante suivie tout au long de cette formation.

I - INTRODUCTION

En tant que formatrices, nous sommes régulièrement amenées à nous interroger sur les effets de séances de formation continue sur les pratiques des enseignants. Comment faire en sorte que les apports théoriques proposés dans le cadre de nos formations puissent avoir un réel impact sur ce qui se fait en classe et à terme sur les apprentissages des élèves ?

En tant que chercheur, nos questions portent sur les conditions d'appropriation par les enseignants de situations conçues par la recherche. Dans cette perspective, nous cherchons à étudier des exemples de dispositifs de formation susceptibles d'améliorer les pratiques ou d'installer les conditions d'un enrichissement futur (Butlen, Mangiante-Orsola, Masselot, 2017).

L'observation joue un rôle crucial : que ce soit en tant que formatrices ou en tant que chercheurs, observer les pratiques nous permet de mieux les comprendre mais aussi d'envisager des moyens susceptibles d'agir sur ces pratiques. Dans la continuité d'une séance de formation continue portant sur l'enseignement de la géométrie, nous avons mis au point un dispositif d'accompagnement intégrant des situations de compagnonnage. Notre intention était de nous donner les moyens d'observer au plus près les pratiques des enseignants, de mieux cerner ce qui pouvait constituer un obstacle à l'appropriation des apports de formation réalisés mais aussi et surtout de pouvoir agir directement sur les pratiques au sein de la classe.

Dans ce texte, nous décrirons tout d'abord le dispositif de formation mis en œuvre et ses arrière-plans théoriques, puis, les questions retenues et notre démarche d'analyse. Nous exposerons ensuite l'analyse menée par les participants de l'une des séances de compagnonnage et la discussion qui a suivi. Enfin, nous présenterons les principaux résultats obtenus à propos de l'observation des pratiques des

enseignantes suivies et nous les resituerons par rapport aux différents arrière plans théoriques convoqués.

II - PRÉSENTATION DU DISPOSITIF DE FORMATION ET DE SES ARRIÈRES PLANS THÉORIQUES

La lecture de divers articles de recherche a nourri le travail de conception du dispositif. Cette partie vise à les présenter et à indiquer les éléments retenus.

1 Prendre appui sur des recherches menées sur l'enseignement de la géométrie

1.1 Approche de l'enseignement de la géométrie menée dans le Nord-Pas de Calais

Notre travail prend appui sur une recherche soutenue par l'IUFM[65] Nord-Pas de Calais au début des années 2 000 et qui a développé une approche de l'enseignement de la géométrie (Perrin-Glorian & Godin, 2014, Duval & Godin, 2006).

Pour mieux comprendre ce qui motive cette approche, il convient d'adopter un point de vue, un peu large, sur l'enseignement de la géométrie de la maternelle au collège et de s'interroger sur les difficultés rencontrées par les élèves.

À l'école maternelle, les élèves manipulent des formes géométriques, c'est-à-dire des objets matériels qu'ils peuvent déplacer, retourner ou encore assembler (comme par exemple dans des puzzles). En utilisant ces objets comme gabarits dont ils tracent le contour avec un crayon, ils peuvent dessiner des figures simples. La figure est ainsi la trace d'un objet matériel (une surface délimitée par un bord). Les élèves peuvent aussi obtenir des figures simples en traçant le contour intérieur d'un pochoir. Ces tracés demandent le développement d'habiletés motrices et de techniques qui convoquent des connaissances géométriques sur les objets (reconnaître des sommets, des bord droits, l'égalité de longueur…).

Au collège, une figure est un objet géométrique défini par des propriétés énoncées en langage mathématique ou codées sur la figure et qui expriment des relations entre des points et des lignes. Il est attendu de la part des élèves de déduire des propriétés nouvelles à partir d'axiomes, de théorèmes et des propriétés données pour définir la figure. De nombreuses recherches se sont intéressées aux difficultés rencontrées par les élèves au moment de l'apprentissage de la démonstration. Mais, ces recherches n'ont pas questionné la manière dont les élèves appréhendent les figures géométriques. Or, pour raisonner sur une figure, il est en général nécessaire d'isoler des sous-figures, de faire intervenir des lignes ou des points en lien avec la figure mais non tracés.

Ainsi, de la maternelle au collège, le mot « géométrie » renvoie à des modalités d'appréhension d'une figure bien différentes. Si on prend l'exemple d'un rectangle, ce rectangle va d'abord être vu comme un objet biface puis en termes de surface (pleine ou non), puis comme un réseau de lignes et enfin déterminé par une configuration de points telle que certaines propriétés puissent être vérifiées

Par exemple, un rectangle est déterminé par quatre points (A, B, C, D) tels que [AC] et [BD] soient de même longueur et se coupent en leur milieu (cf. figure 1).

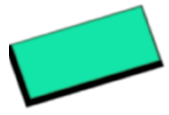
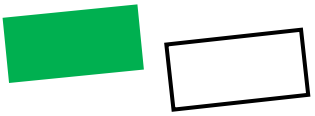
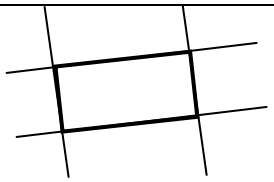
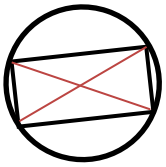
			
un objet biface	une surface pleine ou le contour d'une surface	un réseau de droites	une configuration de points

Figure 1 : De l'objet biface à la configuration de points

[65] Institut Universitaire de Formation des Maîtres

Comment un tel regard géométrique sur les figures peut-il se construire ? L'approche développée dans le Nord-Pas de Calais vise à répondre à cette question.

1.2. Ce qui a été retenu de cette approche pour la conception du dispositif

Nous avons fait le choix d'une première modalité de formation pour notre dispositif, consistant à concevoir un temps de formation collectif. Pour cela, nous nous sommes appuyées sur les recherches présentées ci-dessus et nous avons sélectionné les éléments autour desquels nous souhaitions organiser nos interventions. Nous avons retenu cinq « focales » ou « axes de questionnement » que nous avons présentés en formation grâce à cinq « mots clés » (cf. figure 2).

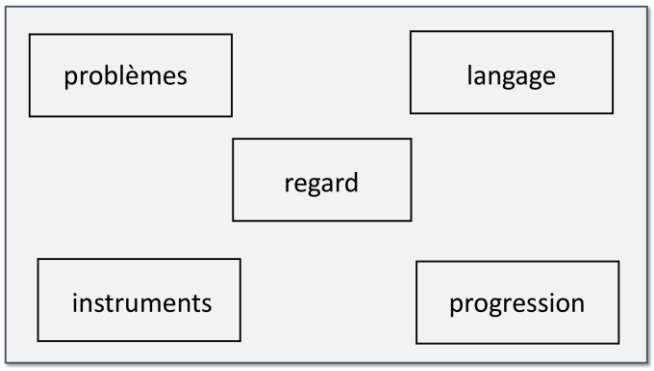


Figure 2 : Cinq « mots clés »

Prenant appui sur une phrase issue des programmes de cycle 3 - il s'agit de « *passer du **regard** ordinaire porté sur un dessin au **regard** géométrique porté sur une figure* » - nous avons apporté des éléments théoriques sur l'évolution naturelle du **regard** de l'élève sur les figures : la vision surface (dont la vision contour), la vision ligne et enfin la vision point (cf. figure 3).

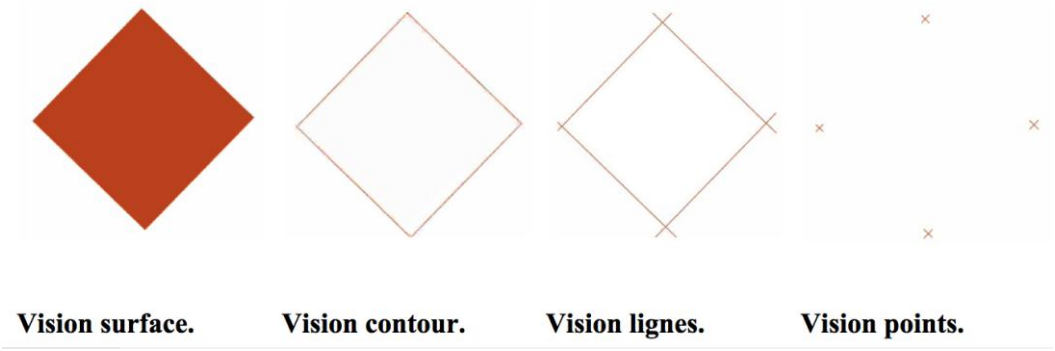


Figure 3 : Différentes « visions »

Les enseignants ont alors été confrontés à différentes situations de reproduction de figures incluant des situations de restauration de figures, inspirées de l'approche proposée. La comparaison des situations leur a permis d'identifier, d'une part, ce qu'il était possible de proposer comme résolution de **problèmes** en géométrie, d'autre part, la vision de la figure activée selon les valeurs des variables didactiques choisies dans les différentes situations. Selon l'amorce de la figure et les **instruments** proposés, les élèves sont amenés à identifier des lignes, des points…

Enfin, l'évolution du **regard** des élèves sur les figures a également permis d'aborder la **progression** à construire pour une meilleure continuité du cycle 2 au cycle 3, une meilleure articulation école collège. Pour cela, il nous semblait important de faire prendre conscience aux enseignants que les **instruments** proposés étaient porteurs de propriétés géométriques, que le **langage oral** avait une grande importance dans les séances (faire expliciter par les élèves les propriétés géométriques mobilisées pour réussir la restauration de la figure proposée).

Mais, des questions se posent. Comment aider les enseignants à utiliser en actes les apports didactiques présentés en formation à propos de l'enseignement de la géométrie ? Même en proposant une ressource, il est fort probable qu'il persiste un écart entre ce qui pourra être prescrit via la formation et la mise en œuvre réelle des séances ce qui, à terme, peut créer un décalage entre les apprentissages visés et les apprentissages réels des élèves.

2. Prendre appui sur des recherches menées à propos des pratiques enseignantes

2.1. Analyse des pratiques en termes de gestes professionnels et routines

Les recherches menées à propos des pratiques enseignantes constituent le deuxième arrière-plan théorique à la conception du dispositif. Nous référant à la définition donnée par Aline Robert, nous utilisons le mot pratiques pour désigner « tout ce que l'enseignant met en œuvre avant, pendant, et après la classe (conceptions activées au moment de la préparation des séances, connaissances diverses, discours mathématiques et non mathématiques pendant la classe, corrections de productions d'élèves, etc. » (Robert,1999)

Dans leurs travaux, Butlen, Masselot et Pézard décrivent l'activité de l'enseignant en termes de gestes et routines. Ces gestes et routines sont des schèmes professionnels (des « habitudes » professionnelles, en référence aux travaux de Vergnaud).

Les gestes professionnels sont des « manières, pour le professeur, de réaliser au quotidien des tâches élémentaires. Par exemple : gérer la disposition de ce qui est écrit au tableau ».

Les routines sont des « manières de réaliser des tâches plus complexes comme par exemple, gérer une phase d'explicitation, de synthèse de productions d'élèves débouchant sur une institutionnalisation ou encore gérer dans la durée mais aussi dans l'instant l'activité des élèves ». Cette tâche complexe relève d'un niveau local et peut se décomposer en sous-tâches plus partielles concourant à la réalisation de l'ensemble, elles-mêmes réalisées grâce à des gestes. C'est donc la taille de la tâche à réaliser qui distingue, les routines (niveau local) et les gestes (niveau micro) (Butlen, Charles-Pézard, Masselot, 2009).

Ces gestes et routines permettent à l'enseignant de réaliser trois processus correspondant à trois moments de son activité :

- La dévolution : processus par lequel le professeur fait en sorte que les élèves assument leur part de responsabilité dans l'apprentissage (lors de la dévolution, l'enseignant cherche à faire atteindre un objectif qu'il ne peut pas expliciter à ses élèves). (Brousseau, 1998)

- La régulation : processus par lequel l'enseignant maintient les élèves dans la tâche sans changer l'enjeu didactique (Butlen, 2004)

- L'institutionnalisation : processus de transformation d'une connaissance en un savoir lors d'une séance d'apprentissage. La connaissance est définie comme ce qui est propre à l'élève, à ses expériences antérieures, alors que le savoir est la notion nouvelle qui va être reconnue par l'institution en fin de séance. (Brousseau, 1998)

Parce que nous avons besoin de situer les pratiques par rapport à une référence commune[66], nous prenons également appui sur la notion de vigilance didactique que Charles-Pézard (2010, p. 210) définit « comme une sorte d'ajustement permanent de la part du professeur faisant appel aux deux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro »[67].

---

[66] Des niveaux d'exercice de la vigilance didactique ont été définis pour caractériser des pratiques en termes de proximité avec un i-genre (le i-genre 3) caractérisé par des pratiques permettant aux élèves de s'engager dans une activité dont les mathématiques sont consistantes et dont les enseignants hiérarchisent les procédures et exposent des connaissances, voire institutionnalisent.

[67] Le niveau micro, souvent automatique, voire inconscient est celui des gestes professionnels comme les formes des discours, l'écriture au tableau, les déplacements ; le niveau local est celui de la séance de classe, des déroulements à la fois prévus et comportant des improvisations permanentes ; le niveau global est celui des

Ainsi, la vigilance didactique se situe « à la fois du côté du savoir mathématique, des connaissances didactiques et de leur mise en fonctionnement dans l'acte d'enseigner » (Charles-Pézard, ibid, p. 211). De plus, l'exercice de la vigilance didactique est lié aux différentes tâches d'enseignement de contenus mathématiques situées en amont de l'action en classe, pendant l'action en classe ou après la classe ainsi qu'aux différentes manières de les réaliser. Enfin, il nous semble important de souligner qu'« une "bonne" vigilance didactique assure un déroulement de classe piloté prioritairement par les mathématiques, "au plus près" des apprentissages visés. » (Charles-Pézard, ibid, p. 211).

2.2. *Ce qui a été retenu de ces recherches pour la conception du dispositif*

Ces lectures à propos des pratiques enseignantes nous ont amenées à prendre en compte certains résultats de recherche dans notre questionnement. Nous avons ainsi veillé à articuler cette formation à la pratique du métier, en étudiant les possibilités d'agir sur :

- les gestes professionnels et routines mis en œuvre pour enseigner ;

- le lien entre l'exercice d'une certaine vigilance didactique et les apprentissages des élèves en mathématiques.

Cela nous a conduit à faire le choix d'une deuxième modalité de formation, la mise à disposition d'une ressource. Celle-ci, intitulée « le quart du carré », composée de quatre séances, a donc été conçue avec la volonté d'apporter un deuxième type de connaissances didactiques, « visant la prise en main d'outils permettant de lire le réel. Ce sont des outils issus de la didactique des mathématiques mais transformés en vue de l'action d'enseigner. C'est ainsi qu'en amont de la classe, ces outils permettent à l'enseignant, par exemple, la mise en œuvre d'un minimum d'analyse *a priori* de la situation proposée, pour identifier le savoir mathématique en jeu, les variables didactiques et leur incidence sur les procédures et les performances des élèves. » (Butlen & Robert, 2003)

Les éléments didactiques proposés pour aider à lire le réel de la classe ont donc été accompagnés de l'explicitation des gestes professionnels et routines à mettre en œuvre lors des trois grands moments de l'activité de l'enseignant : la dévolution, la régulation et l'institutionnalisation. L'objectif étant de faciliter l'appropriation de la ressource par les enseignants et de viser, à terme, un enrichissement de leurs pratiques, un meilleur exercice d'une certaine vigilance didactique.

Il ne s'agit donc pas de travailler à partir d'une liste de compétences professionnelles à faire acquérir aux enseignants et d'une liste de compétences en géométrie à faire acquérir aux élèves, mais d'accompagner des enseignants dans l'exercice du métier auprès de leurs élèves. Dans cette perspective, il était nécessaire de penser un dispositif de formation nous permettant d'atteindre ces différents objectifs, de chercher quelle stratégie de formation nous permettrait de mieux comprendre le travail des enseignants et de les accompagner de manière cohérente.

3. Prendre appui sur des recherches menées à propos des stratégies de formation

3.1. *Différentes stratégies de formation*

Les recherches menées à propos des stratégies de formation constituent le troisième arrière-plan théorique à la conception du dispositif. On trouve dans la littérature, des recherches qui se sont intéressées aux stratégies de formation.

Citons tout d'abord les stratégies de formation de formateurs IUFM identifiés par Kuzniak et Houdement (les stratégies culturelles, de monstration, d'homologie ou encore de transposition) mais ces stratégies ~~qui~~ ne prennent pas en compte les situations de visites en classe.

On trouve aussi des stratégies de formation relatives à l'accompagnement à l'entrée dans le métier identifiées par Charles-Pézard et Masselot : les situations d'information et de questionnement, les

---

préparations et des projets globaux qui souvent tiennent compte de tout ce que l'enseignant sait déjà, a expérimenté, veut faire, et anticipe pour les classes qu'il a en ce moment (Masselot et Robert, 2007).

situations de compagnonnage et les situations d'échanges et de mutualisation des pratiques (Charles-Pézard & Masselot, 2006).

Enfin, on pourrait citer aussi des stratégies liées au travail collaboratif : travailler ensemble permet de se former.

3.2. Ce qui a été retenu de ces recherches pour la conception du dispositif

Nous retenons de ces différentes stratégies de formation celle permettant d'intervenir directement sur les gestes professionnels et routines à mettre en œuvre. Dans cette intention, nous avons fait le choix d'une troisième modalité de formation, consistant à proposer des séances de compagnonnage. Celles-ci vont nous permettre de travailler sur les divers moments des séances menées par l'enseignant, d'apporter des adaptations en fonction de leurs déroulements et de leur analyse à chaud. L'étude a été centrée sur des moments clés des séances d'apprentissages : les moments de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation, et les routines et gestes qui y sont associés.

Pour chacun de ces moments, Butlen (2004) a mis plusieurs gestes en évidence sur lesquels nous avons pris appui pour notre travail.

Par exemple, nous avons cherché à observer les gestes professionnels liés à *la prescription de la tâche et la dévolution des conditions de sa réalisation*. Plus précisément en géométrie : *comment l'enseignant amène l'élève à analyser une figure complexe dans le but d'en effectuer sa restauration à partir d'une amorce et de gabarits ?*

En ce qui concerne les moments de régulation, nous avons étudié comment accompagner les enseignants dans la *prise d'informations sur les élèves et leurs productions* mises en regard des adaptations effectuées ou non en cours de déroulement : observer, et ainsi mettre en lien les observations des productions des élèves avec les apports donnés en formation. La nature, la qualité et le volume d'aides apportées aux élèves ont également été analysés.

Enfin, nous avions la volonté de pointer le lien entre le *repérage des procédures attendues* et *le choix des élèves à interroger*, ceci pour aider les enseignants à *conduire des moments d'explicitation et de synthèse des productions, de corrections, d'institutionnalisation et de réinvestissement*. Ces derniers doivent en effet être mis en relation avec les choix didactiques et pédagogiques qui sous-tendent les pratiques et les contenus enseignés.

Ainsi, accompagner les enseignants au sein de leur classe peut permettre au formateur de mieux expliciter les liens entre la ressource proposée, la préparation à concevoir en amont, et le déroulement effectif de la séance, mais aussi, en prenant appui sur les pratiques existantes, d'agir sur les gestes professionnels (voire les routines) qui manquent et qui permettraient une meilleure appropriation de la ressource. Le formateur est amené à analyser en détail les grands moments de l'activité du professeur relatif aux processus de dévolution, de régulation, et d'institutionnalisation, pour ensuite décomposer l'activité du professeur en gestes et routines, dans le contexte des situations de restaurations de figures. L'objectif visé par le compagnonnage du formateur est d'enrichir les pratiques pour un enseignement au plus près des apprentissages visés.

La stratégie de compagnonnage proposée permet de prendre appui sur les pratiques existantes pour plus de cohérence. Le rôle du formateur consiste alors non pas à *faire à la place de*, mais à *réguler en acte* les gestes professionnels de l'enseignant sur les grands moments de son activité. Les entretiens collectifs permettent quant à eux de développer chez chacun une attitude réflexive sur ses propres pratiques et celles de ses pairs, en interrogeant les déroulements des séances de restauration de figures proposées aux élèves et les gestes professionnels mobilisés. L'objectif de cette stratégie est de réduire l'écart entre ce qui pourra être prescrit dans la ressource et la mise en œuvre réelle des séances, mais aussi l'écart entre l'enseignement réalisé et les apprentissages des élèves.

3.3. Le dispositif de formation mis en œuvre

3.3.1. Précisions à propos des modalités de formation

Nous retenons que le dispositif ainsi conçu permet d'articuler différents arrières plans théoriques (en gris sur le schéma de la figure 4) et trois modalités de formation (en blanc sur le schéma). Il a été proposé à vingt enseignants de cycle 2 exerçant en réseau d'éducation prioritaire. Si la séance de formation (modalité n° 1) et la ressource (modalité n° 2) ont été proposées à tous, seules deux enseignantes de CE2 (Vanessa et Isabelle) d'une même école ont bénéficié en outre de séances de compagnonnage (modalité n° 3) ainsi qu'une maitresse supplémentaire (Marie), qui co-intervenait dans les deux classes.

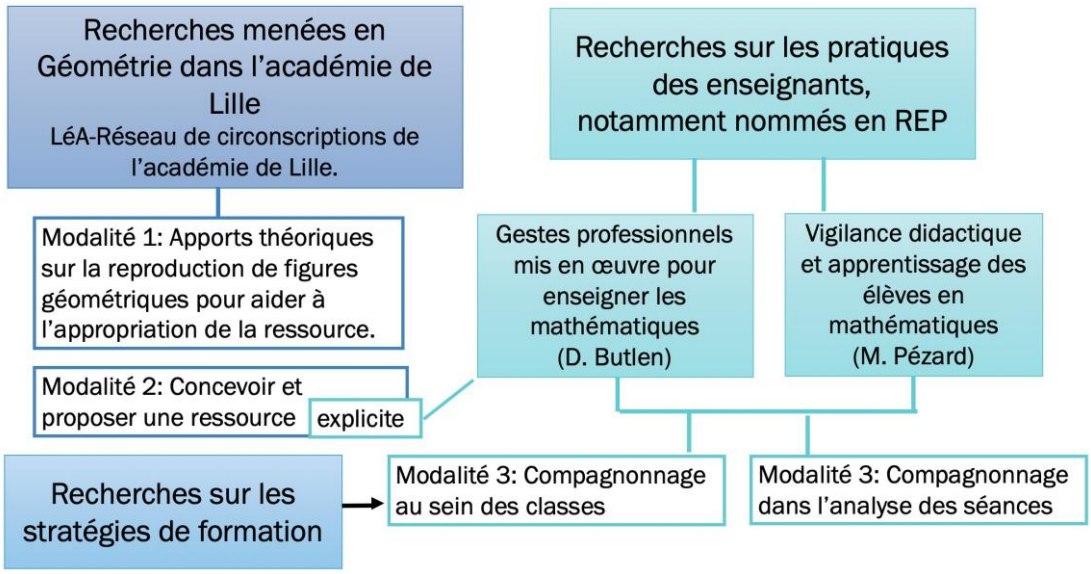


Figure 4 : Trois arrière-plans théoriques et trois modalités de formation

Pour ces trois enseignantes, le dispositif s'est donc déroulé selon trois grandes étapes.

- Lors d'une première séance, nous avons observé les pratiques usuelles des enseignantes citées, avant toute formation et proposition de la ressource. Cette séance a été suivie d'un premier entretien partagé entre pairs et les formatrices, permettant de compléter l'observation et de comprendre les choix des enseignantes.
- Chacune des enseignantes a ensuite été accompagnée lors de la mise en œuvre de quatre séances au sein des classes. La formatrice a pu réguler l'activité des enseignantes si besoin, et répondre à leurs questions éventuelles. Pendant et après la séance, grâce au visionnage des vidéos, la formatrice a pu, compléter une grille de gestes professionnels conçue pour analyser finement les gestes effectivement mis en œuvre et ceux à enrichir. Cette grille était spécifique à la mise en œuvre des séances proposées. (Annexe 2) Les enseignantes n'avaient pas connaissance de cette grille mais les mêmes gestes professionnels étaient explicités dans le contenu de la ressource. (Annexe 1). Suite à chaque séance, une analyse partagée entre pairs et avec la formatrice était ensuite menée, prenant appui sur les carnets de bord complétés.
- Une dernière séance a consisté en l'observation d'une séance conçue par les enseignantes à partir d'une nouvelle figure proposée par la formatrice. Elle a permis d'identifier les réinvestissements de la démarche et de compléter l'analyse globale de l'enrichissement des pratiques.

Nous avons mis à disposition de tous, via la plateforme collaborative, un certain nombre de documents :

- Les fiches de préparation des séances (cf. Annexe 1) sur lesquelles étaient précisés les gestes professionnels à mettre en œuvre, les fiches élèves, les planches avec les gabarits à découper, le calque autocorrectif.
- Un carnet de bord individuel à remplir suite à chaque séance.

3.3.2. *Séquence présentée dans la ressource*

La séquence présentée dans la ressource est constituée de quatre séances.

Dans chacune de ces séances, il est proposé aux élèves de reproduire une figure modèle à partir d'instruments (gabarits ou bande de papier) et éventuellement à partir d'une amorce.

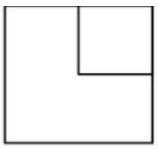


Figure 5 : Figure modèle

La figure modèle est toujours la même. Il s'agit d'un carré dans lequel est tracé un autre carré dont l'aire est le quart du grand carré et dont deux des côtés coïncident avec deux des côtés du grand carré (cf. figure modèle).

Lors de la séance 1, les élèves doivent reproduire la figure modèle par assemblage de gabarits (sans la tracer). Ils vont être amenés à juxtaposer ou à superposer des gabarits (figure 5.a). Il est important de souligner qu'ils ont à leur disposition trois gabarits de mêmes dimensions (le petit carré) et qu'il leur est demandé toutes les façons possibles d'assembler les gabarits pour recomposer la figure modèle.



Figure 5.a

Lors de la séance 2, il ne s'agit plus de reproduire la figure par assemblage, les élèves doivent produire des tracés. Il leur est précisé qu'ils peuvent utiliser un ou deux gabarits parmi ceux proposés (figure 5.b).



Figure 5.b

Lors de la séance 3, les élèves doivent reproduire la figure modèle à partir de l'amorce donnée (figure 5.c). Pour tracer des angles droits, ils pourront utiliser deux gabarits différents (figure 5.d) : le gabarit ou le petit carré et pour reporter la longueur du carré, ils pourront utiliser le gabarit (dont la longueur des côtés est égale à la longueur des côtés du carré) ou reporter deux fois la longueur du petit côté du carré mais cela suppose qu'ils aient identifié une propriété de la figure (la longueur du côté du grand carré est le double de la longueur du côté du petit carré).



Figure 5.c

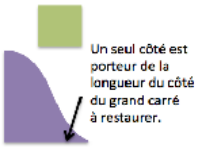


Figure 5.d

Lors de la séance 4, les élèves doivent reproduire la figure modèle à partir de l'amorce donnée (figure 5.e). Pour tracer des angles droits, ils pourront utiliser le gabarit fourni et pour reporter la longueur du carré, ils pourront utiliser la bande de papier (report de la longueur du côté du grand carré ou deux fois la longueur du côté du petit carré) (figure 5.f).



Figure 5.e

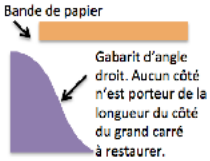


Figure 5.f

Il faut enfin noter que de nouvelles figures sont proposées aux enseignantes afin de concevoir une dernière séance (qui doit servir de bilan de la formation (cf. figure 6).

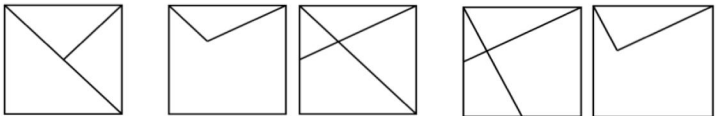


Figure 6

3.3.3. *Recueil de données et démarche d'analyse des formatrices*

Nous avons recueilli de nombreuses données (enregistrements audio, vidéo ; documents écrits…) que nous avons analysées en deux temps.

Dans un premier temps, nous avons analysé chacune des séances observées. La grille des gestes professionnels conçue par la formatrice (cf. Annexe 2) a été pré-remplie lors de chaque séance et complétée après les séances, grâce au visionnage des vidéos. Elle a été élaborée en décrivant de manière très fine les gestes professionnels à mobiliser sur chacun des grands moments de l'activité de l'enseignant. Ainsi, pour chaque étape (dévolution, régulation, institutionnalisation), les gestes professionnels mobilisés de manière effective étaient identifiés. Les variations constatées, au fil des séances, au niveau des items de la grille ont servi d'indicateurs pour analyser et rendre compte de l'évolution des pratiques enseignantes. Les entretiens, enregistrés, étaient semi-dirigés, afin de recueillir à la fois l'analyse de chaque enseignante quant à la mise en œuvre de la séance proposée par la ressource, et l'analyse collective, au regard des cinq focales (le langage oral, la notion de regard sur les figures, les outils et instruments, la résolution de problème) travaillées lors de la formation ; ceci pour favoriser l'appropriation des éléments théoriques liés à la démarche d'apprentissage proposée. Par ailleurs, nous avons cherché à identifier et analyser les *propositions* propres à chaque enseignante, faites lors de la séance finale pour analyser et compléter la « qualité » de l'enrichissement des pratiques de chacune.

Dans un second temps, après avoir étudié chacune des séances et entretiens à un temps T, nous avons étudié l'enrichissement éventuel des pratiques sur toute la durée du dispositif, de la séance 0 à la séance de réinvestissement (cf. figure 7). La figure ci-dessous schématise la démarche d'analyse suivie. Les quatre objectifs ont été formulés par la formatrice suite à l'observation et l'analyse collective de chaque séance. Il s'agissait des objectifs de formation qu'elle a visés et explicités aux enseignantes pour chacune des séances.

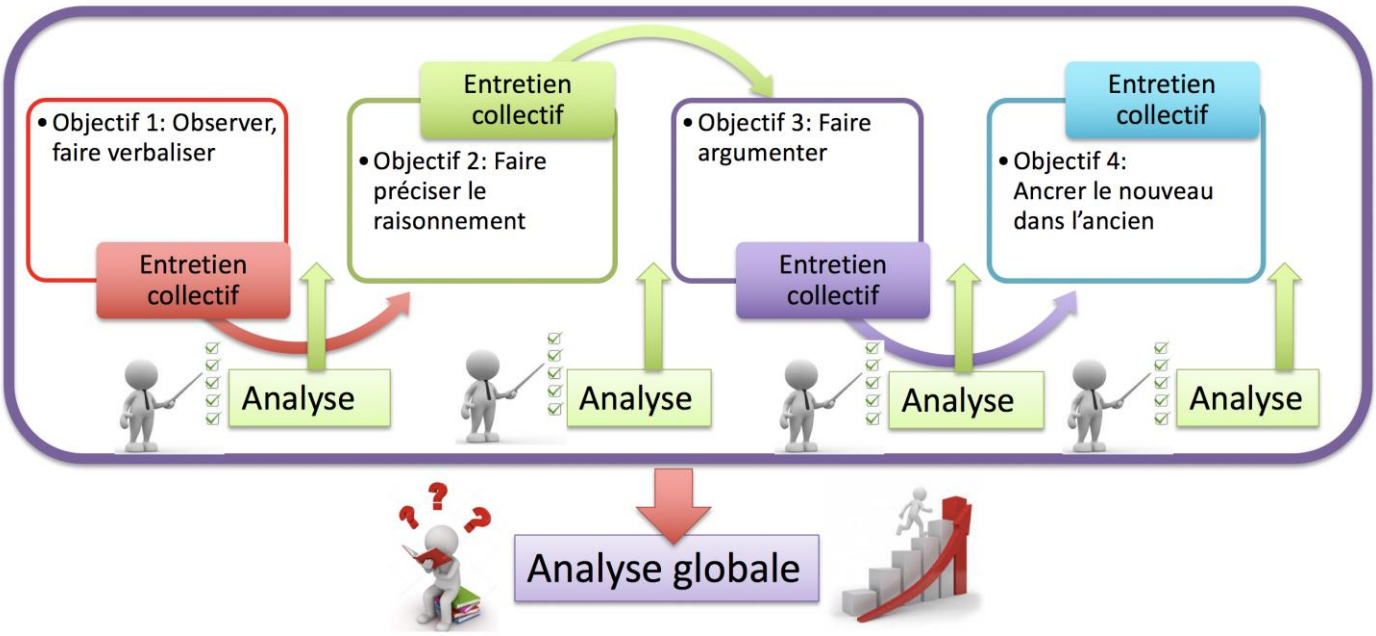


Figure 7 : une démarche d'analyse en deux temps

III - ANALYSE D'UNE SEANCE DE COMPAGNONNAGE

1. Questions sur lesquelles nous avons choisi de travailler

Au vu du dispositif mis en œuvre, nous aurions pu faire le choix de nous intéresser à des questions portant sur les situations proposées aux enseignants, sur la ressource ou les outils d'observation conçus par la formatrice ou encore sur l'aspect collaboratif du travail mené mais nous avons choisi de cibler notre atelier sur des questions en lien avec les conditions d'enrichissement des pratiques des enseignantes observées. Notre intention est de décrire l'évolution des pratiques tout au long du dispositif (le travail de la formatrice sera néanmoins pris en compte mais seulement pour mieux interpréter les pratiques des enseignantes suivies). Plus précisément, pour cet atelier, nous avons fait le choix de proposer aux participants d'analyser la séance 2 du compagnonnage de l'enseignante Vanessa.

2. À l'issue de la séance 0 et de la séance 1

Avant de faire analyser la séance 2, il était important de donner au préalable quelques éléments à propos de l'avancée du travail de formation à l'issue de la séance 1.

Dans un premier temps, l'analyse des pratiques usuelles de ces deux enseignantes (séance 0) nous a conduit à faire plusieurs constats. La séance, préparée de manière collective, portait sur la vérification de « l'alignement de points ». Tout d'abord, nous avons remarqué que les activités proposées n'étaient pas très riches au regard des apprentissages visés. Les enseignantes ont proposé un étayage individuel assez important et n'ont pas perçu la présence de deux procédures différentes utilisées par les élèves pour vérifier l'alignement de trois points. *« J'ai trois points, je joins deux points, je joins deux autres points. Comme il y a deux segments, ce n'est pas aligné » (procédure 1) ; « Je mets ma règle et je regarde si le troisième point se situe sur la règle » (procédure 2).* Par voie de conséquence, elles n'ont pas su les expliciter. Nous en avons déduit que les enseignantes n'avaient probablement pas les connaissances mathématiques et didactiques suffisantes pour choisir une situation problème en lien avec l'objectif fixé. Ensuite, constater qu'il leur était difficile de répertorier les procédures attendues, d'analyser celles réellement mises en œuvre des élèves a permis d'en déduire que cela pouvait induire des difficultés à organiser les phases de mise en commun, de synthèse, et donc justifier l'absence de ces dernières ainsi que de celle d'institutionnalisation. Les deux enseignantes observées ne semblaient donc pas être en mesure d'exercer une certaine vigilance didactique dans ce domaine car même le niveau 1 (proposer des problèmes consistants) n'était pas atteint.

Des différences notables quant à la mise en œuvre sont néanmoins à retenir. Les données recueillies ont révélé une relative maîtrise de certains gestes professionnels de la part de Vanessa quant à la régulation (avancée du groupe classe, gestion des élèves en difficultés…) et à l'institutionnalisation (rappel des notions essentielles, questionnement des élèves, explicitation (même partielle) des procédures…). Isabelle semblait plus fragile quant à la maîtrise de certains gestes professionnels mais se montrait soucieuse de bien faire et de s'adapter au mieux aux possibilités de ses élèves.

Suite à cette première observation, la formatrice a choisi comme premier objectif de formation, d'amener les enseignantes à mieux observer les procédures des élèves et à encourager davantage leur verbalisation.

Il s'agissait d'articuler d'une part, les analyses a priori proposées dans la ressource avec l'observation de l'activité réelle des élèves lors de la phase de recherche, d'autre part, les gestes professionnels liées aux explicitations des procédures des élèves, avec leur mise en œuvre effective.

Lors de cette séance 1, nous avons observé une maitrise plus importante par Vanessa des gestes professionnels liés à la dévolution de la tâche. Le rappel de la séance, la présentation de la tâche, de son objectif (« identifier des points alignés »), la passation des consignes, se sont déroulées avec une remarquable gestion du temps. Vanessa a observé et étayé le travail des élèves lors de la phase de recherche conformément aux indications de la ressource. En revanche, elle n'a pas su s'appuyer sur les observations des procédures de ses élèves pour oser se lancer dans l'organisation de la mise en commun. Ce geste nécessite d'être improvisé en partie puisqu'il est lié aux productions effectives des élèves et

n'est pas facile à mettre en œuvre. À sa demande, la formatrice a donc géré la fin de la séance (mise en commun, synthèse et institutionnalisation).

L'entretien qui a suivi cette première séance de compagnonnage qui a pris la forme d'un co enseignement a permis d'expliciter les liens entre l'observation des procédures et les phases de la séance qui en découlent. Prendre conscience de la pauvreté du vocabulaire utilisé, des difficultés des élèves à décrire une figure, à verbaliser leur procédure, a permis d'activer le levier visé sur cette séance : la nécessité pour faire évoluer leurs pratiques, d'apprendre à observer et à faire verbaliser les élèves. Des gestes professionnels, plus spécifiques à l'approche proposée, pouvant être mobilisés pour amener les élèves à analyser une figure, à faire les liens entre la figure modèle et les gabarits proposés ont été proposés collectivement. Vanessa « semble » avoir pris conscience de l'importance de faire verbaliser les élèves. Elle avoue qu'habituellement, elle le fait peu. Elle a également pu observer comment pouvait être organisée et menée la mise en commun, comment faire argumenter les élèves à partir de procédures erronées, elle a reconnu l'intérêt de cette phase pour les élèves.

À l'issue de la séance 1, la difficulté des enseignantes à organiser la mise en commun conduit la formatrice à préciser l'objectif de la deuxième séance de compagnonnage. Il s'agira de poursuivre et rendre plus fine l'observation des élèves, en faisant verbaliser les élèves mais aussi en faisant préciser leurs raisonnements. Un tableau, articulé avec les quatre niveaux de vigilance didactique, précisés par Pézard, a été conçu pour rendre compte des gestes professionnels expérimentés, montrés lors de la première séance, ainsi que ceux visés pour la séance suivante (cf. Annexe 3). Il a permis, au fil des séances, d'observer le processus de modifications et d'enrichissement des gestes professionnels réalisé, mais aussi la nature des interventions du formateur effectuée (cf. figure 8).

	Objectif de la séance 1	**Objectifs de la séance 2 :**
Apprendre à exercer une certaine vigilance didactique...	→ Observer et faire verbaliser les élèves.	Amener l'enseignant à : → Observer et faire verbaliser plus finement les élèves. → S'appuyer des procédures observées, verbalisées, pour organiser la phase de mise en commun.
Niveau 1 • Proposition de problèmes consistants. (donnés par la ressource) • **Mise en œuvre de la recherche des élèves, observations et verbalisations.**	GPE : Observer et faire verbaliser les élèves : « Comment tu fais ? » GPF : Reformuler les propos des élèves pour préciser le vocabulaire. GPF : Par le questionnement, amener l'élève à préciser sa pensée, son raisonnement.	GPE : Observer et faire verbaliser les élèves : « Comment tu fais ? » GPE : Reformulation des propos des élèves pour préciser le vocabulaire. GPE : Par le questionnement, amener l'élève à préciser sa pensée, son raisonnement.

* Note :
GPE : geste professionnel expérimenté par l'enseignant, explicité par la ressource
GPF : geste professionnel montré par la formatrice

Figure 8 : extrait d'un outil d'analyse de la formatrice

3. Mise en activité des participants

Un montage vidéo de la séance 2 est projeté aux participants. En voici une rapide description :

Vanessa montre ce qu'elle a affiché au tableau : des gabarits et le référent collectif réalisé lors de la séance précédente (cf. figure 9).

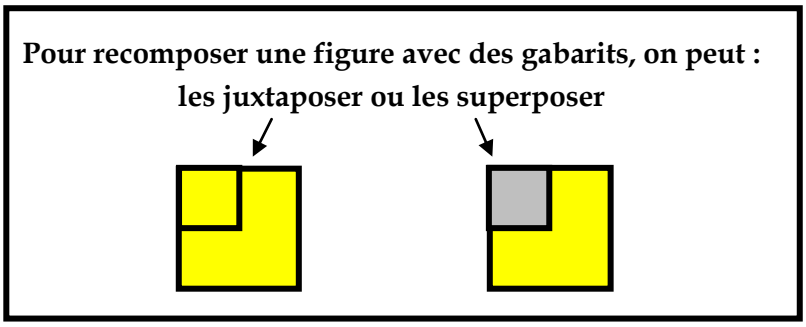


Figure 9 : affiche préparée par Vanessa

Après avoir rappelé l'activité réalisée (assemblage de gabarits de formes pour recomposer une figure complexe), Vanessa organise une phase de réactivation du vocabulaire en demandant aux élèves d'écrire sur leur ardoise le nom des formes identifiées dans la figure complexe.

Elle prend appui sur les réponses écrites sur les ardoises pour inviter les élèves à montrer les formes identifiées sur la figure collective représentée sur le tableau. Enfin, Vanessa termine cette phase en interrogeant un élève qui a écrit le mot « gabarit ». L'enseignante semble alors prendre conscience que pour cet élève, un gabarit est une forme différente des figures usuelles. Après avoir questionné les autres élèves, la définition d'un gabarit reste en suspens. Elle conclut cette phase sur les deux verbes d'action : juxtaposer et superposer. Marie, l'enseignante maitre supplémentaire, intervient alors pour faire justifier les assemblages réalisés en faisant préciser les propriétés mobilisées.

L'enseignante formule ensuite la consigne et présente le matériel à utiliser. Elle indique aux élèves qu'ils ont à trouver trois façons différentes de tracer la figure. Une méthode utilisant le gabarit « en L » et le gabarit de « petit carré » (qu'elle montre sur le tableau), et deux méthodes avec le gabarit « en L » uniquement.

Lors de la phase de recherche des élèves, Vanessa les observe et interagit avec eux. Elle reprécise le sens de reproduire non compris par un élève. Les élèves lui montrent ensuite leurs procédures et Vanessa reformule la consigne pour les tracés supplémentaires à trouver.

Lors de la phase de mise en commun, Vanessa se positionne devant le tableau, semble hésiter puis finalement propose à l'enseignante supplémentaire de mener cette phase. Marie prend donc en charge la mise en commun de trois procédures.

Elle fait « mimer » les élèves interrogés au tableau pour illustrer les différentes visions sur la figure (fait faire le contour, illustre le prolongement, avec le doigt des élèves), et fait à nouveau préciser les propriétés mobilisées. Vanessa intervient dans le questionnement, et essaie de faire le lien avec la théorie en faisant formuler par les élèves le mot « prolonger ».

La séance s'achève sur cette phase de mise en commun.

Les participants à l'atelier ont à présent connaissance d'un certain nombre d'éléments pour analyser cette séance. Organisés par binômes, ils doivent répondre aux questions qui leur sont posées.

Certains binômes (binômes A) ont à leur disposition la ressource conçue et proposée par la formatrice (cf. Annexe 4). Ils doivent répondre à la question : « À partir de ce document, repérer les gestes professionnels attendus par la formatrice ».

Les autres binômes (binômes B) ont à leur disposition le tapuscrit de la séance effectivement réalisée (cf. Annexe 5). Ils doivent répondre à la question : « À partir de ce document, repérer les gestes professionnels mis en œuvre par Vanessa ».

À l'issue de ce travail, des groupes de quatre personnes sont constitués (un binôme A avec un binôme B) afin de croiser leurs analyses et d'en dégager les objectifs que la formatrice pourrait se donner pour la prochaine séance de compagnonnage (préciser que la formatrice dispose de données complémentaires grâce à l'enregistrement de l'entretien, que nous n'avons pas présenté ici car trop long à lire dans le temps imparti pour l'atelier).

4. Mise en commun – Points abordés avec les participants

La mise en parallèle des analyses des binômes A et des binômes B a permis de faire émerger plusieurs constats à propos des écarts observés entre la ressource et la mise en œuvre de la situation.

Certains participants estiment que l'enseignante ne perçoit pas clairement l'objectif mathématique fixé : en effet, celle-ci reste focalisée sur des questions de vocabulaire. Elle insiste sur la distinction entre les termes « juxtaposer » et « superposer » et ne relève pas certaines remarques, pourtant intéressantes, de certains élèves. Par exemple, un élève dit à propos des deux assemblages représentés sur l'affiche : « Ce n'est pas les mêmes. ». L'enseignante aurait pu prendre appui sur cette intervention pour amener les élèves à identifier les points communs et différences entre l'assemblage par juxtaposition et celui par superposition.

L'enseignante estime-t-elle avoir respecté le déroulement prévu par la ressource ? La ressource était-elle suffisamment explicite à propos des objectifs visés ? L'emploi des verbes (juxtaposer/superposer) introduits via la formation et la ressource a peut-être créé un certain malentendu par rapport aux véritables enjeux de la situation. Deux projets distincts sont ici en concurrence : l'acquisition d'un certain vocabulaire et la résolution de problèmes. Les participants s'accordent à dire que la formatrice devrait lever certaines ambiguïtés lors de la prochaine séance.

Soulignons à ce propos que les enjeux de situations de restaurations de figures sont souvent mal compris et se réduisent parfois à la réussite de la tâche. La notion de restauration elle-même fait parfois écran. Nous avons en effet constaté, en tant que formatrices, qu'il était risqué de débuter une formation par la proposition d'une tâche de restauration de figure (surtout adaptée à des adultes) car les enseignants peuvent en retenir que « c'est difficile ». Il nous semble préférable d'entrer par les difficultés des élèves et les enjeux de l'approche proposée.

D'autres participants revenant sur la séance à analyser soulignent que l'enseignante a toutefois veillé à travailler à partir des propositions des élèves (ce qui était l'une des préconisations de la formatrice). Ils soulèvent alors une nouvelle question : l'enseignante cherche certes à impliquer les élèves mais jusqu'où les impliquer ? Par exemple, on constate qu'elle ne prend pas position à propos du terme à utiliser pour désigner les différents gabarits et de manière générale, qu'elle consacre beaucoup de temps à attendre que la réponse soit trouvée par un élève et que, sitôt la réponse trouvée, elle passe à une autre question. On peut se demander si c'est parce qu'elle se sent démunie et ne sait comment réagir, ou bien si son attitude est liée à une certaine représentation du métier du type : « si la réponse ne vient pas des élèves, on évacue la question posée ». Le fait qu'elle soit en présence d'autres personnes peut aussi introduire un biais. De plus, la consigne (« écrire le nom de trois formes ») peut avoir induit une certaine ambiguïté entre les formes utilisées et les formes que l'on voit (« il y a des carrés et une forme « en L » » désignée plus facilement par le mot « gabarit »). Les participants estiment donc que le statut de la mise en commun serait à reprendre en formation (« l'enseignant se doit de réactiver des connaissances chez ses élèves, oui mais dans quel but ? »).

Le geste professionnel consistant à avoir recours à l'ardoise a fait aussi l'objet d'une discussion. Ce geste est le fruit des échanges qui ont eu lieu au cours de l'entretien ayant suivi la séance précédente. D'un commun accord, les enseignantes avaient décidé de demander aux élèves d'écrire sur leur ardoise la réponse à la question posée au moment de la phase de rappel afin d'inciter chaque élève à « mettre en mots » leurs observations. L'enseignante observée dans cette séance demande aux élèves d'utiliser l'ardoise mais, pour autant, ne sait pas trop comment gérer les réponses obtenues. Un participant explique qu'il faut parfois reprendre la proposition d'un élève parce qu'elle permet de faire avancer l'ensemble de la classe mais que parfois, il n'est pas intéressant de la reprendre au regard des objectifs mathématiques visés.

De manière plus générale, nous constatons que certaines enseignantes n'utilisaient pas l'ardoise au début du dispositif et, par voie de conséquence, ne laissaient pas suffisamment de temps de réflexion aux élèves et n'avaient pas de moyens de sélection de réponses possibles. Suite à cela, certaines ont mis ce geste en place mais n'ont pas su comment l'exploiter : elles demandent aux élèves d'écrire sur l'ardoise mais ne prennent pas appui sur les écrits des élèves. Or, ce geste vise à permettre à l'enseignant de prendre connaissance des réponses des élèves et de choisir parmi celles-ci celles qu'il a anticipées ou non et qui vont lui permettre de réactiver de manière (rapide et) efficace les connaissances nécessaires pour la suite de la séance.

Selon certains participants, un problème plus consistant rendrait les enjeux d'apprentissage plus lisibles aux yeux des enseignants et permettrait peut-être une meilleure appropriation.

Par exemple, proposer la même figure mais ne donner que le petit carré, une bande de papier et une règle non graduée.

5. Choix effectifs de la formatrice

La présentation des objectifs que la formatrice s'est effectivement donnés pour la séance suivante est venue clore la discussion avec les participants (Cf. Annexe 3).

La formatrice présente tout d'abord la grille d'analyse des différents gestes professionnels qu'elle a conçue pour identifier ceux sur lesquels il était possible d'agir. Elle explique ensuite que les observations réalisées en prenant appui sur cette grille pendant la séance et l'entretien, l'ont amenée à fixer deux objectifs pour la séance suivante.

Amener l'enseignant à :

- S'autoriser à reformuler les propos des élèves ;

- S'appuyer sur les procédures erronées pour faire préciser le raisonnement des élèves.

Les objectifs de la formatrice ne rejoignent pas les propos des participants qui avaient suggéré que la formatrice lève les ambiguïtés entre les deux projets suivants : l'acquisition de vocabulaire et la résolution de problèmes. Ici, les deux projets sont précisés mais restent menés en parallèle. La grande pauvreté de vocabulaire constatée lors de la première séance est une des raisons de cet objectif complémentaire qui sera visé sur l'ensemble des séances.

Pour autant, un des participants indique que la consigne ne devrait pas se réduire à reproduire, mais formuler les étapes. Cela était précisé dans la ressource, mais la formatrice n'a pas observé les enseignantes systématiquement l'expliciter aux élèves lors des déroulements effectifs des séances.

Enfin, les participants approuvent les choix de la formatrice et l'un d'entre eux explique la nécessité d'obtenir de la part des élèves des résultats différents, voire contradictoires pour les faire argumenter. La formatrice précise alors que c'est la raison pour laquelle il a été décidé de mettre à disposition des élèves un gabarit qui ne convient pas (un gabarit intrus) car cela amène les élèves à expliciter leurs raisonnements.

IV - RÉSULTATS OBTENUS À PROPOS DES PRATIQUES OBSERVÉES

L'objet de cette recherche était d'étudier « en quoi un dispositif de formation, articulé avec la pratique du métier, est susceptible de favoriser l'intégration des notions didactiques données en formation et une meilleure appropriation d'une approche de la géométrie assez éloignée des pratiques usuelles des enseignants ».

1. L'enrichissement des gestes professionnels

L'évaluation du dispositif permet tout d'abord de constater une meilleure maitrise d'un certain nombre de gestes professionnels participant aux processus de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation. Travailler sur ces gestes professionnels peut être vu comme un prérequis nécessaire pour faciliter l'appropriation et la mise en œuvre de la ressource proposée. Ainsi, pour

l'enseignante Vanessa dont la séance a été étudiée dans cet atelier, il est possible de caractériser les gestes professionnels dont l'évolution est la plus significative en les articulant avec les effets sur les apprentissages des élèves.

- Lors de la phase de réactivation des connaissances, elle fait rappeler « uniquement » les éléments de connaissances qui seront à mobiliser sur la séance, utilise l'ardoise pour donner à chacun le temps d'entrer dans la tâche demandée, mais aussi pour récupérer l'activité des élèves, prendre appui sur des écrits réalisés et ainsi avoir la possibilité de faire des choix liés à son objectif.

Effet sur les élèves : être mis dans des conditions favorables pour avoir le temps de se remémorer, à leur rythme, les éléments de savoirs acquis. Cela permet également aux élèves « d'entrer » dans la séance, en se souvenant de ce qui a été fait mais surtout appris lors des séances précédentes, ce qui contribue également à la capitalisation des savoirs. Mobiliser ceux nécessaires pour les avoir à disposition lors de la phase de recherche, qui sera proposée ensuite, facilite la dévolution de la tâche.

- Elle organise la phase de mise en commun en s'appuyant de nouveau sur les productions des élèves, en « ciblant » parmi celles-ci les démarches qu'elle avait anticipées, car permettant de faire émerger le savoir visé. Dans ce but, elle s'autorise à montrer des démarches erronées pour favoriser l'argumentation des élèves.

Effet sur les élèves : être amenés à analyser de manière positive les procédures erronées, participer aux échanges collectifs en étant orientés sur les objets de savoir visés. Être mis en position réflexive sur les tâches en train de se faire, sur les objets manipulés, pour les constituer en objets de questionnement et faire émerger les connaissances.

Le dispositif de formation a ainsi permis de constater un réel enrichissement des gestes professionnels de l'enseignante, favorisant les apprentissages des élèves. Il a permis de travailler de manière très fine sur des gestes professionnels qui, s'ils étaient insuffisamment maitrisés, pouvaient faire obstacle à l'appropriation de la ressource. Il convient maintenant d'en identifier les éléments assimilés par l'enseignante dont la séance 2 a été analysée lors de l'atelier.

2. Appropriation de l'approche proposée

Lors de la mise en œuvre des séances, Vanessa a apporté ses propres adaptations. Prendre appui sur la séance qu'elle a conçue permet également d'étudier ses nouvelles propositions qui attestent d'une certaine appropriation (Mangiante, 2012). Les identifier et les analyser permet de repérer le niveau d'appropriation de la ressource proposée.

- Lors de la phase d'analyse de la figure modèle, Vanessa regroupe ses élèves devant le tableau. Elle a pris l'initiative, entre deux séances de compagnonnage, de réaliser avec ses élèves un référent : « J'analyse - Je trace » sur lequel elle s'appuie pour faire rappeler ce que signifie « analyser » lors de la présentation de la nouvelle figure.

Appropriation : elle a compris l'essence même de la démarche, apprendre aux élèves à observer finement, à bien regarder une figure complexe pour y identifier les sous figures la composant ou encore certaines propriétés. Pour cela, elle met les élèves dans des conditions optimales de concentration sur cette tâche d'analyse.

- Toujours lors de la phase d'analyse de la figure, elle prend l'initiative de faire manipuler la figure et amène les élèves à plier, à découper la figure modèle dans le but de faire découvrir les sous-figures.

Appropriation : cette proposition montre que Vanessa est consciente de la nécessité de faire manipuler la figure modèle pour accompagner le changement de regard des élèves sur la figure. Grâce aux prolongements effectués suite aux pliages, découpages, elle permet d'amorcer le passage de la vision contour à la vision ligne chez ses élèves. Cela les aide grandement dans la phase de restauration qui suit car les liens entre les gabarits et la figure ont été créés.

Le dispositif de formation a donc contribué à l'intégration d'une partie des éléments didactiques donnés en formation. Les entretiens ont été une plus-value importante puisque les analyses successives des séances entre pairs ont permis des échanges riches, notamment sur comment mener l'analyse d'une figure modèle. Cela a permis un certain niveau d'appropriation de la ressource.

3. Évolution des pratiques au regard de l'exercice de la vigilance didactique

Croiser l'enrichissement professionnel réalisé et le niveau d'appropriation de l'approche proposée, permet également de mettre au jour pour chaque enseignante une trajectoire caractérisant l'évolution positive de leurs pratiques, liée au degré d'exercice de vigilance didactique atteint. Dans le but d'interroger la troisième hypothèse et ainsi valider si les enseignantes sont capables de concevoir de nouvelles situations d'enseignement au plus proche de la démarche proposée, il convient d'identifier les éléments caractéristiques de leurs trajectoires. Pour cela, un tableau a été élaboré en prenant appui sur les quatre niveaux de vigilance didactique de Pézard, tableau mis en regard de ces gestes professionnels explicités et mis en œuvre.

Le tableau complété pour Vanessa (cf. Annexe 7) suite à l'analyse de l'observation de la séance qu'elle a conçue, démontre également un degré d'exercice de la vigilance didactique supérieur par rapport à l'analyse de ses pratiques ordinaires.

Vanessa a progressé dans le niveau 3 concernant l'observation, la lecture et l'interprétation des productions de ses élèves. Elle, qui n'osait pas mener de phase de mise en commun des procédures, est aujourd'hui capable de l'organiser en sélectionnant les procédures attendues car anticipées en amont de la séance.

C'est essentiellement le niveau 2, concernant l'explicitation des procédures lors des interactions possibles avec ses élèves, à la fois sur la phase de recherche et sur la phase de mise en commun, qui fait défaut à Vanessa. Elle avait précisé, lors de l'observation de ses pratiques usuelles, faire chercher ses élèves, faire peu verbaliser. C'est ce qu'elle reproduit à nouveau sur cette séance. Sur la séance présentée, les notions étant nouvelles pour les élèves, son rôle aurait nécessité d'interagir davantage sur les procédures des élèves, afin de faire les liens entre leurs actions et les notions qu'elles permettaient de faire émerger. Sans donner la solution, il parait en effet nécessaire de soutenir la recherche des élèves, d'orienter les échanges vers les savoirs en jeu, et ainsi passer de la manipulation à l'émergence des notions liées. Ce geste professionnel paraît le plus complexe à mettre en œuvre par les enseignants car il nécessite de préciser le questionnement sur l'objet principal de la tâche, et ce, sans trop en dire. Lors de la mise en commun, prendre appui sur les élèves sélectionnés pour présenter collectivement les procédures attendues, faire argumenter davantage les élèves sur les raisons de la réussite de ces dernières, auraient également permis d'orienter les échanges sur les savoirs en jeu.

L'entretien collectif a permis de soulever l'importance de l'analyse des gabarits proposés dans la conception de la séance.

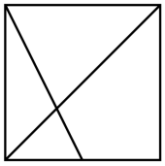


Figure 10

En effet, sur cette séance, les gabarits étant « porteurs » des notions visées (l'hypoténuse d'un des triangles rectangles permettait de tracer la diagonale du carré, la longueur du petit côté de l'autre triangle rectangle permettait de placer le milieu du côté du carré), les élèves ont reproduit la procédure de restauration de figure retenue lors de la séquence précédente, et n'ont pas éprouvé le besoin de faire émerger certaines notions.

L'approche proposée pour enseigner la géométrie sera à approfondir pour conduire Vanessa à mettre en œuvre le geste professionnel consistant à amener les élèves à comparer les gabarits proposés *« avec et sur »* la figure modèle. En effet, il permet d'initier chez l'élève le raisonnement instrumenté sur les figures, essentiel à développer pour la suite de son parcours en géométrie. Les différents étayages possibles, visant à maintenir l'élève dans la recherche, à l'aider à se concentrer sur le raisonnement à mener, seront également à retravailler afin de faire progresser les élèves dans ce domaine.

La mise au jour de cette trajectoire confirme que certains aspects de la démarche ont été appropriés Toutefois, on peut constater que la conception de nouvelles séances reste complexe. Les enseignantes

suivies ont acquis une partie des éléments didactiques nécessaires mais il faudrait poursuivre le travail pour les rendre capables de lire en temps réel les productions des élèves, d'évaluer leur distance au savoir visé afin de mettre en œuvre les interactions adéquates.

Soulignons à ce propos que la notion de vigilance didactique peut constituer un outil fort utile au formateur. Nous avons en effet constaté que la formatrice jouait sur différents niveaux d'exercice de la vigilance didactique. Par exemple, en ciblant, « laisser le temps de parole » aux élèves, elle amène les enseignants à repérer et à identifier les difficultés de leurs élèves.

4. À propos des gestes et des routines

Se dégage de l'observation au fil des séances des pratiques de ces enseignantes le constat suivant : certains des gestes professionnels évoqués lors des entretiens sont repris par certaines enseignantes mais de manière isolée, c'est-à-dire sans nécessairement les articuler avec d'autres gestes professionnels au service de la réalisation d'une routine.

Ces enseignantes semblent en effet ne pas avoir compris ou pris en compte le fait que la formatrice propose la mise en œuvre de plusieurs de ces gestes professionnels dans un but précis, celui de la réalisation d'une tâche plus complexe (mise en œuvre d'une routine). Par exemple, la proposition consistant à utiliser l'ardoise au moment de la phase d'analyse collective de la figure modèle n'a pas pour but de favoriser l'usage de l'ardoise en soi mais de faciliter la sélection des productions sur lesquelles prendre appui au moment de la mise en commun.

Ainsi, certaines enseignantes semblent procéder par imitation de gestes isolés sans réussir à mettre ces gestes professionnels en lien avec une finalité donnée.

Par ailleurs, certains grands choix de ces enseignantes (notamment Vanessa) sont susceptibles de constituer une certaine résistance face aux routines que la formatrice cherche à initier ou à développer. Nous constatons en effet que pour Vanessa, il est très important de mettre les élèves en situation de recherche et d'attendre que les élèves trouvent par eux-mêmes les réponses attendues. Elle semble même s'interdire d'aller au-delà des propositions des élèves. Or, cette représentation de l'enseignement (des mathématiques) peut entrer en contradiction avec certaines des propositions de la formatrice.

Ces observations tendent à confirmer la pertinence pour le formateur de cibler le niveau local, celui des routines pour agir non seulement sur les gestes professionnels (sans que ceux-ci soient isolés) mais aussi sur les grands choix.

> *« Les stratégies majoritaires développées par les formateurs « experts du terrain » (PEMF, CPC…) ciblent prioritairement des gestes professionnels souvent traités à un niveau micro, sans être rattachés à la tâche complexe et à la routine permettant de la réaliser, à laquelle ces gestes concourent. »*[68] *(Butlen, Mangiante-Orsola, Masselot, 2017, p. 5)*

V - CONCLUSION

Cet atelier nous a permis de rendre compte des choix qui ont été faits au moment de la conception du dispositif et de leur justification au regard d'éléments théoriques. Il nous a aussi permis de présenter les modalités de mise en œuvre des situations de compagnonnage (avec des moments de prise en main conjointe de la classe) et de décrire les pratiques d'une enseignante suivies tout au long de cette formation. L'analyse réalisée par les participants de données recueillies lors de la première séance de compagnonnage a constitué le point de départ de nos échanges. Nous avons débattu au cours de l'atelier de questions en lien avec les écarts constatés entre la ressource mise à disposition et la séance observée, les éléments dont l'enseignante a su s'emparer et ceux à propos desquels un travail de formation était à prévoir.

L'analyse des trajectoires des enseignantes suivies atteste de la nécessité d'aider les enseignants à mettre en lien grands choix, routines et gestes professionnels afin d'exercer une certaine vigilance didactique.

[68] Les PEMF sont les Professeurs des Écoles Maîtres Formateurs et les CPC sont les Conseillers Pédagogiques de Circonscription.

Dans le prolongement du travail réalisé, nous avons prévu de mettre en œuvre un dispositif d'accompagnement avec situations de compagnonnage pour l'enseignement de la géométrie au cycle 3 et de travailler avec des enseignants de cycle 2 à la conception de nouvelles situations de restauration de figures afin d'enrichir la ressource déjà produite.

Du côté de la recherche, notre intention est d'interroger plus avant les moyens d'agir sur les gestes professionnels et les routines dans le cadre spécifique de l'enseignement de la géométrie pour, à terme, enrichir notre analyse du processus d'appropriation par les enseignants de situations produites par la recherche.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Butlen, D. (2004) Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des Professeurs des Écoles, HDR Paris, Université Paris 8.

Butlen, D., Charles-Pézard, M., Masselot, P. (2009) Gestes et routines professionnels : un enjeu pour analyser et intervenir sur les pratiques enseignantes. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF 2009. Revue internationale Francophone, numéro spécial. http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/Butlen.pdf

Butlen, D., Mangiante-Orsola, C. et Masselot, P. (2017) Routines et gestes professionnels, un outil pour l'analyse des pratiques effectives et pour la formation des pratiques des Professeurs des Écoles en mathématiques, Recherches en Didactiques, numéro 24.

Butlen, D., Robert, A. (2003) *Interroger la profession en didactique des mathématiques, un filtre pour apprécier les activités possibles des élèves et des enseignants, et interroger la didactique ! ARDM* http://www.ardm.asso.fr/ee16/documents/cours/theme1-complet/cours-Robert-Butlen-complet/cours-version-provisoire/Cours%20Denis%20Butlen%20et%20Aline%20Robert.pdf

Charles-Pézard, M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. Recherches en didactique des mathématiques 30 (2), pp. 197-261.

Charles-Pézard, M., Masselot, P. (2006) De l'analyse de pratiques à des scénarios de formation : accompagnement en mathématiques de Professeurs des Écoles nouvellement nommés dans des écoles de milieux défavorisés (ZEP/REP), Actes du colloque EMF, Université de Sherbrooke. http://emf.unige.ch/files/4514/5388/8564/EMF2006_GT2_CharlesPezard.pdf

Duval, R., Godin, M. (2006) *Les changements de regards nécessaires sur les figures.* Revue Grand N, n° 76.

Mangiante-Orsola, C. (2012) Une étude de la cohérence en germe dans les pratiques de professeurs des écoles en formation initiale puis débutants. Recherches en didactique des mathématiques, vol 32/3

Mangiante-Orsola, C., Perrin-Glorian, M.-J. (2014) *Géométrie en primaire : Des repères pour une progression pour la formation des maîtres*. Grand N, 94, pp. 47–79.

Perrin-Glorian, M.-J., Godin, M. (2014) *De la reproduction de figures avec des instruments vers leurs caractérisations par des énoncés.* Math École

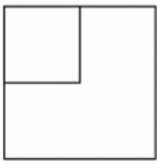
Robert, A. (1999) *Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques et leurs pratiques en classe. Didaskalia* 15 pp. 123-157.

Enseigner la géométrie, un peu autrement…

« Le quart du carré », Proposition n° 1.

Ressource conçue par Karine Vieque, Conseillère Pédagogique. Circonscription de Béthune 1.
Par souci de cohérence, la présentation de cette ressource pour le cycle 2 et certains conseils pour la mise en œuvre des séances s'appuient sur celle élaborée pour le cycle 3 par le LéA de Valenciennes.

Proposition de séquence autour de cette figure :



La séquence proposée se déroule en 4 séances.
Pour chacune des séances, il est demandé de reproduire la figure (toujours la même) à partir de gabarits, ou de la restaurer à partir d'amorces et d'outils différents.

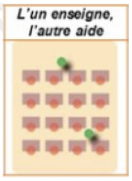
Objectifs :

- **Amener, apprendre aux élèves à analyser une figure** (prendre des informations sur le modèle reproduire, savoir décomposer et recomposer une figure.
- Adopter certaines habitudes de travail (apprendre à utiliser et assembler des gabarits, les juxtaposer, les faire se superposer, chevaucher)
- Mettre en place une démarche de résolution de problème afin de développer les capacités à observer, chercher et raisonner dans le domaine spécifique de la géométrie.

Organiser le travail :

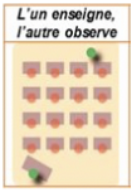
- Collectif pour les phases de présentation de l'activité et l'institutionnalisation.

→ *Dispositif PDMQDC* : L'un enseigne, l'autre aide, sollicite, relance les élèves.



- En 2 groupes, placés en ilots pour les phases de recherche et de mise en commun successives.

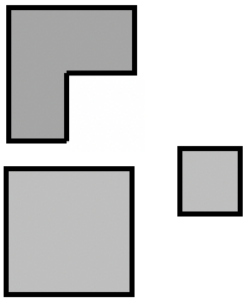
→ *Dispositif PDMQDC* :
L'un enseigne au groupe 1, l'autre observe et prends note de l'activité, des procédures, d'un (ou plusieurs) élève(s).
Le groupe 2 a une activité en autonomie.
→ Inversion des rôles des enseignants lors de l'inversion des groupes.



A préparer avant la séance :

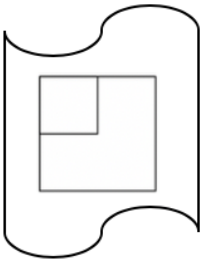
Matériel individuel (Annexes à photocopier, sur des feuilles de couleurs différentes pour les gabarits si cela est possible)

- Optionnel : un carnet de géométrie (voir utilisation en annexe)
- La figure modèle plastifiée, ou modèle à coller dans le carnet de géométrie.
- La figure modèle reproduite sur une feuille blanche qui servira également de support pour poser les assemblages réalisés.
- Une enveloppe ou pochette par élève, avec :
  - ✓ 1 gabarit en L
  - ✓ 1 gabarit de grand carré
  - ✓ 6 gabarits du petit carré.



Matériel pour le tableau :

- La figure modèle **tracée** au tableau, (ou **tracée** sur une affiche, projetée sur TBI)
- Les mêmes gabarits en grand format (pour pouvoir réaliser tous les assemblages trouvés sur le tableau)
  (prévoir aimants ou autre support de fixation (ou version TBI)



Pour valider le travail de l'élève :

- 3 ou 4 calques autocorrectifs pour l'ensemble de la classe.

Présentation orale et Proposée par K Vinque

Enseigner la géométrie, un peu autrement…

« Le quart du carré », Proposition n° 1.

Ressource conçue par Karine Vieque, Conseillère Pédagogique. Circonscription de Béthune 1.
Par souci de cohérence, la présentation de cette ressource pour le cycle 2 et certains conseils pour la mise en œuvre des séances s'appuient sur celle élaborée pour le cycle 3 par le LéA de Valenciennes.

Déroulement :

→ Phase 1 : Réactivation des éléments de connaissances nécessaires pour cette séance.

- *Dire aux élèves :*
  « Qu'avons-nous appris/fait lors de la dernière séance ? »

→ Cibler, parmi les éléments de connaissances ou de procédures apprises ultérieurement, celles à faire rappeler car utiles pour cette séance.
→ Par exemple : le nom des formes géométriques connues, une activité d'assemblage de formes (jeu du Tangram)

GP1 : *L'enseignant fait rappeler les connaissances géométriques et/ou l'activité géométrique réalisée lors de la séance précédente.*

→ Phase 2 : Présentation et analyse de la figure modèle

*→ La figure modèle est **tracée** en grand format sur le tableau ou sur une affiche. (**« tracée »** pour que les élèves fassent bien la différence entre la figure à tracer et les gabarits cartonnés)*

- *Dire aux élèves :*
  *« Voilà une figure. On va apprendre à **l'analyser.***
  *Pour cela, il faut **bien l'observer**.*
  ***Dans votre tête**, trouver toutes les formes qu'il est possible de voir dans cette figure. »*
  → Pendant ce temps, distribuer la fiche avec la figure modèle, ou le carnet de géométrie dans lequel a été collée la figure.
- *Dire aux élèves :*
  Sur votre ardoise / votre carnet, écrivez le nom de toutes les formes que vous avez vu dans cette figure.
- Observez les productions de vos élèves.
  Identifiez les productions où il est écrit : un carré, un petit carré, un grand carré, une forme en « L à l'envers »
- Après quelques minutes, **interroger un ou deux élèves repérés** lors de votre observation. Faire verbaliser et montrer les formes reconnues.
  1. Un carré (lequel ?)
  2. Un petit carré
  3. Un grand carré
  4. Une forme en « L à l'envers »
- Reformuler si besoin pour utiliser un **vocabulaire précis, et commun.**
- **Ecrire ces mots** de vocabulaire **sur le tableau**.
  (Ils correspondent à une première analyse de la figure)

GP2 : *Présentation de la figure complexe au tableau.*
La phase d'analyse de la figure est prise en charge collectivement afin de ne laisser aucun élève démuni à ce stade de la séance. Néanmoins, il est conseillé de procéder en deux étapes :
L'enseignant laisse tout d'abord du temps aux élèves pour observer, analyser la figure.
Il explicite ses attentes: après ce temps, les élèves auront à la décrire oralement.

Pourquoi différer le temps de réponse ?
→ Pour permettre à chacun de s'approprier la tâche, éviter que les élèves les plus performants et rapides formulent la réponse attendue avant que les autres n'aient eu le temps de l'observation et surtout de la réflexion nécessaire.

GP9 : *L'enseignant sélectionne les productions d'élèves correspondant à ses attentes pour faire émerger la notion mathématique visée.*

GP3 : *L'enseignant fait décrire, analyser les éléments essentiels de la figure complexe par les élèves. (ne pas trop en dire pour que la situation reste une situation de recherche)*

Pourquoi anticiper les réponses attendues des élèves et orienter cette mise en commun en interrogeant des élèves repérés lors de votre observation ?

Pour une gestion efficace du temps,

Ressource conçue par Karine Vieque et proposée par l'APMEP

permettant de rester sur l'itinéraire que vous avez choisi pour atteindre l'objectif de la séance. (Naviguer à vue par un recueil aléatoire des réponses peut être contreproductif pour la situation de recherche qui va suivre. Cibler, permet donc de ne pas trop en dire…)

→ Phase 3 : Présentation de l'activité de recherche.
Assemblage des gabarits.

- **Passation de la consigne.**

Accrocher les gabarits grands formats au tableau.

*« Voilà des **gabarits**, ce sont des modèles de forme.*
→ Faire répéter ce mot nouveau et sa définition.
Dans l'enveloppe (ou la pochette) que je vais vous donner, il y a les mêmes gabarits que ceux accrochés /affichés au tableau.
→ Interrogez un élève :
« … », peux-tu me redonner le nom de ces formes ? »
Réponses attendues : *« un **gabarit** de petit carré, un **gabarit** de grand carré, un **gabarit** en forme de L à l'envers »*

- *Dire aux élèves :*

→ On a vu que la figure modèle était composée de plusieurs formes. Pour l'analyser davantage, vous allez essayer de trouver plusieurs façons d'assembler les gabarits, pour recomposer la figure modèle. On n'est pas obligé de tout utiliser, mais il faut trouver des façons différentes.
→ Quand vous avez trouvé, vous pouvez venir chercher un calque et vérifier si vous avez réussi en le superposant sur votre assemblage. Il n'y en a pas pour tout le monde, donc après avoir vérifié, il faut remettre le calque dans la boite.

→ S'assurer de la bonne compréhension de la consigne.
« Que devez vous faire ?
Des assemblages.
Que devez vous utiliser ?
Des gabarits.
Que devez vous faire quand vous avez trouvé ?
Vérifier avec le calque.

***GP4 :** L'enseignant précise les modalités d'utilisation du calque autocorrectif.*

Quelle est la plus-value d'utiliser un calque autocorrectif ?
-Les élèves sont autonomes et valident eux même leur production.
-l'enseignant est alors disponible pour observer et étayer les élèves.

Eviter que les élèves gardent le calque. Ils peuvent, surtout lors des activités de tracés, s'en servir pour réaliser la figure par tâtonnement.

***GP4 :** L'enseignant formule la consigne et s'assure de sa compréhension par les élèves.*
Il précise les contraintes : les outils autorisés et mis à disposition, les actions possibles.

Ressource conçue et proposée par K-Vieque

- **Anticipation les procédures attendues pour faire émerger la (les) notion(s) en jeu.**

→ Essentiel pour vous aider à observer efficacement, mettre des liens entre les notions géométriques et les actions des élèves.
→ Tableau à remplir en amont de la séance, à compléter après la séance avec les procédures effectives des élèves.

	Actions possibles des élèves	Notions
1	Juxtaposer le gabarit en L avec un petit carré.	La figure peut être vue comme la juxtaposition d'une surface en L et d'une surface de petit carré.
2	Juxtaposer les 4 gabarits des petits carrés.	La figure peut être vue comme la juxtaposition de 4 petits carrés.
3	Superposer le petit carré sur le gabarit de grand carré	La figure peut être vue comme la superposition d'un petit carré sur le grand carré
4	Juxtaposer les gabarits de petits carrés autour du gabarit en forme de L	

Anticipation des difficultés des élèves :

- Les élèves peuvent ne pas oser superposer les gabarits.
- Certains élèves peuvent ne pas « voir » les figures « cachées » dans la figure complexe.

Aide à prévoir :

- Le modèle collectif/individuel de la figure modèle avec le petit carré mis en couleur.



GP9 : L'enseignant sélectionne les productions d'élèves correspondant à ses attentes pour faire émerger la notion mathématique visée.



Pour la procédure 3, deux possibilités :

→ Soit la procédure relève du contrat didactique : habitués depuis le cycle 1 à faire des puzzles et donc à juxtaposer des surfaces, les élèves pensent ne pas avoir le droit de superposer les formes.
La mise en commun des procédures dans la phase suivante permettra de montrer cette nouvelle stratégie :
• Si un élève trouve la procédure, lui faire verbaliser sa démarche lors de la mise en commun.
• Sinon, amener la stratégie de chevauchement pour que les élèves prennent conscience que c'est une procédure possible et autorisée.

→ Soit la procédure relève de difficultés conceptuelles, l'élève ne voit pas le grand carré caché derrière le petit (ou le petit carré posé sur le grand) car il ne parvient pas à décomposer la figure.
On peut alors l'aider par étapes graduées :
•Lui demander ce qu'il voit, aider un pair à orienter son regard.
•Lui demander de faire le tour du grand carré avec son doigt.
•Colorier la surface du petit carré sur le modèle accroché au tableau.

Ressource conçue et proposée par K.Vieque

5. ANNEXE 2 : LA GRILLE D'OBSERVATION DES GESTES PROFESSIONNELS CRÉÉE (EXTRAIT)

Grille d'observation des gestes professionnels mis en œuvre dans les séances. (Recueil à partir des vidéos des séances)- Karine Vieque.
Gestes « explicités » dans la ressource donnée aux enseignants, sur la restauration de figure au cycle 2 Nom de l'enseignant :

Du côté de la didactique des maths.	Les gestes construits, enrichis… dans la mise en œuvre des séances de restauration de figure.		Séance S0 Pratiq Usuelles	S1 Acc Res	S2 Acc Res	S3 Acc Res	S4 Acc Res	S5 Séance créée par le PE
	Phase 1 : Rappel des connaissances géométriques apprises antérieurement.							
Institutionnalisation	**L'enseignant rappelle** les connaissances géométriques et/ou l'activité géométrique réalisée lors de la séance précédente.	GP1 a	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Institutionnalisation	L'enseignant **fait rappeler par les élèves :** → l'activité géométrique réalisée lors de la séance précédente. → les connaissances géométriques associées → les connaissances géométriques qui seront **à mobiliser** sur la séance. (rappel de « l'ancien » dans le but, en fin de séance, « d'ancrer le nouveau dans l'ancien »)	GP1 b c d	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
Institutionnalisation	L'enseignant **reformule, précise le vocabulaire, s'autorise à compléter les propos des élèves.**	GP1 e	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Institutionnalisation	L'enseignant **utilise l'affiche- trace écrite** élaborée lors de la dernière séance	GP1 f	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	Phase 2 –A : Présentation de la figure complexe. Apprendre à observer, analyser une figure. « Ce que l'on voit dans la figure »							
Dévolution	L'enseignant **présente la figure complexe** : → La figure complexe est tracée/affichée sur le tableau (TBI)	GP2 a	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	L'enseignant fait décrire, analyser les **éléments essentiels de la figure complexe** par les élèves : → Il explicite ses attentes: après un temps d'observation, les élèves auront à décrire la figure.	GP2 b	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	→ Il met à disposition des élèves, de manière individuelle, la figure complexe pour qu'ils puissent **agir sur la figure** et ainsi mieux l'analyser.	GP2 c	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	→ Il fait tout d'abord **écrire** les observations sur leur ardoise, pour que chacun puisse disposer d'un temps de recherche individuel. (« Ecrit de travail » : Faire écrire permet d'évaluer les mots de vocabulaire géométrique utilisés par chaque élève, de garder une trace de ce que les élèves « voient » de la figure)	GP2 d	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Grille d'observation des gestes professionnels mis en œuvre dans les séances. (Recueil à partir des vidéos des séances)- Karine Vieque.
Gestes « explicités » dans la ressource donnée aux enseignants, sur la restauration de figure au cycle 2 Nom de l'enseignant :

	Les gestes construits, enrichis… dans la mise en œuvre des séances de restauration de figure.		Séance S0 Pratiq Usuelles	S1 Acc Res	S2 Acc Res	S3 Acc Res	S4 Acc Res	S5 Séance créée par le PE
	→ Il **prend appui sur ce qui est écrit sur les ardoises** pour faire **verbaliser** par les élèves, **les éléments essentiels de la figure qu'il souhaite faire expliciter** (ne pas trop en dire pour que la situation reste une situation de recherche)	GP2 e	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	→ Les élèves interrogés sont également sollicités pour montrer les « éléments vus » sur la figure collective tracée sur le tableau.	GP2 f	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	→ Les éléments essentiels « vus », de la figure sont écrits sur le tableau	GP2g	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	Phase 2 – B : L'amorce de la figure. Les gabarits, les outils mis à disposition pour restaurer la figure							
Dévolution	**L'enseignant présente l'amorce de la figure et les outils, gabarits mis à disposition pour la restaurer.** → L'amorce est tracée / affichée sur le tableau (TBI)	GP2 h	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	→ Les outils, gabarits collectifs, sont accrochés sur le tableau.	GP2 i	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	→ Il explicite le but de la séance, formule la consigne et donne du sens à la tâche : finir de tracer de la figure à partir de cette amorce, en utilisant les outils donnés.	GP2 j	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	→Il s'assure de la compréhension de la consigne par les élèves. La reformule, la reprécise au début de la recherche, fait rappeler le matériel et les outils autorisés.	GP2 k	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	Phase 2 – C : Apprendre à analyser, comparer, les éléments essentiels de l'amorce de la figure, les outils mis à disposition, par rapport à la figure modèle. (Trouver ce qui est pareil, pas pareil, méthodologie à mettre en place au cycle 2)							
Dévolution	L'enseignant explicite ses attentes quant à la première étape : après un temps d'observation, les élèves auront à **comparer l'amorce** avec la figure modèle, **comparer les outils/gabarits** avec la figure modèle.	GP2 l	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	→ L'enseignant met à disposition des élèves : la figure modèle, l'amorce et les outils pour les aider à analyser, **comparer par manipulation** si besoin.	GP2 m	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	→ Recherche des élèves. L'enseignant fait verbaliser ses élèves individuellement, identifie les éléments sur lesquels il pourra s'appuyer pour l'étape suivante.	GP2 n	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	→ L'enseignant fait **verbaliser** par les élèves, **les éléments essentiels de comparaison qu'il souhaite faire expliciter.** (ne pas trop en dire pour que la situation reste une situation de recherche)	GP2 o	☐	☐	☐	☐	☐	☐

2

6. ANNEXE 3 : PROCESSUS D'ENRICHISSEMENT DES GESTES PROFESSIONNELS OPÉRÉS SUR LES QUATRE SÉANCES

Apprendre à exercer une certaine vigilance didactique...	**Objectif de la séance 1** → Observer et faire verbaliser les élèves.	**Objectifs de la séance 2** **Amener l'enseignant à :** → Observer et faire verbaliser plus finement les élèves. → S'appuyer sur les procédures observées, verbalisées, pour organiser la phase de mise en commun.
Niveau 1 •Proposition de problèmes consistants (donnés par la ressource) **•Mise en œuvre de la recherche des élèves, observations et verbalisations.**	GPE : Observer et faire verbaliser les élèves : « Comment tu fais ? » GPF : Reformuler les propos des élèves pour préciser le vocabulaire. GPF : Par le questionnement, amener l'élève à préciser sa pensée, son raisonnement. GPF : Organiser des « pauses » pour acter un accompagnement permettant une meilleure compréhension de la tâche.	GPE : Observer et faire verbaliser les élèves : « Comment tu fais ? » GPE : Reformulation des propos des élèves pour préciser le vocabulaire. GPE : Par le questionnement, amener l'élève à préciser sa pensée, son raisonnement. GPF : Organiser des « pauses » pour acter un accompagnement permettant une meilleure compréhension de la tâche.
Niveau 2 • Organisation de la mise en commun • Explicitations des élèves Validation des élèves.	GPF : Identifie les procédures à présenter lors de la mise en commun. GPF : Par son questionnement, amène l'élève à préciser sa pensée, son raisonnement. GPF : organise l'argumentation des élèves.	GPE : Identifie les procédures à présenter lors de la mise en commun. GPE : Par son questionnement, amène l'élève à préciser sa pensée, son raisonnement.
Niveau 3 • Hiérarchisation des procédures et synthèse • Nature et degré d'expertise des savoirs mobilisés.	GPF : Le formateur propose des procédures erronées pour faire émerger les savoirs mobilisés : côtés placés bord à bord, côtés de même longueur…	
Niveau 4 • Institutionnalisation des savoirs et des méthodes en jeu. • Décontextualisation • Réorganisation des savoirs notamment en termes d'ancrage du nouveau dans l'ancien.	GPE : Institutionnalisation des méthodes : Superposition et juxtaposition des gabarits.	

GPE : Geste Professionnel Expérimenté, explicité dans la ressource
GPF : Geste Professionnel montré par le Formateur
GPI : Geste Professionnel Initié par l'enseignant
GP visés sur la séance suivante

Le tableau des gestes professionnels à mettre en œuvre évolue de la manière suivante :

	Objectifs de la séance 2 : **Amener l'enseignant à :**	**Objectifs de la séance 3 :** **Amener l'enseignant à :**
Apprendre à exercer une certaine vigilance didactique...	→ Observer et faire verbaliser plus finement les élèves. → S'appuyer des procédures observées, verbalisées, pour organiser la phase de mise en commun.	→ S'autoriser à reformuler les propos des élèves → S'appuyer sur les procédures erronées pour faire préciser le raisonnement des élèves.
Niveau 1 • Proposition de problèmes consistants (donnés par la ressource) • **Mise en œuvre de la recherche des élèves, observations et verbalisations.**	GPE : Reformulation des propos des élèves pour préciser le vocabulaire. GPE : Par le questionnement, **tente** d'amener l'élève à préciser sa pensée, son raisonnement. GPF : En questionnant un élève, montre à l'enseignant comment le faire verbaliser, Reformule les propos des élèves en apportant le vocabulaire géométrique précis.	GPE : **S'autoriser** à reformuler des propos des élèves pour préciser le vocabulaire lié aux actions effectuées. GPE : **Par une action erronée sur les gabarits, provoquer le questionnement** et amener l'élève à préciser sa pensée, son raisonnement. GPF : Organiser des « pauses » pour **montrer comment s'appuyer sur les procédures erronées, voire les proposer.**
Niveau 2 • **Organisation de la mise en commun** • **Explicitations des élèves** **Argumentation et Validation des élèves.**	GPE : **Identifie les procédures attendues** et s'en appuie pour organiser la mise en commun. GPE : Par son questionnement, **tente** d'amener l'élève à préciser sa pensée, son raisonnement.	GPE : **Identifie** parmi les procédures attendues, **les procédures sur lesquelles s'appuyer** lors de la mise en commun **pour orienter l'argumentation des élèves vers l'émergence de la notion visée.** GPE : **S'appuyer sur une procédure incomplète**, **erronée**, pour provoquer davantage d'argumentation, et **faire émerger, expliciter les notions sous-jacentes aux actions effectuées**
Niveau 3 • **Hiérarchisation des procédures** et synthèse • Nature et degré d'expertise des savoirs mobilisés.	GP initié : **S'interroge** sur l'utilisation de certaines procédures non attendues. GPF : Complète la synthèse effectuée par l'enseignant en faisant émerger les notions visées.	GPF : Accompagner l'enseignant à **faire le lien** entre les **procédures observées**, recueillies et les **notions attendues à faire émerger**.
Niveau 4 • **Institutionnalisation des savoirs et des méthodes en jeu.** • Décontextualisation • Réorganisation des savoirs notamment en termes d'ancrage du nouveau dans l'ancien.	GP initié : Regroupe les élèves devant le tableau pour « centrer l'attention » des élèves sur le moment d'exposition des connaissances. GPE : Fait utiliser l'ardoise pour que chacun soit impliqué dans la « mise en mots » des savoirs et méthodes en jeu au début de la séance. GP Initié : Les procédures à utiliser pour tracer sont écrites sur le tableau.	**GPE : Élaborer une trace écrite.**

	Objectifs de la séance 3 :	Objectifs de la séance 4 :
Apprendre à exercer une certaine vigilance didactique...	**Amener l'enseignant à :** → S'autoriser à reformuler les propos des élèves → S'appuyer sur les procédures erronées pour faire préciser le raisonnement des élèves.	**Amener l'enseignant à :** → Favoriser l'analyse de la figure avec les gabarits → Réguler si besoin pour orienter la recherche des élèves vers l'objectif visé.
Niveau 1 •Proposition de problèmes consistants (donnés par la ressource) • **Mise en œuvre de la recherche des élèves, observations et verbalisations.**	GPE : **S'autoriser** à reformuler des propos des élèves pour préciser le vocabulaire lié aux actions effectuées. GPE : **Par une action erronée sur les gabarits, provoquer le questionnement** et amener l'élève à préciser sa pensée, son raisonnement. GPF : Organiser des « pauses » pour **montrer comment s'appuyer sur les procédures erronées, voire les proposer.**	GPE : Sur la phase d'analyse, **mettre à disposition** des élèves la figure, l'amorce et les gabarits GPE : Amener l'élève à **comparer** les gabarits avec la figure en **superposant le gabarit sur la figure modèle**, percevoir les égalités de longueurs, d'angle... GPF : Organiser des « pauses » pour **réorienter la recherche des élèves vers l'objectif suivi** (notamment sur l'utilisation (ou non), du gabarit d'angle droit, de la bande de papier
Niveau 2 • **Organisation de la mise en commun** • **Explicitations des élèves** **Argumentation et Validation des élèves.**	GPE : **Identifie** parmi les procédures attendues, **les procédures sur lesquelles s'appuyer** lors de la mise en commun **pour orienter l'argumentation des élèves vers l'émergence de la notion visée.** GPE : **S'appuyer sur une procédure incomplète**, **erronée**, pour provoquer davantage d'argumentation, et **faire émerger, expliciter les notions sous-jacentes aux actions effectuées**	GPE : **Identifie** parmi les procédures attendues, **les procédures sur lesquelles s'appuyer** lors de la mise en commun **pour orienter l'argumentation des élèves vers l'émergence de la notion visée.** GPE : **S'appuyer sur une procédure**, **erronée**, pour **faire émerger, expliciter les notions sous-jacentes aux actions effectuées (non tracé d'angle droit, pas d'utilisation du gabarit d'angle droit)**
Niveau 3 • Hiérarchisation des procédures et synthèse • **Nature** et degré d'expertise **des savoirs mobilisés.**	GPF : Accompagner l'enseignant à **faire le lien** entre les **procédures observées**, recueillies et les **notions attendues à faire émerger**.	GPE : Accompagner l'enseignant à **faire le lien** entre les **procédures observées**, recueillies et les **notions attendues à faire émerger**.
Niveau 4 • **Institutionnalisation des savoirs et des méthodes en jeu.** • Décontextualisation • Réorganisation des savoirs notamment en termes d'ancrage du nouveau dans l'ancien.	**GPE : Élaborer une trace écrite.**	**GPE : Ancrer du nouveau dans l'ancien.**

7. ANNEXE 4 : DOCUMENT « A » DONNÉ AUX PARTICIPANTS

Question A

Consigne : À partir de ce document, repérer les gestes professionnels attendus par la formatrice

EXTRAIT DE LA RESSOURCE : ENSEIGNER LA GEOMETRIE, UN PEU AUTREMENT…

« LE QUART DU CARRE », SEANCE N°2.

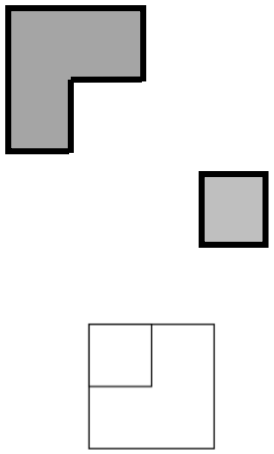
Objectifs pour cette séance :

- Adopter certaines habitudes de travail (apprendre à utiliser et placer des gabarits, les faire pivoter si besoin, s'autoriser à prolonger des traits, s'organiser dans les différentes étapes du tracé)
- Réinvestir certaines habitudes de travail (apprendre à utiliser et assembler des gabarits, les juxtaposer, les faire se superposer, se chevaucher)
- Mettre en place une démarche de résolution de problème afin de développer les capacités à observer, chercher et raisonner dans le domaine spécifique de la géométrie

Matériel à préparer avant la séance :

Matériel individuel (Annexes à photocopier, sur des feuilles de couleurs différentes pour les gabarits si cela est possible) :

- La figure modèle reproduite sur une feuille blanche qui servira également de support de reproduction.
- 1 gabarit en L
- 1 gabarit de petit carré



Matériel pour le tableau :

- La figure modèle agrandie, **tracée** au tableau, (ou **tracée** sur une affiche, projetée sur TBI)
- Les mêmes gabarits en grand format pour permettre aux élèves de tracer la figure sur le tableau, (si possible imprimés sur papier de couleur)
  (prévoir aimants ou autre support de fixation)

Pour valider le travail de l'élève :

- 2 ou 3 calques autocorrectifs pour l'ensemble de la classe.

Gestes Professionnels attendus par la formatrice :

Déroulement :

→ Phase 1 - Réactivation des éléments de connaissances nécessaires pour cette séance.

Dire aux élèves :

Lors de la dernière séance, nous avions appris à analyser une figure, c'est-à-dire apprendre à bien la regarder pour y voir différentes formes.

Sur votre ardoise : écrivez-moi le nom des 3 formes que vous aviez vues dans cette figure.

 *Réponses attendues : un petit carré, un grand carré, une forme en L à l'envers.*

- Interroger les élèves ayant écrit ces mots, écrire ces mots sur le tableau, à côté de la figure modèle.

Sur votre ardoise, écrivez le nom des 2 méthodes d'assemblage.

 *Réponses attendues : la juxtaposition et la superposition.*

- Utilisez le référent élaboré lors de la séance précédente pour valider, illustrer et rexpliciter le sens de ces 2 mots en vous aidant des gabarits collectifs.

→ Phase 2 - Présentation de l'activité : « Le tracé de la figure »

- **Passation de la consigne :**

 *Dire aux élèves : Aujourd'hui on va apprendre à tracer la figure modèle en utilisant ces gabarits. (Montrer le gabarit en L et le petit carré)*

Comme la dernière fois :

- *Il y a plusieurs méthodes à trouver (avec 2 gabarits ou 1 seul).*
- *Vous pourrez vérifier si vous avez réussi à tracer la figure avec le calque (le calque est dans la boîte, vous allez le prendre quand vous avez fini une figure, et vous le remettez tout de suite après car il n'y en a pas assez pour tout le monde).*
- *Je vais vous demander de m'expliquer comment vous avez réussi à tracer la figure.*

 *Que devez-vous tracer ?*

 *La figure modèle (la remontrer si besoin).*

De quels outils allez-vous avoir besoin pour tracer ?

 *Réponse attendue : un crayon de bois, les 2 gabarits.*

 *Avez-vous le droit de prendre la règle ?*

→ Non. Uniquement les gabarits.

Rappelez comment utiliser un crayon de bois (ne pas appuyer trop fort sur la mine pour pouvoir gommer facilement si besoin…)

→ Phase 3 : Recherche des élèves et confrontations successives.

-  Dans un premier temps, observez les élèves.
  Cherchez à voir les procédures attendues (décrites ci-dessous) ou les procédures non attendues pouvant être intéressantes à exploiter.
  Si possible, prenez des notes.
-  Ensuite, étayez.
  Faites verbaliser mais **aussi préciser** les procédures des élèves.
- Reformuler et préciser le vocabulaire, les actions géométriques, si besoin.
  « Comment fais-tu ? Comment as-tu fait ? »
  Pourquoi fais-tu de cette manière ?
  Pourquoi est-ce possible de tourner le gabarit ?
  Pourquoi peut-on juxtaposer ces deux gabarits ? Qu'as-tu remarqué sur les bords communs à ces deux gabarits ? Qu'ont-ils de « pareil, identique » ?
  Etc.
-  Une fois les procédures attendues repérées, ou identifiées comme pertinentes, commencez à préparer la mise en commun : envoyez en amont, les élèves ciblés au tableau tracer la figure avec les gabarits collectifs.
- Pendant ce temps, continuez l'observation et l'étayage des élèves.

Rappel : **la mise en commun a pour objectif de montrer que :**

Après avoir tracé le contour d'un gabarit, la suite du tracé de la figure peut s'obtenir :

Soit :

- en tournant le gabarit en L et en prolongeant les segments obtenus par le tracé du 1er gabarit.

- en n'utilisant qu'une partie du contour d'un gabarit car certains côtés auront été tracés par le 1er gabarit.

En effet :

***Quand on superpose deux gabarits, il y a des bords qui coïncident, qui se correspondent (cas du petit carré qui vient se superposer sur le grand carré une fois tracé, deux bords du petit carré viennent se superposer sur les bords du grand carré).**

***Quand on juxtapose des gabarits l'un à côté de l'autre, ils peuvent avoir des bords de la même longueur. (Cas du gabarit de petit carré qui vient se juxtaposer exactement avec le**

gabarit en L)

→ Sélectionnez donc les productions les plus représentatives et qui seront traitées lors de la mise en commun.

Anticipation des procédures attendues pour faire émerger la notion en jeu :

	Actions possibles des élèves	**Notions**
1	Tracé du contour du gabarit en L. Juxtaposition du petit carré. Tracé du contour complet du petit carré. Ou inversement, tracé du petit carré et tracé du L par juxtaposition	Une figure peut être définie comme le contour d'un gabarit. (Vision contour)
2	Tracé du contour du gabarit en L. Juxtaposition du petit carré. Tracé des côtés manquants à l'aide du gabarit du petit carré.	Une figure peut être définie comme le contour d'un gabarit. Egalité de longueur de certains côtés d'une figure. La figure peut être définie comme une surface dont les côtés peuvent être mis en relation avec les segments déjà tracés, et le prolongement de ces derniers (de la vision contour à la vision ligne)
3	Ou rotation du gabarit en L et même démarche.	Le carré a quatre angles droits.
4	Pour les rapides, on peut proposer, dans un 2ème temps, d'utiliser la règle au cours de la recherche : Tracé du contour du gabarit en L. Avec la règle non informelle, prolongement des petits côtés de la figure en L (vers la vision ligne) pour obtenir le tracé du grand carré. Enfin intersection de ces deux côtés pour obtenir le sommet du grand carré (vision point)	Une figure peut être définie comme le contour d'un gabarit. Les côtés sont portés par des droites et il est toujours possible de prolonger une droite. Le point peut être vu comme l'intersection des deux lignes prolongées.

→ Phase 4 : Mise en commun.

- À tour de rôle, envoyez les élèves que vous avez identifiés lors de la phase ci-dessus présenter leur démarche de tracé au tableau.
- Laissez chaque élève verbaliser sa démarche entièrement.
- Reformuler et préciser le vocabulaire, les actions géométriques, si besoin.

On invitera par exemple :

1. Un élève qui a tracé le contour complet de chaque gabarit.
2. Un élève qui a tracé le contour complet d'un gabarit, puis un contour partiel.
3. Un élève qui a opté pour la rotation du gabarit en L.

Puis organiser le débat. Faites intervenir les autres élèves.



« Qu'en pensez-vous ? » Faites comparer les méthodes.

Quelle est la différence entre la méthode 1 et la méthode 2 ?

Faut-il tracer le contour complet de chaque gabarit ou pas ? Pourquoi ?

*Amener le fait que **certains bords coïncident**, qu'ils forment un seul trait (car sont portés par la même droite)*

*Amener aussi que **certains bords coïncident et ont la même longueur**.*

Que pensez-vous de la méthode 3 ?

- *A-t-on le droit de tourner le gabarit en L ?*

Pourquoi est-ce possible ? Que remarque-t-on sur les grands bords du L ? Ils sont de même longueur.

***Comment peut-on le vérifier** ? → le placer dans la figure modèle et le tourner. Comparer la longueur des côtés.*

- *Que remarque-t-on sur les coins du L ? Ce sont des angles droits. Il est donc possible de tourner le gabarit pour reporter l'angle droit.*

***Comment peut-on le vérifier ?** → le placer dans la figure modèle et le tourner. Constater que les angles se superposent.*

A-t-on le droit de prolonger ? oui…

→ Phase 5 : synthèse

 *« Que fallait-il faire pour réussir à tracer cette figure ? »*

 *Réponses attendues :*

1 - Tracer le contour d'un gabarit

2 - Compléter la figure avec l'autre gabarit : bien placer les côtés bord à bord, les faire coïncider, et tracer les côtés qui manquent.

ou :

1 - Tracer le contour du gabarit en L

2 - Tourner le gabarit

3 - Prolonger pour tracer les côtés qui manquent.

→ Phase 6 : institutionnalisation

 **Qu'a-t-on appris à « faire » aujourd'hui pour réussir à tracer la figure ?**

 **Comment bien tracer une figure avec les outils ?**

 On peut :

→ Tracer le contour des gabarits

→ Faire coïncider les côtés tracés et les bords des gabarits

→ Prolonger des côtés

→ Trouver des sommets à l'intersection des deux traits prolongés

→ …

 *Écrire les propos des élèves sur le tableau, en réaliser un référent collectif qui pourra être complété lors de la séance d'entrainement.*

8. ANNEXE 5 : DOCUMENT « B » DONNÉ AUX PARTICIPANTS

Question B

Consigne : À partir de ce document, repérer les gestes professionnels mis en œuvre par Vanessa

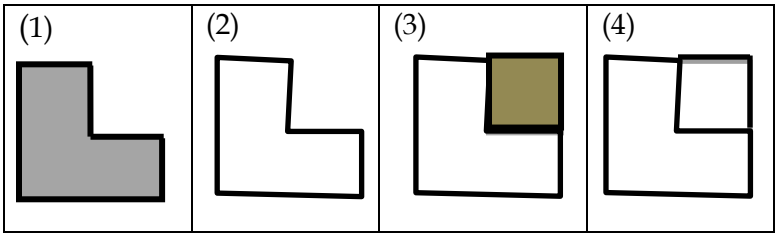
	Épisodes	Gestes professionnels
	Phase 1 : rappel	
2'47	(Les enfants sont assis devant le tableau et ils ont leur ardoise.) ***Étape 1 : rappel sur les formes vues dans la figure*** *V* : (montre ce qu'elle a affiché au tableau : des gabarits et un référent collectif réalisé lors de la séance précédente) **Pour recomposer une figure avec des gabarits, on peut : les juxtaposer ou les superposer**  *- Je vous mets là parce que la figure est assez petite pour ceux du fond.* *- Cette affiche est au tableau depuis une semaine vous l'avez regardée ?* Vous vous souvenez de ce qu'on a fait la semaine dernière ? *-La semaine dernière on a travaillé avec cette figure.* *-Vous vous souvenez qu'il y avait plusieurs morceaux, que vous aviez vu plusieurs morceaux dedans ?* -Alors sur votre ardoise *vous allez m'écrire les différentes formes.* *E : On peut faire un dessin ?* *- Non je n'ai pas dit de les dessiner, j'ai demandé d'écrire le nom des formes que l'on avait utilisées.* *- Allez c'est parti !* *- Non je n'ai pas dit de les dessiner, écrire le nom des formes que l'on avait utilisées.* *- Si tu observes cette figure… vous aviez reconnu des formes.* *… (temps d'écriture des réponses sur l'ardoise enlevé du montage vidéo)* *V : Stop on ferme le Velléda.* - *Vous me montrez vos ardoises ?* *V observe les ardoises : ok, …* (Elle voit qu'un élève a écrit le mot « gabarit ») *-Tu as écrit un mot en plus, ce n'est pas une forme mais il m'intéresse ce mot.* *-D'accord, carré, carré, carré. Ok.* -Mélina, *pose ton ardoise et vient nous en montrer une*	

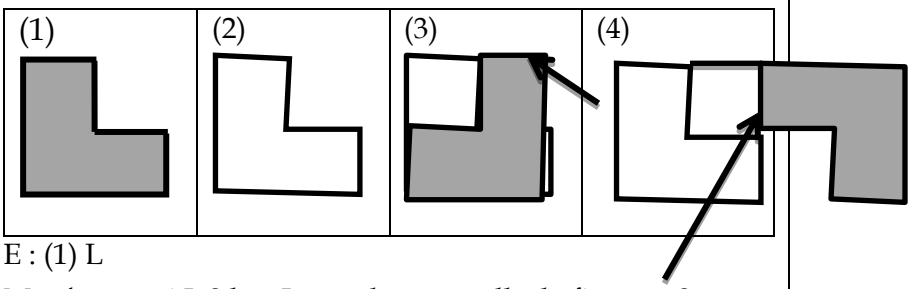
4′ 4′34	(Mélina pointe une forme de la figure représentée sur le référent collectif : le petit carré) *V : Maël, à toi* (Maël pointe sur la figure collective et formule : le grand carré) *Et puis ? Le « L »* *V : Xélia vient nous montrer le carré sur la figure collective.* (Vanessa amène alors Xélia à faire le contour avec son doigt.) *V : Qu'est-ce que tu as fait ?* *Xélia : Un carré.* (Vanessa interroge alors l'élève qui avait écrit un mot autre qu'un nom de forme) *V : Et toi tu m'as écrit quoi comme mot ?* *E : un gabarit.* V : Alors lequel s'appelle un gabarit ? *viens montrer un peu parmi ceux qui sont à côté* *E : montre le gabarit en L* *V : donc ça pour toi c'est un gabarit. Et alors les autres ?* *E : un carré* *<u>Vanessa parle à Magali :</u>* *V à M :* C'est quoi un gabarit ? Hé oui… *M à V : Et voilà… débrouille toi…* *V à M : comme quoi, gabarit n'était pas passé…* *V : regardez un petit peu.* (montre le gabarit en forme de L) *ça c'est un gabarit.* *V : Alors celui-ci c'est quoi ?* (montre le deuxième gabarit en forme de L) *E : un gabarit* *Et ça c'est quoi ?* (montre le gabarit de grand carré) *E : un carré / un gabarit* *V : j'ai deux réponses.* *E : un gabarit* *V : et ça ?* (montre le gabarit de petit carré) *E : un gabarit* *V : alors tout à l'heure, quelqu'un m'a dit que c'était un carré. Alors c'est quoi un gabarit ?* *E : un gabarit ça sert s'il y a un angle droit* *V : hou là… dans quoi je suis partie...* *V : à quoi ça va servir un gabarit ?* *E : à voir où sont les angles droits* *V : pour toi c'est pour les angles droits.* V : Bon on va voir tout à l'heure à quoi ça va servir un gabarit Vous le retenez dans votre tête le mot ? On va voir tout à l'heure. Regardez ces deux figures là. (elle montre le référent collectif)	

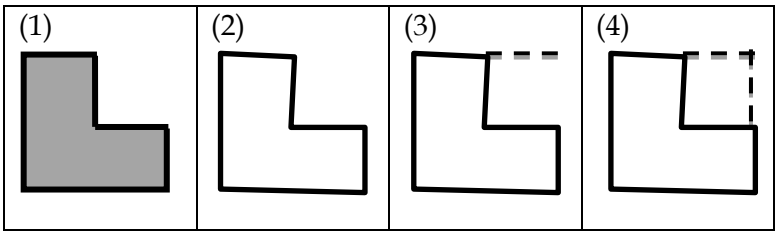
5'	E : ce n'est pas les mêmes V : ce n'est pas les mêmes ? pourquoi ? E : il manque le petit carré (sur le modèle de figure avec juxtaposition, les formes ont la même couleur, l'élève ne voit pas le petit carré) V : est ce qu'il manque le petit carré ? Qu'est-ce qu'on avait fait pour avoir ça ? **<u>Étape 2 : rappel sur les actions nouvelles réalisées avec les gabarits.</u>** V : On avait fait des choses, on avait appris deux nouveaux mots. Chut… je ne veux pas les entendre. E : tu as dit quoi ? V : Avec les gabarits, on avait fait des choses, on les avait mis ensemble, on a fait un assemblage, c'est vrai. Mais on les avait assemblés d'une certaine manière, est ce que vous vous souvenez ? Ne dites pas les mots vous allez les écrire. Qui se souvient des deux mots quand on avait mis les gabarits ensemble, d'une certaine manière, vous vous souvenez que vous les avez manipulés ? On vous avait demandé de refaire la figure avec des gabarits, vous aviez tout dans une pochette, vous vous souvenez ? on vous avait donné deux mots Il y avait deux façons différentes de les assembler. E : … V : tu les écris. (remontre la pochette avec les gabarits) …… *(temps d'écriture des réponses sur l'ardoise enlevé du montage vidéo)* V : allez montrez-moi vos ardoises (V lit ce qui était écrit sur les ardoises)	
6'30	V : Jordan, le mot assembler je l'avais dit, on a pris les gabarits et on les a assemblés. Et l'autre mot que tu as écrit ? E : superposer V : allez tu as les gabarits au tableau, viens montrer comment tu as superposé. E : j'ai pris le truc là (montre le petit carré) et je l'ai mis sur ça (montre le grand carré) V : répète à voix haute et réalise l'assemblage. Comme ça. Et tu obtenais cette figure-là ? E : V : fais-le • <u>La formatrice :</u> « C'est quoi **<u>ça</u>** ? »	

7'35 *'44*	V : oui, Jordan, donne le nom. E : le carré V : le carré est comment, c'est lequel ? E : le petit carré, je l'ai superposé sur le grand carré (V enlève le cache du mot superposer sur le référent réalisé la semaine précédente.) V : et l'autre mot Camille ? Camille : juxtaposer V : allez à toi l'honneur (envoie Camille au tableau) E : et c'est quoi assemblage ? V : assembler c'est le fait de les mettre ensemble, comme un puzzle Camille : prend les gabarits, j'ai pris ça V : hé... le nom des formes, des gabarits ? C'est quoi ça ? on a dit que c'était… Camille : un « L » J'ai pris le petit carré pour le mettre à côté du « L » V : à côté, on avait dit aussi b... bord… E : bord à bord **<u>Intervention de Magali :</u>** **<u>Moi j'ai une autre remarque :</u>** M : Pourquoi est-ce qu'on peut les mettre comme ça… justement… bord à bord ? Est-ce que vous vous souvenez ? on l'avait dit aussi la semaine dernière. E : en fait si on prend le grand carré on ne peut pas le mettre bord à bord M : pourquoi ? E : parce que sinon le carré ne sera pas un carré ce sera un L M : prend le gabarit de grand carré et vient le juxtaposer au gabarit en L M : on est d'accord, si je prends le grand carré, ça ne fonctionne pas, mais avec le petit carré ça fonctionne. Pourquoi avec le petit carré ça fonctionne ? E : parce que ce n'est pas à la taille. M : qu'est ce qui n'est pas à la taille ? E : parce que ce n'est pas aligné avec le gabarit C'est les côtés qui ne sont pas pareils M : les côtés ne sont pas pareils, donc là on peut mettre le petit carré parce que les côtés sont… E : de même longueur M : de même longueur que le L (montre avec son doigt)	

	Donc on peut mettre juste à côté, juxtaposer c'est quand c'est de la même longueur V : d'accord : on peut superposer ou juxtaposer	
10'22	***Phase 2 :*** ***Présentation de l'activité***	
10'22	V : On va vous donner une feuille On va vous demander de reproduire cette figure, je ne sais pas si c'est facile. Mais attention, vous allez avoir un choix Vous allez devoir trouver 3 façons de le faire, 3 méthodes. Une méthode où vous allez utiliser ce gabarit et celui-ci. (montre le gabarit en L et le gabarit de petit carré) D'accord ? jusque-là ça va ? Et deux méthodes avec seulement ça. (Montre le gabarit en L)	
11'40	***Phase 3 :*** ***Recherche***	
11'40	V : on est quand même gentil vous avez le modèle devant les yeux… *V observe ses élèves et interagit avec plusieurs d'entre eux* -Je demande de la reproduire… Élève 1 : - Ecoute moi… il n'y a pas de je n'y arrive pas, tu essayes… on est là pour apprendre, tu les avais posés tout à l'heure -comment tu vas la reproduire ? tu sais ce que ça veut dire reproduire ? -C'est comme dessiner. Comment tu vas faire pour la dessiner ? vas-y. Élève 2 : -Montre-moi comment tu as fait -D'accord. -Ok, est ce que tu as la même figure ? non -Qu'est-ce que tu pourrais faire pour avoir la même ? ok Élève 2 suite : -tu as utilisé le gabarit en L et le petit carré. Maintenant j'en veux deux où tu n'utilises que ça (elle parle ici du gabarit en L). Mais attention tu dois trouver cette figure-là. Vas-y… Si je te le demande, c'est qu'on peut… ***<u>Vanessa sollicite la formatrice.</u>*** *Elle a observé une élève qui a fait le contour du gabarit en L, puis, n'ayant pas d'autre outil, a prolongé à la main pour finir le tracé du grand carré.* *Elle demande à l'élève de montrer à nouveau comment elle a fait et demande si elle peut utiliser cette procédure (non anticipée*	

	dans la fiche de prèp) lors de la mise en commun pour amener l'action de prolonger. La formatrice répond que « oui ».	
13'53	***Phase 4 : Mise en commun***	
13'53 **14'**	*Remarque 1 : Lors de la séance 1, à la demande de Vanessa, c'est la formatrice qui avait effectué la mise en œuvre de la mise en commun, fait argumenter les élèves.* *Remarque 2 : Plusieurs élèves ont reproduit leur figure sur le tableau, pendant la phase de recherche, essentiellement sélectionnés par Magali, enseignante maitre supplémentaire.* V demande en aparté à M : tu fais la mise en commun ? M : non on la fait à deux. Tout à l'heure avec Mme W on l'a fait à deux donc là on la fait à deux aussi. C'est plus efficace à deux (rires) V : d'accord… vas-y… (s'éclipse malgré tout…) M : on va regarder comment vous avez fait pour tracer ce qu'on vous a demandé de tracer, la figure modèle. On va commencer par Mathéo. Tu viens Mathéo ? tu vas expliquer aux copains comment tu as fait. Mathéo se rend au tableau.  M : qu'est-ce que tu as pris pour tracer la première ? E : j'ai pris le L à l'envers, je l'ai mis comme ça (1), j'ai fait le contour. (2) Après j'ai pris le carré, je l'ai mis là. (3) M : fais-le avec ton doigt, montre avec ton doigt comment tu as tracé. E : Montre qu'il a tracé les deux petits côtés manquants (4) M : après, comment on appelle quand on remet le petit carré comme ça juste à côté ? E : j'ai juxtaposé M : il a juxtaposé le petit carré avec le L Et après tu as tracé… qu'est-ce que tu as tracé… (M montre avec son doigt les côtés du carré : il « mime » les tracés effectués) … Sofiane ? qu'est-ce que tu as tracé là ? (Sofiane ne répond pas) M : comment est-ce que ça s'appelle ce qu'il a tracé là ? Il a terminé le grand carré, mais comment ça s'appelle (remontre les petits côtés) Une partie du contour, ou bien comment on peut appeler	

	ça ? un… le contour, une partie car on n'a tracé qu'une partie du contour Et ça, ça s'appelle comment (montre à nouveau successivement deux côtés du petit carré avec son doigt) E : un angle droit M : non, ça… je passe là… qu'est-ce que c'est ça ? E : un trait E : un côté M (soulagée qu'un élève formule enfin le mot) Et là, c'est aussi un… Donc il a tracé les deux côtés qui manquent. Première façon de faire.	
16'27	M : Deuxième façon de Mathéo aussi. Il va rester au tableau et va nous montrer. (Magali lui donne le gabarit en forme de L)  E : (1) L M : c'est quoi L ? le « L » ou le mot « elle, la figure » ? E : le L à l'envers J'ai fait… M : tu as tracé le… qu'est-ce que tu as tracé ? Comme la première en fait… tu as fait la même chose pour l'instant. Tu n'avais que le « L » Qu'est-ce que tu as tracé ? (Magali mime le tracé du contour avec son doigt, (2)) On l'aide ? il a tracé le contour du L. Voilà. Après qu'est-ce que tu as fait ? E : après je l'ai enlevé, j'ai pris le L et j'ai fait comme ça. (montre qu'il a pivoté le gabarit en L (3)) M : comment on appelle ça ? E : … M : tu ne sais plus ? tu as fait comme ça ? M : Tu ne sais plus (Magali reprend la main, montre avec son doigt que Mathéo a utilisé les petits côtés du L pour terminer le tracé) Qu'est-ce qu'il a utilisé ? Il a utilisé le L. Le côté du L. Lequel de côté ? E : le côté du L M : le côté du L qui était de même…	

	E : … M : de même longueur	
18'50	V : Mélina a fait d'une autre façon. Tu viens au tableau, tu prends le L bleu et tu montres ce que tu as fait.  E : En fait, j'ai fait le contour du L (1) Après je me souviens j'ai tracé. (montre avec son doigt qu'elle a prolongé à main levé chacun des deux côtés manquants, séparément, en prenant appui sur le gabarit en L pour commencer (3 et 4)) M : sans bouger le L ? E : oui. V : qu'est-ce qu'elle a fait avec son doigt ? le trait Qu'est-ce qu'elle a fait ? Qu'est-ce qu'on peut dire ? qu'est-ce qu'on peut utiliser comme mot ? Elle a tracé ? Elle a fait au hasard comme ça des traits ? E : Elle a fait un côté V : refais-le. (demande à l'élève de remontrer son geste) remontre avec ton doigt ce que tu as fait. (L'élève remontre le tracé du contour du L) Voilà, ça, c'est ce que tu as fait avec le L Et après pour terminer la figure ? Voilà refais le. (l'élève montre à nouveau son geste pour prolonger les côtés manquants à main levée) Qu'est-ce qu'on peut dire ? on l'avait utilisé en plus ce mot la semaine dernière. E : elle a terminé la longueur V : elle a terminé la longueur, oui… c'est une façon de le dire… E : elle a terminé le carré V : elle a terminé le carré Montre la figure. Regardez, il y avait déjà un trait ici, qu'est-ce qu'elle a fait ? E : elle a continué V : un autre mot, elle l'a … (désespérée que le mot ne vienne pas), ça commence par un « p », elle a pro… E : elle a prolongé. V : on peut utiliser une règle. Remarque : La séance se terminera sur cette phase par	

	manque de temps.	

9. ANNEXE 6 : LE TABLEAU DE VIGILANCE DIDACTIQUE COMPLÉTÉ POUR VANESSA

❖ **Lors de l'observation des pratiques ordinaires**
✓ **Lors des observations sur le compagnonnage et la séance finale conçue**

N	Critères	Pendant-Degré 1	Pendant-Degré 2	Pendant-Degré 3
1	Proposition de problèmes consistants et aménagement de temps de recherche -Des problèmes mathématiques consistants	❖ Une à plusieurs démarches sont possibles, liées aux différentes connaissances mobilisées. (Mais ces démarches ne sont pas identifiées par l'enseignante)	✓ Degré 1 + ✓ Au moins une des démarches permet de répondre au besoin de faire émerger une <u>nouvelle notion</u>.	☐ Degré 1 ☐ Degré 2 + ☐ La situation proposée provoque la proposition de démarches erronées permettant de faire argumenter les élèves et faire acquérir la connaissance visée.
1A	- Des élèves engagés dans une recherche effective pendant un temps significatif -Aménagement de temps de recherche A- Lors de la « <u>Recherche-Analyse</u> » de la figure complexe proposée.	Lors du processus de dévolution : ❖ L'enseignant interroge directement ses élèves. Pas de temps significatif laissé à chaque élève pour chercher.	Lors du Processus de dévolution : ✓ L'enseignant accorde un temps individuel à chaque élève pour s'approprier le problème et chercher avant d'interroger	Lors du Processus de dévolution : ☐ Degré 2 + ☐ L'ardoise peut être utilisée pour recueillir les premiers éléments de réponses de chacun. *(Aménagement du temps individuel de recherche grâce au matériel « ardoise »)*
1B	-B : Des aides « techniques » apportées par le professeur sans réduction des exigences Lors de la « Recherche-Analyse » de la figure complexe proposée.	Lors du processus de dévolution : ☐ « Analyse perceptive de la figure complexe, de manière collective » L'enseignant met à disposition des élèves la figure à analyser de <u>manière collective</u>. Elle est représentée sur le tableau. *(Effet : Les élèves ne disposent que du modèle collectif de la figure sur le tableau. Ils ne peuvent pas agir sur la figure.)*	Lors du processus de dévolution : ☐ Degré 1 + ☐ « Analyse perceptive de la figure complexe, de manière individuelle » L'enseignant met à disposition de chaque élève la figure à analyser. Il peut demander à l'élève d'écrire sur son ardoise ce qu'il voit. ✓ <u>L'enseignant explicite ses attentes</u> :	Lors du processus de dévolution : ✓ Degré 1 ✓ Degré 2 ✓ « Analyse instrumentée de la figure » Degré 2 +L'enseignant met également à disposition des élèves <u>les outils/gabarits</u> proposés pour la restaurer. ☐ <u>L'enseignant explicite ses attentes :</u> analyser la figure modèle, l'amorce, avec les gabarits. C'est-à-dire les comparer : quels

			observer, analyser la figure, c'est-à-dire : dire ce que l'on « voit » sur cette figure. *Effet : Chaque élève dispose de la figure et peut « agir librement sur cette dernière pour l'analyser ».*	sont les points communs, les différences ? *Effet : Chaque élève dispose de la figure, l'amorce, et peut agir sur ces dernières grâce aux outils/gabarits fournis pour une recherche-analyse-instrumentée préparatoire à la restauration.*
1C	- Des élèves engagés dans une recherche effective pendant un temps significatif - Aménagement de temps de recherche C - Lors de la « Recherche-Restauration de la figure proposée »	❖ L'enseignant s'accorde un temps en de début de recherche pour observer les procédures des élèves <u>sans intervenir.</u> *Les élèves sont engagés dans une recherche effective pendant un temps leur permettant de trouver <u>au moins une procédure</u>.*	✓ Degré 1 + ✓ Il précise qu'il y a <u>plusieurs solutions possibles</u>. *(Aménagement du temps de recherche lié au nombre de solutions possibles, utile pour gérer les plus performants mais aussi pour inciter à trouver d'autres stratégies…)* *Les élèves sont engagés dans une recherche effective pendant un temps significatif leur permettant de trouver <u>plusieurs procédures</u>*	Mise en œuvre du processus de régulation ✓ <u>Degré 1 +</u> ✓ <u>Degré 2 +</u> ✓ <u>Après un premier temps d'observation, (degré 2) l'enseignant s'autorise à intervenir</u> pour réguler, à stopper la recherche afin de repréciser la consigne, éclaircir des éléments, faire partager des premiers éléments de réponse… dans le but de recadrer et <u>relancer la recherche vers l'objectif visé.</u> *(Aménagement lié à l'interaction de l'enseignant avec le groupe classe, la/les régulation(s) effectuée(s))*
2	Explicitation des procédures - Il s'agit de la place laissée aux élèves et à leurs productions effectives dans les moments de mise en commun des réponses, de validation de celles-ci et d'explicitation des procédures.	Maintenir ses exigences	Maintenir ses exigences	Maintenir ses exigences
2A	A- Explicitation des procédures <u>pendant la phase de recherche</u>.	❖ L'enseignant observe, lit, interprète les productions des élèves. ❖ L'enseignant individualise son aide, guide pour aider l'élève à réussir.	✓ Degré 1 ✓ Pour une interprétation plus juste, l'enseignant fait **<u>expliciter</u>** des procédures par les élèves : « Comment as-tu fait ? » et veille à faire employer un vocabulaire géométrique précis.	Mise en œuvre du processus de régulation ☐ Degré 1 ☐ Degré 2 ☐ L'enseignant ajuste ses décisions : régule. ☐ L'enseignant observe et fait **<u>justifier</u>** des procédures qu'il a repérées par les élèves.

			L'élève verbalise, met des mots géométriques sur sa procédure.	☐ L'enseignant, par son questionnement, amène l'élève, à faire des liens entre ce qu'il fait et les propriétés géométriques qu'il utilise, ou sur lesquelles il s'appuie. *L'élève précise son raisonnement, le reformule en utilisant le vocabulaire et les propriétés géométriques appropriés.* (But : faire apparaître le savoir mobilisé, réinvesti, en construction, visé…)
2B	B : Explicitation des procédures pendant la phase de mise en commun.	❖ L'enseignant envoie des élèves volontaires exposer leurs procédures collectivement. ❖ Les procédures exposées sont différentes mais ne sont pas sélectionnées selon un objectif d'apprentissage précis (n'ont pas été anticipées en amont).	✓ L'enseignant sélectionne les procédures à présenter lors de la mise en commun, selon l'objectif visé. ✓ Les élèves sélectionnés reproduisent leur procédure sur le tableau mais la verbalisation est faite par l'enseignant.	☐ L'enseignant sélectionne les procédures à faire expliciter selon les savoirs mobilisés, le savoir lié à l'objectif visé. ☐ L'enseignant prend appui sur les procédures erronées pour faire argumenter les élèves et faire émerger le savoir visé. ☐ Les élèves sélectionnés qui verbalisent leurs procédures. ☐ Les élèves sont amenés à valider les procédures présentées, à argumenter.
3	Hiérarchisation des procédures et synthèse - Se caractérise par une hiérarchisation des productions des élèves et l'existence de phases de synthèse contextualisées -Hiérarchisation selon plusieurs facteurs : efficacité et validité de la procédure, économie en temps de résolution, nature et degré d'expertise des savoirs mobilisés	❖ L'enseignant effectue une synthèse contextualisée sur ce qui a été fait sur la séance. ☐ L'enseignant effectue une synthèse contextualisée sur les critères de réussite propres à la situation proposée. ☐ L'enseignant effectue une synthèse contextualisée en hiérarchisant selon la validité de la procédure.	❖ L'enseignant effectue une synthèse contextualisée en hiérarchisant les procédures selon la nature et le degré d'expertise des actions mobilisées	☐ L'enseignant effectue une synthèse contextualisée en hiérarchisant les procédures selon la nature et le degré d'expertise des savoirs mobilisés. ☐ Il met en lien les actions et les notions mobilisées.
4	Institutionnalisation - Institutionnalisation	Début de séance : ❖ La réactivation des connaissances est centrée sur les	Début de séance : ☐ Degré 1	Début de séance : ☐ La réactivation des connaissances est ciblée sur les actions et les notions

	des savoirs ou méthodes en jeu - Décontextualisation et dépersonnalisation - Réorganisation des savoirs notamment en termes d'ancrage du nouveau dans l'ancien	actions réalisées, les notions apprises pour restaurer une figure lors des séances précédentes. ❖ (pas de sélection) <u>Fin de séance :</u> ❖ Absence d'institutionnalisation.	✓ <u>Fin de séance :</u> ✓ L'institutionnalisation est centrée sur les <u>méthodes</u> en jeu. ✓ La décontextualisation est réalisée par une déclinaison en termes de « savoir-faire ».	apprises pour restaurer une figure, à mobiliser sur la séance. (rappel de l'ancien) <u>Fin de séance :</u> ☐ L'institutionnalisation est centrée <u>sur les liens entre les méthodes et les savoirs en jeu.</u> ✓ L'enseignant décontextualise et réorganise les savoirs notamment en termes d'ancrage du nouveau dans l'ancien. ☐ Réalisation d'un référent collectif. (en vue de concevoir une trace écrite par la suite)

ATELIER A14

ENSEIGNER LES NOMBRES COMME DES 'REPRÉSENTATIONS DE LA NUMÉROSITÉ'

Alain MERCIER
Professeur émérite
Institut Français de l'Education, ENS-Lyon
alain.mercier@ens-lyon.fr

Serge Quilio
MCF, ESPE de Nice
Laboratoire (éventuellement)
serge.quilio@gmail.com

Résumé

Le texte rend compte des apports faits à un atelier. Il présente rapidement la question des artefacts permettant aux professeurs de « montrer » aux élèves ce qu'ils doivent voir. Ces artefacts sont supposés être plus simples que le réel auquel ils se substituent. Cependant, le travail collaboratif outillé d'une observation systématique des difficultés rencontrées montre un problème récurrent des élèves dans l'usage de la « ligne des nombres », en particulier dans sa version graduée. Les participants, confrontés aux observations rapportées, confirment le problème et l'animateur apporte alors des éléments d'analyse de la transposition qui ont conduit certains acteurs du projet ACE-ARITHMECOLE à abandonner l'artefact « ligne graduée des nombres » pour *la représentation des grandeurs par des segments non gradués associés à un nombre qui est la mesure de cette grandeur*. Cela permet en effet de modéliser des systèmes de relations élémentaires correspondant à ce que l'on appelle *des équations arithmétiques*.

I - LES REPRÉSENTATIONS DE LA NUMÉROSITE SONT DES ARTEFACTS

L'atelier vise à montrer le choix didactique d'enseigner les nombres comme des représentations symboliques de la numérosité des collections. Il s'agit de permettre aux élèves, dès le début du CP, d'écrire *des relations entre grandeurs mesurées*, qui représentent des comparaisons de collections constituées pour être a priori incomparables : files de cubes de couleurs variables, doigts ou dés, dés ou tours. Il s'agit de faire comprendre que le mesurage conduit à nommer ces objets par leur propriété commune, *la numérosité* : 3 (doigts) + 4 (doigts) > 6 (points). Les files de cubes 2 (rouges) + 3 (bleus) = 1 (vert) + 3 (bleus) + 1 (jaune) conduisent à la comparaison immédiate des objets représentés à la fois par une longueur et par un nombre. Le professeur organise enfin le passage rapide à la représentation de toute grandeur par un segment (une longueur) en même temps que par une somme.
Ces représentations sont *des artefacts* dont nous expérimentons les propriétés *d'objets calculables* lorsqu'ils permettent d'écrire des équations arithmétiques modélisant des situations. L'atelier rend compte de ce choix de transposition, mis en place depuis 2008 dans un « Lieu d'Education Associé » de l'Institut Français de l'Education puis dans une centaine d'écoles.

L'atelier est organisé en trois temps.

- Le problème. Un exposé rapide permet aux participants de comprendre le choix d'enseigner au CP une pratique des nombres commençant par l'écriture d'équations arithmétiques pour rendre compte d'égalités et d'inégalités.

- L'observation. Les participants travaillent sur le visionnage d'épisodes de CP et l'observation de travaux d'élèves engagés dans ces pratiques, la confrontation de leurs interprétations (en groupes de 4 ou 5), l'identification collective des problèmes didactiques posés par le choix initial.

- L'analyse. Un travail collectif des participants, visant à imaginer une suite pour le CE, à confronter aux choix qui ont été réalisés dans les classes impliquées dans le projet et aux observations qui en ont résulté.

II - LES PROBLÈMES POSÉS PAR DIVERSES REPRÉSENTATIONS

Certains travaux en sciences cognitives et en didactique ont porté sur les processus d'acquisition des nombres comme objet culturel permettant de rendre compte de « la numérosité » des « collections » autrement dit, de la mesure des quantités discrètes. Ce faisant, ils ont retrouvé les savoirs d'expérience des acteurs de l'enseignement avant la réforme moderniste des années 1970-80 : les nombres sont des mesures, et les ordres de grandeur d'un nombre correspondent donc « tout naturellement » aux ordres de grandeur des chiffres dans une numération décimale de position : ce que Tempier (2010) appelle les *unités de compte*. Mais il s'avère que l'introduction de cette idée n'est pas simple. Car la notion d'unité est perdue dans l'enseignement depuis le passage de la réforme moderniste des années 1970-1980 (Chevallard & Bosch, 2000), (Chevallard & Bosch, 2002) et il n'y a plus un professeur qui ait même été enseigné sur cette question. En explorant ce problème dans le cadre de nos recherches collaboratives avec les professeurs du LEA en réseau « École Saint Charles » et le projet ACE[69]-ARITHMECOLE, nous avons observé une difficulté supplémentaire, liée au fait que, les nombres n'étant pas des mesures, leur représentation est celle de points de graduation sur une droite. Du coup, l'écart entre deux nombres représente un opérateur sur un ensemble de nombres ou, pour le dire comme (Vergnaud, 1990) une transformation entre deux états ; et un nombre est donc d'abord l'encodage d'un état : le nom d'un point sur une droite. Ainsi la représentation des nombres par des points de l'espace développe une vision empiriste de ces objets (il n'y a qu'à bien regarder pour les comprendre) et engendre de nombreuses difficultés, attribuées bien évidemment à la complexité du rapport entre la structure des opérations sur les états et la structure des opérations sur les transformations. Ce rapport engage à rechercher une structure de groupe pour les transformations, avec l'identification de transformations inverses, mais cela demande que les états eux mêmes soient complétés par « symétrisation » ce qui conduit bien au delà des programmes élémentaires. Nous allons tenter de revivre, en accéléré, avec les participants à cet atelier, le mouvement d'analyse vécu entre professeurs et chercheurs engagés dans une collaboration de longue durée. Nous ne donnerons donc pas les transcriptions des épisodes filmés, mais seulement trois fiches d'observation qui sont pour nous, exemplaires.

[69] ACE : Apprentissage et Compréhension à l'École. Le projet ne portait que le CP et n'intégrait pas le LEA Saint Charles, où nous développions nos propres propositions. Il regroupait des didacticiens et des équipes en Sciences Cognitives. Il s'est poursuivi au cycle 2 en organisant une collaboration plus large d'écoles des académies de Bretagne, Lille, Créteil, et Aix-Marseille, et des chercheurs travaillant en collaboration avec ces écoles, sous le nom ARITHMECOLE.

Les observations

Exemple 1

FICHE D'OBSERVATION D'UN FAIT DIDACTIQUE EN MATHEMATIQUES

Observateur : Mireille (M., Maître Formateur- Doctorante)
Conditions de l'observation

- *Lieu* : Ecole Mimet – classe CP de Chantal, professeur du jour : M.
- *Date* : 4 janvier 2017
- *Durée* approximative : 3 min
- *Matériaux* recueillis : extrait vidéo

Intitulé officiel de l'activité : module 6 Jeu des annonces avec 2 mains et 2 dés (phase écrite)

– comparaison de la mesure de la taille de deux collections

Acteurs : un élève de la classe CP + l'observateur M., en position de professeur
Matériel utilisé : ardoise

Description du fait didactique

- **Contexte, déroulement succinct**

C'est la rentrée de janvier. Les élèves reprennent le jeu des annonces avec des parties fictives proposées par M., qui provoque donc l'observation.
Il s'agit de montrer qu'une annonce est gagnante et d'engager les élèves dans un nouveau travail sur les représentations (écritures maths et schéma-ligne) pour initier un travail de comparaison d'écritures, de transformation par décomposition ou composition[70].
Pour la première partie (montrer que 5 + 2 = 6 + 1), M. laisse chercher les élèves pour voir ce qu'ils produisent. La grande majorité des élèves décomposent 2 ; les autres écrivent le résultat du calcul ; une seule élève a dessiné des points et les compte.

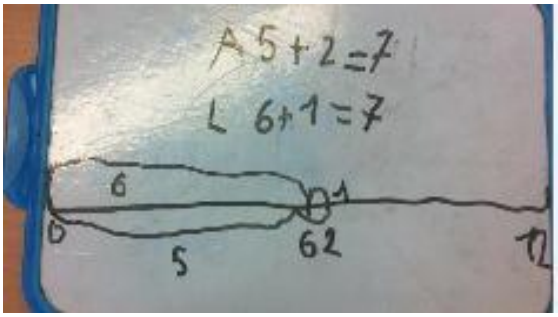


Figure 1 : Un élève compare 5 + 2 à 6 + 1, le moyen n'est pas imposé, il calcule les sommes

On voit les habitudes de la classe : utilisation du schéma-ligne avec les repères 0-6-12 (comme dans les usages de l'estimateur) et calcul du total. M. « montre » comment procéder en s'appuyant sur le schéma-ligne (allers retours entre écriture et schéma) : on peut montrer que 5 + 2 = 6 + 1[71].

[70] La technique de décomposition consiste à « Faire voir un nombre plus petit compris dans un nombre plus grand ». Par exemple, les élèves écrivent 5 = 3 + 2 pour « montrer 3 dans 5 » et ainsi, utiliser 3 dans la composition 5+6 qu'ils transforment en 3 + 2 + 6 = 3 + 8 pour montrer finalement que 5 + 6 est plus grand que 3 + 7.

[71] On peut commencer par faire voir 1 dans 2 et 5+1 c'est 6 ou par faire voir 5 dans 6 et 1+1 c'est 2 ou par faire voir 1 dans 5 et 4+2 c'est 6.

• **Épisode choisi** (en rapport à un fait qui a étonné ou questionné l'observateur) : M. voudrait *voir si les élèves s'emparent de cet « outil »* et laisse les élèves en recherche individuelle.
C'est la 3e partie : Annonce : 5+4 ; lancer 6+3
Quand M. arrive auprès de l'élève E. (de niveau moyen-bon), il a déjà décomposé 5 en 3+2. M. et l'élève E. agissent ensemble sur le schéma-ligne. Les gestes de M. sont les mêmes que lors de la première partie.

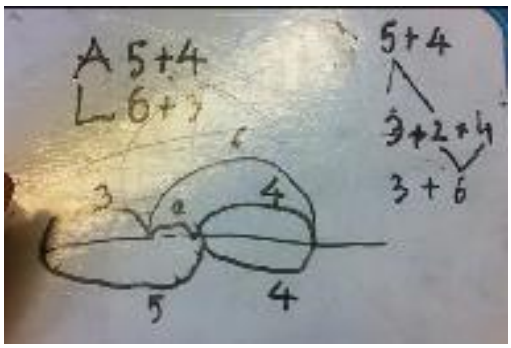


Figure 2 : La maîtresse demande d'utiliser une décomposition de 5+4 pour fabriquer un 6 et comparer à 6+3

M. demande alors à E. de « fabriquer un 6 ». Bien sûr, E. ne le « voit » pas. Pour lui 2 + 4 n'est pas 4 + 2 (car quand M. lui demande 4 + 2, il répond que ça fait 6). Et dans l'échange, M. est bien aveugle à cette ignorance de l'élève : elle le montre donc...

Nature du questionnement engendré par cette observation
Est-ce que finalement ce travail est intéressant pour les élèves ? C'est-à-dire est-ce que cela vaut le coup pour eux à ce moment là ?
D'abord je me suis aperçue qu'il y avait énormément de choses à gérer.
Les difficultés ont commencé lors de la deuxième partie (annonce 4 + 3 et lancer 6 + 1), où certains élèves avaient commencé à décomposer 4 en 2 + 2 et 3 en 2 + 1 et étaient perdus ensuite. Car aucun élève n'avait pensé que 2 + 2 + 2 c'était comme 6.



Figure 3 : La complexité du travail entrepris

Par contre, certains élèves (les plus avancés) avaient eu des stratégies différentes et étaient partis de 6 + 1 et en décomposant 6 en 3 + 3, ils avaient pu « montrer 4 » et étaient arrivés à transformer 6 + 1 en 3 + 4.

Exemple 2

FICHE D'OBSERVATION D'UN FAIT DIDACTIQUE EN MATHEMATIQUES

Observateur : Mireille (M., Maître Formateur- Doctorante)
Conditions de l'observation

- *Lieu* : école Saint - Mitre
- *Date* : 17 avril 2015
- *Durée* approximative : 1h
- *Matériaux* recueillis : photos, notes

Intitulé officiel de l'activité : création de problèmes
Acteurs : Deux classes de CE1

Description du fait didactique

- **Contexte, déroulement succinct**

Dans les deux classes, les élèves ont d'abord résolu deux problèmes (recherche du tout et recherche d'une partie) avec schéma-ligne, boîte, opération et phrase réponse (feuille photocopiée avec énoncés, schéma et boîte à compléter, ligne prévue pour écrire l'opération et ligne prévue pour écrire la phrase réponse). Correction collective. Puis création d'énoncés à partir des schéma-ligne et boîte, qui sont demandés.

- **Épisode choisi** (en rapport à un fait qui a étonné ou questionné l'observateur) : la première phase de résolution d'un « problème de tout ». *C'est la production du schéma-ligne qui interpelle.*

Dans la première classe, il n'est peut-être pas évident que des choux à la crème et des éclairs fassent partie de la catégorie « gâteaux ». Dans la 2e classe, le problème de filles et de garçons est plus familier. Est-ce cela qui expliquerait que 8 élèves (sur 21 présents) dans la première classe mais seulement 2 dans la seconde produisent encore ce type d'erreurs ?

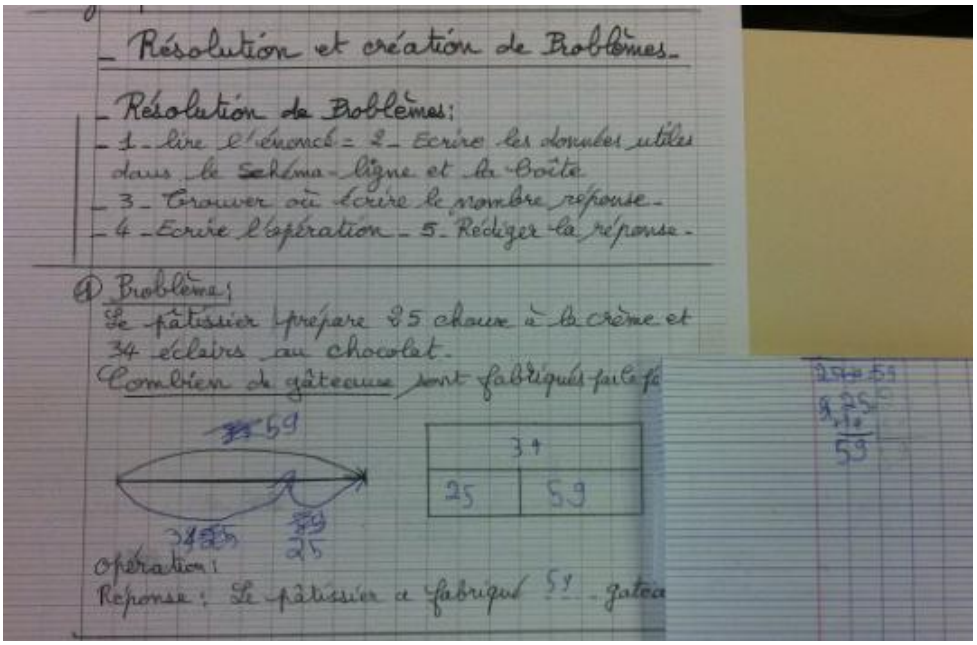


Figure 4 : Productions de la classe 1

On voit qu'au départ « 34 éclairs » est considéré comme la partie entière (c'est ensuite barré sur le schéma-ligne suite à la correction collective mais pas rectifié dans la boîte) alors que l'élève avait correctement résolu et posé avant de remplir le schéma et la boîte l'opération sur sa feuille de brouillon à côté (25 + 34 = 59 en ligne puis en colonne).

Il y a là une action massive (8 élèves dans ce cas, plus d'un tiers) : l'élève écrit les deux données de l'énoncé du problème en mettant bien le plus grand en haut (car 25 est contenu dans 34) puis le « 59 gâteaux » du résultat est inscrit dans la case vide.

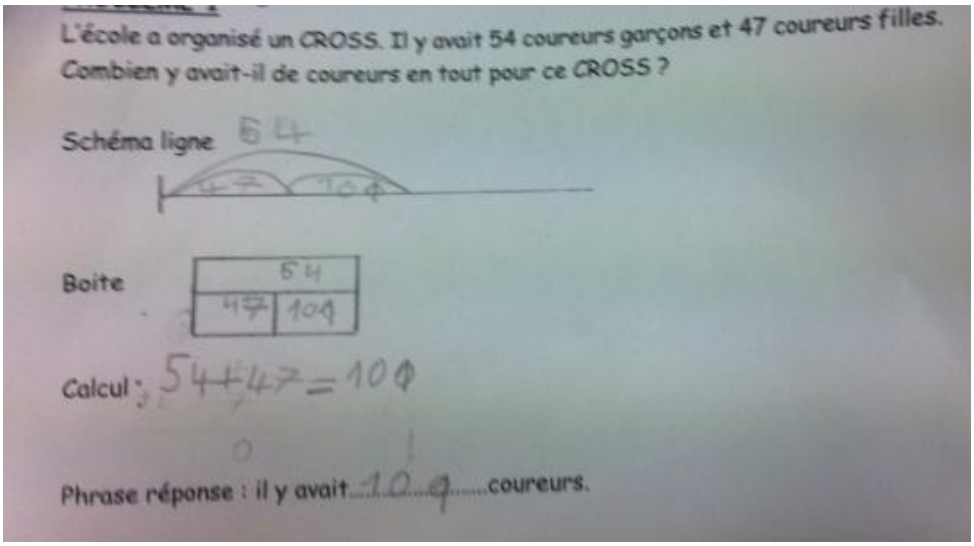


Figure 5 : Productions de la classe 2

L'erreur s'observe aussi pour deux élèves de l'autre classe, qui écrivent d'abord les deux nombres de l'énoncé avant de noter le « résultat » de l'addition dans la case de droite.
Je suis intervenue lors de la phase de correction d'abord pour m'assurer de la catégorisation (on a recherché des noms de gâteaux), puis pour « raconter » le schéma erroné en écrivant les unités « 59 gâteaux », « 25 choux à la crème », « 34 éclairs » et en disant : « 25 choux et 59 gâteaux ensemble font 34 éclairs ». Non ! Ça ne va pas !

Nature du questionnement engendré par cette observation
Je trouve préoccupant ce genre de production : les élèves trouvent le résultat correct et savent résoudre le problème mais *remplissent par contrat le schéma et la boîte*. Ces représentations ne semblent pas utiles à ces élèves. Peut-être que ces représentations devraient être celles de la réflexion de certains élèves seulement (qui en auraient besoin sous la direction du prof) avant la résolution, ou après pour argumenter éventuellement. Que les élèves s'en emparent individuellement ne serait pas à exiger.

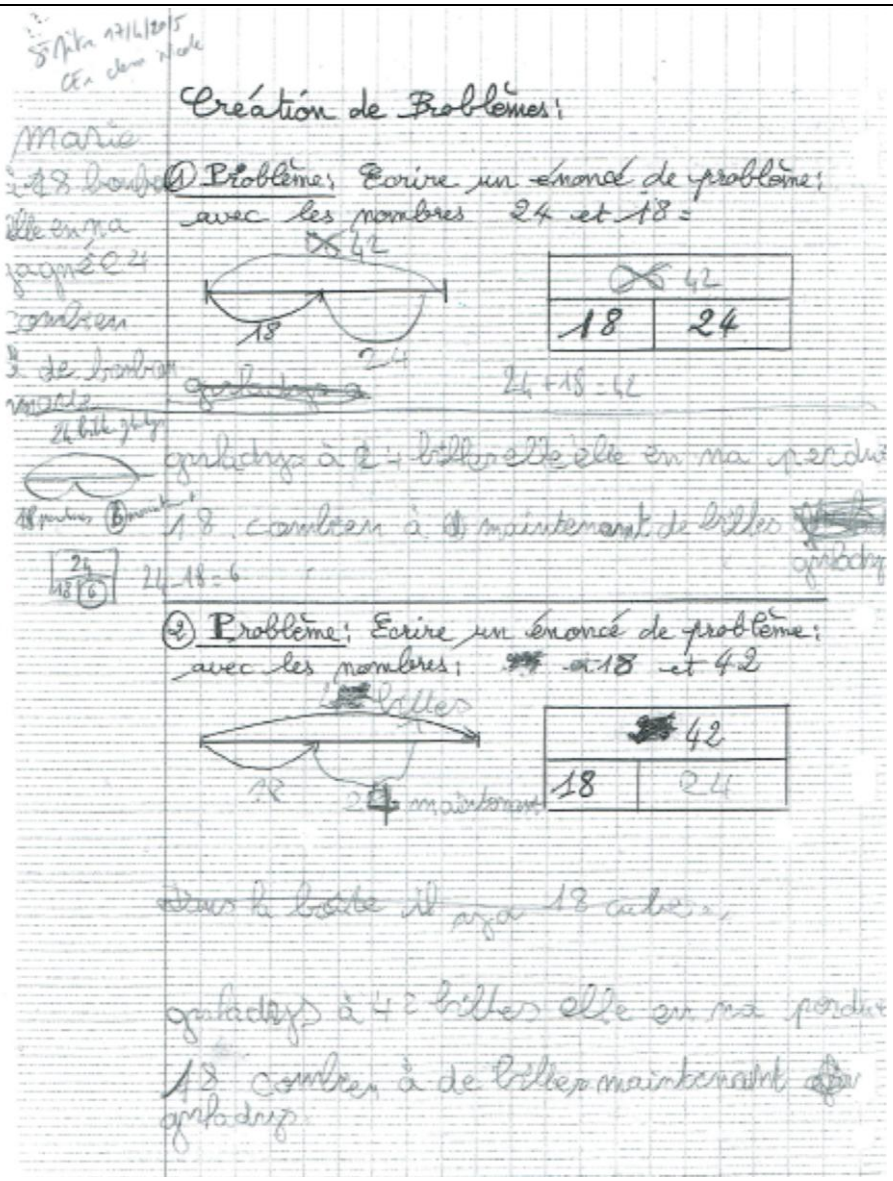


Figure 6 : des erreurs constantes dans les représentations des problèmes, pourtant créés par les élèves

Est-ce que l'utilisation systématique de ces représentations ne va pas à l'encontre de leur usage d'écrits productifs, comme on l'observe ici ?

On peut voir que, lorsque l'élève observée écrit pour elle-même les représentations du problème (elle cherche à fabriquer un énoncé), elle contrôle ce qu'elle fait. Elle part des quantités 18 et 24 (dont la différence est 06, comme on le voit calculé en marge à gauche du problème 1 et au dessus du schéma-ligne). Mais elle n'arrive pas à formuler une question. L'élève renonce donc dans un premier temps à écrire un problème de soustraction, mais comme manifestement c'est son projet, elle reprend le modèle additif obtenu au premier problème (18+24=42) pour le transformer en 42-18=24 qui donne le traitement du problème 2, avec la compréhension que le premier temps est l'avoir de 42 billes (et pas 18) ; ce qui fait que le résultat 24 est ce que Gladys a *maintenant*. Le schéma-modèle une fois posé, son interprétation en termes de succession d'états et de transformations permet le raisonnement, et la production de l'énoncé.

Exemple 3

FICHE D'OBSERVATION D'UN FAIT DIDACTIQUE EN MATHEMATIQUES

Observateur : SQ
Conditions de l'observation:

- *Lieu :* CP Gardanne
- *Date :* Novembre 2013
- *Durée* approximative : 1h
- *Matériaux* recueillis : CR Enseignante

Intitulé officiel de l'activité : Réduire des écritures additives pour former une écriture du nombre dans le système conventionnel.
Acteurs : élèves CP + prof
Matériel utilisé : Document support de l'ingénierie ACE Module 4

Description du fait didactique

- **Contexte, déroulement succinct**

Séances de jeu : Dans l'ensemble, les élèves n'ont pas eu de problème pour écrire, dans une partie fictive, une annonce à 3 termes en respectant les contraintes du jeu. J'ai cependant d'abord proposé ce travail sur l'ardoise avant que les élèves n'aient une fiche de jeu individuelle. Certains ont confondu la somme totale avec un terme de l'annonce notamment avec le 6. Le recours aux mains leur a permis de corriger leur erreur et de proposer une nouvelle annonce sans difficulté. J'ai procédé moi-même à la correction des fiches étant donné que les élèves les moins avancés ont du mal à se concentrer et repérer les erreurs de leurs camarades.
La représentation à l'aide du schéma ligné et des boîtes a été bien comprise par les élèves lors de la mise en commun.

- **Épisode observé**

Le CR du professeur signale une difficulté. *« Parties fictives : Nous avions abordé les parties fictives après les vacances (module 4) et j'avais rajouté le schéma ligné sur la fiche individuelle des élèves ce qui était un peu trop rapide, d'autant que c'était la première fois qu'ils utilisaient uniquement ce mode de représentation sans le train. Ayant rajouté le schéma ligné au dernier moment à côté des calculs, il était trop petit et il n'y en avait qu'un pour l'annonce et le lancer (représenté en jaune) ce qui élevait l'exercice à un degré de complexité trop élevé.*

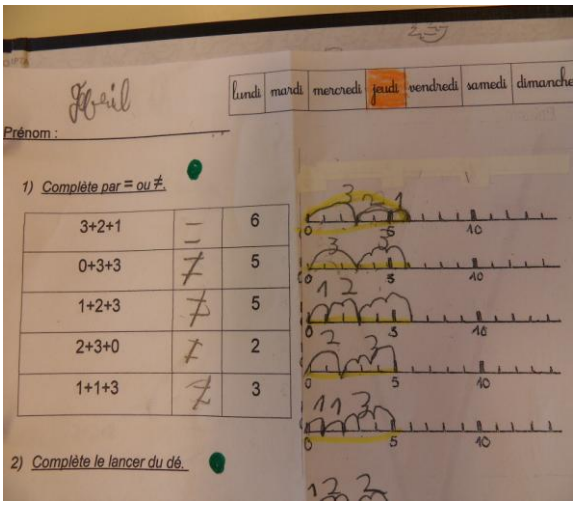


Figure 7 : le schéma ligné rajouté pose problème

Les élèves avaient bien compris les enjeux du module quant aux égalités et comparaisons d'une addition à trois termes et un nombre inférieur ou égal à 6. C'est la représentation qui leur a posé problème. L'erreur la plus fréquente a été de ne plus tenir compte du lancer du dé et de représenter un lancer systématiquement égal à l'annonce. »

« J'ai donc proposé à la séance suivante un schéma ligné « effaçable » sous pochette transparente et nous avons travaillé uniquement sur la représentation d'une annonce à plusieurs termes sur ce schéma ligné. »

Les erreurs les plus fréquentes ont été les suivantes :

- se repérer en « comptant » les traits (comptage du trait 0) au lieu des intervalles ;
- laisser un espace libre lorsque l'on trace les ponts entre les graduations (comme ci-dessous) ;
- commencer à la graduation 1 pour compter 0 (comme ici, où l'élève obtient l'égalité 0+2+4=7) »

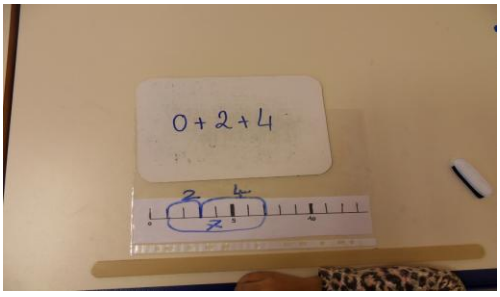


Figure 8 : Les erreurs type sur une copie…

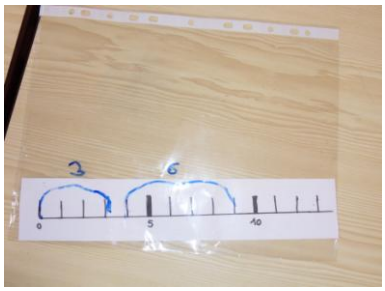


Figure 9 : Comment représenter 0, que les élèves savent pourtant manipuler par ailleurs ?

Nature du questionnement engendré par cette observation
La présence des graduations perturbe visiblement autant les élèves que le professeur (« se repérer en comptant les traits au lieu des intervalles » écrit-elle dans son compte-rendu). L'écriture additive ne représente pas une somme de mesures, le passage du calcul des trains de cubes à la droite graduée ne fonctionne pas.

Les trois observations sont choisies parmi beaucoup d'autres et données aux participants, afin de voir s'ils font le même diagnostic que les chercheurs et les professeurs qui collaborent dans le projet ACE-ARITHMECOLE autour du Léa « École Saint Charles », à Marseille. On remarque que les élèves travaillent les « compositions et décompositions » de nombres de manière à « faire voir » un nombre plus petit dans un nombre plus grand, pour libérer le nombre représentant la différence et pouvoir le composer ailleurs : un travail de type algébrique proposé dès le Cycle 2. Mais le système des « ponts » sur la ligne graduée ne fonctionne pas aisément s'il n'est pas contrôlé par la connaissance préalable des résultats qu'il est supposé démontrer.

III - DES QUESTIONS RELATIVES AUX REPRÉSENTATIONS ET À LEURS USAGES

Nous avons vu que les élèves se voyaient proposer deux types de représentations, les « schémas-ligne » et les « boites ». Ces deux formes figurent dans ACE parce qu'elles ont été proposées aux professeurs indépendamment, par les Professeurs d'ESPE et les professeurs des écoles d'un côté (les lignes) et par un psychologue de l'autre (la boite). Cependant, les deux formes posent semble-t-il une difficulté commune : leur usage contractuel en a fait perdre le sens, et elles n'aident pas les élèves à traiter « le problème » qui leur est posé ; ils le font donc par d'autres moyens. Ces formes ne deviennent pas « les modèles des systèmes étudiés » lorsqu'elles ne sont pas produites par les élèves « de leur propre mouvement ».

Deux questions doivent donc être traitées.

- Pourquoi les professeurs introduisent-ils des représentations non numériques des problèmes ?
- Comment les élèves résolvent-ils donc les problèmes et quels outils mobilisent-ils ?

Ces questions sont essentielles en didactique, parce qu'elles interrogent tous les « matériels didactiques » qui montrent la lune, tandis que les élèves regardent le matériel sans identifier ce qu'il est supposé montrer. En clair, l'enseignement cherche toujours une technique qui permettrait de dire seulement « regarde » (la réponse), plutôt que de d'engager les élèves à rencontrer une question (dans le cadre d'une situation) et à chercher des éléments de réponse (dans leurs savoirs disponibles). C'est une dérive empiriste dénoncée depuis fort longtemps, par Piaget d'abord, par Brousseau aussi bien sûr (Brousseau, 2004), et par tous les didacticiens présents à l'atelier. Pourtant il est toujours aussi difficile d'en sortir. Peut-on imaginer des formes utiles ? La question est posée, et les participants à l'atelier entrent rapidement dans le problème des professeurs et des chercheurs des projets ACE puis aujourd'hui ARITHMECOLE, en particulier ici le problème posé par l'équipe du réseau de l'Institut Français de l'Education « Léa Saint Charles », autour de Marseille.

IV - LES REPRÉSENTATIONS DOIVENT ÊTRE CALCULABLES

La question est posée depuis longtemps ; nous ferons d'abord référence aux travaux de Simon Stevin et à son *Arithmétique* (Stevin & Girard, 1625) ou « comment expédier rapidement et sans rompus tous comptes utiles aux affaires des hommes », puisque cet auteur termine son opuscule en proposant qu'une loi impose des systèmes de mesure en sous-unités et sur-unités décimales pour toutes les grandeurs. Mais la mobilisation des savoirs de cette expérience collective ou plutôt, sa reconstruction, demande que l'enseignement considère de nouveau que *les nombres sont des mesures de grandeurs* (Lebesgue, 1935). Or, les choix de transposition qui ont été produits dans les années modernistes n'ont pas été étudiés dans leurs conséquences sur ce point, sinon par (Chevallard & Bosch, 2000) ; (Chevallard & Bosch, 2002) mais surtout pour le Collège. Nous avons identifié deux types de problèmes didactiques qui proviennent pourtant de ces questions :

- Ceux qui sont relatifs au mesurage des collections, une idée qui s'évanouit lorsque les nombres (entiers naturels) sont présentés comme des « cardinaux d'ensembles » et que les décimaux ne sont ensuite qu'une « base de filtres » pour les réels (Association Française pour l'avancement des sciences, 1963) ; (Courtial, Guelfie, & Riche, 1970).
- Mais aussi ceux qui procèdent de l'introduction systématique de la distinction « état/transformation » (Vergnaud, 1990) pour les entiers naturels, qui conduit à représenter les états comme les points de graduation d'une droite et les opérateurs comme des déplacements sur cette droite (Bussi & Sun, 2018).

La représentation des grandeurs disparaît ainsi, car l'opération physique de mesurage qui consiste à porter un segment sur une graduation et à définir sa longueur comme la distance entre les graduations extrêmes ne peut plus être décrite de manière élémentaire. Nous l'observerons dans l'atelier et nous verrons comment ces phénomènes ont été identifiés, ainsi que comment nous avons proposé de changer les choix d'enseignement anachroniques.

Car la représentation analogique de toutes les grandeurs physiques par des segments de droite est une « représentation calculable » au sens de (Vergnaud, 1974), puisque c'est un ensemble d'objets (une espèce de grandeur) que l'on peut doter (comme toutes les espèces de grandeur) des mêmes opérations que les nombres (considérés comme des mesures de grandeur) : un calcul (Stevin & Girard, 1625) ; (Chevallard & Jullien, 1990) ; (Waldegg, 1999) ; (Friedelmeyer, 2001). Le calcul sur les segments (que Euclide nomme des droites) est un travail physique que chacun imagine, parce qu'il a l'expérience de l'ajout d'un objet possédant une longueur à un autre objet doté de cette même propriété. Autrement dit, chaque élève sait que les longueurs s'ajoutent, l'objet composé ayant pour longueur la somme des longueurs de chacun des éléments. Chacun sait aussi que (pour deux objets en tous cas) l'ordre des objets n'intervient pas plus que leurs propriétés supplémentaires, et peut représenter cela par un schéma qui n'a pas besoin d'être « un dessin à l'échelle » pour faire preuve, parce qu'il suffit de l'appel à l'expérience commune. Mais déjà dans les Éléments de Euclide (Vitrac, 1990), l'un des tout premiers théorèmes porte sur la construction de la somme de deux segments « à la règle et au compas ». Car Euclide limite par principe les calculs sur les segments aux opérations sur ces objets que l'on peut réaliser à l'aide de ces seuls instruments. La règle permet d'obtenir une ligne droite joignant deux points, de manière à représenter leur distance (la mesure du chemin le plus court possible) par ce segment droit, et de prolonger cette ligne autant que de besoin. Le compas permet d'orienter un segment en gardant fixe une de ses extrémités, ce qui conserve sa longueur.

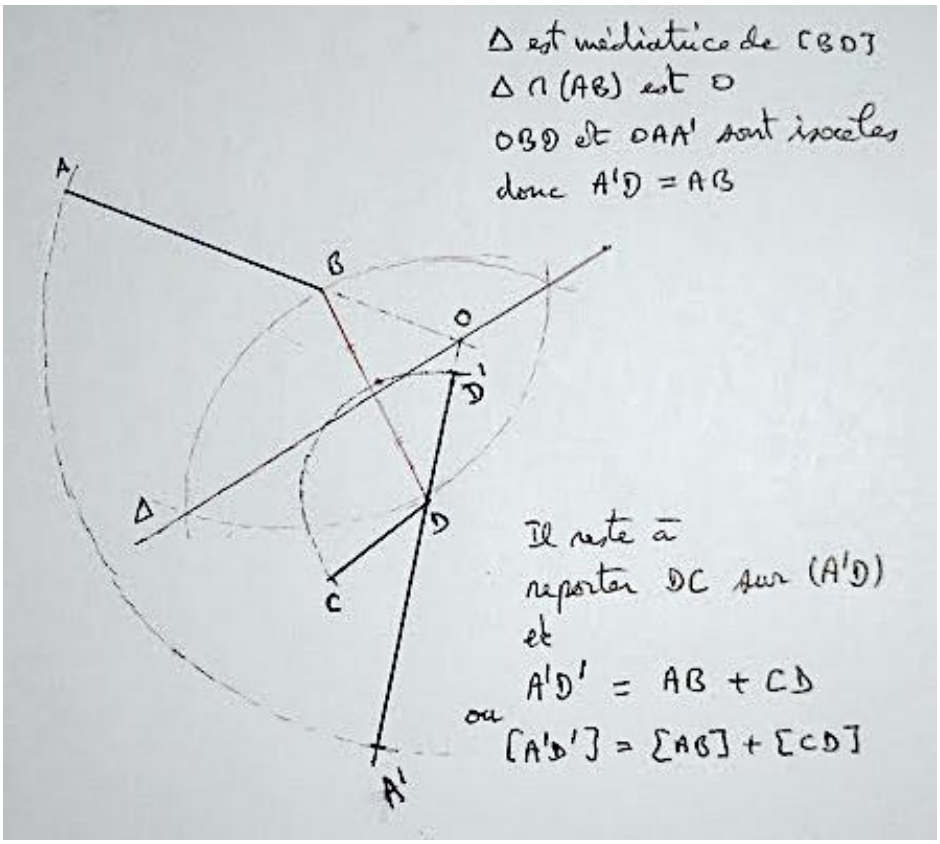


Figure 10 : Le transport d'un segment dans le prolongement d'un autre, soit le « calcul » de leur « somme »

On a ainsi *démontré* la possibilité de *transporter un segment en conservant sa longueur* : en rouge la construction de O sur la médiatrice de [BD] et la droite (AB), en bleu la construction de A' par le triangle

isocèle AOA' d'où A'D = AB puis en noir la construction de D' par le triangle isocèle CDD'. Ainsi, A'D' = AB + CD, cette expression signifiant que la somme des longueurs des segments [AB] et [CD] a été obtenue par la fabrication d'un segment somme, [A'C'].

Cependant, dans les classes les professeurs ont appris à utiliser « la droite des nombres » c'est-à-dire une droite graduée, au lieu de segments. De ce fait, les longueurs sont des différences entre deux graduations, ou des distances entre deux points, et cela fait bien inutilement problème, comme nous l'avons observé de manière récurrente jusqu'à ce que nous identifions le phénomène transpositif derrière les observations multiples.

L'objet de l'atelier était justement de faire voir des phénomènes relatifs au manque de sens de certains « artefacts à usage didactique », et en particulier, cet artefact presque universel qu'est « la droite des nombres ». Nous avons tenté d'apporter avec les participants des éléments de réponse, que nous imaginerions à partir des observations et des éléments mathématiques rendus disponibles. Nous avons fonctionné ainsi en « groupe travaillant à améliorer l'enseignement » s'intéressant à un problème des professeurs, et collaborant donc à l'amélioration de la dimension épistémologique de leur action. Dans le cas de la boite, la question n'a pas été abordée, mais elle a été instruite dans le cas de la *droite numérique graduée*, un artefact qui manifestement n'est pas la représentation convenable de « la ligne des nombres », au fondement selon certains psychologues cogniticiens des connaissances numériques. Donc, la ligne n'est pas un objet naturel mais un objet culturel, un artefact didactique, et sa graduation ne va pas de soi. Comment alors l'enseigner ? Eh bien, en tentant de laisser les élèves en explorer l'efficacité, qui n'existe pour un outil sémiotique que si ce que désigne cet outil existe et est déjà pratiqué par ailleurs. Ce « quelque chose qui est désigné », c'est l'inégalité des mesures, qui est explorée depuis le commencement du jeu des annonces. Une comparaison de grandeurs inégales dont les techniques se sont développées avec les opérations. Ainsi, la ligne numérique ne peut se développer que comme signe alternatif des opérations. Deux segments mis bout à bout forment un segment somme, sans graduation mais avec seulement la trace de leur jonction, qui permet de montrer par exemple comment chacun des deux nombres est plus petit que la somme. Mais qui permet aussi de définir une soustraction, et de bénéficier d'un modèle universel de la relation « a+b=c ». Ce modèle ne demande pas de remplacer les nombres par des lettres, mais des grandeurs par une longueur, qui est une grandeur mesurable d'un coup d'œil ou presque (par une estimation). On dispose alors d'un moyen de comparaison facile, la juxtaposition. A partir de cela, on peut décider de la ligne de conduite à tenir face à tout exercice, sachant qu'une représentation imposée peut embrouiller les choses en substituant au problème un problème nouveau.

Ces remarques invalident aussi l'artefact que l'on a appelé dans ACE « l'estimateur » <http://blog.espe-bretagne.fr/ace/?page_id=1445>. En effet, l'estimateur vise à travailler avec les élèves l'idée que la numérosité des collections d'objets est estimée par le cerveau humain en analogie avec le processus d'estimation (la comparaison sans mesure) de bien d'autres grandeurs physiques comme l'intensité d'une source lumineuse, la puissance d'une source sonore, ou la distance d'un objet. Cette compétence innée peut s'améliorer avec un entraînement adéquat, et c'est l'enjeu d'un ensemble de tâches de comparaison. Seulement, au lieu de comparer des segments selon leur longueur, ces segments se voyant ensuite attribuer un nombre ce qui entraîne à une analogie plus fine entre mesures de numérosités et mesures de longueurs, l'estimateur de ACE développe l'idée d'une ligne des nombres en faisant estimer des positions sur une ligne qui peu à peu devient « la file des entiers ».

Notre idée est en quelque sorte un développement des propositions de (Tempier, 2013) pour le CE2 qu'elle relie à celles de (Margolinas & Wozniak, 2012) pour le premier Cycle. La proposition de segments comme analogie de toute grandeur et en particulier d'abord, de la numérosité, est intéressante parce que c'est une représentation calculable et depuis Euclide au moins, ce calcul peut être démontré par une construction géométrique réglée par un système de principes déclarés. Le passage d'une telle représentation à quelque chose qui relèverait de la droite numérique relève d'une autre approche, que

nous proposons de construire bien plus tard dans la scolarité : lorsque l'on s'autorisera les nombres négatifs et la relation de Chasles. Cependant, pour que la manipulation des segments considérés pour leur longueur ne se confonde pas avec celle des distances entre points d'une droite graduée il faut plusieurs conditions :

- que les segments servent à comparer des grandeurs (ici, des numérosités) en les plaçant « en parallèle », comme lorsque l'on compare deux trains, deux lignes de cubes, deux tours de bureaux, ou généralement deux grandeurs « estimées » ;
- que les sommes de segments soient utilisées sans que les segments ne soient mesurés ni tracés à la règle, pour représenter la somme de grandeurs de manière à conserver l'idée d'estimation ;
- que ces représentations soient laissées à la libre initiative des élèves, et que le professeur qui les introduit sans y insister les fasse utiliser au tableau par des élèves d'abord, pour que leur usage ne se fasse pas « en réponse à une demande du professeur ».

On peut alors se rappeler que naguère, les plus anciens s'en souviennent, les « problèmes arithmétiques » des classes primaires de préparation au CEP et des classes primaires supérieures étaient traités par ce type de modélisation « pré-algébrique » qui aidait à résoudre certains problèmes relevant de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues. Cela demande de renoncer aux analyses des problèmes additifs en termes d'état-transformation telles que Vergnaud les a conduites dans les temps où la question était centrale, en raison de choix de transposition aujourd'hui disparus. Les remarques des participants sont complétées par les apports relatifs aux choix didactiques qui ont finalement été faits et les hypothèses sur leur efficacité (Mercier & Quilio, 2018).

V - EN CONCLUSION : UN CHOIX RADICAL EST PROPOSÉ

L'observation des difficultés récurrentes relatives au schéma fondé sur la ligne numérique et à la modélisation des problèmes par une « boite » sans signe d'opération a engagé les acteurs sur le terrain, appuyés sur l'apport théorique relatif aux opérations sur les segments, à s'engager peu à peu vers l'arrêt de l'usage des représentations graduées pour aller vers la représentation des *équations arithmétiques* par l'apposition de deux sommes de segments non gradués. Ce type de schéma permet en effet de représenter aussi bien une grandeur connue qu'une grandeur inconnue satisfaisant à une relation.

Pierre a gagné 12 euros et Jacques 33, tandis que Jean en a gagné 20. Combien Jean doit-il encore gagner pour avoir autant que Pierre et Jacques ensemble ?

I_____12_____I_____33_____I

I_____20_____I_____I

Jean a plus que Pierre, on peut donc faire voir 12 dans 20 : 12 + 8 = 20.

I_____12_____I_____8____I_____I

Jean a donc déjà 8 des 33 euros que Jacques apporte à Pierre, il lui en faut encore 33 – 8 que l'on calcule en faisant voir 8 dans 33.

I_____8____I_____I

33 = 30 + 3 = 25 + 5 + 3 = 25 + 8 donc 33 – 8 = 25, ce que Jean doit gagner encore.

Figure 11 : Un problème, sa représentation par une équation arithmétique, et des opérations sur les segments avec l'indication de leur valeur numérique. Puis, la résolution par la manipulation parallèle des deux systèmes de représentation.

Les participants se sont sans doute trop peu exprimés, faute de temps : l'atelier était donc trop ambitieux, bien que le temps prévu soit important. D'ailleurs, certains participants ont trouvé que « les didacticiens » avaient monopolisé la parole, ce qui signifie qu'il était difficile d'entrer en matière pour quelqu'un qui n'était pas habitué à ce type de raisonnement sur la transposition On le qualifie d'analyse « ascendante » parce qu'il part de l'observation d'une difficulté pour enquêter sur son origine en la cherchant dans les mathématiques qui fondent ces « objets à manipuler » ou « représentations » qui sont supposés, en classe, vivre tout naturellement et venir en aide aux élèves. Souvent ces artefacts manquent leur but, et les professeurs qui font confiance aux moyens d'enseignement qui leur sont proposés sont hélas trop souvent conduits à attribuer indûment les difficultés aux élèves.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Association Française pour l'avancement des sciences. (1963). *Colloques de calcul numérique et mathématiques appliquées tenus dans le cadre des congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences (Caen 1955, Grenoble 1960, Reims, 1961, Paris 1962)*. Service de documentation scientifique et technique de l'armement.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 241-277. Consulté à l'adresse http://id.erudit.org/iderudit/012669ar

Bussi, M. G. B., & Sun, X. H. (2018). *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades: The 23rd ICMI Study*. Springer.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2000). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, *55*, 5–32. Consulté à l'adresse http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/55/55x1.pdf

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, *59*, 43–76. Consulté à l'adresse http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/59/petitx59.pdf#page=44

Chevallard, Y., & Jullien, M. (1990). Autour de l'enseignement de la géométrie au college. *Petit x*, *27*, 41–76.

Courtial, C., Guelfie, F., & Riche, E. (1970). *Mathématiques, Classes De Seconde (2de, 2è, 2ème, 2ième, 2 È, 2 Ème, 2 Ième) - Nouveau Programme.* Paris: Hatier.

Friedelmeyer, J. P. (2001). Grandeurs et nombres: l'histoire édifiante d'un couple fécond. *Repères*, *44*, 5–1.

Lebesgue, H. (1935). Sur la mesure des grandeurs. *Enseignement Mathématique*, *34*, 176–219.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle* (de Boeck). Bruxelles. Consulté à l'adresse http://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00779683/

Mercier, A., & Quilio, S. (2018). *mathématiques élémentaires pour l'école, nombres, mesures, calculs* (Presses Universitaires de Rennes (PUR)). Rennes.

Stevin, S., & Girard, A. (1625). *L' arithmétique de Simon Stevin, revue corrigée et augmentée par Albert Girard*. Leyde: Imprimerie des Elzeviers.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire: une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Paris 7. Consulté à l'adresse http://www.theses.fr/2013PA0700XX

Vergnaud, G. (1974). calcul relationnel et représentation calculable. *Bulletin de Psychologie*, *28*, 378- 387.

Vergnaud, G. (1990). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. *Développement et fonctionnement cognitif chez l'enfant. Paris, PUF*, 261–277.

Vitrac, B. (1990). *Euclide d'Alexandrie, Les Éléments.* Presses Universitaires de France.

Waldegg, G. (1999). L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin. In *La pensée numérique* (Vol. 8-1). Peiresc: Librairie Blanchard. Consulté à l'adresse http://www.peiresc.org/beta/wp-content/uploads/2014/06/Waldegg.pdf

ATELIER A15

ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DES NOTIONS DE PERPENDICULARITÉ ET DE PARALLÉLISME EN CM1 : QUE PROPOSENT LES MANUELS ?

Claire GUILLE-BIEL WINDER
MCF, ESPE Aix-Marseille Université
ADEF (EA 4671)
claire.winder@univ-amu.fr

Édith PETITFOUR
MCF, ESPE Université Rouen Normandie
LDAR (EA 4434) Université de Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC
edith.petitfour@univ-rouen.fr

Résumé

La présence importante des manuels scolaires dans le domaine de l'édition française (Mounier et Priolet, 2015) témoigne de leur place privilégiée en tant que ressources documentaires des enseignants de l'école primaire. Très récemment, le rapport sur l'enseignement des mathématiques concluait sur la nécessité « de fournir aux enseignants un outil leur permettant un choix éclairé, au regard d'un ensemble de critères pertinents. » (Villani et Torossian, 2018, p. 57). Nous avons ainsi proposé aux participants de l'atelier de faire fonctionner un cadre d'analyse basé sur les travaux de Petitfour (2017) pour étudier des propositions d'enseignement des notions géométriques de perpendicularité et de parallélisme dans trois manuels scolaires, présents sur le marché durant l'année scolaire 2017-2018.

I - INTRODUCTION

Très récemment, un rapport parlementaire sur l'enseignement des mathématiques (Villani & Torossian, 2018) a souligné l'importance des ressources documentaires dans les activités proposées aux élèves. S'appuyant sur l'étude présentée par Mounier & Priolet (2015) lors de la conférence de consensus, qui met en évidence la place privilégiée des manuels scolaires pour les enseignants du primaire, ce rapport insiste sur la nécessité que ces manuels soient « facile[s] d'utilisation » tout en conservant « une ambition de rigueur et de qualité dans [leurs] contenus » (Villani & Torossian, 2018, p. 56). Dans cette optique, il conclut sur le besoin de fournir aux enseignants un outil leur « permettant un choix éclairé, au regard d'un ensemble de critères pertinents » (*ibid*, p. 57). S'appuyant par ailleurs sur une étude menée en Angleterre en 2017[72], ce même rapport note que l'acquisition des connaissances ainsi que leur mémorisation sont favorisées par le vécu expérimental et manipulatoire des élèves, rendant cruciale « la question du rapport que les enseignants établissent et entretiennent avec les différents matériels (…) pour la création de situations d'apprentissage pertinentes, efficientes et pour la scénarisation de séances » (*ibid*, pp. 57-58). Nous nous sommes donc penchées sur cette problématique – fournir des outils pour éclairer les choix des enseignants – en nous intéressant à un domaine des mathématiques dont l'enseignement s'appuie essentiellement sur la manipulation d'artefacts : la géométrie et, plus spécifiquement, les notions de perpendicularité et de parallélisme. La reconnaissance et l'utilisation de quelques relations géométriques dont les notions de perpendicularité et de parallélisme (MEN, 2015) est

[72] https://educationendowmentfoundation.org.uk/public/files/Publications/Campaigns/Maths/EEF_-_Maths_KS2_KS3_Guidance_A3_Recs_Poster.pdf et https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-twothree?utm_content=buffer0a206&utm_medium=social&utm_source=twitter.com&utm_campaign=buffer

en effet l'un des attendus de fin de cycle 3. Dans notre étude, nous nous intéressons aux propositions faites par les manuels scolaires dans l'environnement papier-crayon pour analyser ces relations et réaliser des tracés les mettant en jeu. Comme l'enseignement de ces deux relations apparaît en début de cycle 3 dans les programmes, nous nous sommes restreintes à l'étude de manuels de CM1.

1 Quels manuels scolaires ?

Par « manuel scolaire », nous entendons le « support pédagogique (livres ou fiches) qui doit être acquis par l'élève (lycée) ou qui est mis à sa disposition par l'établissement (école primaire et collège). » (IGEN, 1998), ce qui veut dire que quelquefois le manuel scolaire regroupe un livre-élève ainsi qu'un cahier d'exercices, voire même un répertoire de mathématiques dans lequel figurent définitions et/ou méthodes. Dans notre travail, nous nous appuyons également sur le « guide pédagogique » c'est-à-dire sur la documentation annexée au manuel scolaire et destinée au professeur des écoles.

Les manuels scolaires retenus pour cet atelier appartiennent à trois collections provenant de trois maisons d'édition différentes et connues des enseignants du primaire : « J'aime les maths » (Belin, 2016), « Maths explicites » (Hachette, 2016) et « CapMaths » (Hatier, 2016). Ces manuels, actuellement disponibles à la vente, sont tous postérieurs aux programmes scolaires de 2015 (MEN, 2015) et nous semblent refléter (tout du moins en partie) la variété de l'offre éditoriale :

- la collection « J'aime les Maths » est présentée sur le site de l'éditeur Belin[73] comme « une collection qui met en avant la manipulation, la construction des savoirs par l'élève et la liberté pédagogique de l'enseignant » ; elle organise les apprentissages « par compétences du programme » et propose des « exercices de difficulté progressive » et des « croisements interdisciplinaires » ;
- la collection « Maths explicites » se réfère à la « pédagogie explicite » qui prône un enseignement fortement guidé par l'enseignant ; les principes sur lesquels s'appuie le manuel et annoncés sur le site de l'éditeur[74] sont les suivants : « l'enseignant commence la leçon en donnant aux élèves les connaissances utiles et en expliquant la stratégie à mettre en œuvre pour acquérir une compétence » ; l' « apprentissage est basé sur la répétition ainsi que sur le *rebrassage*[75] » ; la « pratique centre l'attention des élèves sur une seule notion à la fois » ;
- la collection « CapMaths » s'appuie sur la résolution de problèmes comme enjeu et moteur des apprentissages, selon les orientations de la méthode présentés par Roland Charnay[76] ; il s'agit de « propose[r] aux élèves une première rencontre avec toute nouvelle connaissance par le biais d'une réflexion provoquée par la confrontation à une situation à la portée des élèves et qui justifie l'apprentissage de cette nouvelle connaissance, apprentissage nécessairement guidé par l'enseignant ».

2 Présentation de la méthodologie retenue

Nous considérons deux niveaux d'analyse : un niveau local, lorsque nous analysons les séances consacrées à l'enseignement des notions de perpendicularité et de parallélisme ; un niveau plus global, lorsque nous nous intéressons à l'organisation de l'enseignement de ces savoirs telle qu'elle est proposée dans le manuel.

Le niveau local d'analyse porte sur plusieurs éléments (qui seront développés dans la partie II) :

- identification des différents types de connaissances enseignées et/ou explicitées dans les manuels, en prenant appui sur le cadre d'analyse de l'action instrumentée développé par Petitfour (2017) ;

[73] https://www.belin-education.com/jaime-les-maths-manuel-cm1-0

[74] http://www.enseignants.hachette-education.com/elementaire_CM1_Mathematiques/pages/catalogue/fiche-livre/maths-explicites-cm1---livre-eleve---edition-2015-1182112.html

[75] Terme employé par l'éditeur mais non spécifique à la pédagogie explicite.

[76] http://capmaths.editions-hatier.fr/focus-sur/quelques-orientations-de-la-methode-cap-maths.

- explicitation des significations des notions perpendicularité et parallélisme abordées dans le manuel, que ce soit dans la situation introductrice, dans les traces écrites ou les institutionnalisations orales, ainsi que dans les exercices ;

- analyse d'ostensifs comme les éléments de langage (vocabulaire et expressions) proposés par le manuel et les objets sur lesquels porte l'étude.

Au niveau global, nous mettons en évidence la durée que les différents manuels prévoient de consacrer à l'étude des notions de perpendicularité et parallélisme ainsi que le moment de l'année envisageable pour ce faire. Nous distinguons également les séances dans lesquelles ces notions sont objets d'apprentissage de celles dans lesquelles elles apparaissent comme outils permettant de résoudre des problèmes ou de développer d'autres connaissances géométriques. Nous cherchons, en outre, à identifier dans l'enseignement proposé par les manuels, une articulation possible de ces deux notions entre elles (et soulignée par les programmes de 2015), voire avec d'autres notions géométriques.

3 Déroulement de l'atelier

L'objectif de cet atelier est de réaliser une analyse de l'enseignement des notions de perpendicularité et de parallélisme dans les trois manuels de CM1 cités ci-dessus. Pour répondre à la contrainte de temps liée au déroulement de l'atelier, le travail proposé est circonscrit au niveau local et se déroule en plusieurs phases, que nous présentons ci-après dans l'idée d'une possible transposition de l'atelier à une situation de formation initiale ou continue de professeurs des écoles.

Après une présentation collective du cadre d'analyse de l'action instrumentée et des différentes significations des notions de perpendicularité et de parallélisme (phase 1), les participants groupés en binômes (voire trinômes selon l'effectif total) sont invités à réaliser l'analyse d'un seul manuel sur une seule de ces notions (phase 2), en prenant appui sur une grille (voir Annexe 1). Deux binômes ont donc en charge l'analyse locale d'un même manuel, mais chacun sur une notion différente (perpendicularité ou parallélisme). Dans une troisième phase, chaque membre d'un binôme fait part de son travail à un membre de l'autre binôme de sorte qu'ensemble, les deux nouveaux binômes « hétérogènes » puissent faire chacun une analyse de l'enseignement des notions de perpendicularité et de parallélisme dans le manuel à disposition. Ces nouveaux binômes réalisent alors sur une affiche la synthèse de leur travail en relevant les faits marquants. Une quatrième phase fait l'objet d'une discussion-synthèse collective qui permet l'analyse comparée – au niveau local – des manuels concernés. La présentation par les animatrices de l'atelier de l'analyse réalisée au niveau global conclut cet atelier (phase 5). Pour plus de clarté, la Figure 1 illustre l'organisation des phases 2, 3 et 4.

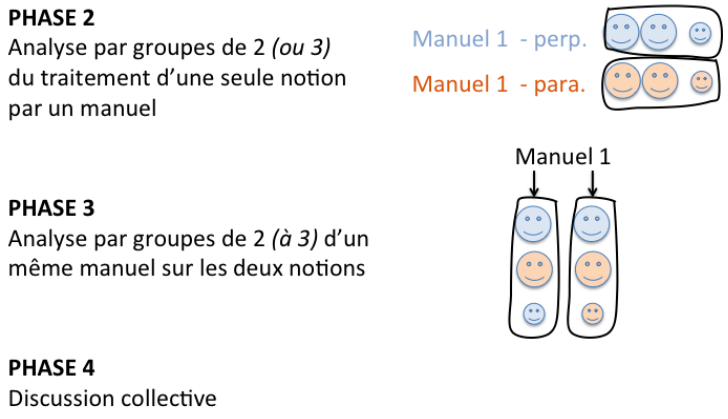


Figure 1. Organisation des phases 2, 3 et 4

Le compte-rendu de l'atelier reprend en partie le déroulement. Après avoir présenté le cadre d'analyse au niveau local (partie II), nous réalisons l'analyse au niveau local des différents manuels (partie III). La partie IV présente l'analyse au niveau global.

II - PRÉSENTATION DU CADRE D'ANALYSE AU NIVEAU LOCAL

Dans cette partie, nous présentons les différents outils que nous utilisons pour analyser les manuels au niveau local sur les notions de perpendicularité et de parallélisme.

1 Cadre d'analyse de l'action instrumentée

Nous exposons ici brièvement le cadre d'analyse de l'action instrumentée (Petitfour, 2017) qui nous permettra d'identifier, dans les manuels scolaires et guides pédagogiques, les différents types de connaissances explicités par les auteurs.

Une *action instrumentée* est une action d'un sujet qui, dans son environnement de travail, utilise un objet technique pour produire ou pour analyser un objet graphique représentant un objet géométrique. Dans l'environnement papier-crayon, il s'agit par exemple d'utiliser une équerre pour tracer une perpendiculaire à une droite donnée (production de la relation de perpendicularité) ou pour vérifier si un angle est droit (analyse de la relation de perpendicularité entre deux droites). La réalisation d'une action instrumentée met en jeu différents types de connaissances.

Connaissances géométriques. Ces connaissances sont relatives à la définition des objets géométriques (point, droite, angle, etc.), aux relations qui peuvent exister entre eux (perpendicularité, parallélisme, etc.), ainsi qu'aux propriétés géométriques (nature d'un angle, etc.). Elles s'expriment dans un langage géométrique, constitué de termes lexicaux ayant un sens spécifique (« point », « droite », « intersection », etc.) et de tournures syntaxiques spécifiques (« droite perpendiculaire à … passant par … », « droites parallèles », etc.).

Connaissances graphiques. Ces connaissances sont relatives aux informations graphiques pertinentes à prélever visuellement sur les dessins – représentations par des tracés, codages – et à leur interprétation géométrique. Elles concernent également les notations et les symboles. Par exemple, une droite est représentée par un trait droit que l'on peut prolonger autant qu'on veut sachant que la droite est infinie, la relation de perpendicularité se code à l'aide d'un petit carré, la droite passant par deux points A et B donnés se note (AB), le symbole // traduit la relation de parallélisme.

Connaissances spatiales. Ces connaissances sont en lien avec l'expérience qu'a le sujet de l'environnement réel. Elles sont en lien avec la capacité à sélectionner et à interpréter des informations spatiales telles des orientations d'objets (avec une reconnaissance privilégiée de la verticalité et de l'horizontalité) ou des positions relatives d'objets. Elles sont également relatives à la capacité à appréhender et anticiper des transformations (plier, agrandir, dilater, …) ou des déplacements (glisser, tourner, retourner). Elles sont enfin impliquées dans la flexibilité du regard à porter sur une figure (Duval, 2005).

Connaissances techniques. Ces connaissances sont relatives à la fonction des objets techniques – ou artefacts qui deviennent instruments dans un processus de genèse instrumentale – et à leurs schèmes d'utilisation (Rabardel, 1995). Par exemple, une fonction de l'équerre est de vérifier si un angle est droit. Pour ce faire, on place l'équerre sur l'angle à vérifier en ajustant un côté et le sommet de l'angle droit de l'équerre avec un côté et le sommet de l'angle à vérifier, puis on regarde si l'autre côté de l'angle à vérifier coïncide ou non avec l'autre côté de l'angle droit de l'équerre.

Connaissances pratiques. Ces connaissances sont relatives d'une part à la manipulation concrète des objets techniques matériels, en lien avec les compétences manipulatoires construites par le sujet (capacité de coordination des mouvements et ajustements posturaux réalisés avec l'objet technique, capacité à manipuler l'objet technique avec précision et de manière efficace sur le plan matériel et corporel), d'autre part à l'organisation de l'action instrumentée en contexte, en lien avec les compétences organisationnelles construites par le sujet (capacité à planifier ses actions en en concevant l'organisation selon un plan déterminé).

2 Objets choisis par les manuels pour l'étude des concepts

Les objets permettant d'étudier les concepts de perpendicularité et de parallélisme varient en fonction des manuels. L'étude d'une vingtaine de manuels de CM1, sur le marché durant l'année scolaire 2017-2018, nous a conduit à identifier différentes catégories d'objets.

Objets culturels. Certaines situations s'appuient sur des objets culturels porteurs de relations spatiales, comme la représentation des rues d'une ville sur un plan ou la représentation de lignes sur des tableaux d'artistes-peintres, ou encore comme sur les instruments de géométrie.

Objets quotidiens. D'autres situations mettent en jeu des objets issus de l'environnement quotidien, sous forme de dessins (objets connus des élèves) ou sous forme concrète (c'est le cas en particulier lorsque les élèves sont invités à identifier les relations géométriques autour d'eux dans la salle de classe).

Objets graphiques. D'autres situations enfin s'appuient sur des objets graphiques modélisant des objets de l'environnement ou représentant des objets géométriques. Ces objets graphiques sont étudiés sur différents supports : unis, quadrillés ou pointés (à mailles carrées). Ces deux derniers types de supports sont constitués de réseaux de lignes porteurs des relations de parallélisme et de perpendicularité.

3 Les notions de perpendicularité et de parallélisme

Les relations de perpendicularité et de parallélisme présentent différentes significations que l'on peut mettre en lien avec d'autres concepts de géométrie élémentaire (Dussuc et *al.*, 2006 ; ERMEL, 2006 ; Reymonet, 2004). Pour chacune des relations, nous donnons dans les sous-parties suivantes un aperçu des significations pouvant être rencontrées au cycle 3.

3.1 Perpendicularité

Angle. Deux droites sont perpendiculaires si elles se coupent en formant quatre angles égaux (ou quatre angles droits). Comme il suffit que deux droites se coupent en formant un angle droit pour qu'elles en forment quatre, on peut définir aussi deux droites perpendiculaires comme deux droites qui se coupent en formant un angle droit.

Distance. Le plus court chemin entre un point et une droite s'obtient sur la droite perpendiculaire à la droite passant par le point.

Direction. La perpendiculaire à une droite en un point de la droite correspond à une position d'équilibre. Selon l'encyclopédie de Diderot et d'Alembert (1751-1772), « perpendiculaire, en terme de Géométrie, est une ligne qui tombe directement sur une autre ligne, de façon qu'elle ne penche pas plus d'un côté que de l'autre, et fait par conséquent de part et d'autre des angles égaux. Si l'on considère une droite horizontale, une perpendiculaire à cette droite ne penche ni d'un côté, ni de l'autre, elle est verticale. » Cette signification de la perpendicularité s'appuie sur des connaissances spatiales avec une appréhension perceptive de la perpendicularité.

Symétrie axiale. L'axe de symétrie d'un angle plat permet un pliage « trait sur trait ». Cet axe est perpendiculaire à la droite que forment les côtés de l'angle plat.

Quadrilatère particulier. Deux côtés consécutifs d'un rectangle sont supports de droites perpendiculaires.

Pente. Une relation existe entre les pentes de deux droites perpendiculaires. On peut l'observer sur des droites représentées sur un support quadrillé lorsqu'elles passent par des nœuds du quadrillage (voir illustration Figure 2).

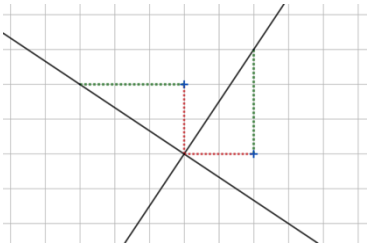


Figure 2. Droites perpendiculaires sur réseau quadrillé

3.2 *Parallélisme*

Incidence. Deux droites parallèles sont deux droites qui ne se rencontrent jamais [même si on les prolonge]. Cette signification du parallélisme s'appuie sur la perception visuelle. Notons qu'elle est uniquement efficiente dans le plan (dans l'espace, deux droites non coplanaires ne se rencontrent jamais, mais ne sont pas parallèles pour autant).

Distance. Deux droites parallèles sont deux droites d'écart constant.

Direction. Deux droites parallèles ont même direction, elles sont « penchées pareil », par rapport à une même direction, autrement dit elles déterminent avec une sécante commune des angles correspondants égaux (ou encore elles déterminent avec une sécante commune des angles alterne/interne égaux).

Double perpendicularité. Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles. Cette signification peut être vue comme un cas particulier de la signification précédente.

Translation. La translation (glissement sans tourner) d'une droite conduit à une droite qui lui est parallèle. Cette signification traduit un aspect dynamique du concept.

Quadrilatère particulier. Deux côtés opposés d'un rectangle (ou d'un carré, ou d'un losange, ou plus généralement d'un parallélogramme) sont supports de droites parallèles.

Pente. Une relation existe entre les pentes de deux droites parallèles : elles sont égales. On peut l'observer sur des droites représentées sur un support quadrillé lorsqu'elles passent par des nœuds du quadrillage (voir illustration, Figure 3).

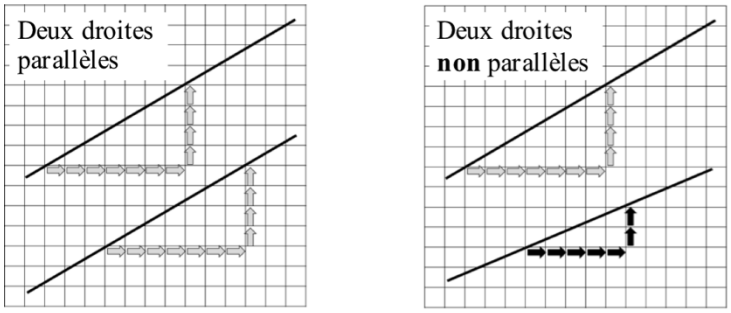
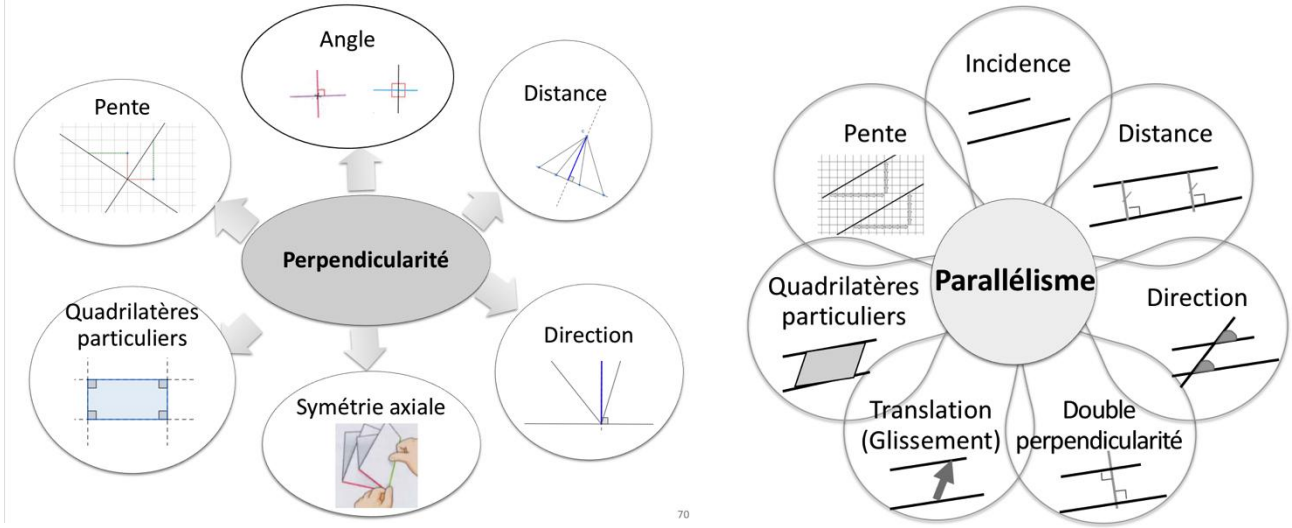


Figure 3. Droites sur réseau quadrillé

3.3 *Présentation schématique des relations*

Nous récapitulons les différentes significations des relations de perpendicularité et de parallélisme par les schémas suivants (Figure 4).



Relation de perpendicularité *Relation de parallélisme*

Figure 4. Présentation des différentes significations des relations géométriques

III - ANALYSE DE MANUELS AU NIVEAU LOCAL

Dans cette partie, nous présentons une analyse au niveau local des manuels étudiés lors de l'atelier. Dans les collections « J'aime les maths, CM1 » et « Maths explicites, CM1 », le travail portant sur chacune de ces notions est présenté sur une double page du livre-élève (Annexes 2, 3, 4 et 5) ; dans la collection « CapMaths, CM1 », il s'étend sur plusieurs unités d'enseignement (voir partie IV) : nous faisons le choix de nous focaliser sur la première séquence (Annexes 6 et 7).

Nous nous intéressons en particulier aux objets choisis par les auteurs de manuels pour étudier les concepts, aux connaissances explicitées dans les manuels scolaires et guides pédagogiques, à la nature de ces connaissances (géométriques, graphiques, techniques ou pratiques) ainsi qu'aux éléments de langage proposés (vocabulaire, formulations).

1 Manuel « J'aime les Maths, CM1 », Belin 2016

1.1 Objets d'étude

Dans le manuel « J'aime les Maths, CM1 » (Annexes 2 et 3), les concepts de perpendicularité et de parallélisme sont introduits par deux « activités de découverte » analogues consistant à trier des couples de pailles dessinés sur six étiquettes (Figure 5), après vérification à l'équerre et marquage de la présence d'angles droits pour la perpendicularité et après mesure de l'écartement entre les pailles pour le parallélisme.



Figure 5. Activités de découverte des notions de perpendicularité (à gauche) et de parallélisme (à droite), « J'aime les maths »

L'introduction des concepts s'appuie donc sur l'observation **d'objets du quotidien** qui sont **dessinés**, des pailles, dans une situation que nous qualifions de *pseudo-concrète* : la situation est artificielle et ne présente pas de motivation dans la vie quotidienne. Le guide pédagogique précise en remarque qu'il est possible d'utiliser de vraies pailles pour reproduire les configurations proposées sur les étiquettes, ce qui conduit dans ce cas à étudier la position relative de configurations d'**objets concrets** du quotidien. Cette suggestion d'utiliser de vraies pailles serait-elle motivée par la croyance des auteurs que la manipulation favorise un meilleur accès au concept géométrique ? La manipulation risque plutôt de créer de nouvelles difficultés : d'abord les configurations de pailles peuvent bouger lors de l'utilisation de l'équerre pour vérifier si les angles sont droits ou celle de la règle graduée pour mesurer l'écartement entre les pailles, ensuite les configurations où une paille chevauche l'autre peuvent poser problème pour le positionnement de l'équerre puisqu'elles ne sont pas dans un même plan.

Dans les exercices proposés, les relations de perpendicularité et de parallélisme sont étudiées sur des **objets culturels** (tableau de Mondrian, plan de rues), sur des **objets quotidiens** (panneau de signalisation routière, lettres majuscules, drapeaux de pays) et sur des **objets graphiques** représentant des objets géométriques (couples de droites ou réseau de droites, côtés de polygones et segments).

Concernant le travail sur la notion de perpendicularité, nous constatons des types de tâches inappropriés sur ces objets, avec la demande d'un dénombrement de droites (Annexe 2, exercice 12 p. 145), de côtés (Annexe 2, exercice 7 p. 145) et de segments (Annexe 2, exercice 14 p. 145) perpendiculaires : la perpendicularité n'est pas l'attribut d'une ligne droite, c'est une relation binaire entre deux lignes droites. En outre, la réponse attendue pour l'exercice 12 laisse perplexe quant à la distinction à faire dans la lecture du tableau entre segments et droites et ainsi mentionnée dans le guide pédagogique : « Le tableau de Mondrian compte 3 droites perpendiculaires (on ne compte pas les segments) ».

1.2 Connaissances géométriques

Relation de perpendicularité

Dans l'activité de découverte de la notion de perpendicularité (Annexe 2, guide pédagogique, p. 145), il est demandé aux élèves de « noter sur l'ardoise les pailles qui se coupent à angle droit » suite à une vérification à l'équerre et à un marquage de la présence d'angles droits. La perpendicularité est alors introduite en conclusion de l'activité par l'explicitation suivante : « Si les pailles se coupent à angle droit, elles sont perpendiculaires. » La perpendicularité est ainsi définie dans le contexte des pailles par la relation « se couper à angle droit ». Cette expression géométrique appliquée à un terme de la langue courante, les pailles, est non aisément interprétable par les élèves. Ils doivent en déduire la signification d'après les codages d'angles droits trouvés à l'aide de l'équerre. Des problèmes de compréhension peuvent surgir si l'on interprète les agencements de pailles de façon concrète (Figure 6) : on dirait plutôt que les pailles se touchent dans les cas 2, 4, 5 et 6 et qu'une paille est posée sur l'autre dans les cas 1 et 3, mais en aucun cas qu'elles ne se coupent. De la même manière, l'expression « point d'intersection des deux pailles » associant terme géométrique et terme courant et utilisée dans le guide pédagogique pour décrire le positionnement de l'équerre est inappropriée : les deux pailles ont une zone d'intersection commune qui ne se réduit pas à un point. En outre, il n'est pas censé d'imaginer que les représentations des pailles puissent être prolongées comme il est parfois nécessaire de le faire pour les représentations graphiques de droites, lorsque les traits qui les représentent ne se touchent pas.

Dans « J'aime les maths, CM1 », l'approche de la relation de perpendicularité est réalisée uniquement en lien avec le concept d'angle avec une seule signification formulée de la façon suivante dans le livre-élève (Annexe 2, « Retenons ensemble », p. 144) : « Deux droites qui se coupent en formant un angle droit sont perpendiculaires ». Le fait que ces deux droites se coupent aussi en formant quatre angles droits n'est pas abordé dans le manuel, ce qui peut être source de difficultés de compréhension pour les élèves s'ils s'interrogent sur l'angle droit à considérer dans le cas de droites perpendiculaires.

Relation de parallélisme

Dans l'activité de découverte de la notion de parallélisme, il est demandé aux élèves de « noter sur l'ardoise les pailles qui ont un écartement constant » (Annexe 3, guide pédagogique, p. 147), alors que cette notion n'est pas définie au moment où la séance commence. La relation de parallélisme est alors introduite en conclusion de l'activité par l'explicitation suivante : « Si l'écartement entre les pailles est toujours le même, elles ne peuvent se couper. On dit qu'elles sont parallèles. » (*ibid*). La formulation met ainsi en jeu deux significations (celle liée à la distance et celle liées à la relation d'incidence), sans que les liens entre les deux soient explicités. On retrouve cette double signification dans la trace écrite proposée dans le livre-élève (Annexe 3, « Retenons ensemble », p. 146), accompagnée de l'explicitation technique de vérification. La technique de vérification proposée est cohérente avec la signification liée à la distance. Elle est mise en œuvre dans trois exercices sur les treize proposés.

La tâche d'identification/contrôle du parallélisme de droites est proposée dans neuf exercices. Quatre d'entre eux peuvent être résolus perceptivement, en mettant en jeu la signification liée à la direction, par rapport à l'horizontale ou à la verticale (Annexe 3, exercices 5, 9, 12 et 13, p. 147), sans que celle-ci ait été explicitée dans le livre-élève ou par le guide pédagogique. Notons par ailleurs que dans cinq de ces exercices, les droites parallèles sont soit horizontales, soit verticales, au risque de renforcer la représentation erronée parallèle/horizontale ou verticale. Nous nous interrogeons enfin sur la pertinence de l'exercice 9 qui présente les droites parallèles entre elles en leur attribuant la même couleur. Enfin l'exercice 10 p. 147 (Annexe 3) propose la réalisation d'un programme de construction qui conduit à une technique de tracé d'une droite parallèle à une droite donnée. La signification sous-jacente à cette technique est congruente avec l'une des significations institutionnalisées (droites d'écart constant). Cependant, elle met en jeu la notion de distance d'un point à une droite, alors que cette notion n'est pas abordée du tout dans « J'aime les maths, CM1 ». La Figure 6 propose une synthèse des différentes significations abordées.

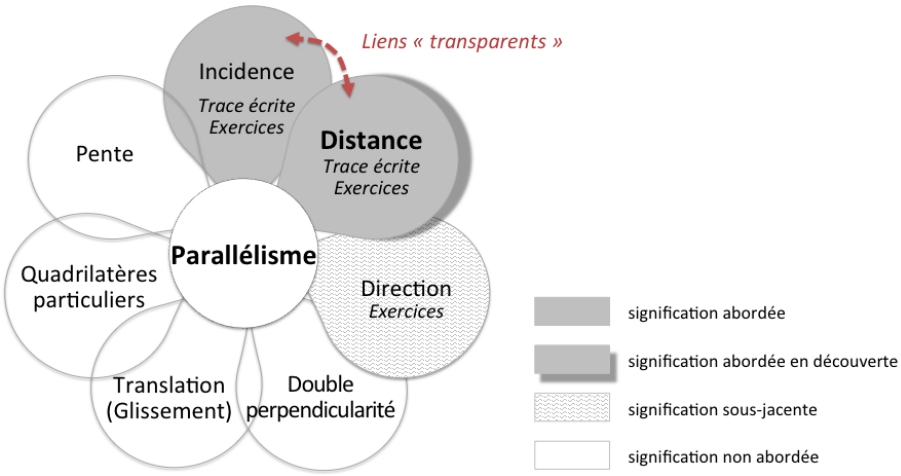


Figure 6. Les différentes significations de la notion de parallélisme abordées dans « J'aime les maths, CM1 »

Vocabulaire et formulations langagières

De manière générale, nous constatons, dans le manuel « J'aime les maths, CM1 », une imbrication entre le langage courant et le langage géométrique qui se révèle dès les activités de découverte dans lesquelles le terme *paille* (objet du quotidien) est substitué au terme *droite* (objet géométrique) : « les pailles se coupent à angle droit » ou le « point d'intersection des pailles » (Annexe 2, guide pédagogique, p. 145), « les pailles parallèles » (Annexe 3, livre-élève, p. 146). Cette substitution correspond-elle à une volonté des auteurs de rendre plus accessible un contenu géométrique qui ne pourrait l'être d'emblée ? Il nous semble qu'au contraire ce choix est source d'obstacles pour les élèves. Nous relevons aussi les expressions « bandes parallèles » (Annexe 3, exercice 7) ou « rues parallèles » (Annexe 3, exercice 11) dans lesquelles le terme *parallèle* n'a pas le sens géométrique *stricto sensu* que l'on attribue à deux droites.

Nous notons également à propos de la présentation des objets d'étude du manuel des formulations langagières non rigoureuses dans les questions posées dans les exercices (Annexe 2, exercices 7, 12 et 14, p. 145 ; Annexe 3, exercices 5, 7, 8 et 13, p.147) parce qu'elles négligent l'aspect de relation binaire entre deux droites de la relation de perpendicularité / parallélisme. L'unicité de la droite perpendiculaire / parallèle à une droite donnée passant par un point donné n'est pas non plus prise en compte lorsqu'il est demandé de tracer une droite d_2 perpendiculaire / parallèle à la droite d_1 et passant par le point B » (Annexe 2, exercice 10, p. 145 ; Annexe 3, exercice 10, p. 147). Par ailleurs, des confusions apparaissent entre un angle et son sommet dans le guide pédagogique dans l'explicitation qui est faite du positionnement de l'équerre pour vérifier si les angles sont droits : « on positionne bien l'angle droit de l'équerre sur le point d'intersection des deux pailles » (Annexe 2, guide pédagogique, p. 145).

Ces formulations peu rigoureuses reflètent un manque de connaissances géométriques et semblent contradictoires avec l'insistance faite par les auteurs sur le vocabulaire. Il est demandé en effet dans le guide pédagogique d'« insister sur les mots à retenir : angle droit, perpendiculaires, équerre » (Annexe 2, guide pédagogique p.145), puis « parallèles, écartement » (Annexe 3, guide pédagogique p.147), et trois exercices pour chacune des deux séquences visent à « mobiliser le lexique géométrique » (Annexe 2, exercices 3, 4 et 6 / Annexe 3, exercices 3, 4 et 6). Remarquons qu'il ne s'agit pas du tout d'un emploi du vocabulaire en situation tel que préconisé dans les programmes scolaires.

1.3 Autres types de connaissances

Ni *connaissances spatiales* ni *connaissances pratiques* ne sont formulées dans le manuel ou le guide pédagogique. En revanche, nous trouvons des connaissances *graphiques* et *techniques*.

Connaissances graphiques

Le formalisme apparaît dès le début de l'apprentissage sur la perpendicularité avec l'introduction du symbole ⊥, sur le parallélisme avec l'introduction du symbole //, présentés dans les parties « Retenons

ensemble » du livre-élève (Annexes 2 et 3) et à utiliser dans des exercices (voir par exemple Annexe 2, exercices 3, 4 et 6 ainsi que Annexe 3, exercices 3, 4 et 6). Rappelons que la connaissance du symbolisme n'est pas un attendu des programmes de 2015.

Nous notons également que le codage d'un angle droit pour la représentation de deux droites perpendiculaires est institutionnalisé (Annexe 2, « Retenons ensemble », p.144) puis utilisé dans deux exercices (Annexe 2, exercice 11 et Annexe 3, exercice 10). Enfin, dans « Retenons ensemble » p.146 (Annexe 3), le manuel propose le codage avec double flèche pour représenter la longueur de segments.

Connaissances techniques

Dans le travail sur la notion de perpendicularité, deux fonctions de l'équerre sont institutionnalisées dans le livre-élève de la manière suivante : « Pour vérifier ou tracer deux droites perpendiculaires, j'utilise l'équerre ». La présentation d'une technique sous forme d'une chronologie de trois vignettes s'ensuit et représente en fait les étapes de tracé de deux droites perpendiculaires en un point. Ces étapes ne sont en rien analogues à celles de la vérification de la perpendicularité de deux droites comme cela peut être suggéré. Dans la construction, l'utilisation de la règle doit se déduire du dessin de cet instrument sur les vignettes. La fonction de la règle – tracer un trait droit – peut se déduire des textes de la vignette 1 (« Je trace une droite d ») et de la vignette 3 (« Je prolonge pour obtenir la droite e »). Sur la vignette 2, la règle n'a pas de fonction technique, elle a probablement une fonction pratique d'aide au placement de l'équerre si l'on imagine que l'on y fait coulisser l'équerre pour l'amener jusqu'au point A, mais rien n'est écrit à ce sujet.

Pour chacune des étapes de la construction, un texte accompagne le dessin du positionnement des instruments, un crayon et un trait rouge mettent en évidence le lieu du tracé. La première étape consiste à tracer une droite d et placer un point A sur la droite. Les deux autres étapes visent donc à tracer la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point qui appartient à cette droite. Le cas d'un point qui n'appartient pas à la droite donnée n'est pas traité dans la partie « Retenons ensemble » du livre-élève. La technique de vérification de la perpendicularité est explicitée seulement dans le guide pédagogique dans la situation contextualisée des pailles de l'activité de découverte comme « procédure la plus efficace » pour trier les couples de pailles : « on positionne bien l'angle droit de l'équerre sur le point d'intersection des deux pailles pour vérifier la perpendicularité » (Annexe 2, guide pédagogique, p. 145). La confusion faite entre l'angle droit et son sommet ne rend pas du tout explicite la façon de positionner l'équerre pour vérifier la relation de perpendicularité. Enfin concernant le langage pour décrire la technique de tracé de deux droites perpendiculaires, des formulations imprécises sont employées et certaines informations essentielles sont à prélever sur le dessin. Sur la vignette 2, c'est en effet un côté de l'angle droit de l'équerre que l'on doit mettre sur la droite d, avec le sommet de l'angle droit de l'équerre sur le point A – cette dernière information est à prélever sur le dessin. Ensuite, on doit tracer un côté d'un certain angle droit – d'après le dessin, celui sur lequel on a placé l'équerre – et on doit prolonger ce côté – d'après le dessin, à partir du point A, de l'autre côté de la droite d.

Dans le travail sur la notion de parallélisme, une technique d'identification/contrôle du parallélisme est proposée. Les instruments à utiliser sont précisés : « Il faut utiliser l'équerre et la règle graduée pour savoir si des droites sont parallèles ou non » (Annexe 3, « Retenons ensemble »). Le schème d'utilisation est verbalisé d'une part dans le guide pédagogique en conclusion l'activité contextualisée avec les pailles (« On positionne l'équerre perpendiculairement à une première paille, on colle la règle graduée à l'équerre et on mesure l'écartement en faisant glisser les deux règles. »), d'autre part dans la partie « Retenons ensemble » du livre-élève (« Je place la règle et l'équerre perpendiculairement à l'une des droites. Je vérifie que l'écartement est toujours le même. »). Ce dernier texte accompagne un dessin de deux droites sur lesquelles sont positionnées équerre et règle graduée avec le codage d'un écartement de 2 cm marqué à deux endroits. La chronologie des actions à réaliser n'est pas indiquée. L'utilisation de l'équerre sous-tend le fait que l'écart entre deux droites se réalise à partir d'un segment perpendiculaire à l'une de ces droites, ce qui est repris dans le codage de la figure accompagnant le programme de construction (Annexe 3, exercice 10) : cependant ce fait n'est jamais explicité (ni dans le manuel, ni par le guide pédagogique), il semble aller de soi. Enfin, tout comme le texte de description de la technique de

tracé de deux droites perpendiculaires, les formulations choisies pour décrire le positionnement de la règle et de l'équerre pour mesurer l'écartement entre deux droites sont imprécises : « placer l'équerre perpendiculairement à une droite » n'a pas de sens. À partir du dessin, il faut voir que c'est en fait un des côtés de l'angle droit de l'équerre que l'on placera sur l'une des deux droites, et qu'on placera la règle contre l'autre côté de l'angle droit de l'équerre.

2 Manuel « Maths Explicites, CM1 », Hachette 2016

2.1 Objets d'étude

Dans le manuel « Maths Explicites, CM1 », le concept de perpendicularité est introduit avec des **objets culturels**. D'abord le guide pédagogique, dans la phase de « rappel des connaissances préalables », demande à l'enseignant de « Montrer et demander aux élèves de montrer l'angle droit de l'équerre et ses 2 côtés perpendiculaires ». Le terme *perpendiculaire* est ainsi introduit pour nommer les côtés de l'angle droit de l'équerre, plutôt que pour nommer une relation spécifique entre deux droites. Ensuite, l'activité de la rubrique « Apprenons ensemble » du manuel s'appuie sur l'emploi social du terme *perpendiculaire* pour faire décrire la position relative de rues sur un plan. Cet objet culturel, un plan avec des rues, est également exploité dans un exercice (Figure 7). On peut remarquer que le plan de la situation d'introduction fait cohabiter la vue du dessus pour les rues avec une vue de côté (dessin des maisons), ce qui peut conduire à des difficultés d'interprétation.



Figure 7. Objet culturel : plan avec des rues

La notion de parallélisme est introduite avec des **objets quotidiens** en faisant référence à des plots alignés séparant des couloirs dans une course à pied (Figure 8 et Annexe 5). Un exercice de reconnaissance de la relation de parallélisme (Annexe 5, exercice 12, p.129) présente un objet culturel : il s'agit d'un tableau de Vasarely présentant des « lignes horizontales parallèles ».

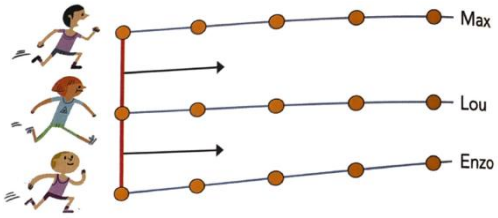


Figure 8. « Apprenons ensemble », « Maths Explicites, CM1 », p.128

Dans toutes les activités proposées et tous les autres exercices (Annexes 4 et 5), les relations de perpendicularité et de parallélisme sont étudiées sur des **objets graphiques** représentant des objets géométriques (couples de droites ou réseau de droites, côtés de polygones).

2.2 Connaissances géométriques

Relation de perpendicularité

La relation de perpendicularité est abordée dans le manuel sous deux significations.

L'approche de la relation est réalisée en lien avec le concept d'angle. La définition suivante est d'abord donnée : « Des droites perpendiculaires sont des droites qui se coupent en formant un angle droit. »,

accompagnée d'une représentation codée de deux droites perpendiculaires, avec le dessin d'une équerre (« J'apprends », Annexe 4). Remarquons dans ce manuel les liens forts qui sont faits entre le concept de perpendicularité et l'instrument, l'équerre, qui est à chaque fois dessinée en plus du codage de l'angle droit (voir Annexe 4 – « Apprenons ensemble » et « J'apprends »). Le fait que deux droites perpendiculaires se coupent aussi en formant quatre angles droits est sous-jacent à une connaissance technique formulée et représentée dans le livre-élève dans ce qui est à retenir. Il est en effet précisé que « sur une droite, je peux positionner l'angle droit de l'équerre et un de ses côtés de 4 manières différentes » et les quatre positionnements possibles sont illustrés par un dessin (voir Annexe 4 – « J'ai compris »).

Une deuxième signification de la relation de perpendicularité, en lien avec le concept de distance, est abordée dans le manuel : « Le chemin le plus court entre un point A et une droite *d* est le segment perpendiculaire à *d* qui passe par A. »

Relation de parallélisme

L'exemple introductif proposé par le manuel s'appuie sur la perception que les lignes de plots vont finir « par se couper », ce qui réfère directement à la relation d'incidence entre les droites. Le guide pédagogique (Annexe 5, « Sous-compétences 1 et 2 : définir le mot « parallèles » et percevoir à vue d'œil que des droites sont parallèles ») incite alors l'enseignant à proposer une institutionnalisation orale que nous qualifions de « trois en un » puisque trois significations de la relation de parallélisme sont abordées, sans que le passage entre elles soit aménagé (l'équivalence des trois formulations semble aller de soi) : « droites qui ne se coupent jamais même si on les prolonge » (en référence à l'exemple introductif), « elles vont dans la même direction » et « l'écartement (la distance) entre les droites est constant : il ne change pas ». Notons par ailleurs que la notion de direction d'une droite n'est pas explicitée, comme si c'était une évidence. Enfin, seule la perception de la relation d'incidence entre les droites est en jeu dans l'exercice 1 (Annexe 5) proposé en application, puis plus tard dans l'exercice 6.

Un deuxième exemple est proposé dans le guide pédagogique (Annexe 5, « Sous-compétence 3 : vérifier sur un quadrillage que des droites sont parallèles », p.182) : en appui sur le quadrillage du tableau ou des cahiers des élèves, sur lequel on peut percevoir le parallélisme de certaines droites, l'enseignant est incité à faire remarquer aux élèves que « l'écart : le nombre de carreaux reste toujours le même » (*ibid*) et que les lignes verticales (puis horizontales) « sont toutes parallèles entre elles » (*ibid*). Ainsi cette deuxième institutionnalisation orale évoque une double signification : celle liée à la distance et celle liée à la direction des droites horizontales et verticales. L'exercice 2, ainsi que la technique institutionnalisée ensuite et qui porte sur le tracé de droites parallèles appartenant au réseau d'un papier quadrillé (Annexe 5, « Sous-compétence 4 : tracer des droites parallèles sur papier quadrillé et pointé », p. 183), s'appuient sur ces directions privilégiées, au risque de renforcer la confusion parallèle/horizontale ou verticale. Le guide pédagogique (Annexe 5, « Sous-compétence 4 : tracer des droites parallèles sur papier quadrillé et pointé », p. 183) incite alors l'enseignant à présenter une technique de tracé de droites parallèles à « une droite oblique sur le quadrillage, passant par des points d'intersection des carreaux » : il s'agit de dénombrer les carreaux qui séparent deux points du réseau par lesquels passe la droite donnée, puis « à partir d'un coin de carreau, reprodui[re] le même déplacement pour placer le second point ». Cette technique utilise en acte la signification liée à la notion de pente. L'exercice 3 la met en œuvre accompagné d'une trace écrite qui la présente. Plus tard, les premières parties des exercices 7 et 8, ainsi que les exercices 9 et 10 mettront en œuvre les deux techniques présentées.

Le guide pédagogique poursuit la « pratique guidée » en faisant présenter aux élèves une technique permettant la vérification de la relation de parallélisme à l'aide d'un « guide-âne » (réseau de droites parallèles sur un calque), qui réfère en acte à la signification « même direction ». Le guide-âne est alors utilisé dans les exercices 4 et 5 pour identifier des droites parallèles.

Enfin la trace écrite proposée dans le manuel (Annexe 5 « J'apprends » et « J'ai compris ») présente la seule définition référant à l'incidence des droites, ainsi qu'une seule technique de contrôle, celle qui utilise le guide-âne et réfère donc à la direction des droites. Cette technique est mise en œuvre

uniquement dans l'exercice 6 et la deuxième partie de l'exercice 7. Nous constatons que même si la signification en relation avec la notion de distance est abordée, il n'est fait aucun lien avec la perpendicularité contrairement aux préconisations des programmes. La Figure 9 propose une synthèse des différentes significations abordées.

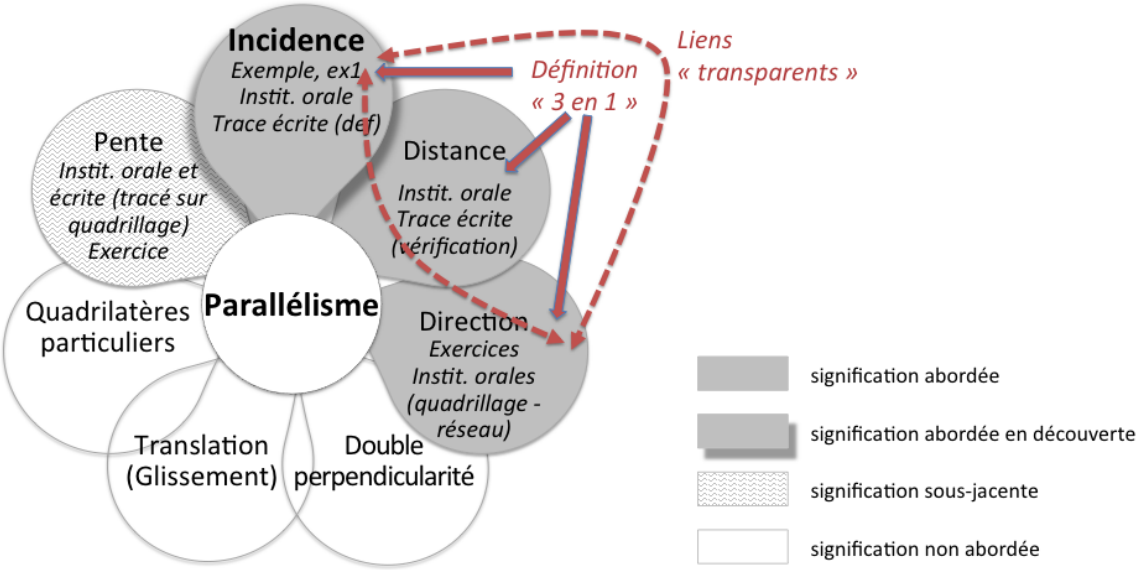


Figure 9. Les différentes significations de la notion de parallélisme abordées dans « Maths Explicites, CM1 »

Vocabulaire et formulations langagières

Le guide pédagogique (Annexes 4 et 5) exprime les différentes façons de formuler la relation de perpendicularité/parallélisme de façon contextualisée : « Préciser que l'on peut dire que les rues de Gaëlle et Kenza sont perpendiculaires ou que la rue de Gaëlle est perpendiculaire à celle de Kenza ou que la rue de Kenza est perpendiculaire à celle de Gaëlle. » (p. 180) ; « On peut dire que les lignes droites de Lou et Enzo ne sont pas parallèles, ou que la d'Enzo n'est pas parallèle à celle de Lou, ou que la ligne de Lou n'est pas parallèle à celle d'Enzo. » (p. 182). Ainsi est mise en avant la symétrie des deux relations.

Dans le manuel « Maths explicite, CM1 » une imbrication entre le langage courant et le langage géométrique se révèle d'abord dans l'exemple introductif de la notion de perpendicularité avec l'emploi du terme *perpendiculaire* dans son usage social (« rues perpendiculaires »). Le terme semble cependant être à interpréter dans son sens géométrique puisque c'est une vérification à l'équerre qui permet de trancher sur la perpendicularité des rues. Si l'on devait se prononcer sur la position relative de rues sur un plan dans la vie courante, on estimerait visuellement la relation en acceptant une marge d'erreur plus importante que celle liée à une vérification à l'équerre. L'imbrication langage courant – langage géométrique se révèle aussi dans l'exemple introductif sur la notion de parallélisme dans lequel l'expression « ligne de plot » (objet du quotidien) est substituée au terme *droite* (objet géométrique) : « les lignes de plot (…) ne doivent pas se couper : elles doivent être parallèles » (Annexe 5, manuel, p. 128). On relève également l'expression « lignes horizontales parallèles » (Annexe 5, exercice 12). L'emploi dans cet exercice du terme « parallèle » fait référence à l'usage social qui exprime la position relative des lignes courbes, mais pas à la définition mathématique qui réfère à une relation entre droites. La manière de tracer des « lignes parallèles de plus en plus espacées [qui] se déforment dans le cercle » renvoie en effet plus à une activité d'art plastique que de géométrie. Par ailleurs la formulation est erronée : les lignes ne sont pas « horizontales » puisque courbes !

Comme pour le manuel précédent, nous relevons dans le guide pédagogique des formulations langagières non rigoureuses parce que ne tenant pas compte de l'unicité de la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné : « On veut tracer une droite *e* perpendiculaire à la droite *d* passant par le point *O* » (Annexe 4, guide pédagogique, p. 181). Par ailleurs, l'expression « On pose

l'angle droit de l'équerre sur le point O » révèle une confusion entre les deux objets géométriques suivants : l'angle et le sommet de l'angle.

2.3 Autres types de connaissances

Connaissances spatiales

Aucune *connaissance spatiale* n'est formulée dans le manuel ou le guide pédagogique. Nous constatons cependant une volonté des auteurs de s'appuyer sur ces connaissances lorsque, dans les exemples de tracés de droites perpendiculaires à faire au tableau en démonstration pour les élèves, une orientation privilégiée de droites est choisie : « l'enseignant trace une droite *d* horizontale » (Annexe 4, guide pédagogique, p. 181). Cela peut conduire, d'une part à renforcer la reconnaissance de la relation de perpendicularité dans les seuls cas d'orientations horizontale et verticale de droites, d'autre part à cultiver la confusion entre perpendicularité et verticalité.

Connaissances graphiques

Le codage de l'angle droit est institutionnalisé avec la présentation d'un dessin légendé (Figure 10). Il est utilisé ensuite dans l'exercice 8 (Annexe 4).

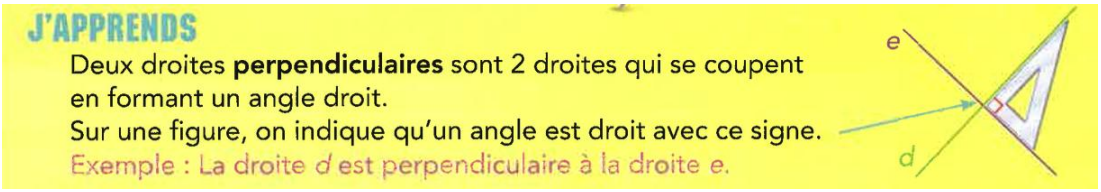


Figure 10. « J'apprends », extrait du livre-élève « Maths Explicites, CM1 », Hachette , p.127 (Annexe 4)

Le terme de *signe* est utilisé pour parler du codage de l'angle droit. Ce qu'indique la flèche est ambigu car on peut aussi penser que c'est le dessin de l'équerre qui est montré. Le terme de *coin* est également employé : « On marque un angle droit par un 'coin' » (Annexe 4, guide pédagogique, p. 181).

Connaissances techniques

Dans le travail sur la notion de perpendicularité, une fonction de l'équerre est donnée ainsi dans le manuel : « J'utilise l'équerre pour vérifier qu'un angle est droit » avec une description contextualisée de la technique de vérification (Annexe 4, « Apprenons ensemble », p. 126) :

> *Je positionne l'équerre pour superposer l'angle droit sur le coin où se croisent les rues de Kenza et de Gaëlle.*
> *Je superpose aussi un côté de l'équerre sur le bord de la rue.*
> *L'autre côté de l'équerre se superpose exactement sur le côté de l'autre rue.*
> *La rue de Kenza est perpendiculaire à celle de Gaëlle.*

Ce qui est appelé « angle droit » pour l'équerre doit être interprété comme le « sommet de l'angle droit ». À la charge de l'enseignant, ou sinon des élèves, d'associer la description d'objets de l'environnement quotidien à la représentation d'objets géométriques pour extraire ensuite les schèmes d'utilisation de l'équerre dans sa fonction de vérification de la présence d'un angle droit. Les « bords de rues » sont représentés par des droites. « Le bord de la rue » suppose un choix particulier de bord parmi les deux possibles. Le « coin où se croisent les rues de Kenza et de Gaëlle » est le point d'intersection de deux lignes représentant chacun l'un des bords d'une rue. Le terme « côté » dans « le côté de l'autre rue » doit être compris comme synonyme de « bord ».

Les techniques de tracé de deux droites perpendiculaires et d'une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné dans le cas où le point est sur la droite et dans celui où il n'y est pas sont explicitées dans le guide pédagogique (Annexe 4, sous-compétences 4 et 5, p. 181). L'enseignant est invité à faire une présentation des techniques de construction sur le tableau uni de la classe. Quelques imprécisions langagières apparaissent dans la verbalisation à associer à une démonstration de la réalisation des tracés au tableau par l'enseignant, outre la confusion « angle droit » - « sommet de l'angle droit » dont nous avons déjà parlé. L'équerre, avec un côté de l'angle droit sur la droite, doit « glisser

jusqu'au point » : on ne sait donc pas quelle partie de l'équerre doit s'arrêter sur le point ; on trace ensuite « la droite le long du côté de l'équerre » : le côté à considérer n'est pas précisé. Les élèves devront donc prélever ces informations lors de la démonstration au tableau de la manipulation de l'équerre par l'enseignant.

Dans le travail sur la notion de parallélisme, le discours sur l'utilisation du guide-âne pour vérifier/identifier des droites parallèles est prévu dans le guide pédagogique. Cette technique fait l'objet d'une trace écrite (Annexe 5 « J'ai compris »). La trace écrite annonce également l'utilisation du guide-âne pour tracer des parallèles mais sans expliciter la technique qui par ailleurs n'aura jamais à être utilisée (les seules droites parallèles à tracer le sont sur support quadrillé dans les exercices 9 et 10).

Connaissances pratiques

Des connaissances pratiques sont formulées dans la présentation de la technique de tracé de la perpendiculaire à une droite passant par un point lorsque le point n'est pas sur la droite. Les auteurs manifestent en effet la volonté de prendre en compte l'utilisation d'une équerre matérielle particulière qui aurait un côté de l'angle droit plus long que l'autre et envisagent le cas de figure où le point est éloigné de la droite à une distance supérieure à la longueur du petit côté (Figure 11) :

On place l'équerre sur la droite : le point étant d'un côté de la droite, il n'y a plus que 2 positions possibles et quelquefois, selon la distance du point à la droite, il n'y en a plus qu'une quand il faut utiliser le côté le plus long de l'équerre.

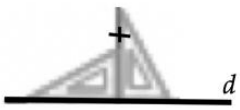


Figure 11. Extrait du guide pédagogique de « Maths Explicites, CM1 », Hachette, p.181 (Annexe 4)

Remarquons qu'en fait, si le grand côté de l'angle droit de l'équerre matérielle atteint le point extérieur à la droite lorsque le petit côté de l'angle droit est sur la droite, il n'y a pas qu'une position possible de l'équerre mais deux, sauf si l'on s'interdit de retourner l'équerre.

3 Manuel « Cap Maths, CM1 », Hatier 2016

3.1 Objets d'étude

Dans le manuel « Cap Maths, CM1 », tous les objets d'étude sont des objets graphiques.

Le concept de perpendicularité est introduit avec des **objets graphiques** *représentant* des objets géométriques, à savoir des angles. Il s'agit pour les élèves de partager une feuille en quatre angles égaux de même sommet en traçant quatre segments. Le travail se poursuit ensuite sur l'étude de la relation de perpendicularité entre des droites.

Le concept de parallélisme est introduit avec des **objets graphiques** *modélisant* des objets de l'espace sensible (des tronçons de rails de chemin de fer). Les élèves doivent « décider si les rails ont été posés correctement ou non » (Annexe 7, fiche 48). Selon le guide pédagogique, la situation d'introduction « prend appui sur l'évocation d'une voie de chemin de fer car cette image contient en elle-même des moyens de contrôle du parallélisme avec la présence des traverses qui sont là pour maintenir le même écartement entre les rails ». Cependant, même si les auteurs prennent des précautions en évoquant « un tronçon », une voie ferrée n'est pas toujours une ligne droite. De plus, dans l'évocation de la voie ferrée, il est sous-entendu qu'elle est vue de dessus, car si on regarde les rails selon notre propre point de vue, nous voyons les rails se toucher à l'horizon. Les représentations qu'ont les élèves de ces objets du quotidien peuvent donc être source d'obstacles pour la construction du concept de parallélisme. Remarquons toutefois que le passage aux objets géométriques est balisé pour l'enseignant et les élèves. En effet, dès la fin de la mise en commun, une décontextualisation est proposée par le guide pédagogique : « Maintenant nous allons oublier les voies ferrées et les rails et nous intéresser aux deux droites tracées dans chaque cas. » (Annexe 7, guide pédagogique, p. 191). Les **objets graphiques** deviennent alors *représentations* d'objets géométriques (des droites).

3.2 Connaissances géométriques

Relation de perpendicularité

La relation de perpendicularité est introduite grâce à une situation de recherche où une feuille est partagée en quatre angles égaux. La situation aboutit à la conclusion suivante : « Quatre angles droits de même sommet forment deux droites qu'on appelle des droites perpendiculaires. ». Un lien est fait ensuite, suite à une recherche de procédures de tracé avec les instruments de géométrie s'appuyant sur cette définition, vers la définition suivante : « Deux droites qui se coupent en formant un angle droit sont appelées des droites perpendiculaires. ». La relation de perpendicularité est donc mise en lien dans « CapMaths, CM1 » avec le concept d'angle. Une mise en lien avec le concept de symétrie axiale est sous-jacente à la résolution de l'énigme proposée en fin de séquence qui consiste à « faire apparaître, uniquement par pliage, un angle droit dans une feuille blanche sans bords droits » (Annexe 6, guide pédagogique, p. 95).

Relation de parallélisme

La relation de parallélisme est introduite grâce à une situation de recherche (la situation des rails) basée sur la signification liée à la notion de distance entre deux droites : dans les premiers cas, la perception de l'écart constant suffit et se fait en s'appuyant sur l'évocation des traverses ; dans le dernier cas, la perception se révèle insuffisante, et la résolution du problème passe par l'usage des instruments (règle et équerre) pour vérifier l'écartement des droites. Ce travail se fait en lien avec le concept de perpendicularité travaillé auparavant. L'institutionnalisation est cohérente avec la situation introductrice. Le guide pédagogique propose la mise en mots et en images de la définition et de la technique d'identification (Annexe 7). Par ailleurs, le lien avec les côtés opposés de rectangles (connaissances anciennes, travaillées en amont dans l'année) est explicitement fait. Les techniques de tracé, de vérification/reconnaissance sont explicitées et cohérentes avec les significations abordées. Les exercices sont en cohérence avec les significations et techniques proposées.

La Figure 12 propose une synthèse des différentes significations abordées.

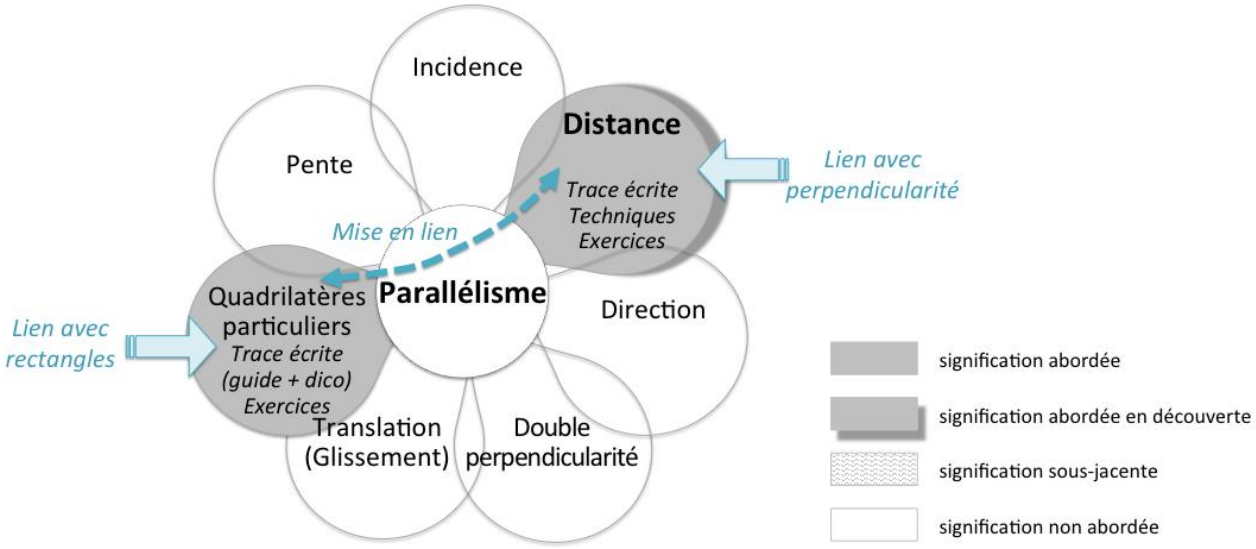


Figure 12. Les différentes significations de la notion de parallélisme abordées dans la séquence introductrice de « CapMaths, CM1 »

Vocabulaire et formulations langagières

Dans « CapMaths, CM1 », les formulations langagières employées à propos des relations de perpendicularité et de parallélisme sont données de façon rigoureuse, dans un langage géométrique. Les différentes expressions possibles des relations de perpendicularité et de parallélisme sont formulées dans le guide pédagogique, avec la difficulté pointée par les auteurs de considérer comme équivalentes

les trois expressions : « On dit que : les droites a et b sont perpendiculaires ou la droite a est perpendiculaire à la droite b ou la droite b est perpendiculaire à la droite a. » ; « On dit que : les droites a et b sont parallèles ou la droite a est parallèle à la droite b ou la droite b est parallèle à la droite a. »

3.3 Autres types de connaissances

Connaissances spatiales

À propos de la sélection et de l'interprétation d'informations spatiales concernant la relation de perpendicularité, les points d'attention suivants sont proposés en conclusion de l'exercice 1 dans lequel la reconnaissance de la relation de perpendicularité de six couples de droites isolées est proposée (Annexe 6, guide pédagogique, p. 95) :

- Se méfier d'une reconnaissance seulement visuelle ;
- Ne pas conclure à la perpendicularité de deux droites avec le seul fait qu'une est verticale ;
- Savoir que deux droites perpendiculaires peuvent être inclinées.

En outre, la conclusion de l'exercice 2 dans lequel l'étude de positions relatives de droites est à réaliser dans un réseau de sept droites met en avant le fait que « pour repérer des droites perpendiculaires, il faut occulter une partie de la figure pour centrer son attention sur deux droites de façon à en étudier les positions relatives » (Annexe 6, guide pédagogique, p. 95).

Enfin, l'accent est mis sur l'importance d'anticiper les tracés, ce qui peut être travaillé avec un tracé à main levée : « Avant de faire un tracé, il est important d'imaginer ce qu'on va obtenir, cela aide à placer correctement les instruments. Faire un tracé à main levée permet également de mieux voir ce qu'on va obtenir. » (Annexe 6, guide pédagogique, p. 94).

Connaissances graphiques

Concernant les représentations d'objets géométriques, il est précisé dans le guide pédagogique (Annexe 6) qu'« on peut prolonger le trait qui représente une droite autant que besoin » : cette connaissance est nécessaire dans le cas de l'étude de la position relative de deux droites perpendiculaires dont les représentations ne se coupent pas. Il est également rappelé, lors de l'explication de la technique de construction de la perpendiculaire à une droite passant par un point, que le *point* se situe au centre de la croix qui le représente.

Connaissances techniques

La technique de construction de la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point dans les deux cas de figure (point appartenant à la droite, point n'appartenant pas à la droite) est présentée dans le « DicoMaths » (Annexe 6) sous forme d'une chronologie de trois vignettes, à chaque fois. Sur la première sont représentées une droite d et un point A ; sur la deuxième, le positionnement de l'équerre et un début de tracé avec le crayon dessiné ; sur la troisième, le positionnement de la règle et le tracé qu'elle permet. Les schèmes d'utilisation des instruments sont explicités de façon précise et rigoureuse dans le guide pédagogique (Annexe 6), avec l'expression de la mise en lien des parties de l'équerre et de la règle avec les tracés. De même concernant le parallélisme, les schèmes d'utilisation de la règle et de l'équerre pour mesurer l'écartement entre deux droites, ou pour tracer une droite parallèle à une autre droite sont mis en mots dans le guide pédagogique et explicités en image notamment dans le « DicoMaths » (Annexe 7).

Connaissances pratiques

Pour ce qui est de la perpendicularité (Annexe 6, guide pédagogique), différents conseils sont donnés pour aider à la visualisation d'une part et pour aider à l'obtention d'un tracé précis d'autre part. Ainsi, pour extraire visuellement deux droites d'une figure complexe, on peut masquer avec les mains une partie de la figure ou encore orienter le support pour ramener une des deux droites en position horizontale ou verticale. Et pour anticiper la position d'une droite perpendiculaire à une autre, on peut

tourner le support ou tourner la tête pour amener la droite tracée en position horizontale. Concernant les tracés à réaliser, on doit tenir compte de l'épaisseur de la mine, « la souplesse et la lenteur du geste en évitant toute crispation » est un élément déterminant de la réussite du tracé, qui s'acquiert à force de temps et d'entrainement.

Pour ce qui est du parallélisme (Annexe 7, guide pédagogique), des conseils sont donnés pour favoriser un travail de précision dans le tracé de deux droites d'écart constant : « Éviter d'utiliser des points trop proches (au risque de ne pas être capable de comparer précisément l'écart mesuré) » ou encore « les deux perpendiculaires doivent être suffisamment espacées l'une de l'autre ».

IV - ANALYSE DE MANUELS, POINT DE VUE GLOBAL

D'un point de vue plus global, nous intéressons tout d'abord à l'enseignement des notions de perpendicularité et parallélisme. La Figure 13 illustre ce travail.

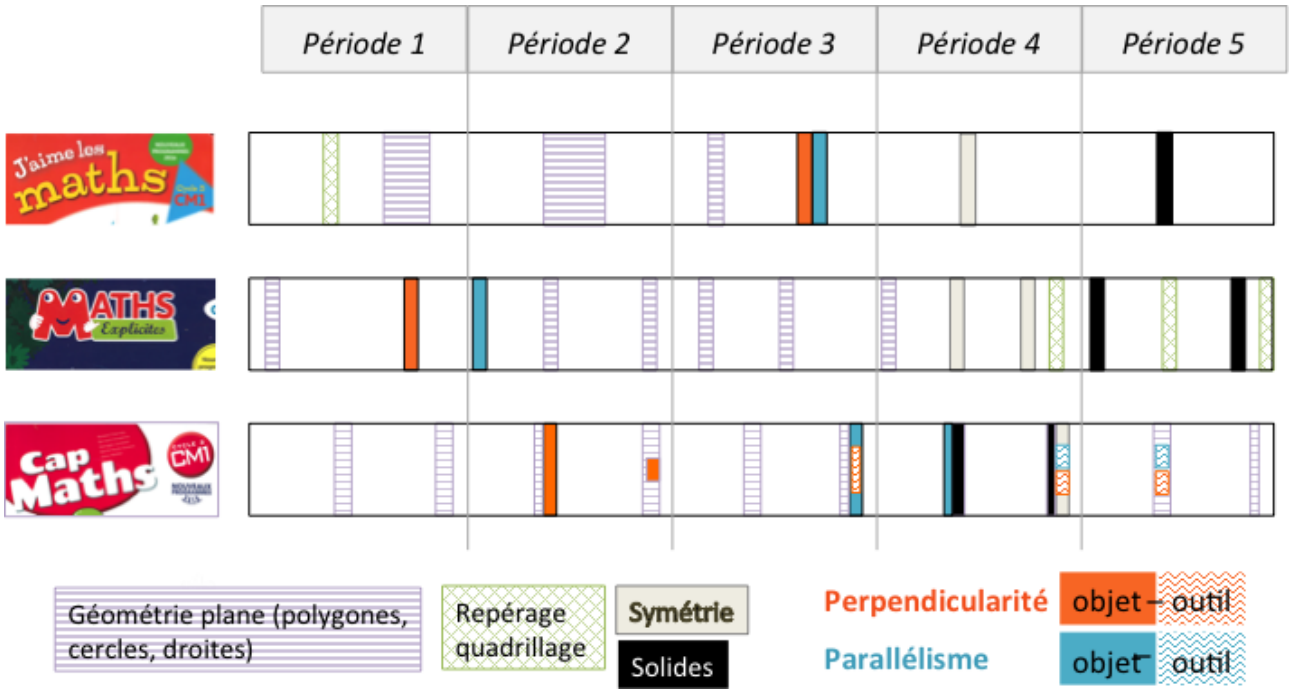


Figure 13. Point de vue plus global sur les trois manuels

Dans les trois manuels, l'enseignement de la notion de perpendicularité précède toujours celui de la notion de parallélisme, cependant nous constatons de grandes disparités entre ces trois manuels.

Tout d'abord, en portant notre attention sur la place de l'enseignement de ces notions dans l'année, les séances ne sont pas réparties de la même manière :

- le moment de l'année retenu pour cet enseignement peut être fin de période 1 - début de période 2 (« Maths Explicites, CM1 »), la période 3 (« J'aime les maths, CM1 ») ou encore être étalé de la période 2 jusqu'en période 5 (« CapMaths, CM1 ») ;

- les séances peuvent être consécutives (« J'aime les maths, CM1 ») ou assez rapprochées (« Maths Explicites, CM1 »), ce qui risque de renforcer la confusion entre ces deux notions ; seul « CapMaths, CM1 » fait le choix de les dissocier de manière significative (perpendicularité introduite en milieu de période 2, parallélisme en fin de période 3).

Tous les manuels consacrent deux séances à l'introduction de ces notions, mais seul « CapMaths, CM1 » revient sur ces notions dans d'autres séances. C'est d'abord le seul qui propose une séance avec un logiciel de géométrie dynamique. C'est également le seul qui met en évidence l'aspect outil des notions enseignées (les autres manuels ne réinvestissent ni la notion de perpendicularité, ni celle de parallélisme) et qui articule ces deux notions entre elles.

En élargissant l'analyse aux thématiques de géométrie abordées, nous prenons un point de vue encore plus général sur le manuel. Nous constatons que « J'aime les maths, CM1 » aborde les notions de perpendicularité et parallélisme à la fin de sa progression sur les figures planes (seul le travail sur la symétrie est abordé après), ce qui limite fortement les possibilités de réinvestissement. Ce n'est pas le cas de « Maths Explicites, CM1 » qui propose le travail sur perpendicularité et parallélisme en début de sa progression en géométrie ; cependant ces notions ne sont pas réinvesties, même dans le travail sur les quadrilatères particuliers. Enfin, la progression de « CapMaths, CM1 » ancre l'ancien dans le nouveau : par exemple le travail préalable sur les quadrilatères particuliers vient éclairer un nouveau sens de la relation de parallélisme ; le travail sur les deux notions est réinvesti dans les séances ultérieures sur les figures planes ainsi que sur la symétrie axiale.

V - CONCLUSION-SYNTHÈSE

L'analyse globale a ainsi montré une homogénéité de la chronologie qui cache des différences importantes.

Au niveau global tout d'abord, un seul manuel (« CapMaths, CM1 ») s'appuie sur la notion de perpendicularité, abordée très en amont et renforcée, pour travailler la notion de parallélisme ; « J'aime les maths, CM1 » et « Maths Explicites, CM1 » envisagent l'introduction (quasi-)simultanée de ces notions au risque de voir apparaître une confusion entre les deux. Par ailleurs, seul « CapMaths, CM1 » joue sur la dialectique outil/objet (Douady, 1986), alors que les deux autres manuels ne réinvestissent jamais dans des séances ultérieures à celles sur la perpendicularité et le parallélisme les savoirs acquis. Ainsi « CapMaths, CM1 » aborde-t-il chacune de ces deux notions dans plus que les deux séances proposées par « J'aime les maths, CM1 » ou « Maths Explicites, CM1 ».

Au niveau local, on constate une grande diversité des choix dans les significations abordées et dans leur explicitation. Différentes significations du parallélisme sont abordées dans les trois manuels (voir Figures 7, 10 et 13) : deux dans « CapMaths, CM1, trois dans « J'aime les maths, CM1 » et cinq dans « Maths Explicites, CM1 ». Dans « J'aime les maths, CM1 » et « Maths Explicites, les différentes significations ne sont souvent pas mises en lien et certaines restent utilisées en acte (non explicitées). Seul « Cap Maths, CM1 » accompagne l'enseignant dans le passage d'un sens à l'autre.

Selon le rapport sur l'enseignement des mathématiques au primaire, « le vécu expérimental et manipulatoire des élèves favorise l'acquisition des connaissances et leur mémorisation. Le matériel didactique et pédagogique sur lequel reposent ces expérimentations occupe donc une place centrale » (Villani & Torossian, 2018, p. 57). Concernant les objets choisis pour l'étude des concepts, nous constatons que deux manuels sur les trois (« J'aime les maths, CM1 » et « Maths Explicites, CM1 ») s'appuient sur des objets culturels porteurs de relations spatiales et des objets issus du quotidien, sans jamais baliser le passage au géométrique, laissé à la charge de l'enseignant (et probablement aussi des élèves). Un seul manuel explicite et balise ce passage (« CapMaths, CM1 »). Le tableau (Figure 14) ci-dessous synthétise les analyses réalisées (parties III.1.1, III.2.1 et III.3.1).

	« J'aime les maths, CM1 », Belin, 2016	**« Maths explicites, CM1 », Hachette (2016)**	**« CapMaths, CM1 », Hatier (2016)**
Objets culturels porteurs de relations spatiales	Tableau de Mondrian, rues sur le plan d'une ville *(exercices)*.	**Rues sur le plan d'une ville** (*exemple introductif*), lignes d'un tableau de Vasarely *(exercice)*.	
Objets quotidiens	**Pailles** (*activité de découverte*), panneau de signalisation routière, lettres majuscules, drapeau de la Grèce (*exercices*).	**Plots** (*exemple introductif*).	

Objets graphiques	Droites et points sur supports uni et quadrillé. Côtés de polygones; segments sur support quadrillé.	Droites, points, côtés et polygones sur supports unis, quadrillés et pointés.	**Droites**, **angles** (*situations de découverte, exercices*), points, côtés et quadrilatères particuliers sur support uni (*exercices*).

Figure 14. Objets choisis pour l'étude des concepts dans les trois manuels

Par ailleurs, nous faisons le constat que les « situations introductrices » (ou « de découverte ») s'appuient sur des images mentales mais pas toujours à bon escient. Enfin, seul un manuel (« CapMaths, CM1 ») propose une modélisation (et non pas un dessin).

Nous constatons une grande diversité dans les instruments utilisés dans les trois manuels scolaires analysés : deux manuels (« Maths explicites, CM1 » et « CapMaths, CM1 » un peu plus tard dans l'année) proposent l'utilisation du guide-âne ; deux manuels (« CapMaths, CM1 » et « J'aime les maths, CM1 ») utilisent la règle et l'équerre en lien avec écart constant. Cependant, il n'y a pas toujours congruence entre l'usage des instruments proposés et la signification de la notion à laquelle cet usage réfère : c'est le cas de « J'aime les maths, CM1 » et « Maths explicites, CM1 » (parties III.1.2 et III.2.2).

Plus inquiétant encore, nos analyses nous poussent à conclure que la qualité mathématique n'est pas toujours au rendez-vous :

- dans « J'aime les maths, CM1 » et « Maths explicites, CM1 », certaines formulations langagières ne prennent pas en compte la symétrie des relations alors que « CapMaths, CM1 » propose toutes les formulations et rend même explicite leur équivalence ;

- si « CapMaths, CM1 » prend effectivement en compte l'unicité de la droite passant par un point donné et perpendiculaire/parallèle à une droite donnée, ce n'est pas le cas de « J'aime les maths, CM1 » (« Maths explicites, CM1 » n'aborde pas ce type de problème) ;

- les manuels « J'aime les maths, CM1 » et « Maths explicites, CM1 » font des confusions entre différents objets géométriques ou entre objet géométrique et objet graphique.

Nous notons enfin que la conformité aux Instructions Officielles n'est pas toujours respectée : c'est le cas de « J'aime les maths, CM1 » (partie III.1.3).

Comme le souligne le récent rapport sur l'enseignement des mathématiques, « il est important de (…) porter une attention particulière sur les caractéristiques pédagogiques et didactiques des matériels utilisés dans la classe et sur l'effet induit sur les apprentissages des élèves » (Villani & Torossian, 2018, p. 58). La présente étude, en apportant des éléments permettant l'analyse, est un pas dans cette direction.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2)*, 5-31.

Dussuc, M-P., Gerdil-Margueron, G. Mante, M. (2006). Parallélisme au cycle 3. *Actes du 32ème colloque COPIRELEM Strasbourg 30-31 mai-01 juin 2005*. Irem de Strasbourg. 1-15.

Duval, A. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

ERMEL (2006). Apprentissages géométriques et résolution de problèmes. Paris : Éditions Hatier.

IGEN (1998). Le manuel scolaire. Paris : La Documentation française.

MEN (2015). Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale, Numéro Spécial 11 du 26 novembre 2015.

Mounier, E. et Priolet, M. (2015). *Les manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire – De l'analyse descriptive de l'offre éditoriale à son utilisation en classe élémentaire.* Rapport présenté lors de la conférence de consensus. Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. Paris : CNESCO, Lyon : IFÉ-ENS.

Perrin-Glorian, M-J. et Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments matériels à leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole*, *222*, 28-38.

Petitfour, E. (2017). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif de travail en dyade. *Petit x*, 103, 5-31.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Reymonet, C. (2004). Un cadre expérimental pour l'étude de la géométrie au cycle 3 : le cas du parallélisme. *Grand N*, 73, 33-48.

Villani, C. et Torossian, C. (2018). Rapport : 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf

VII - ANNEXES

Annexe 1 : Consigne et grille d'analyse de la phase 2

Relever les connaissances exposées dans le manuel et le Guide de l'enseignant à l'aide du cadre d'analyse.

Relever les manques ou erreurs le cas échéant.

Analyser l'articulation entre la « situation introductrice », l'institutionnalisation et les exercices proposés.

Remplir la grille

Connaissances explicitées	Commentaires
Connaissances géométriques	
• *Objets géométriques en jeu* • *Relations de perpendicularité / parallélisme* *- Significations abordées* *- Formulations utilisées* • *Propriétés géométriques*	
Connaissances graphiques	
• *Représentation par le tracé* • *Codage, notation, symbole*	
Connaissances spatiales	
• *Sélection et interprétation d'informations spatiales* • *Anticipation de transformations, déplacements* • *Extraction, décomposition, recomposition de figures*	
Connaissances techniques	
Instrument(s) – Fonction – Schèmes d'utilisation	
Connaissances pratiques	
• *Manipulation sur le plan matériel et corporel* • *Organisation*	

Annexe 2 : Collection « J'aime les maths » - Perpendicularité

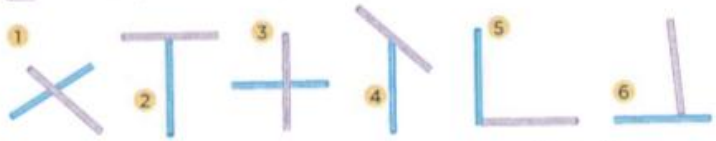
Extrait du manuel « J'aime les maths, CM1 », Belin, 2016, pp. 144-145

Identifier, vérifier et tracer des droites perpendiculaires

Cherchons ensemble

Activité s'appuyant sur la situation de **manipulation** décrite dans le guide

1 Voici les pailles que le groupe de Lisa a reçues.





- **Écris** les pailles qui se coupent en formant un angle droit.
- **Recopie** le tableau et **classe** les pailles.

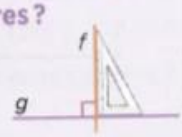
Perpendiculaires	Non perpendiculaires
...	...

Retenons ensemble

Mots à retenir
angle droit • perpendiculaires • équerre

Comment reconnaitre, vérifier et tracer des droites perpendiculaires ?

- Deux **droites qui se coupent en formant un angle droit** sont **perpendiculaires**.

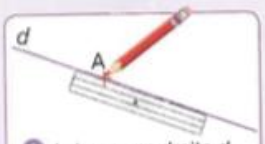


Les droites *f* et *g* sont perpendiculaires.
On écrit $f \perp g$.

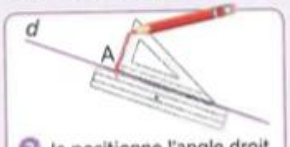
Le signe ⊥ se lit « est perpendiculaire à ».



- Pour **vérifier ou tracer deux droites perpendiculaires**, j'utilise l'**équerre** :



❶ Je trace une droite *d*. Je place un point A sur la droite.



❷ Je positionne l'angle droit de l'équerre sur la droite *d* et je trace l'angle droit.



$d \perp e$
Les deux droites sont perpendiculaires en A.

❸ Je prolonge pour obtenir la droite *e*.

Je sais faire

2 **Observe les droites. Recopie et complète le tableau.**



Perpendiculaires	Non perpendiculaires
...	...

3 **Recopie et complète les phrases.**

a. L' ... peut servir à ... ou à tracer des angles droits.

b. Deux droites se coupant à angle droit sont ... .

4 **Écris VRAI ou FAUX.**

a. Dans le cas de deux droites perpendiculaires, il y a parallélisme.

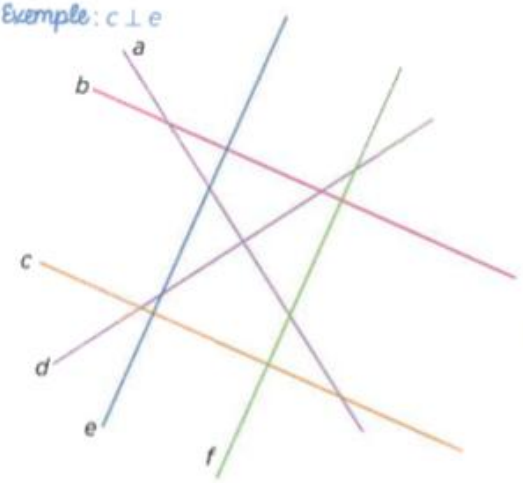
b. Si deux droites sont perpendiculaires, on peut utiliser le symbole //.

144 cent-quarante-quatre

Je m'entraine

5 **Nomme les droites qui sont perpendiculaires.**

Exemple : c ⊥ e



6 **Recopie et complète avec le mot qui convient :**

perpendiculaire | perpendicularité

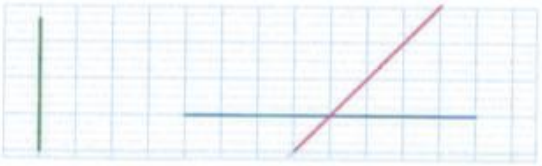
a. Lorsque deux droites se coupent à angle droit c'est une situation de ... .

b. Le signe ⊥ indique qu'une droite est ... à une autre.

7 **Repère les angles droits dans la partie blanche du panneau de signalisation routière.** Combien y a-t-il de côtés perpendiculaires ?



8 **Reproduis la figure.**



a. **Trace** une perpendiculaire à la droite bleue.

b. **Trace** une perpendiculaire à la droite verte.

c. **Trace** une perpendiculaire à la droite rouge.

9 **Construis les figures sur une feuille blanche.**

a. Deux droites perpendiculaires en un point O.

b. Deux droites *a* et *b* perpendiculaires. Une troisième droite *c*, perpendiculaire à la droite *b*.

10 **Suis le programme de construction.**

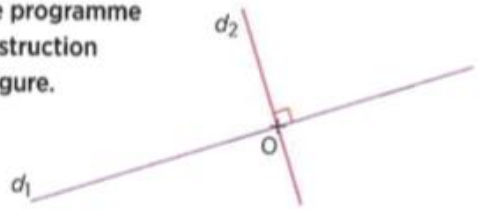
Programme de construction

1 **Trace** une droite d_1.

2 **Place** un point B sur la droite d_1.

3 **Trace** une droite d_2 perpendiculaire à la droite d_1 et passant par le point B.

11 **Écris le programme de construction de la figure.**



Je fais des maths autrement

12 Les Maths ça sert en Histoire des arts

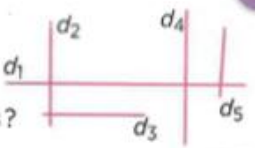
Piet Mondrian (1872-1944) est un peintre hollandais considéré comme un des pionniers de l'art abstrait. Dans sa *Composition C*, réalisée en 1935, il utilise des lignes droites.



Observe le tableau de Mondrian. **Combien** compte-t-il de droites perpendiculaires ?

13 Le couple-mystère

Quel est le couple de droites non perpendiculaires ?



14 Je travaille en groupe

Les majuscules géométriques

- **Reproduisez** ce mot sur une feuille à carreaux.
- **Combien** contient-il de segments perpendiculaires ?

P E R P E N D I C U L A I R E

→ Comparez votre résultat avec le groupe voisin.

Espace et géométrie

OBJECTIFS
- Apprendre à reconnaître des droites perpendiculaires.
- Apprendre à vérifier la perpendicularité de droites.
- Apprendre à utiliser l'équerre.
- Apprendre à tracer des droites perpendiculaires.

Identifier, vérifier et tracer des droites perpendiculaires

← Manuel p. 144-145

Activité de découverte

Trier des couples de pailles représentant des droites.

Matériel par binôme 6 étiquettes pailles (*cf.* Matériel photocopiable en Annexe), 1 ardoise, 1 équerre, 1 règle graduée

• Mise en situation

Mettre les élèves par deux. Chaque binôme reçoit une enveloppe contenant 6 étiquettes pailles.

Consigne élève : Procéder dans l'ordre :
«1 : Videz le contenu de votre enveloppe. À l'aide de l'équerre, vérifiez s'il y a des angles droits ou pas. Marquez-les.
2 : Notez sur l'ardoise les pailles qui se coupent à angle droit.
3 : Recopiez le tableau et rangez les étiquettes. »

Mise en commun : Mettre en évidence les différents tris effectués par les élèves en les faisant coller au tableau.
– Faire reformuler les stratégies en utilisant la bonne terminologie : perpendiculaire, non perpendiculaire. Faire justifier en procédant aux vérifications avec l'équerre.
– Hiérarchiser les procédures. Isoler la plus efficace : on positionne bien l'angle droit de l'équerre sur le point d'intersection des deux pailles pour vérifier la perpendicularité.

Conclusion de l'activité :
Expliciter : *« Si les pailles se coupent à angle droit, elles sont perpendiculaires ».*

Conclure : *«Il faut utiliser l'angle droit de l'équerre pour savoir si des droites sont perpendiculaires ou non. »*

• Accompagnement personnalisé

Difficultés rencontrées par l'élève	Aide proposée
• L'élève ne parvient pas à entrer dans l'activité.	• Faire verbaliser la position des pailles.
• L'élève ne parvient pas à trier.	• Donner des indices relatifs au point d'intersection des pailles. Comment se coupent-elles ? Se coupent-elles toujours de la même façon ?
• L'élève ne parvient pas à vérifier.	• Faire manipuler l'équerre, montrer l'angle droit et vérifier un coin de table. • Demander de positionner l'angle droit au niveau du point d'intersection des deux premières pailles. Faire verbaliser les actions et les remarques.

NB : Il est possible d'utiliser de vraies pailles pour reproduire les configurations proposées.

Réinvestissement dans le manuel 1

Travail sur le manuel ← p. 144-145

Cherchons ensemble

Exercice 1 : Réinvestir l'activité de découverte ci-dessus.

DIFFÉRENCIATION

Voir accompagnement personnalisé ci-dessus.

Retenons ensemble

– Faire procéder à une lecture individuelle silencieuse de l'écrit de référence.
– Procéder à une lecture magistrale.
– Insister sur les mots à retenir : **angle droit, perpendiculaires, équerre.**
– Insister sur l'explicitation des notions d'angle droit et de perpendicularité.
– Vérifier la compréhension en demandant «Qui n'a pas compris ? » puis demander aux élèves une reformulation.
– Procéder à une démonstration au tableau de chaque étape du tracé des droites perpendiculaires.

Je sais faire

Exercice 2 : Vérifier puis trier des couples de droites.

DIFFÉRENCIATION

– Simplification : Relire l'écrit de référence avec l'élève. Faire verbaliser l'utilisation de l'équerre.

Exercice 3 : Mobiliser le lexique géométrique relatif à la perpendicularité pour compléter des phrases.

DIFFÉRENCIATION

– Simplification : Relire l'écrit de référence.
– Complexification : Faire écrire deux phrases à trous sur le même modèle qui seront proposées à la classe lors de la correction.

Exercice 4 : Valider ou invalider des propositions relatives à la perpendicularité.

DIFFÉRENCIATION

– Simplification : Relire l'écrit de référence.
– Complexification : Faire écrire deux propositions sur le même modèle qui seront soumises à la classe.

Espace et géométrie

Je m'entraine

Exercice 5 : Identifier des droites perpendiculaires dans un réseau de droites.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre. Faire marquer chaque angle droit en rouge.
- Complexification : Faire décalquer le réseau de droites et faire tracer une perpendiculaire à la droite *f* et une perpendiculaire à la droite *c*.

Exercice 6 : Mobiliser un vocabulaire géométrique précis.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence.
- Complexification : Faire écrire une phrase à trous sur le même modèle qui sera proposée à la classe lors de la correction

Exercice 7 : Repérer les côtés perpendiculaires dans un polygone octogonal.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre.
- Complexification : Faire chercher et dessiner un autre panneau avec des perpendiculaires.

Exercices 8 et 9 : Construire des droites perpendiculaires à des droites données ou non.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre.
- Complexification : 9 Faire tracer 4 droites perpendiculaires à une même droite.

Exercice 10 : Construire des droites perpendiculaires passant par un point donné à partir d'un programme de construction.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser chaque étape du programme de construction.
- Complexification : Faire tracer deux autres droites perpendiculaires à d_1 et d_2.

Exercice 11 : Écrire le programme de construction correspondant à une figure donnée.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Faire verbaliser (et tracer si nécessaire) chaque élément observé. Utiliser la deuxième personne du singulier de l'impératif (voir exercice 10).
- Complexification : Faire tracer une figure et faire écrire son programme de construction.

Je fais des maths autrement

Exercice 12 : Reconnaitre et vérifier la perpendicularité de droites dans un tableau de maitre. Enrichir ses connaissances en histoire des arts.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre.
- Complexification : Reproduire le tableau de Mondrian.

Réponse : Le tableau de Mondrian compte 3 droites perpendiculaires (on ne compte pas les segments).

Exercice 13 : Résoudre un problème géométrique impliquant des couples de droites.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre. Faire marquer chaque angle droit en rouge.
- Complexification : Faire décalquer le réseau de droites en ne mettant que des droites perpendiculaires.

Exercice 14 : Résoudre un problème impliquant des lettres géométriques.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Faire la première lettre avec l'élève. Faire verbaliser : est-ce un angle droit ou pas ?
- Complexification : Faire l'exercice en changeant le mot.

Réponse : Si on raisonne en segment qui en coupe un autre à angle droit, le nombre de segments perpendiculaires pour chaque lettre est : P (4) ; E (3) ; R (4) ; N (0) ; D (2) ; I (3) ; C (5) ; U (3) ; L (2) ; A (0). En tout, il y en a donc 43.

Extrait du manuel « J'aime les maths, CM1 », Belin, 2016, pp. 146-147

Identifier des droites parallèles

Cherchons ensemble

Activité s'appuyant sur la situation de manipulation décrite dans le guide

1 Voici les pailles que le groupe de Hugo a reçues.





- **Mesure** l'écartement entre les pailles.
- **Recopie** le tableau et **complète-le** avec oui ou non.

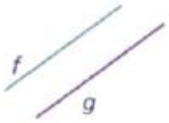
	Écartement inchangé	Parallèles	Pas parallèles
Pailles 1	...	...	...

Retenons ensemble

Mots à retenir
parallèles • écartement

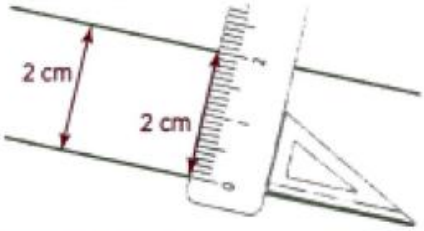
Comment reconnaitre des droites parallèles ?

- Deux droites qui **ne se coupent jamais**, même si on les prolonge, sont **parallèles**. L'**écartement** entre les deux droites est toujours le même.



Les droites *f* et *g* sont parallèles.
On écrit *f* // *g*.

- Pour **vérifier que deux droites sont parallèles**, j'utilise l'équerre et la règle graduée.

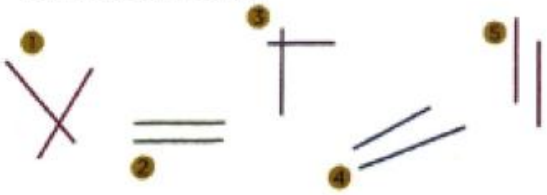


Je place la règle et l'équerre perpendiculairement à l'une des droites. Je vérifie que l'écartement est toujours le même.



Je sais faire

2 **Observe les droites. Recopie et complète le tableau.**



Non parallèles	Parallèles
...	...

3 **Recopie et complète les phrases.**

a. Deux droites qui ne se coupent jamais sont ....

b. L' ... entre deux droites parallèles est toujours le même.

4 **Écris VRAI ou FAUX.**

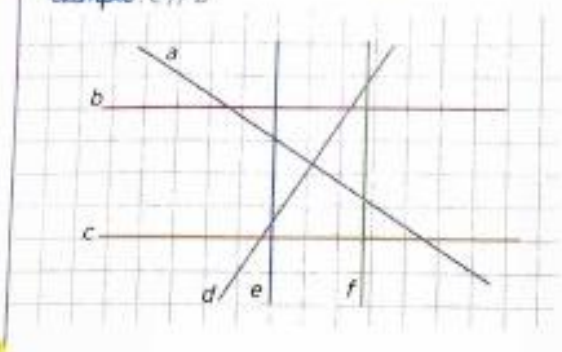
a. Deux droites parallèles sont toujours de la même longueur.

b. Si deux droites sont parallèles, on peut utiliser le symbole ⊥.

Je m'entraine

5 **Note** les droites parallèles.

Exemple : c // b



6 **Recopie et complète** avec le mot qui convient :

distance | parallélisme

a. Lorsque deux droites ne se coupent jamais, c'est une situation de ... .

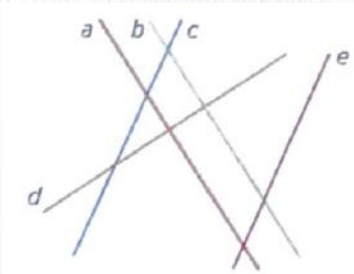
b. L'écartement entre deux droites parallèles, c'est aussi la ... qui les sépare.

7 Le drapeau de la Grèce est composé de neuf bandes horizontales bleues et blanches. Ces bandes sont-elles parallèles ?

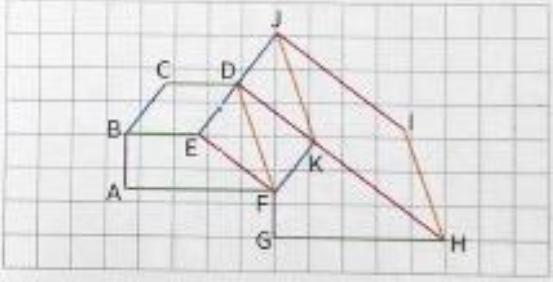
Justifie ta réponse.



8 **Note** les droites parallèles.

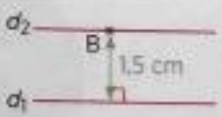


9 **Observe** cet assemblage de figures.
Écris la liste des côtés parallèles entre eux.



10 **Suis le programme de construction.**

1 **Trace** une droite d_1.
2 **Place** un point B à 1,5 cm de la droite d_1.
3 **Trace** une droite d_2, parallèle à la droite d_1 passant par le point B.



Quel est l'écartement entre les deux droites ?

Je fais des maths autrement

11 Les Maths ça sert en Géographie

Voici le plan du quartier où habite Sami.



Écris le nom de(s) rue(s) parallèle(s) à la rue de la Briqueterie.

12 Le couple-mystère

Quel est le couple de droites parallèles ?



13 Je travaille en groupe

Les majuscules géométriques

- **Reproduisez** ce mot sur une feuille à carreaux.
- **Combien** contient-il de segments parallèles ?

P A R A L L E L E

→ Comparez votre résultat avec le groupe voisin.

Espace et géométrie

OBJECTIFS
- Apprendre à reconnaître des droites parallèles.
- Apprendre à vérifier le parallélisme de droites.
- Apprendre à utiliser l'équerre et la règle graduée.

Identifier des droites parallèles

← Manuel p. 146-147

Activité de découverte

Trier des couples de pailles représentant des droites.

Matériel par binôme 5 étiquettes pailles (*cf.* Matériel photocopiable en Annexe), 1 ardoise, 1 équerre, 1 règle graduée

• Mise en situation

Mettre les élèves par deux. Chaque binôme reçoit une enveloppe contenant 5 étiquettes pailles.

Consigne élève : Procéder dans l'ordre :
« 1 : Videz le contenu de votre enveloppe. À l'aide de l'équerre et de la règle, mesurez l'écartement entre chaque paille.
2 : Notez sur l'ardoise les pailles qui ont un écartement constant.
3 : Recopiez le tableau et rangez les étiquettes. »

Mise en commun : Mettre en évidence les différentes propositions des élèves en les faisant coller au tableau. – Faire reformuler les stratégies en utilisant la bonne terminologie : parallèle, écartement constant.
– Faire justifier en procédant aux vérifications avec l'équerre et la règle graduée. – Hiérarchiser les procédures. Isoler la plus efficace : on positionne l'équerre perpendiculairement à une première paille, on colle la règle graduée à l'équerre et on mesure l'écartement en faisant glisser les deux règles. On constate ou non, à l'aide de l'équerre et de la règle graduée que l'écartement entre les pailles a la même mesure en tous points.

Conclusion de l'activité :
Expliciter : *« Si l'écartement entre les pailles est toujours le même, elles ne peuvent se couper. On dit qu'elles sont parallèles. »*
Conclure : *« Il faut utiliser l'équerre et la règle graduée pour savoir si des droites sont parallèles ou non. »*

• Accompagnement personnalisé

Difficultés rencontrées par l'élève	Aide proposée
• L'élève ne parvient pas à entrer dans l'activité.	• Faire verbaliser la position des pailles. Vont-elles se couper si on les prolonge ?
• L'élève ne parvient pas à vérifier le parallélisme des pailles.	• Faire manipuler l'équerre, la placer perpendiculairement. Coller la règle graduée et mesurer l'écartement qui doit être constant.

NB : Il est possible d'utiliser de vraies pailles pour reproduire les configurations proposées.

Réinvestissement dans le manuel 1

Travail sur le manuel ← p. 146-147

Cherchons ensemble

Exercice 1 : Réinvestir l'activité de découverte ci-dessus.

DIFFÉRENCIATION

Voir accompagnement personnalisé ci-dessus.

Retenons ensemble

– Faire procéder à une lecture individuelle silencieuse de l'écrit de référence.
– Procéder à une lecture magistrale.
– Insister sur les mots à retenir : **parallèles, écartement**.
– Insister sur l'explicitation de la notion de prolongement.
– Vérifier la compréhension en demandant « Qui n'a pas compris ? » puis demander aux élèves une reformulation.
– Procéder à une démonstration au tableau de chaque étape du positionnement de deux mètres de tableau parallèles.

Je sais faire

Exercice 2 : Vérifier puis trier des couples de droites.

DIFFÉRENCIATION

– Simplification : Relire l'écrit de référence avec l'élève. Faire verbaliser l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée.

Exercice 3 : Mobiliser le lexique géométrique relatif au parallélisme pour compléter des phrases.

DIFFÉRENCIATION

– Simplification : Relire l'écrit de référence.
– Complexification : Faire écrire deux phrases à trous sur le même modèle qui seront proposées à la classe lors de la correction.

Exercice 4: Valider ou invalider des propositions relatives au parallélisme.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence.
- Complexification : Faire écrire deux autres propositions.

Je m'entraine

Exercice 5: Identifier des droites parallèles dans un réseau de droites sur quadrillage, en utilisant le symbole //.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée. Compter les carreaux.
- Complexification : Faire décalquer le réseau de droites et faire tracer une parallèle à f et une parallèle à c.

Exercice 6: Mobiliser un vocabulaire géométrique précis.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence.
- Complexification : Faire écrire une phrase à trous sur le même modèle qui sera proposée à la classe lors de la correction.

Exercice 7: Repérer et vérifier les éléments parallèles dans le drapeau d'un pays européen.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée.
- Complexification : Faire chercher et dessiner un autre drapeau avec des parallèles.

Exercice 8: Identifier des droites parallèles dans un réseau de droites en utilisant le symbole //.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée.
- Complexification : Faire décalquer le réseau de droites et faire tracer une perpendiculaire à d. Que remarque-t-on ?

Exercice 9: Identifier des côtés parallèles dans un assemblage de polygones, à l'aide du quadrillage et en utilisant le symbole //.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée. Compter les carreaux.
- Complexification : Faire rechercher les côtés perpendiculaires entre eux.

Exercice 10: Construire une droite parallèle à une autre passant par un point donné à partir d'un programme de construction.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser chaque étape du programme de construction.
- Complexification : Faire tracer une autre droite parallèle à d_1 et d_2.

Je fais des maths autrement

Exercice 11: Reconnaitre et vérifier le parallélisme de droites sur un plan de quartier. Faire le lien entre les réseaux de droites et les plans, en géographie.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée. Montrer que la rue Augustin Tellier est perpendiculaire à la rue de Briqueterie et à la rue Favreuil.
- Complexification : Noter toutes les rues parallèles entre elles.

Réponse : La rue Favreuil.

Exercice 12: Résoudre un problème géométrique impliquant un réseau de droites.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Relire l'écrit de référence et faire verbaliser l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée.
- Complexification : Faire décalquer le réseau de droites et faire tracer une parallèle à d_1.

Exercice 13: Résoudre un problème impliquant des lettres géométriques.

DIFFÉRENCIATION

- Simplification : Faire la première lettre avec l'élève. Faire verbaliser quels sont les segments parallèles ou pas.
- Complexification : Faire l'exercice en changeant le mot.

Réponse : Le nombre de segments parallèles pour chaque lettre est : P (4) ; A (2) ; R (4) ; L (0) ; E (3). En tout, il y a 18 segments parallèles.

Annexe 4 : Collection « Maths explicites » - Perpendicularité

Extrait du manuel « Maths explicites, CM1 », Hachette, 2016, pp. 126-127

ESPACE ET GÉOMÉTRIE

49 Reconnaître et tracer des droites perpendiculaires

APPRENONS ENSEMBLE

A Kenza habite dans la maison bleue et son amie Gaëlle dans la maison verte.
Observe le plan. La rue de Kenza est-elle perpendiculaire à celle de son amie ?





*Des **droites perpendiculaires** sont des droites qui se coupent en formant **un angle droit**.*
*J'utilise **l'équerre** pour vérifier qu'un angle est droit.*

Je positionne l'équerre pour superposer l'angle droit sur le coin où se croisent les rues de Kenza et de Gaëlle.
Je superpose aussi un côté de l'équerre sur le bord de la rue.



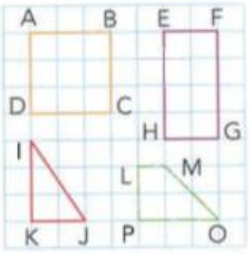
L'autre côté de l'équerre se superpose exactement sur le côté de l'autre rue.

La rue de Kenza est perpendiculaire à celle de Gaëlle.

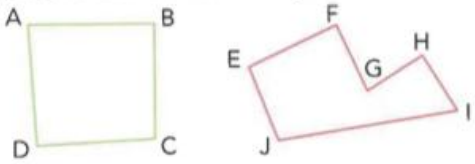
B Louise habite la maison orange. Sa rue est-elle perpendiculaire à celle de Kenza ?

ENTRAÎNONS-NOUS

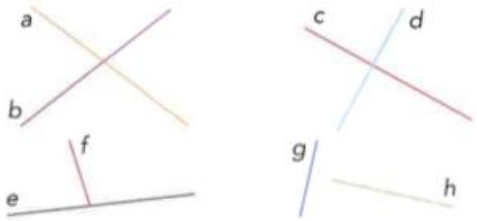
1 **Nomme** les côtés perpendiculaires de chaque figure.
AB et BC sont perpendiculaires.



2 Avec une équerre, **vérifie** quels sont les côtés perpendiculaires de ces 2 figures.



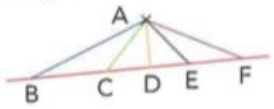
3 Pour chaque figure, **indique** si les droites sont perpendiculaires.



4 **Mesure** les segments qui relient le point A aux autres points.

a. Quel est le chemin le plus court entre A et la droite rouge ?

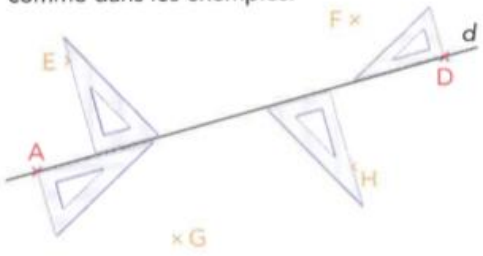
b. Quel angle ce segment forme-t-il avec la droite rouge ?



5 Sur une feuille blanche, **construis** cette figure.

a. **Trace** une droite *d*.

b. **Place** les 8 points comme sur le dessin : 4 points sur la droite, 2 points au-dessus et 2 au-dessous de la droite. **Trace** les droites perpendiculaires passant par chacun de ces points. Tu peux positionner ton équerre comme dans les exemples.



126

J'APPRENDS

Deux droites **perpendiculaires** sont 2 droites qui se coupent en formant un angle droit.
Sur une figure, on indique qu'un angle est droit avec ce signe.
Exemple : La droite *d* est perpendiculaire à la droite *e*.



J'AI COMPRIS

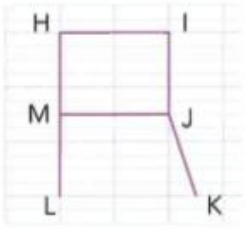
- Le chemin le plus court entre un point A et une droite *d* est le segment perpendiculaire à *d* qui passe par le point A.
- Sur une droite, je peux positionner l'angle droit de l'équerre et un de ses côtés de 4 manières différentes.

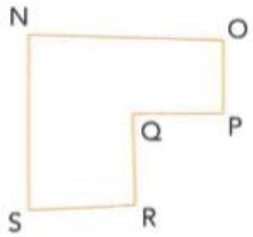


JE TRAVAILLE SEUL(E)

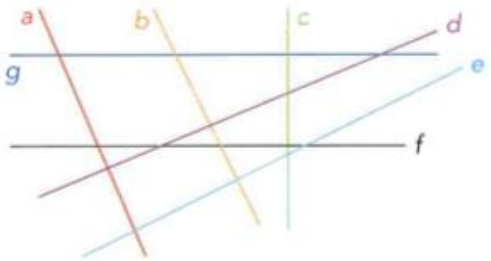
6 * Les côtés de ces figures sont-ils perpendiculaires ? **Réponds** par **oui** ou **non**.

a. HI et IJ
b. JM et JK
c. HI et HL
d. NO et NS
e. OP et PQ
f. QR et RS



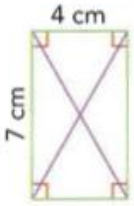


7 * Quelles droites sont perpendiculaires ?



8 * **Reproduis** ces figures.





9 * Sur une feuille blanche, **construis** cette figure.

a. **Trace** une droite *d* et **place** deux points K et L qui ne sont pas sur cette droite.
b. **Trace** le chemin le plus court entre chaque point et la droite *d*.

10 ** Sur une feuille blanche, **construis** cette figure.

a. **Trace** 2 droites perpendiculaires *d* et *e* qui se coupent au point H.
b. **Place** un point I sur la droite *d* et un point J sur la droite *e*.
c. **Trace** le segment IJ. Quelle figure obtiens-tu ?

JE VAIS PLUS LOIN

11 ** **Trouve** toutes les rues qui sont perpendiculaires.



12 *** **Décalque** la figure. Les 7 premières lettres que touche la balle en rebondissant en angle droit forment le nom d'une ville.



ESPACE ET GÉOMÉTRIE

49 Reconnaître et tracer des droites perpendiculaires

Manuel pp. 126-127

Programmes	Utiliser en situation le vocabulaire géométrique : droites perpendiculaires.
Introduction	En CE2, les élèves ont appris à vérifier la nature d'une figure plane en utilisant la règle graduée et l'équerre et à construire un carré ou un rectangle de dimensions données. Ils savent donc identifier et tracer des angles droits. En revanche, ils n'ont pas étudié la notion de droites perpendiculaires et l'utilisation de l'équerre n'est pas maîtrisée par tous : beaucoup d'élèves ne savent pas comment positionner l'équerre.
Matériel	– Chaque élève a une équerre et une feuille blanche. – L'enseignant a tracé au tableau quadrillé 2 rectangles de tailles différentes (Figure 1).

SÉANCE 1	**1 heure**
Exercice écrit *15 min*	Exercices de « *Problèmes* » pour l'évaluation formative d'une notion déjà étudiée : « Situations additives : chercher un tout avec des parties inégales », exercices 3 et 4 p. 172 du manuel.
Calcul mental *10 min*	Compétence : « Ajouter des milliers à un nombre entier ». Exemple : 6 748 + 3 000. *Stratégie :* C'est le nombre de milliers qui change, les chiffres de la classe des unités ne changent pas. 6 748 + 3 000 = (6 000 + 3 000) + 748 = 9 000 + 748 = 9 748. Items : 3 210 + 4 000 ; 5 000 + 1 857 ; 6 412 + 6 000 ; 4 865 + 8 000 ; 4 300 + 9 000.
Mise en projet d'apprentissage *1 min*	Présentation de l'objectif d'apprentissage *« Aujourd'hui, vous allez apprendre à reconnaître et à tracer des droites perpendiculaires. »* Présentation des résultats attendus *« À la fin de la séance, vous saurez vérifier si des droites sont perpendiculaires ; vous saurez aussi en tracer sur du papier quadrillé et sur du papier uni. »*
Explicitation et pratique guidée *34 min*	➤ **Rappel des connaissances préalables** *(révision du CE2)* Montrer la figure 1 et demander : *« Comment s'appellent les figures qui sont tracées au tableau ? »* → Des rectangles. *« Comment sait-on que ce sont des rectangles ? »* → Les rectangles ont des angles droits. *« Comment sait-on qu'elles ont des angles droits ? »* → Car les lignes du quadrillage se coupent en formant des angles droits. *« Avec quel instrument peut-on le vérifier ? »* → Une équerre. Montrer et demander aux élèves de montrer l'angle droit de l'équerre et ses 2 côtés perpendiculaires.
Explicitation	➤ **Sous-compétences 1 et 2 : Définir le mot « perpendiculaire » et vérifier que les côtés d'une figure ou des droites sont perpendiculaires.** « APPRENONS ENSEMBLE » A Après lecture de la situation du manuel, vérifier la compréhension de la situation par les élèves grâce à des questions ou reformulations. C'est l'enseignant qui explique la démarche pour résoudre le problème ; les élèves écoutent. L'enseignant reprend, pas à pas, les phases décrites dans le « APPRENONS ENSEMBLE » du manuel pour résoudre la situation-problème. Préciser que l'on peut dire que les rues de Gaëlle et Kenza sont perpendiculaires ou que la rue de Gaëlle est perpendiculaire à celle de Kenza ou que la rue de Kenza est perpendiculaire à celle de Gaëlle.
Pratique guidée	« APPRENONS ENSEMBLE » B L'enseignant reprend les étapes de la démarche (compréhension et stratégie) en guidant les élèves par des questions. « ENTRAÎNONS-NOUS » : Faire oralement l'exercice 1 et sur ardoise les exercices 2 et 3 p. 126 du manuel.
Explicitation	➤ **Sous-compétence 3 : Connaître le chemin le plus court entre une droite et un point** • Exemple 1 : L'enseignant trace au tableau une droite (*d*) et un point A n'appartenant pas à (*d*). *« Quel est le chemin le plus court entre la droite (d) et le point A ? »* L'enseignant trace plusieurs segments reliant (*d*) à des points appartenant à (*d*) dont un perpendiculaire à (*d*). Il peut ensuite comparer la longueur des segments en les reportant avec un compas sur une demi-droite ou en les mesurant avec une règle graduée. Il utilise ensuite le compas pour montrer que le chemin le plus court est le segment perpendiculaire à (*d*). *Présentation de la stratégie* Pour trouver le chemin le plus court entre une droite et un point, on trace le segment perpendiculaire à la droite passant par ce point. • Exemple 2 : L'enseignant trace une autre droite (*y*) et un point B. Quel est le chemin le plus court ? Un élève vient au tableau tracer le segment perpendiculaire.
Pratique guidée	« ENTRAÎNONS-NOUS » : Faire sur l'ardoise l'exercice 4 p. 126

Explicitation	➤ **Sous-compétence 4 :** Tracer des droites perpendiculaires sur une feuille blanche. • Exemple 1 : Tracer une droite *d* horizontale sur le tableau uni et dire : « *On veut tracer une droite e perpendiculaire à la droite* d. » *Présentation de la stratégie* – On place l'équerre sur la droite *d* ; on pose l'angle droit de l'équerre sur la droite et on superpose un côté de l'angle droit de l'équerre sur la droite. Il y a 4 positions possibles (voir ci-contre). – On trace une droite le long de l'autre côté de l'angle droit de l'équerre. – On peut prolonger cette droite avec la règle, on nomme la droite e et on marque un angle droit par un « coin ».  • Exemple 2 : Un élève vient tracer une droite *f* perpendiculaire à la droite *d* puis e. Utiliser les différentes positions de l'équerre.
Pratique guidée	« ENTRAÎNONS-NOUS » : Demander aux élèves de tracer des droites perpendiculaires sur leur feuille blanche.
Explicitation	➤ **Sous-compétence 5** : Sur une feuille blanche, tracer des droites perpendiculaires en passant par un point donné. 1er cas : Le point est sur la droite. • Exemple 1 : Sur le tableau uni, l'enseignant trace une droite *d* horizontale et place un point O sur la droite. On veut tracer une droite e perpendiculaire à la droite *d* passant par le point O. *Présentation de la stratégie* – On place l'équerre sur la droite *d* : on pose l'angle droit de l'équerre sur le point O, on superpose un côté de l'angle droit de l'équerre sur la droite. Il y a 4 positions possibles. – On trace la droite le long de l'autre côté de l'équerre. • Exemple 2 : Un élève vient placer un point P et un point R vers les extrémités de *d*. Utiliser les positions adéquates de l'équerre pour tracer les perpendiculaires. 2nd cas : Le point n'est pas sur la droite. • Exemple 1 : Placer un point S qui ne soit pas sur la droite *d*. *Présentation de la stratégie* – On place l'équerre sur la droite : le point étant d'un côté de la droite, il n'y a plus que 2 positions possibles et quelquefois, selon la distance du point à la droite, il n'y en a plus qu'une quand il faut utiliser le côté le plus long de l'équerre. – On fait glisser l'équerre jusqu'au point. – On trace la droite le long du côté de l'équerre. On peut prolonger la droite. • Exemple 2 : Un élève vient placer un point T et un point U à des distances éloignées de la droite. Utiliser les positions adéquates de l'équerre pour tracer les perpendiculaires.
Pratique guidée	« ENTRAÎNONS-NOUS » : Faire sur l'ardoise l'exercice 5 p. 126 du manuel.

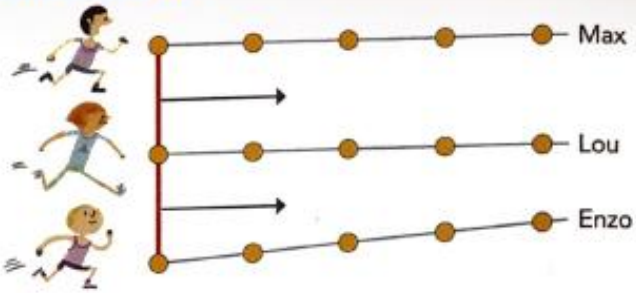
SÉANCE 2	1 heure
Exercice écrit *5 min*	Correction des exercices faits la veille : exercices 3 et 4 p. 172 du manuel.
Calcul mental *15 min*	1. Même compétence que la veille : « Ajouter des milliers à un nombre entier ». 2. Réactivation de la compétence « Écrire des nombres en lettres ». L'enseignant écrit des nombres en chiffres au tableau, les élèves les écrivent en lettres sur leur ardoise.
Explicitation *5 min*	Rappel de l'explicitation de la séance 1 Rappeler ce que sont des droites perpendiculaires puis, à partir de quelques exemples au tableau, rappeler les différentes stratégies pour identifier et tracer des droites perpendiculaires.
Pratique autonome *30 min*	« JE TRAVAILLE SEUL(E) » Travail par écrit : – *Sous-compétences 1 et 2* : Exercices 6 et 7 – *Sous-compétence 5* : Exercice 9 – *Sous-compétences 3 et 4* : Exercice 8 Différenciation : Repérer les élèves en difficulté dans ces exercices. Les aider à faire ces exercices. On peut également leur proposer de refaire par écrit des exercices de « ENTRAÎNONS-NOUS ». Les élèves qui n'ont pas de difficulté font, seuls, l'exercice 10 et, en binômes, les exercices 11 et 12 de « JE VAIS PLUS LOIN ». Les exercices sont corrigés pendant la séance.
Objectivation *5 min*	« J'APPRENDS / J'AI COMPRIS » – Demander : « *Qu'avez-vous appris ?* » – Lire et commenter les rubriques « J'APPRENDS » et « J'AI COMPRIS » du manuel p. 127.
Évaluations	• Formative : Pour la semaine suivante, faire apprendre la rubrique « J'APPRENDS », lire la rubrique « J'AI COMPRIS » et faire les exercices 3 et 4 de « *J'évalue mes connaissances* » p. 156 du manuel. • Sommative (bilan périodique) : exercices 49.1 et 49.2 p. 219 du guide pédagogique.
Réactivation	Pendant les semaines et les mois qui suivent, à chaque réactivation, revoir la leçon et faire un exercice du Cahier d'exercices (voir la planification de réactivation p. 11).

Extrait du manuel « Maths explicites, CM1 », Hachette, 2016, pp. 128-129

ESPACE ET GÉOMÉTRIE **50** Reconnaître des droites parallèles

APPRENONS ENSEMBLE

A Dans la cour de l'école, Max, Lou et Enzo alignent des plots pour préparer les deux couloirs de la course de 40 m.
La maîtresse dit à Enzo :
« Tu vas avoir un problème ! »
Quel est ce problème ?



Est-ce un problème d'alignement ? → À vue d'œil, les plots d'Enzo sont bien alignés.

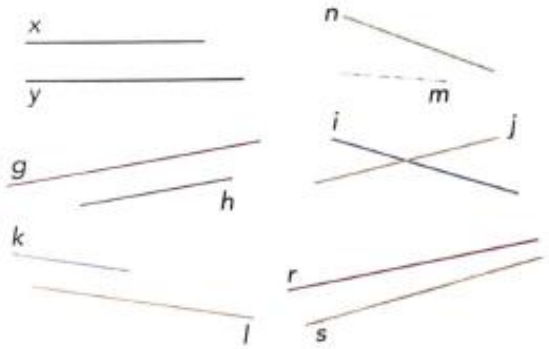
Est-ce un problème de largeur de couloir ? → Oui. La largeur du couloir diminue. Enzo rapproche de plus en plus ses plots de ceux de Lou. La ligne de plots d'Enzo va finir par couper la ligne de Lou.

Les lignes de plots pour faire les couloirs ne doivent pas se couper. Elles doivent être parallèles.

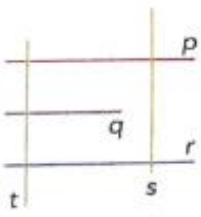
B Les lignes de plots de Max et de Lou sont-elles parallèles ?

ENTRAÎNONS-NOUS

1 Dans chaque figure, **indique** si les droites sont parallèles.
Les droites *x* et *y* sont parallèles ou la droite *x* est parallèle à la droite *y*.



2 **Réponds** aux questions par **oui** ou **non**.



a. *p* est-elle parallèle à *q* ?
b. *r* et *t* sont-elles parallèles ?
c. *p* est-elle parallèle à *r* ?
d. *p*, *q* et *r* sont-elles parallèles ?
e. *t* est-elle parallèle à *s* ?
f. *p* est-elle parallèle à *t* ?

3 **Recopie** ces droites sur ton cahier. Les droites de la même couleur sont parallèles.



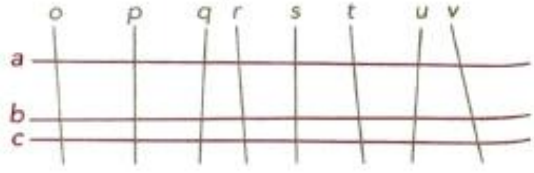
Prends comme repère un coin de carreau, puis vérifie l'écart entre 2 droites de la même couleur en comptant les carreaux.

4 **Trouve** quelles droites sont parallèles à la droite *x*.



Pour t'aider, tu peux utiliser un calque du réseau de parallèles.

5 Quelles droites sont parallèles entre elles ?



J'APPRENDS

Des droites **parallèles** sont des droites qui ne se coupent jamais.
Exemple : La droite *a* est parallèle à la droite *b*.
Les droites *a* et *b* sont parallèles.



J'AI COMPRIS

- Pour vérifier ou tracer des droites parallèles, je peux utiliser un calque de réseau de parallèles.
- Pour vérifier si la droite *x* est parallèle à la droite *y*, on superpose le calque sur *x* ; *y* coupe une droite du réseau : elle n'est pas parallèle à *x*.

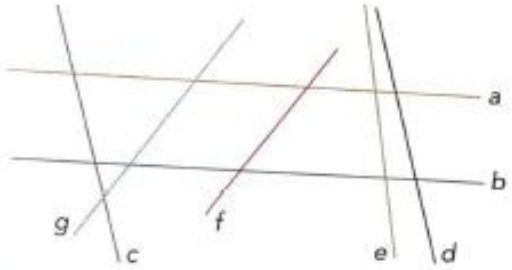


un réseau de parallèles



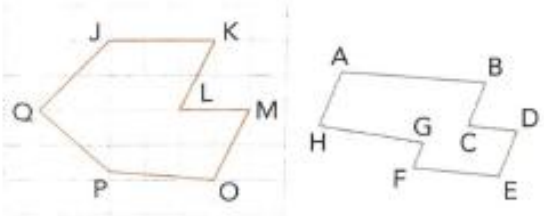
JE TRAVAILLE SEUL(E)

6 * **a. Écris** les noms des droites qui, à vue d'œil, te semblent parallèles.

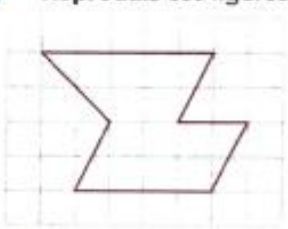


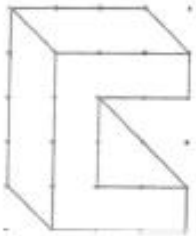
b. Utilise le réseau de parallèles pour vérifier tes réponses.

7 * Quels sont les côtés parallèles de ces figures ? Tu peux utiliser le réseau de parallèles.



8 ** **Reproduis** ces figures.





9 * Sur une feuille quadrillée, **construis** cette figure.

a. Trace 2 droites parallèles *x* et *y*.

b. Trace 2 droites parallèles *m* et *n* qui coupent les droites *x* et *y* aux points F, G, H et I.

c. Que peux-tu dire de la figure FGHI ?

10 * Sur une feuille quadrillée, **construis** cette figure.

a. Trace 2 droites parallèles *x* et *y*.

b. Trace 2 droites parallèles *o* et *p* perpendiculaires à *x* et *y* et qui coupent les droites *x* et *y* aux points J, K, L et M.

c. Que peux-tu dire de la figure JKLM ?

JE VAIS PLUS LOIN

11 ** Max, Enzo et Lou ont placé des plots pour délimiter 2 couloirs parallèles de 40 m de long. Ils ont placé un plot sur chaque ligne de départ et d'arrivée et ils ont placé un plot tous les 5 m.

a. Combien de plots chaque élève a-t-il placés ?

b. Combien de plots ont-ils placés en tout ?



12 *** **À la manière de Vasarely.**

a. Sur ta feuille de dessin, **trace** un grand cercle.

b. Trace des lignes horizontales parallèles de plus en plus espacées. Ces lignes se déforment à l'intérieur du cercle.



c. Colorie de la même couleur une ligne sur deux.

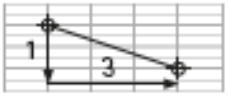
ESPACE ET GÉOMÉTRIE **50**

Reconnaître des droites parallèles

Manuel pp. 128-129

Programmes	– Reconnaître que des droites sont parallèles. – Utiliser en situation le vocabulaire géométrique : droites parallèles.
Introduction	La notion de droites parallèles n'a pas été étudiée en CE2. Toutefois le mot « parallèle » peut être connu par les élèves car il est utilisé dans la vie courante (rue parallèle, monde parallèle…). En CM2, les élèves utiliseront les instruments pour vérifier le parallélisme de deux droites (règle et équerre) et pour tracer des droites parallèles. C'est donc avec un réseau de parallèles (p. 288) que les élèves en CM1 vérifieront le parallélisme de droites.
Matériel	– Chaque élève a un calque-réseau de parallèles (p. 288), l'enseignant aussi en a préparé un en grand format. L'enseignant a tracé sur le tableau uni : – 2 droites *x* et *y* parallèles (Figure 1) ; – 2 droites *a* et *b* sensiblement non parallèles (Figure 2).

SÉANCE 1	**1 heure**
Exercice écrit *15 min*	Exercice de *« J'évalue mes connaissances »* pour l'évaluation formative d'une notion déjà étudiée : en ce début de période, l'enseignant choisira une compétence que certains élèves maîtrisent mal.
Calcul mental *10 min*	Compétence : « Soustraire des milliers à un nombre entier ». Exemple : 6 748 – 3 000. *Stratégie :* Seul le nombre de milliers change, les chiffres de la classe des unités ne changent pas 6 748 – 3 000 = (6 000 – 3 000) + 748 = 3 000 + 748 = 3 748. Items : 8 247 – 4 000 ; 10 563 – 2 000 ; 8 430 – 7 430 ; 8 004 – 6 000 ; 15 146 – 3 000.
Mise en projet d'apprentissage *1 min*	Présentation de l'objectif d'apprentissage *« Aujourd'hui, vous allez apprendre ce que sont des droites parallèles et apprendre à les reconnaître. »* Présentation des résultats attendus *« À la fin de la séance, vous saurez vérifier si des droites et des côtés de figures sont parallèles ; vous saurez aussi en tracer sur du papier quadrillé. »*
Explicitation et pratique guidée *34 min*	➤ **Rappel des connaissances préalables** Dire : *« Vous avez déjà appris ce qu'est une droite* (un élève vient en tracer une au tableau), *des points alignés* (un élève vient en placer sur la droite), *des droites perpendiculaires* (en tracer une ou deux passant par des points sur la droite et à l'extérieur de la droite). »
Explicitation	➤ **Sous-compétences 1 et 2 : Définir le mot « parallèles » et percevoir, à vue d'œil, que des droites sont parallèles.** « APPRENONS ENSEMBLE » A Après lecture de la situation du manuel, expliquer les mots couloirs et plots et vérifier la compréhension de la situation par les élèves grâce à des questions ou reformulations. Pour cela, l'enseignant pourra soit les questionner, soit leur demander d'expliquer avec leurs propres mots. C'est l'enseignant qui explique la démarche pour résoudre le problème ; les élèves écoutent. L'enseignant reprend, pas à pas, les phases décrites dans le « APPRENONS ENSEMBLE » du manuel pour résoudre la situation-problème. Préciser la définition de droites parallèles : des droites qui ne se coupent jamais, même si on les prolonge. Elles vont dans la même direction et l'écartement (la distance) entre des droites parallèles est constant : il ne change pas. On peut dire que les lignes droites de Lou et Enzo ne sont pas parallèles ou que la ligne d'Enzo n'est pas parallèle à celle de Lou ou que la ligne de Lou n'est pas parallèle à celle d'Enzo. « APPRENONS ENSEMBLE » B L'enseignant reprend les étapes de la démarche (compréhension et stratégie) en guidant les élèves par des questions.
Pratique guidée	« ENTRAÎNONS-NOUS » : Faire sur l'ardoise l'exercice 1 p. 128 du manuel.
Explicitation	➤ **Sous-compétence 3 : Vérifier sur un quadrillage que des droites sont parallèles.** • Exemple 1 : *« On a déjà vu que les droites du quadrillage du tableau et de votre cahier sont perpendiculaires. »* L'enseignant repasse à la craie de couleur 2 lignes horizontales ou verticales du tableau et les nomme *a* et *b*. *Demander : « Que peut-on dire des droites a et b ? »* → Elles sont parallèles. *« On le voit à vue d'œil mais qu'est-ce qui le prouve ? »* → L'écart : le nombre de carreaux reste toujours le même. *« Que peut-on dire de toutes les lignes verticales du tableau ? »* → Elles sont toutes parallèles entre elles. • Exemple 2 : *« Que peut-on dire de toutes les lignes horizontales ? »*
Pratique guidée	« ENTRAÎNONS-NOUS » : Faire sur l'ardoise l'exercice 2 p. 128 du manuel.

Explicitation	➤ **Sous-compétence 4 : Tracer des droites parallèles sur du papier quadrillé et pointé.** • **Exemple 1 :** L'enseignant trace une droite *d* horizontale sur le tableau quadrillé. « *On veut tracer une droite e parallèle à la droite* d. » ***Présentation de la stratégie*** Les droites horizontales du tableau ou du cahier étant parallèles, il suffit de tracer une ligne horizontale du quadrillage avec la règle. • **Exemple 2 :** L'enseignant trace une droite *m* oblique sur le quadrillage, passant par des points d'intersection des carreaux. « *Comment tracer une droite parallèle à cette droite m ?* » ***Présentation de la stratégie*** – On repère les coins (les points d'intersection) des carreaux par lesquels la droite passe. – On calcule la position entre ces 2 points en comptant les carreaux qui les séparent.  – On choisit un écart entre les droites de 1, 2 ou 3… carreaux et, à partir d'un coin de carreau, on reproduit le même déplacement pour placer le 2nd point. – On trace la droite passant par ces 2 points.
Pratique guidée	« ENTRAÎNONS-NOUS » : Faire sur l'ardoise l'exercice 3 p. 128 du manuel.
Explicitation	➤ **Sous-compétence 5 : Vérifier sur papier uni que des droites sont parallèles.** • **Exemple 1 :** montrer la figure 1 et demander si les droites *x* et *y* semblent parallèles. Oui. « *Comment le vérifier ?* » → Présenter le calque de réseau de parallèles. ***Présentation de la stratégie*** – On place le calque de manière à superposer une droite du calque sur la droite *x*. – On vérifie alors la position de la droite *y* : si elle croise l'une des droites du réseau, c'est qu'elle ne va pas dans la même direction, l'écartement entre ces droites n'est pas constant ; il change. Donc elle n'est pas parallèle à *x*. Si *y* se superpose ou ne croise pas une droite du réseau, c'est qu'elle est parallèle à *x*.
Pratique guidée	• **Exemple 2 :** Demander à un élève de venir appliquer la stratégie pour la figure 2. « ENTRAÎNONS-NOUS » : Faire oralement l'exercice 4 et sur l'ardoise l'exercice 5 p. 128 du manuel.

SÉANCE 2	**1 heure**
Exercice écrit *5 min*	Correction des exercices faits la veille.
Calcul mental *15 min*	1. Même compétence que la veille : « Soustraire des milliers à un nombre entier ». 2. Réactivation de la compétence : « Décomposer un nombre ». L'enseignant propose des nombres à décomposer ou à recomposer.
Explicitation *5 min*	Rappel de l'explicitation de la séance 1 Rappeler ce que sont des droites parallèles puis, à partir de quelques exemples au tableau, rappeler les différentes stratégies pour identifier des droites parallèles.
Pratique autonome *30 min*	« JE TRAVAILLE SEUL(E) » – *Sous-compétences 1, 2 et 3* : Exercice 6 – *Sous-compétences 2 et 5* : Exercice 7 – *Sous-compétence 4* : Exercices 9 et 10 **Différenciation :** Repérer les élèves en difficulté dans ces exercices. Les aider à faire ces exercices. L'enseignant questionne et aide les élèves à s'approprier la stratégie précédemment présentée. On peut également leur proposer de refaire par écrit des exercices de « ENTRAÎNONS-NOUS ». Les élèves qui n'ont pas de difficulté font, seuls, l'exercice 8 et, en binômes, les exercices 11 et 12 de « JE VAIS PLUS LOIN ». Les exercices sont corrigés pendant la séance.
Objectivation *5 min*	« J'APPRENDS / J'AI COMPRIS » – Demander : « *Qu'avez-vous appris ?* » – Lire et commenter les rubriques « J'APPRENDS » et « J'AI COMPRIS » du manuel p. 129.
Évaluations	• **Formative :** Pour la semaine suivante, faire apprendre la rubrique « J'APPRENDS », lire la rubrique « J'AI COMPRIS » et faire l'exercice 5 de « *J'évalue mes connaissances* » p. 156 du manuel. • **Sommative (bilan périodique) :** exercices 50.1 et 50.2 p. 219 du guide pédagogique.
Réactivation	Pendant les semaines et les mois qui suivent, à chaque réactivation, revoir la leçon et faire un exercice du Cahier d'exercices (voir la planification de réactivation des compétences dans le guide pédagogique p. 11).

Annexe 6 : Collection « CapMaths » - Perpendicularité

Extrait du manuel « CapMaths, CM1 », Hatier, 2016, pp. 27-28

UNITÉ 3

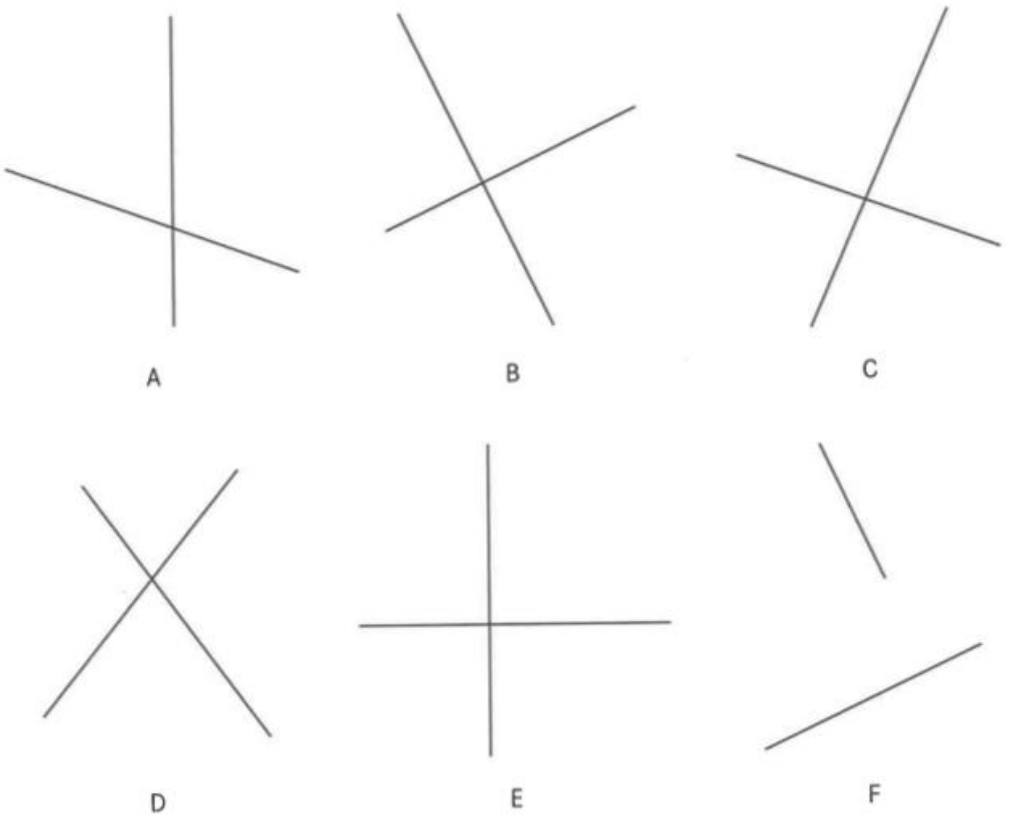
Droites perpendiculaires

► guide apprentissage 6

RECONNAITRE DES DROITES PERPENDICULAIRES

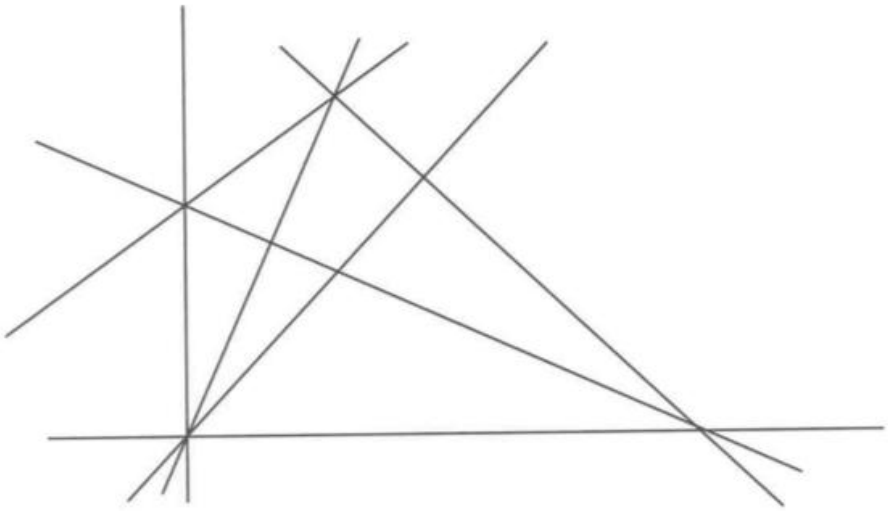
DICO 61

1 Quelles sont les figures formées de deux droites perpendiculaires ? .....



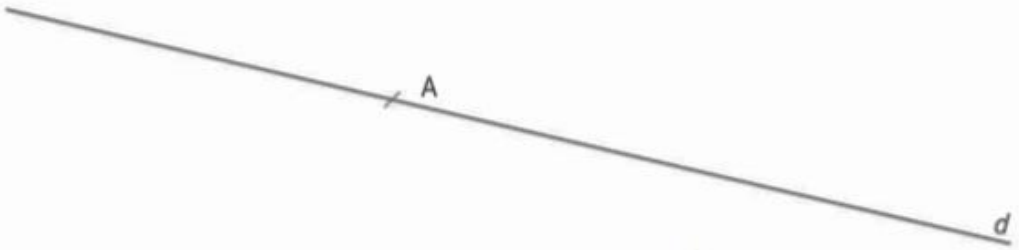
2 Repasse d'une même couleur les droites qui sont perpendiculaires.

★★

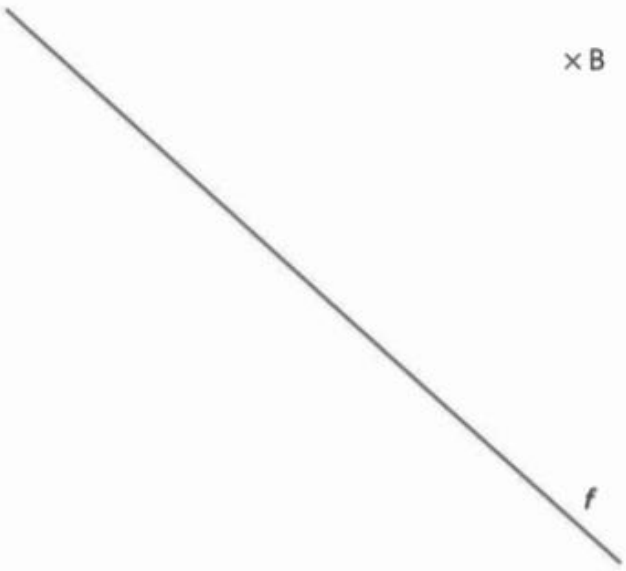


TRACER DES DROITES PERPENDICULAIRES

3 Trace la droite qui passe par le point A et qui est perpendiculaire à la droite *d*. DICO 62



4 Trace la droite qui passe par le point B et qui est perpendiculaire à la droite *f*. DICO 62



ÉNIGME

Sans utiliser d'instrument, fabrique un gabarit d'angle droit avec une feuille comme celle-ci, sans bords droits.



Extrait du guide pédagogique « CapMaths, CM1 », Hatier, 2016, pp. 93-94

APPRENTISSAGE 6

Angle droit, droites perpendiculaires

Connaissances travaillées

- **Angle droit : quart de plan**
- **Notion de droites perpendiculaires**
- **Tracé d'une droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné.**

Dans cette situation, les élèves découvrent un **nouvel aspect de l'angle droit** : quatre angles droits de même sommet recouvrent entièrement le plan et les côtés de ces 4 angles déterminent deux droites qu'on appelle « droites perpendiculaires ».

Les élèves vont également apprendre à **reconnaitre des droites perpendiculaires dans des orientations différentes**, d'abord par la perception, puis par vérification avec l'équerre. Nombreux sont les élèves qui éprouvent des difficultés pour **tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné**, notamment quand le point est extérieur à la droite. Faire précéder le tracé avec l'équerre d'un tracé à main levée devrait aider l'élève à se construire une bonne image de deux droites perpendiculaires qu'il pourra ensuite projeter sur la figure à compléter et qui guidera son tracé.

unité 3

Situation phare 6 : 4 ANGLES DROITS RECOUVRENT LA FEUILLE

Cette situation est conçue pour être conduite sur deux séances :

– dans une première séance, traiter les **phases 1 et 2** suivies de l'exercice 1 (ou 1 et 2) du cahier p. 27 ;

– après avoir rappelé ce que sont deux droites perpendiculaires et comment procéder pour s'assurer que deux droites sont perpendiculaires, traiter la **phase 3** suivie des exercices 3 et 4 du cahier p. 28 et de la recherche de l'énigme.

Tâche	Matériel
Les élèves, avec une feuille de papier blanc et un morceau de papier calque, doivent partager le plan en **4 angles égaux de même sommet**. Après avoir constaté que les 4 angles sont droits et forment 2 droites dites « perpendiculaires », ils doivent avec leurs instruments de géométrie **tracer deux droites perpendiculaires**. Ils apprennent ensuite à tracer une droite qui est perpendiculaire à une autre droite et qui passe par un point donné.	pour la classe : – 4 angles de même sommet → **fiche 19** découpée sans bords droits (format A3) – 4 angles droits de même sommet → **fiche 20** sans bords droits (format A3) – **fiche 21** rétroprojetée – plusieurs feuilles A4, sans bords droits – feuille de calque (format A4) – équerre de tableau par équipes de 2 : – morceaux de calque (5 cm × 5 cm) – demi-feuilles A4 sans bords droits par élève : – **fiche 21 questions A et B** – demi-feuille A4 sans bords droits – équerre, règle

AVANT LA SÉANCE

• Remettre aux élèves plusieurs demi-feuilles A4 et les faire découper le plus près des bords de façon à ce qu'elles n'aient plus de bords droits :



ÉQUIPES DE 2 ET COLLECTIF

PHASE 1 Partager une feuille en 4 angles égaux



• Afficher au tableau la **fiche 19** agrandie et commenter :

➡ *On voit 4 segments qui ont une même extrémité. Ces 4 segments partagent la feuille en 4 angles qui ont tous le même sommet. Visiblement, ces angles ne sont pas tous égaux.*

• Remettre aux équipes une **demi-feuille A4 sans bords droits** et **plusieurs morceaux de calque.** Leur demander de marquer un point à peu près au centre de la feuille.

• Expliquer le problème :

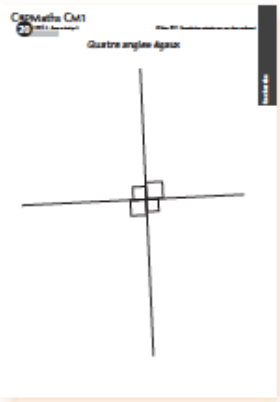
➡ *Vous allez chercher à partager la feuille en 4 angles qui doivent tous avoir pour sommet le point marqué. Mais attention, les **4 angles doivent être tous égaux**. Vous disposez de petits morceaux de calque et de tous vos instruments de géométrie. **Vous n'êtes pas autorisés à plier la feuille.** Si le premier essai n'est pas concluant, vous pourrez faire d'autres essais sur d'autres feuilles, mais ne jetez pas vos différents essais.*

• Laisser un temps suffisant pour que les équipes envisagent une stratégie de résolution et approchent de la solution, sans nécessairement y parvenir. La recherche sera poursuivie collectivement.

Procédures de résolution possibles :

1. Tracer un angle sur la feuille et le reporter avec le calque jusqu'à voir 4 angles, comparer le 4e angle aux 3 premiers. Recommencer en ajustant la taille du premier angle.
2. Tracer une droite passant par le point marqué, la feuille est ainsi partagée en deux moitiés, puis chercher à partager chaque moitié en deux angles égaux en traçant un segment ayant pour sommet le point marqué. Comparer les deux angles déterminés par le segment et ajuster la position du segment.
3. Tracer quatre angles droits de même sommet en référence à une feuille quadrillée (*cette procédure n'est pas la plus usuelle, mais peut être utilisée par des élèves*).

• Demander aux équipes de présenter leurs procédures dans l'ordre où elles sont mentionnées dans le commentaire. Afficher ensuite au tableau différentes productions où les 4 angles s'approchent d'un angle droit. Après débat, l'hypothèse est émise et vérifiée que les 4 angles sont droits.



• Afficher au tableau la **fiche 20** au format A3 sur laquelle sont tracés 4 angles droits de même sommet avec les 4 angles codés. Demander aux élèves de commenter ce qu'il voit : 4 angles droits de même sommet, les côtés des angles n'ont pas même longueur… et les côtés des angles forment deux droites.

• Vérifier l'exactitude de cette remarque sur la figure et conclure :

Quatre angles droits de même sommet forment deux droites qu'on appelle des **droites perpendiculaires**.

INDIVIDUEL ET COLLECTIF

PHASE 2 Tracé de 2 droites perpendiculaires

• Remettre aux élèves une **demi-feuille A4 sans bords droits** et indiquer :

➡ *Sur cette feuille, vous allez tracer avec vos instruments de géométrie deux droites perpendiculaires. Vous allez essayer de le faire en traçant le moins d'angles droits possible.*

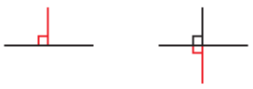
• Une fois le tracé effectué, faire exposer les différentes méthodes utilisées.

Procédures possibles :

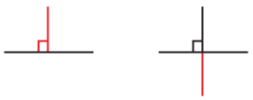
1. Tracé de 3 angles droits ayant même sommet. L'équerre est utilisée trois fois. Vérification que le 4e angle est droit.



2. Tracé d'une droite et, de part et d'autre de celle-ci, de 2 angles droits ayant même sommet et dont un côté est porté par la droite. L'équerre est utilisée deux fois.
Vérification que les deux autres angles sont droits.



3. Tracé d'une droite, puis d'un angle droit dont un côté est porté par la droite et prolongement à la règle du second côté de l'angle de l'autre côté de la droite. L'équerre n'est utilisée qu'une fois.
Vérification que les trois autres angles sont droits.

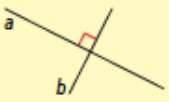


• La comparaison des productions des élèves fait apparaître la **procédure 3** comme étant la plus économique (une seule utilisation de l'équerre pour tracer), mais aussi la plus précise.

• Faire une **synthèse** sur les droites perpendiculaires :

Les droites perpendiculaires

• **Deux droites qui se coupent en formant un angle droit sont appelées des droites perpendiculaires.**



• **Les quatre angles qu'elles forment sont des angles droits.**

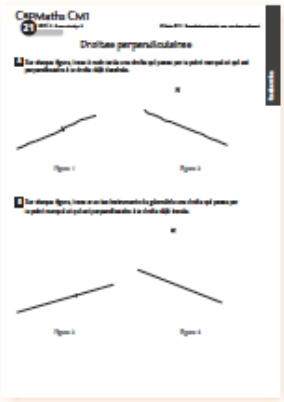
On dit que : les droites *a* et *b* sont perpendiculaires
ou la droite *a* est perpendiculaire à la droite *b*
ou la droite *b* est perpendiculaire à la droite *a*
Ces trois phrases ont la même signification.

Une difficulté consiste à considérer comme équivalentes les expressions « **droites perpendiculaires** » où le pluriel marque le fait que la perpendicularité est une relation entre deux droites et l'expression la « **droite perpendiculaire à …** » où une des deux droites est privilégiée.

INDIVIDUEL ET COLLECTIF

PHASE 3 Tracé d'une droite perpendiculaire à une autre

FICHE 21 questions A et B



• Distribuer la **fiche 21** et demander de lire les consignes des deux questions. S'assurer que l'expression « droite qui passe par… » est comprise des élèves. La présenter comme signifiant que « le point doit être sur la droite ».

• Préciser pour la **question A** :

➡ *Avant de faire un tracé, il est important d'imaginer ce qu'on va obtenir, cela aide à placer correctement les instruments. Faire un tracé à main levée permet également de mieux voir ce que l'on va obtenir. Les deux droites déjà tracées l'ont été à main levée. Il faut que vous traciez des droites perpendiculaires à ces droites sans l'aide d'aucun outil, en faisant un tracé approximatif.*

• Préciser également pour la **question B** :

➡ *Ce sont les mêmes constructions qui sont demandées, mais cette fois avec les instruments.*

• Venir en aide aux élèves qui ont du mal à anticiper la position de la droite et à la tracer à main levée.

• Procéder à une **correction collective** avec le support de la fiche photocopiée sur transparent ou du TNI.

■ **Question A** : Demander aux élèves comment ils ont fait pour anticiper la position de la droite perpendiculaire à la droite tracée : par exemple, tourner la fiche de façon à ramener la droite tracée horizontale ou tourner la tête pour l'amener dans cette position…

■ **Question B** : S'appuyer sur les tracés faits à main levée pour placer l'équerre, insister sur le placement de l'équerre :

– **Figure 3** : Placement d'un bord de l'angle droit de l'équerre contre la droite et du sommet de l'angle droit de l'équerre contre le point marqué, en tenant compte de l'épaisseur de la mine du crayon afin que le trait passe bien par le point. Le prolongement du trait de l'autre côté la droite nécessite de placer correctement le bord de la règle contre le trait toujours en tenant compte de l'épaisseur de la mine du crayon.

– **Figure 4** : Placement d'un bord de l'angle droit de l'équerre contre la droite et de l'autre bord de l'angle droit de l'équerre contre le point (centre de la croix). Ces deux contraintes sont difficiles à tenir car portant chacune sur un bord différent de l'équerre à la différence du tracé sur la figure 3. La technique s'acquiert au fil du temps et à force d'entrainement. Un élément déterminant de la réussite est la souplesse et la lenteur du geste en évitant toute crispation.

Annexe 7 : Collection « CapMaths » - Parallélisme

Matériel photocopiable «CapMaths, CM1 » Hatier, 2017, fiches 48-49-50

CapMaths CM1

48 UNITÉ 6 - Apprentissage 6

Guide p. 190

© Hatier 2017 - Reproduction autorisée pour une classe seule

Construction d'une voie ferrée

A Des shadoks ont construit plusieurs tronçons d'une voie ferrée.
Pour chaque tronçon, les shadoks ont-ils posé les rails correctement ?
Expliquez votre réponse.

Tronçon 1 La pose est correcte La pose est incorrecte

Explication : .....

Tronçon 2 La pose est correcte La pose est incorrecte

Explication : .....

Tronçon 3 La pose est correcte La pose est incorrecte

Explication : .....

© Hatier 2017 - Reproduction autorisée pour une classe seulement

Droites parallèles

B Effectue les tracés et mesures nécessaires pour savoir si ces droites sont parallèles.

a. Les droites sont-elles parallèles ? OUI NON





b. Les droites sont-elles parallèles ? OUI NON





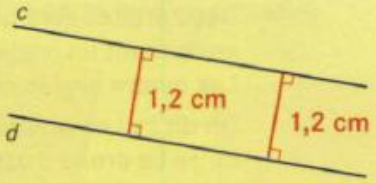
Extrait du « DicoMaths, CM1 », Hatier, 2016, p.36

Droites parallèles

DICO 63

Connaitre les droites parallèles

Deux droites parallèles sont deux droites qui ne se coupent pas.
L'écartement entre deux droites parallèles est toujours le même.
On dit : « Les droites *c* et *d* sont parallèles »
ou : « La droite *c* est parallèle à la droite *d* »
ou : « La droite *d* est parallèle à la droite *c* ».



1,2 cm = 1 cm 2 mm

DICO 64

Vérifier que deux droites sont parallèles

Tu peux utiliser un guide-âne.



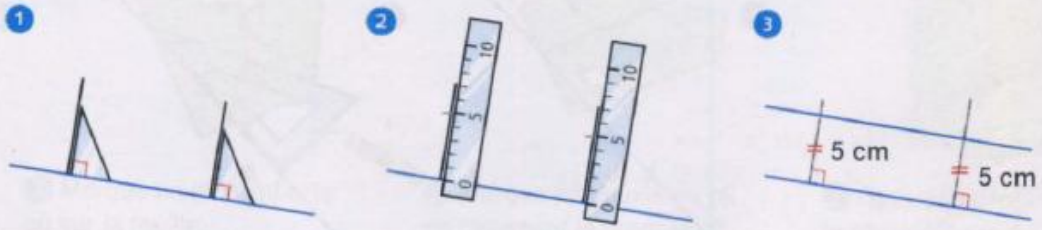
Les deux droites sont parallèles.



Les deux droites ne sont pas parallèles.

DICO 65

Tracer une droite parallèle à une autre droite



Cette méthode peut également être utilisée pour vérifier que deux droites sont parallèles.

UNITÉ 6

Droites parallèles

► guide apprentissage 6

RECONNAITRE DES DROITES PARALLÈLES

DIDO 65

1 **a.** À l'œil, quelles sont les figures où les droites semblent parallèles ? .....

b. Utilise maintenant tes instruments pour savoir quelles sont les figures où les droites sont parallèles. .....

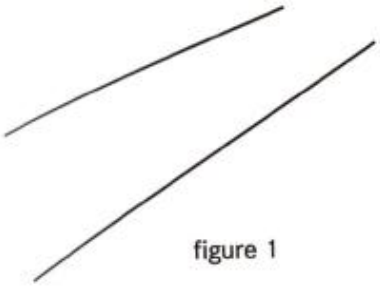


figure 1

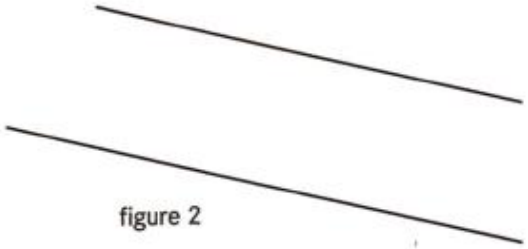


figure 2

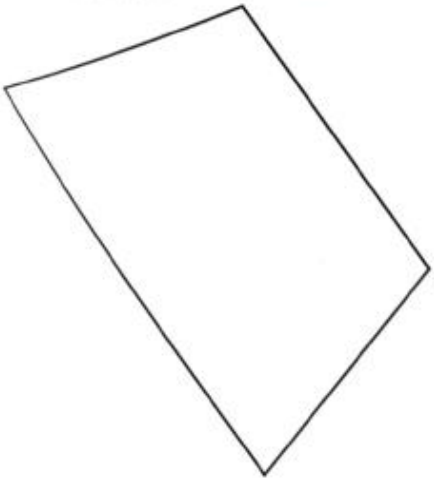


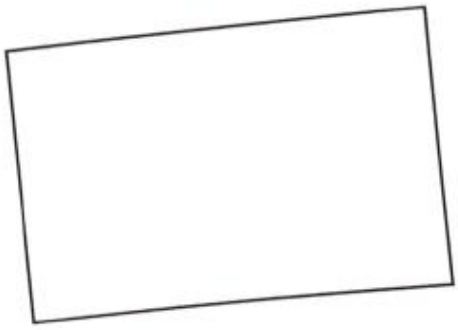
figure 3



figure 4

2 Dans chaque quadrilatère, trouve si des côtés sont parallèles.
Utilise tes instruments et repasse d'une même couleur les côtés qui sont parallèles.

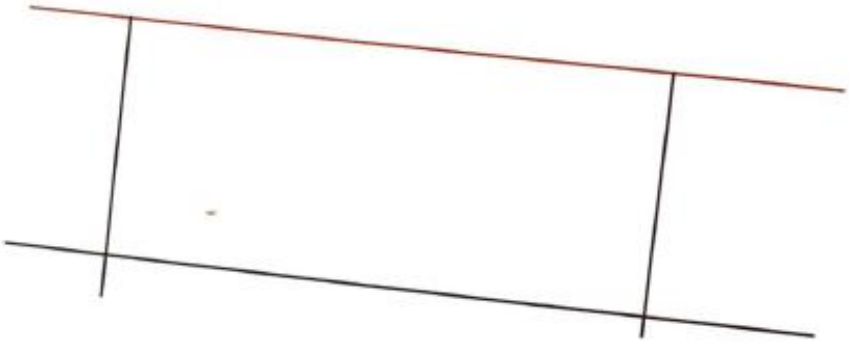




TRACER DES DROITES PARALLÈLES

3 Gaïa a voulu tracer une droite parallèle à la droite rouge. DICO 65
Tous les tracés qu'elle a faits sont en noir.

Sa construction est-elle exacte ? .....



4 **Trace la droite parallèle à la droite *d* et qui passe par le point A.** DICO 65



×A

Pour les exercices 5 et 6, fais les constructions sur une feuille de papier blanc.

5 **Trace deux droites parallèles.** L'écartement entre les deux droites doit être 4 cm 5 mm.

6 ★ **Trace une première droite, puis trace plusieurs autres droites.**
Elles doivent toutes être parallèles à la première droite.
Les droites doivent être régulièrement espacées de 1 cm.



Réda pense qu'il est possible de tracer un polygone qui a deux côtés parallèles et seulement deux côtés perpendiculaires.
Sofia pense que ce n'est pas possible. **Qu'en penses-tu ?**

unité 6

APPRENTISSAGE 6

Droites parallèles

Connaissances travaillées

- **Droites parallèles : droites d'écartement constant**
- **Reconnaissance de droites parallèles**
- **Tracé de droites parallèles.**

C'est la première fois que les élèves rencontrent la notion de droites parallèles qui sont introduites comme étant des droites d'écartement constant. **La situation proposée prend appui sur l'évocation d'une voie de chemin de fer** car cette image contient en elle des moyens de contrôle du parallélisme avec la présence des traverses qui sont là pour maintenir un même écartement entre les rails.

Si la notion de droites parallèles est plus facile à concevoir et à appréhender perceptivement que la notion d'angle droit, sa mise en œuvre instrumentée est plus complexe. En effet, la vérification ou le tracé de deux droites parallèles nécessitent le tracé de deux perpendiculaires à l'une des droites et la vérification ou le tracé sur ces perpendiculaires de longueurs égales.

Situation phare 6 : LES SHADOKS AU TRAVAIL

La recherche peut être effectuée **sur une seule séance**, une deuxième séance est alors consacrée à des exercices d'entrainement. Elle peut aussi se faire **sur deux séances :**

– la **première séance** sera consacrée à la recherche des **questions A** et **B** (il s'agit de définir ce que sont deux droites parallèles et d'utiliser les instruments de géométrie pour décider si deux droites sont parallèles) suivie des exercices d'entrainement **1** et **2** ;

– la **deuxième séance** sera consacrée à la recherche des **questions C** et **D** (il s'agit de tracer une droite parallèle à une droite donnée) suivie des exercices **3** à **5**, et éventuellement **6.**

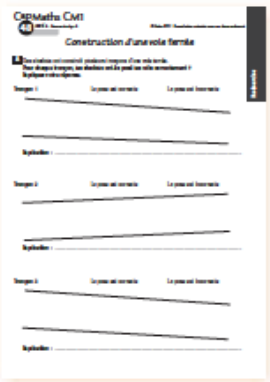
Tâche	Matériel
Les élèves doivent **d'abord** décider, sans indication de méthode, si des couples de droites qui représentent des voies de chemin de fer sont correctement tracés. **Puis**, avec leurs instruments, ils doivent décider si deux droites sont parallèles. **Enfin**, ils doivent tracer une droite parallèle à une droite donnée, connaissant soit l'écartement entre les deux droites, soit un point de la parallèle.	pour la classe : – **fiches 48, 49 et 50** sur transparent ou utilisation d'un TNI par élève : – couples de droites représentant des voies ferrées → **fiche 48 question A** – reconnaître des droites parallèles → **fiche 49 question B** – tracer des droites parallèles → **fiche 50 questions C et D** – instruments de géométrie

ÉQUIPES DE 2 ET COLLECTIF

PHASE 1 Les rails sont-ils bien posés ? FICHE 48 question A

• Préciser ce que sont les Shadoks :

➡ ***Les Shadoks*** *est une série télévisée d'animation française, sous forme d'épisodes de deux à trois minutes, qui a été diffusée entre 1968 et 1973, puis en 2000. Les Shadoks ont l'apparence d'oiseaux rondouillards possédant de longues pattes et de petites ailes ridicules. Ils sont excessivement bêtes et échouent quasiment dans tout ce qu'ils entreprennent.* Pour en savoir plus : *www.lesshadoks.com.*


CapMaths CM1

Construction d'une voie ferrée

• Distribuer la **fiche 48** et la commenter :

➡ *Sur la fiche sont dessinés trois tronçons d'une voie de chemin de fer. Les rails ont été posés par trois équipes différentes de Shadoks. Pour chaque tronçon, vous devez décider si les rails ont été posés correctement ou non.*

• Ne pas donner d'indication sur les instruments à disposition, sauf si les élèves en font la demande. Indiquer alors qu'ils peuvent utiliser tous les instruments qu'ils veulent ou ne pas en utiliser.

• Le travail se fait à deux pour permettre une première formulation des procédures de décision qui seront ensuite affinées collectivement. Observer comment font les élèves pour décider.

Les procédures possibles :

– **apprécier perceptivement :** les rails s'écartent ou se rapprochent ou, si on continue sur la voie, les rails vont se toucher ou l'écartement entre les rails reste toujours le même ;

– **placer la feuille face à soi** de façon à voir les rails qui s'éloignent de soi ;

– **utiliser une règle graduée** et mesurer l'écartement entre les deux rails en leurs extrémités ou en des points quelconques ;

– **tracer deux perpendiculaires aux rails** et, sur ces perpendiculaires, mesurer la longueur des segments déterminés par les rails (les traverses de voies ferrées peuvent suggérer cette procédure).

• Collecter pour chaque tronçon les conclusions de toutes les équipes. Il devrait y avoir accord pour les deux premiers tronçons, mais pas pour le troisième (**tronçon 1** : la pose est incorrecte, **tronçon 2** : la pose est correcte).

• Demander ensuite aux équipes comment elles ont procédé pour décider. Utiliser le support du transparent ou le TNI. Les tronçons sont étudiés dans l'ordre de leur numérotation :

– pour le **tronçon 1**, la perception suffit ;

– pour le **tronçon 2**, dans un premier temps on se satisfera de la perception ;

– pour le **tronçon 3**, la perception ne suffit pas pour conclure, c'est le recours à la mesure de l'écartement qui permet de trancher. Mais cette mesure doit être bien faite, car si l'écartement est mesuré en deux points proches sur la voie, la conclusion peut être erronée. De même si la règle est placée « de travers » ou « penchée ».

• Préciser la **technique de la mesure de l'écartement entre deux droites** en faisant le tracé sur le **tronçon 3** :

1. **Tracé avec l'équerre** d'une perpendiculaire à une des deux droites.

2. **Mesure** sur cette perpendiculaire de la longueur du segment déterminé par les deux droites.

3. **Tracé** d'une autre perpendiculaire à une des deux droites et mesure de l'écartement entre les deux droites sur cette seconde perpendiculaire.

4. Si l'écartement mesuré est le même que le premier, on peut conclure que les rails sont correctement posés.

• Demander de mettre en œuvre cette technique sur le **tronçon 2** pour confirmer la conclusion qui s'est faite à vue.

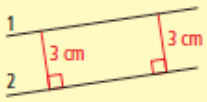
• Avant de définir ce qu'on appelle « droites parallèles », préciser :

➡ *Maintenant, nous allons oublier les voies ferrées et les rails, et nous intéresser aux deux droites tracées dans chaque cas.*

Reconnaître des droites parallèles

• Deux droites qui ni ne s'écartent, ni se rapprochent sont appelées des **droites parallèles**.
L'**écartement** entre deux droites parallèles est toujours le même, on dit qu'il est **constant**.

• Réaliser le dessin suivant au tableau en adaptant les mesures écrites :



On dit que :
Les droites 1 et 2 sont parallèles.
ou La droite 1 est parallèle à la droite 2.
ou La droite 2 est parallèle à la droite 1.

Ces trois phrases ont la même signification.

• Demander aux élèves de commenter la figure et, au besoin, préciser :

➡ *Reconnaissez-vous une figure connue ?* (réponse : un rectangle)

• Contrôler avec les instruments que les 4 angles sont droits et que les côtés opposés ont bien la même longueur. Conclure :

Deux droites parallèles sont les supports de deux côtés opposés d'un rectangle.

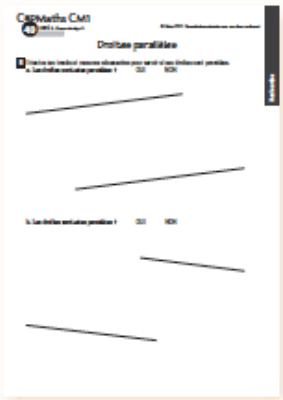
Laisser la figure au tableau.

RÉPONSES : A **tronçon 1** : incorrecte **tronçon 2** : correcte **tronçon 3** : incorrecte.

INDIVIDUEL

PHASE 2 Droites parallèles ou pas ?

FICHE 49 question B



• Préciser :

➡ *Pour chaque question, vous devez utiliser vos instruments et la technique que nous venons de voir.*

• Demander à quelle conclusion arrivent les élèves pour chaque question et solliciter leurs commentaires.

Figure a : Le tracé de deux perpendiculaires, par exemple aux extrémités des traits, permet de conclure à l'égalité des écartements, à condition que les tracés et mesures soient précis.

Figure b : Les perpendiculaires qu'on trace ainsi sont trop proches et ne permettent pas de conclure avec certitude. Il faut prolonger un des traits pour pouvoir mesurer les écartements sur deux perpendiculaires plus espacées.

• Procéder aux tracés sur le transparent de la fiche ou avec le TNI, au moins pour la **question b**. Conclure :

Vérifier des droites parallèles

• **Pour savoir si deux droites sont parallèles**, il faut vérifier que l'écartement entre les deux droites est le même sur deux perpendiculaires aux droites. Ces deux perpendiculaires doivent être suffisamment espacées l'une de l'autre.

• **Un trait droit n'est qu'une partie d'une droite** : on peut le prolonger autant qu'on veut, en veillant à placer correctement le bord de la règle contre le trait.

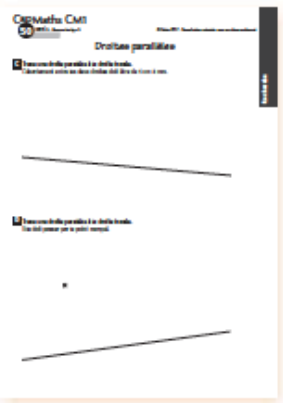
Cette question est le prétexte pour préciser la conception de la droite à l'école primaire : trait rectiligne qu'on peut prolonger autant que de besoin.

RÉPONSES : B **a.** oui **b.** non.

INDIVIDUEL

PHASE 3 Tracé d'une parallèle à une droite connaissant l'écartement entre les 2 droites

FICHE 50 question C



• Cette question ne doit pas poser problème puisqu'il s'agit d'adapter la **technique** utilisée pour vérifier que deux droites sont parallèles :

1. **Tracé** de deux perpendiculaires à la droite donnée en deux points suffisamment éloignés l'un de l'autre.

2. **Report** sur chaque perpendiculaire d'une longueur égale à l'écartement entre les deux droites.

3. **Tracé** d'une droite passant par le point marqué sur chacune des perpendiculaires.

• Cette **technique de tracé** sera reprise en **synthèse** sur le transparent de la fiche ou sur le TNI.

INDIVIDUEL

PHASE 4 Tracé d'une parallèle à une droite passant par un point donné

FICHE 50 question D

• Cette question est plus complexe que la précédente car l'écartement entre les deux parallèles n'est pas connu, il faut le déterminer.

• En cas de difficulté, faire remarquer qu'on connait une droite et un point de la droite qui lui sera parallèle. Faire un **schéma** au tableau correspondant à la situation :



Unité 6

• Enchainer en demandant :

➡ *Comment faire pour connaitre l'écartement entre les deux droites ?*

Si ce questionnement ne suffit pas, demander :

➡ *Comment fait-on quand on a deux droites pour connaitre l'écartement entre elles ?*

Des élèves ne manqueront pas alors de suggérer de tracer la perpendiculaire à la droite connue qui passe par le point marqué et de mesurer sur cette perpendiculaire la distance entre le point et la droite. Cette distance est l'écartement entre les deux droites.

• Compléter le **schéma** au tableau :



• Demander ensuite aux élèves de déterminer sur leur figure quel sera l'écartement entre les deux droites et de poursuivre la construction.

• La **mise en commun** qui suit permet de dégager les deux étapes suivantes :

1. **Détermination** de l'écartement entre les deux droites (ici 52 mm). On se retrouve alors dans la configuration de la **question C** : on connait l'écartement entre les deux droites et, de plus, on connait un point de la droite parallèle. Il suffit donc d'en placer un second pour pouvoir tracer la droite.

2. **Détermination** d'un deuxième point de la droite parallèle à la droite donnée : tracé d'une perpendiculaire à la droite connue et report sur cette perpendiculaire de l'écartement entre les deux droites.

• Conclure :

Tracer des droites parallèles

• **Pour tracer une droite parallèle à une droite déjà tracée**, il faut connaitre l'écartement entre les deux droites.

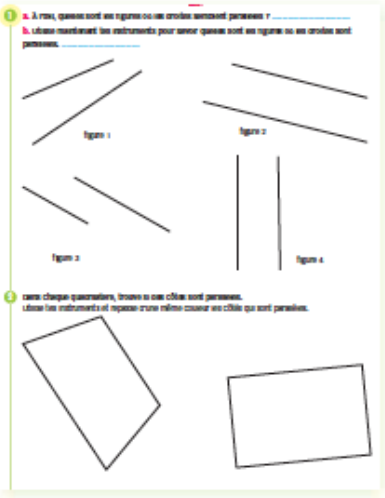
• Si on ne connait pas l'écartement entre les deux droites, mais un point de la droite parallèle, ce point est utilisé pour déterminer l'écartement.

Le tracé d'une droite parallèle à une droite et passant par un point donné est une tâche complexe car elle mobilise, d'une part, le tracé d'une droite perpendiculaire à une droite passant par un point extérieur à la droite, technique que beaucoup d'élèves ne maitrisent pas encore et, d'autre part, le tracé d'une parallèle à une droite connaissant l'écartement entre les deux droites, technique qui vient seulement d'être travaillée.

Exercices d'entrainement

CAHIER p. 53-54

Reconnaitre des droites parallèles



1 Déterminer des couples de droites parallèles.

2 Déterminer les côtés parallèles d'un quadrilatère.

EXERCICE 1

• Perceptivement, seule la **figure 1** peut être écartée. Si les droites des **figures 2** et **3** peuvent être perçues comme étant parallèles, il y a incertitude pour celles de la **figure 4**.

• Pour les **figures 2** à **4**, il faut vérifier avec les instruments que l'écartement est constant entre les deux droites, après avoir prolongé les traits sur la **figure 3**.

RÉPONSE : Les droites des **figures 2** et **3** sont parallèles.

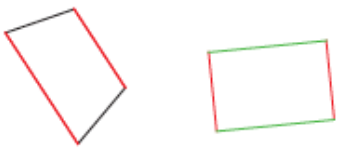
EXERCICE 2

• L'identification perceptive des côtés parallèles n'est pas difficile.

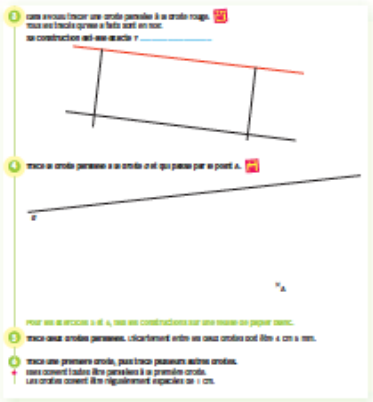
• La vérification avec les instruments sur le **trapèze** demande un peu d'attention pour tracer les perpendiculaires aux côtés.

• Dans le cas du **rectangle**, il n'est pas nécessaire de tracer de droites puisque les côtés sont perpendiculaires entre eux. Certains élèves se limiteront à tracer d'une même couleur seulement deux côtés opposés du rectangle.

RÉPONSES : Les côtés tracés d'une même couleur (sauf en noir) sont parallèles.



Tracer des droites parallèles



3 Contrôler l'exactitude du tracé d'une droite parallèle à une droite donnée.

4 Tracer une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

5 Tracer 2 droites parallèles connaissant l'écartement entre les 2 droites.

6 Tracer plusieurs droites parallèles connaissant l'écartement entre ces droites.

Pour valider les tracés des élèves, l'enseignant pourra utiliser un **guide-âne (fiche 56)**. Cet outil sera présenté et utilisé par les élèves en révision de l'unité 7.

EXERCICE 3

Les élèves doivent vérifier que :
– les segments tracés en noir sont effectivement perpendiculaires à la droite tracée en rouge ;
– les écartements entre les deux droites mesurés sur ces segments ne sont pas les mêmes (25 mm et 26 mm).

RÉPONSES : Les deux droites ne sont pas parallèles.

EXERCICE 4

C'est une application directe de la technique travaillée en **phase 4 de la recherche**.

EXERCICE 5

C'est une application directe de la technique de tracé de deux droites parallèles connaissant l'écartement entre les deux droites.

EXERCICE 6 ★

- La construction ne nécessite que le tracé de deux droites perpendiculaires à la première droite et le placement sur ces deux perpendiculaires de points régulièrement espacés de 1 cm.
- Après que les élèves ont tracé une première parallèle à la première droite, leur demander s'ils peuvent, pour tracer la deuxième parallèle, effectuer moins d'opérations qu'ils n'en ont faites pour la première.

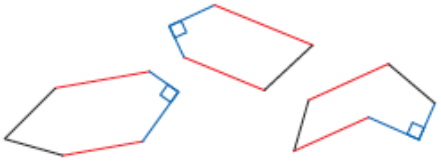
Énigme

CAHIER p. 54

Réda pense qu'il est possible de tracer un polygone qui a deux côtés parallèles et seulement deux côtés perpendiculaires.
Sofia pense que ce n'est pas possible. Qu'en penses-tu ?

- Les élèves ont l'habitude de travailler sur des triangles et des quadrilatères. La difficulté est d'envisager d'autres polygones. Lors de la **recherche**, une aide peut consister à demander : *Qu'est-ce qu'un polygone ? Combien de côtés peut-il avoir ?*
- Quand un élève pense avoir construit un polygone qui vérifie les conditions, le confier à un autre élève pour qu'il vérifie que c'est effectivement le cas.
- Afficher les polygones qui ont été validés et constater la diversité de ceux-ci.

RÉPONSES : Exemples de polygones satisfaisant les conditions :



unité 6

ATELIER A16

ARTEFACTS, SEMIOSIS ET CONSTRUCTION DU SYSTEME DE NUMERATION DE POSITION DECIMALE AU CYCLE 2

Annie CAMENISCH
Maitresse de conférences en sciences du langage
ESPE, Université de Strasbourg
annie.camenisch@unistra.fr

Serge PETIT
Professeur de mathématiques honoraire
IUFM d'Alsace
Université de Strasbourg
petit.serge@sfr.fr

Résumé

L'objectif de l'atelier était de :

- dégager un langage commun en précisant le concept d'artefact dans le cadre de la construction du système de numération et la notion fondamentale de congruence sémiotique[77] (Duval, 1995) ;
- repérer des artéfacts majeurs fréquemment utilisés dans l'enseignement du système de numération décimal de position au cycle 2 ;
- analyser ces artéfacts, leurs effets induits sur la construction du système de numération décimal de position tant dans les aspects sémiotiques (« potentiel sémiotique d'un artefact » (Mariotti et Maracci, 2002), que noétiques ;
- centrer l'analyse sur les effets liés aux phénomènes de congruence sémiotique ;
- conclure en suggérant quelques pistes de travail en formation des enseignants à propos de l'impact de certains artéfacts dans l'apprentissage de la numération au cycle 2.

I - ARTÉFACTS ET CONSTRUCTION DU SYSTÈME DE NUMÉRATION DE POSITION EN BASE DIX

Nous rappelons ci-dessous ce que veut dire le terme *artefact*, la manière dont ce terme est défini par les didacticiens. Nous apporterons quelques précisions ou prolongements à l'acception de ce terme.

[77] La congruence sémiotique traduit la bonne ou moins bonne correspondance entre deux représentations sémiotiques d'un même objet mathématique. Le mot *congruence* est formé de l'élément *con-* qui signifie *avec*, *ensemble*, du suffixe *-ence*, suffixe nominal et du radical *-gr-*, que l'on retrouve dans *degré*, *grade*, *progrès*, *régression*, *digression* et qui signifie *marcher*, *aller*. Ainsi, deux représentations d'un même concept sont dites congruentes si et seulement si elles « marchent bien ensemble ». Cela veut dire que les éléments qui composent chacune des représentations sont écrits (énoncés) dans le même ordre et qu'il y a correspondance sémantique entre les unités signifiantes des deux représentations. Cette notion de congruence permet un classement des énoncés de problèmes additifs et d'expliquer certains échecs des élèves. C'est par exemple le cas quand le mot *moins* figure dans un énoncé de problème additif et que l'opération experte à effectuer mobilise le signe $+$. Il n'y a pas correspondance sémantique entre l'unité signifiante *moins* en langue et le signe + de l'égalité résolvante. Pour plus de détails voir la bibliographie.

1 Artefact

Le terme d'artefact est polysémique et renvoie donc à des nuances de sens que nous allons analyser à partir de la formation du mot.

1.1 Le mot « artefact »

Ce mot peut se rapprocher des mots *artisan, artifice, artificiel, artisanat.* Ces mots ont en commun l'élément de mot *arti-,* qui, d'après le dictionnaire BRIO, signifie « *art, adresse, métier* » et qui provient du latin *artis* mot signifiant dans cette langue « *talent, habileté, savoir-faire* ». Le mot *artefact* contient aussi l'élément de mot *-fact-*, élément que l'on retrouve dans les mots *facteur, facteur d'orgues, facture, factice, etc.* Ce deuxième élément de mot signifie « *faire, rendre* ». Il provient de *factum,* supin de *facere* qui signifie *faire* et du mot *factus* qui signifie *construction*.

Ainsi, le mot *artefact* se définit, dans le même ouvrage, comme un « *phénonème d'origine humaine, artificielle (dans l'étude des faits naturels).* » Une telle définition ne semble pas de nature à définir un concept didactique. Nous en retenons cependant que le terme *artefact* désigne une construction réalisée par des humains.

Quel sens est donné à ce terme en didactique ?

1.2 Le mot « artefact » en didactique

De la définition donnée par Mariotti et Maracci (2002), nous retenons qu'un artefact est « un objet en soi, symbolique ou matériel, conçu pour répondre à un besoin spécifique », mais aussi une « ressource susceptible d'améliorer aussi bien l'enseignement que l'apprentissage ».

Le deuxième point invite à s'interroger sur le fait qu'un artefact, intentionnellement créé pour « améliorer » l'apprentissage ou l'enseignement pourrait tout aussi bien présenter des effets contraires et rendre plus difficiles certains apprentissages. Le pouvoir de l'artefact n'étant pas alors celui présupposé. L'atelier a pour partie comme objet de s'interroger sur les effets, disons, *négatifs* que pourraient présenter certains artéfacts du point de vue des apprentissages.

Rabardel (1995, in Mariotti et Maracci, Chap 5.5) dit d'un artefact qu'il est « un objet […] élaboré par l'homme pour s'inscrire dans des activités finalisées ». Ce point de vue est convergent avec le précédent et pose tout autant la question des effets *négatifs* possibles.

1.3 Artéfacts symboliques et artéfacts matériels en numération

Il a été demandé aux participants de l'atelier de désigner trois artéfacts symboliques et trois artéfacts matériels utilisés dans l'enseignement du système de numération de position décimale.

Du côté des artéfacts **symboliques** sont apparus :

> la langue naturelle, les signes mathématiques (le signe = par exemple), le système de numération de position, les noms de nombres, les tableaux de numération cdu, les constellations, les jeux de couleur portant sur les chiffres servant à désigner un nombre, etc.

Du côté des artéfacts **matériels ont été cités** :

> tous les matériels de numération, des albums à compter, les boites à œufs, les dés, les doigts, les réglettes Cuisenaire, les abaques, ou d'autres situations proposées dans les ouvrages scolaires, etc.

1.4 Potentiel sémiotique d'un artefact

Considérons un élève « manipulant » l'artefact symbolique constitué du signe « = ». Imaginons la situation dans laquelle l'élève doit compléter l'égalité *7+ 2 = … .* Si cet élève écrit 9, si l'usage dans la classe est d'effectuer un calcul et donc de considérer que le signe de l'égalité impose l'effectuation du calcul et l'écriture d'un « résultat », le sens même du signe de l'égalité n'est pas enseigné en conformité avec le sens précisé dans le document (MEN, p 6), document dans lequel est précisé que le signe de l'égalité indique que deux écritures ont le même référent numérique : « *Le calcul en ligne et le travail sur les*

décompositions se fondent sur une signification du signe « = » comme lien entre deux écritures distinctes[78] ». Dans ce cas, l'artefact n'est pas enseigné au maximum de son potentiel. Le potentiel sémiotique de l'artefact « = » est plus large que ce qui est enseigné. Le sens expert de l'artefact, le savoir mathématique, les significations mathématiques expertes de cet artefact ne sont pas enseignées.

Le signe produit par la relation artefact-tâche est l'effectuation d'un calcul, la signification de l'artefact qui émerge de ce travail est loin de la signification experte qui permettrait à l'élève d'écrire par exemple 6 + 3 ou 15 – 6.

Mariotti et Mariacci (2002) définissent de la manière suivante le *potentiel sémiotique d'un artefact* :

« Le potentiel sémiotique d'un artefact représente le double lien qui peut s'établir entre

i) un artefact et les significations personnelles émergeant de son utilisation finalisée ;

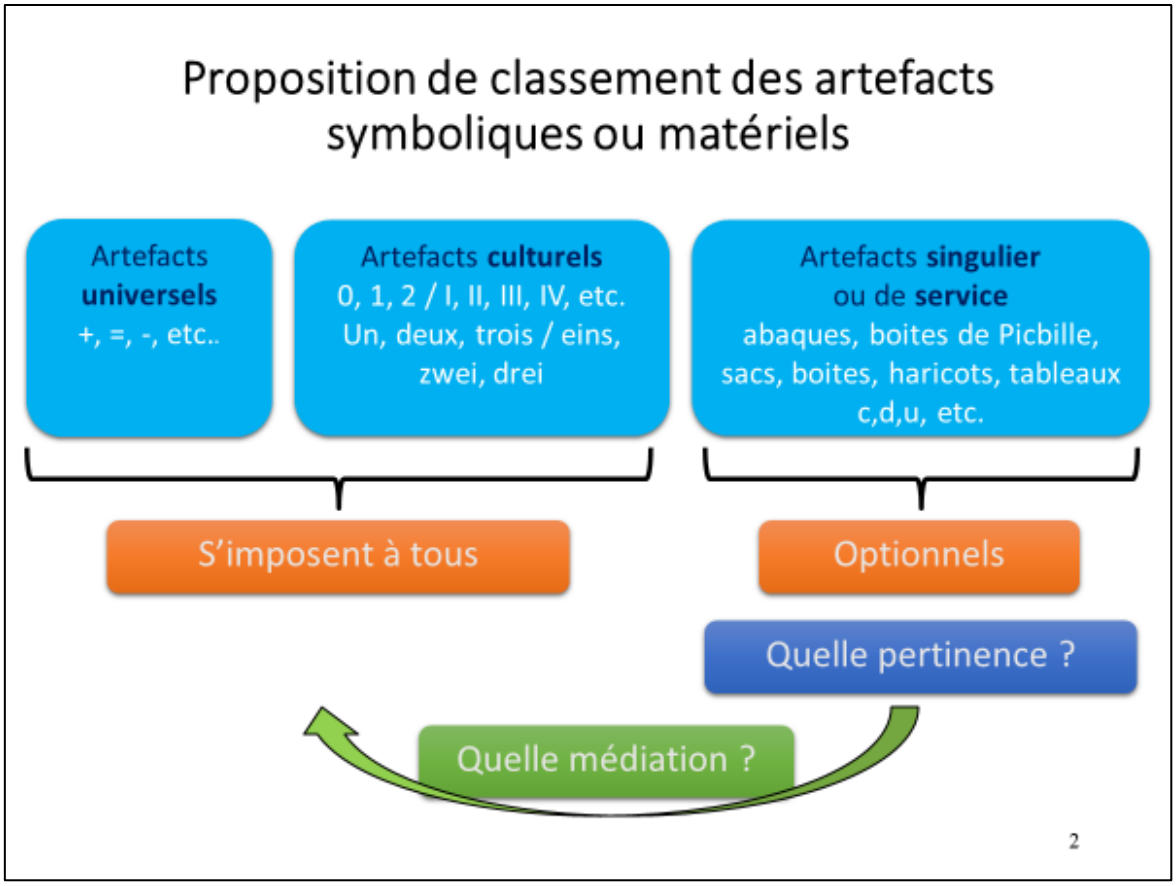
ii) cet artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage, reconnaissables comme mathématiques par un expert. »

Le passage des significations personnelles produites par la manipulation d'un artefact à la signification experte nécessite la médiation de l'enseignant.

Ce point interroge à la fois les artéfacts comme objets de représentation et la formation des enseignants à l'analyse des artéfacts. Aussi, une analyse fine du potentiel sémiotique d'un artefact est nécessaire pour élaborer des séquences qui mettent en œuvre cet artefact afin de permettre de définir *a priori* les médiations possibles de l'enseignant.

1.5 Proposition de classement des artéfact

Nous suggérons le classement suivant pour les artéfacts rencontrés dans l'enseignement de la numération de position en base dix.



[78] NDLR : l'adjectif « distincts » est sans doute une erreur des auteurs du document puisqu'il n'est pas interdit d'écrire, par exemple, 5 = 5.

Ce classement est fondé sur la nature même des artéfacts relativement à une culture donnée et, dans cette culture, à un choix pédagogique ou didactique des enseignants.

Ainsi, certains artéfacts sont dits « universels » car, même s'ils ne sont pas utilisés dans une culture donnée, ils doivent être compris de tous, indépendamment de cette culture. D'autres relèvent de la culture (la forme graphique des chiffres, les désignations verbales des nombres, etc.). D'autres enfin, que nous appelons *artéfacts de service,* relèvent uniquement du choix des enseignants. Ils ne s'imposent pas, donc leur pertinence didactique demande à être analysée tout autant que la médiation de l'enseignant qu'ils imposent.

C'est l'objet de la partie plus « pratique » de cet atelier qui propose par groupes :

- d'analyser des artéfacts, les classer,
- d'analyser leur potentiel sémiotique,
- de définir des pistes à transmettre aux professeurs en formation pour favoriser la médiation,

en constituant trois ateliers devant analyser des artéfacts symboliques et trois ateliers devant analyser des artéfacts matériels.

II - ATELIERS

Il était demandé à chacun des groupes de développer les points suivants :

- significations mathématiques expertes visées par cet artefact
- significations qui émergent de l'utilisation de cet artefact
- opportunité d'une analyse en termes de congruence sémiotique ? Pourquoi ?

Le choix des supports a été guidé par les manuels dont disposaient les animateurs, la fréquence supposée de certains manuels dans les classes et par le contraste que peuvent présenter les mêmes artéfacts dans ces manuels. Deux outils ont été choisis à dessein parce qu'ils effectuent un travail explicite sur la langue en mathématiques (Stella Baruk, ateliers S1 et S2 et S. Petit et A. Camenisch, atelier S2).

Les ouvrages proposés peuvent être anciens et ne pas correspondre aux programmes en vigueur au moment de l'atelier. Il nous semble que ce décalage est sans importance pour l'activité menée, étant donné qu'elle porte sur l'analyse et pas sur la pertinence des ouvrages en correspondance avec les programmes.

1 Liste des artéfacts proposés aux différents groupes

L'encadré indique la notion cible, les notes sont rédigées lors de l'écriture de ce compte-rendu.

1.1 Ateliers artéfacts symboliques

Atelier S1

Traduire une décomposition additive avec le signe +

Artéfact : Le signe +, *in* :

J'apprends les maths avec Picbille	p. 26 et 27
Méthode de Singapour CP	p. 34 et 35
Méthode de Singapour Guide pédagogique	p. 72 et 73 et p 74-75
Vivre les maths Ed. 2016	p. 26 et 27
Mes premières mathématiques de Stella Baruk CP Ed. 2012	p. 68 et 69

Il s'agit de décomposer un nombre afin de pouvoir le désigner avec des nombres plus petits et pas d'additionner deux nombres. Le signe +, dans ce cas prends une autre signification que lors de l'ajout de deux quantités et de la désignation du cardinal ainsi obtenu, sens qui relèverait alors de la composition additive. Le signe +, artificiellement produit par l'humain pour traduire la décomposition est bien un artefact symbolique.

Atelier S2

Apprendre et comprendre la désignation des nombres supérieurs à *dix* en langue naturelle

Artéfacts : Les noms de nombres, *in* :

Mes premières mathématiques de Stella Baruk CP	p 51
Mes premières mathématiques de Stella Baruk CP	p 54
Mes premières mathématiques de Stella Baruk CP	p 61
Je construis les maths avec les NuméRas CE1, S.Petit, A. Camenisch	p 62
Je construis les maths avec les NuméRas CE1, S.Petit, A. Camenisch	p 60 et 61

Si les nombres existent de manière théorique, par exemple tels que définis par l'axiomatique de Péano, leurs désignations ne nécessitent que trois éléments (0, 1 et +). Cependant, une telle désignation qui se traduirait par des expressions comme *un plus un plus un plus un plus un plus un plus un plus, etc.* est rapidement impossible à utiliser. L'humain a fabriqué des noms qu'il a attribué à ces nombres afin de pouvoir les manipuler aisément. Les noms de nombres sont donc des artéfacts symboliques.

Atelier S3

Apprendre et comprendre les désignations chiffrées des nombres supérieurs à *dix*

Artéfact : Le tableau de numération, :

J'aime les maths CE1, 2017, Belin	p 48, 49, 67
Tableau de Serge Petit (voir Annexe 1)	
Pour comprendre les maths, CE1 Hachette	p 43, 56, 57
A portée de maths, CE1, Hachette	p 30, 32

Comme indiqué ci-dessus, les nombres pourraient être désignés par des longues écritures alternant 1 et +, mais de telles écritures rencontrent rapidement leurs limites. Les humains ont donc défini de manière artificielle un système (ensemble de symboles et de règles de fonctionnement) permettant de désigner les nombres simplement avec des chiffres : le système de numération décimale de position.

1.2 Ateliers artéfacts matériels

Atelier M1

Désigner les dix premiers entiers naturels (inférieurs strictement à *dix*)

Artéfacts : les noms des nombres *in* :

Jeu du Trio
Livre Montessori
Réglettes Cuisenaire
Quelle est l'opportunité d'une analyse en termes de congruence sémiotique ?

Atelier M2

Manipuler, représenter les nombres entiers naturels supérieurs à *dix*

Artéfacts :

Haricots, boites, sacs
Cubes, barres, plaques, gros cubes
Abaque à jetons
Quelle est l'opportunité d'une analyse en termes de congruence sémiotique ?

Atelier M3

Manipuler, pour apprendre les décompositions additives des entiers

Artéfacts

L'arbre aux cerises de Hervé Le Madec, Sedrap
Matériel de *Construire les maths avec les NuméRas* : court extrait de l'histoire, RaZeds, boites de KisKas, p. 10, 16, 25 et 26
Jeu de dés

2 Retours des participants

Seuls quelques groupes ont produit un écrit dont nous restituons les contenus ci-dessous en fonction des artéfacts qui ont été présentés.

2.1 Haricots, boites, sacs pour représenter le nombre

Le groupe dispose de haricots secs pour représenter les unités, de boites opaques pour représenter les dizaines. Une boite opaque représente une dizaine si seulement si elle est fermée. Les boites fermées sont les boites qui contiennent exactement dix haricots. Des sacs en toile opaque à tirette pour les fermer représentent les centaines si et seulement s'ils sont fermés. Ces sacs sont fermés si et seulement s'ils contiennent exactement dix boites opaques fermées.

Apports des participants

Les participants soulignent le fait que ce matériel rend compte de l'aspect *groupements réitérés* qui est au fondement de la désignation de position et de son aspect groupements par dizaines en insistant sur l'inclusion : dans toute centaine, il y a dix dizaines et dans toute dizaine, il y a dix unités. Le groupe souligne l'importance de l'opacité du matériel qui contraint à l'évocation : « on sait qu'il y a les groupements inférieurs car on les entend ». Ce système permet de « voir l'entité *dizaine* ou l'entité *centaine* ».

Le groupe précise que « les significations visées sont donc la compréhension de l'aspect décimal et positionnel de la numération ».

A l'oral, le groupe a fait remarquer qu'il y a congruence entre les représentations du nombre avec ce matériel et les désignations chiffrées des nombres (123 représente 1 sac et 2 dizaines et 3 unités). Le groupe a aussi fait remarquer que ce matériel permet aisément d'effectuer des opérations comme les soustractions.

2.2 Cubes, barres et plaques

Le groupe dispose de petits cubes, de barres dont la longueur équivaut à celle obtenue en mettant côte à côte et en alignant dix cubes et de plaques carrés qui pourraient s'obtenir en collant dix barres les unes contre les autres, dans un plan.

Le groupe note que ce matériel « privilégie l'organisation spatiale et géométrique », que la conception sous-jacente qui prévaut à la construction du système de numération de position est celle des échanges, comme si, par convention on pouvait échanger dix cubes contre une barre et dix barres contre une plaque. L'aspect groupement disparait par rapport au matériel précédent. Afin de remédier à ce problème, le groupe suggère que la médiation de l'enseignant pourrait peut-être consister à « fixer les 10 cubes sur la barre (superposition) pour appréhender l'aspect décimal ».

Le groupe s'interroge à propos de ce matériel : « le travail des groupements dépend de la médiation de l'enseignant (propose-t-on le matériel de façon organisée/ désorganisée ? / fait-on le choix de ne pas proposer une unité de numération (exemple : il n'y a pas de centaine) / les groupements ne sont pas pris en charge par le matériel. Il précise que « le code couleurs pour les différentes unités peut être un obstacle : l'élève peut-il vraiment accéder aux significations mathématiques (relations entre les unités de numération) ?

2.3 Abaques à jetons

Les participants ayant ce matériel pensent que ce matériel « permet des algorithmes de calcul et ne permet pas de travailler sur les groupements (aspect décimal). Les prérequis seraient donc d'avoir compris la numération décimale et positionnelle pour utiliser cet artefact ». Cet artéfact ne permet pas la construction du système de numération de position.

Le groupe précise que « les significations qui émergent de l'artefact sont plutôt tournées vers la valeur des différentes unités : échanges (la valeur du jeton ne vaut que par sa place) » et que « la médiation de l'enseignant peut porter sur le sens d'utilisation : horizontal (induit la représentation dans le tableau de numération) ou vertical.

2.4 Réglettes « Cuisenaire »

Ce matériel constitué de barres de différentes longueurs (1, 2, …, 10) ne permet pas la construction des désignations chiffrées des nombres, ne permet pas la construction du sens du 0 dans l'écriture 10 et risque de renforcer l'obstacle quantité/longueur.

3 Quelques éléments d'analyse proposés par les animateurs

Le nombre (trop) important d'artéfacts proposés aux groupes ne leur a pas permis d'aller au bout de leurs tâches. Aussi, les animateurs de l'atelier se permettent-ils de proposer quelques éléments concernant d'autres artéfacts que ceux listés ci-dessus dont l'analyse émane des groupes.

3.1 Le signe +

a. J'apprends les maths avec Picbille p. 26 et 27
b. Méthode de Singapour CP p. 34 et 35
c. Vivre les maths Ed. 2016 p. 26 et 27
c. Mes premières mathématiques de Stella Baruk CP Ed. 2012 p. 68 et 69

Les quelques éléments d'analyse proposés ci-dessous nécessitent un approfondissement, ils sont donnés ici comme pistes pouvant être développées.

Généralités à propos de l'artéfact +

Cet artéfact a un potentiel sémiotique double (au moins). Il peut servir à désigner un grand nombre à partir de nombres inférieurs (colonne 2 du tableau ci-dessous) et à désigner un ajout et donc le nombre résultant d'un ajout (colonne 3 du tableau ci-dessous). La médiation sémiotique de l'enseignant consiste tout d'abord à s'assurer que le sens introductif dans le cours est bien maitrisé des élèves puis à introduire le deuxième sens, tout autant nécessaire que le premier.

Le tableau donne l'indication du sens d'introduction de cet artéfact dans l'ouvrage mentionné en première colonne (renvoi au repères a, b,…) et indique la médiation sémiotique nécessaire pour parvenir aux sens experts au niveau d'enseignement concerné.

Artéfact in	Décomposition	Ajout	Médiation sémiotique
a		X	Vers la décomposition
b	X		Vers l'ajout
c	X		Vers l'ajout
d		X	Vers la décomposition

3.2 Désignations des nombres supérieurs à dix en langue naturelle

La désignation des nombres en langue naturelle est un artéfact, construit par l'humain, cette désignation dépend fortement des cultures. Il s'agit d'un artéfact culturel qui s'impose à tous selon la culture de chacun. En France, tous les élèves sont tenus de connaitre ces noms de nombres. Une apparente non-congruence entre ces désignations des nombres et le système de désignation chiffré de ces mêmes nombres en base dix accentuent les difficultés d'apprentissage de certains élèves. Or, bon nombre de ces

mots cachent un certain potentiel sémiotique capable d'établir une congruence entre les désignations verbales et chiffrées.

Ce potentiel est-il mis en avant dans différentes publications à destination des élèves ? Mentionnons le processus de formation des noms de nombre en français afin d'étudier le potentiel sémiotique de certains de ces noms. Les premiers noms de nombre (de *zéro*, à *dix*, comme les mots *vingt* ou *cent*) peuvent apparaitre comme étant conventionnels. Tous les autres mots sont construits en fonction d'éléments qui donnent sens à leurs désignations et contribuent donc au développement de leur potentiel sémiotique qui est par exemple pour le mot *douze*, de désigner dix (-ze) et deux (*dou*-), cachant la construction deux et dix ou *cinquante* qui exprime cinq (cinq(u)) dizaines (-ante ou -ente).

Les ouvrages prennent-ils appui sur ce potentiel sémiotique des désignations verbales des nombres ? A l'exception des deux ouvrages (Baruk S. ; Petit. S et Camenisch A.) proposés dans l'atelier (les ouvrages scolaires ne prennent guère en compte ce potentiel.

Dans l'ouvrage de Stella Baruk, un travail est proposé pour associer désignation des nombres et sens, mais le sens des éléments de mots *-ze* et *-ante*, n'est pas mentionné explicitement, au contraire de l'autre ouvrage. Dans le deuxième ouvrage, un travail explicite de mise en correspondance de ces désignations avec de désignations en langue étrangère confère davantage de poids à l'étude des mots en langue française.

Le potentiel sémiotique des mots mathématiques pourrait d'être davantage développé.

3.3 Le tableau de numération

Généralités à propos de cet artéfact. Les tableaux de numération sont censés permettre aux élèves de se construire une meilleure représentation des désignations des nombres. Ces tableaux de numération ne s'imposent pas et n'ont pas d'ancrage culturel. Ce sont des artéfacts de service. A ce titre, leur analyse, l'analyse de leur pertinence sémiotique s'impose, comme s'impose l'analyse de congruence entre ce que les représentations sémiotiques des désignations de nombres dans ces tableaux et les désignations de nombres dans le système de numération de position.

A propos de la conception même du système de numération, deux conceptions prévalent. L'une considère qu'après les unités simples apparaissent des unités supérieures (les dizaines), puis des unités encore supérieures (les centaines) et ainsi de suite. Cette conception conduit à la nécessité des échanges. On échange une dizaine contre dix unités, etc. L'autre conception considère que la construction du système de numération se fait par groupements et que la dizaine est à la fois *un* et *dix*.

Du point de vue matériel, une conception encourage l'usage par exemple de petits cubes pour représenter l'unité, de barres dont la longueur équivaut à celle de dix petits cubes jointifs, de plaques correspondant à dix barres jointives, etc. L'autre matériel est un matériel qui groupe. L'unité est présentée par des haricots par exemple, la dizaine par des boites fermées contenant effectivement dix unités (que l'on peut entendre en secouant la boite), la centaine est représentée par des sacs contenant exactement dix boites fermées contenant chacune exactement dix unités. Dans cette conception, il n'y a pas d'échange, mais on ouvre une centaine pour en faire sortir ses dix boites, etc.

Ces deux conceptions conduisent nécessairement à des représentations matérielles (on vient de le voir) différentes et à des représentations sémiotiques différentes.

L'artéfact *tableau de numération* est typique de la première conception.

L'artefact *tableau de numération* est analysé dans les ouvrages suivants :

a) *J'aime les maths* CE1, 2017, Belin
b) Tableau de Serge Petit (voir Annexe 1)[79],
c) Pour comprendre les maths, CE1 Hachette
d) A portée de maths, CE1, Hachette

[79] à paraitre in *Je construis les maths avec les NuméRas, Niveau Cahier 2, Nathan, 2019*.

III - CONCLUSION

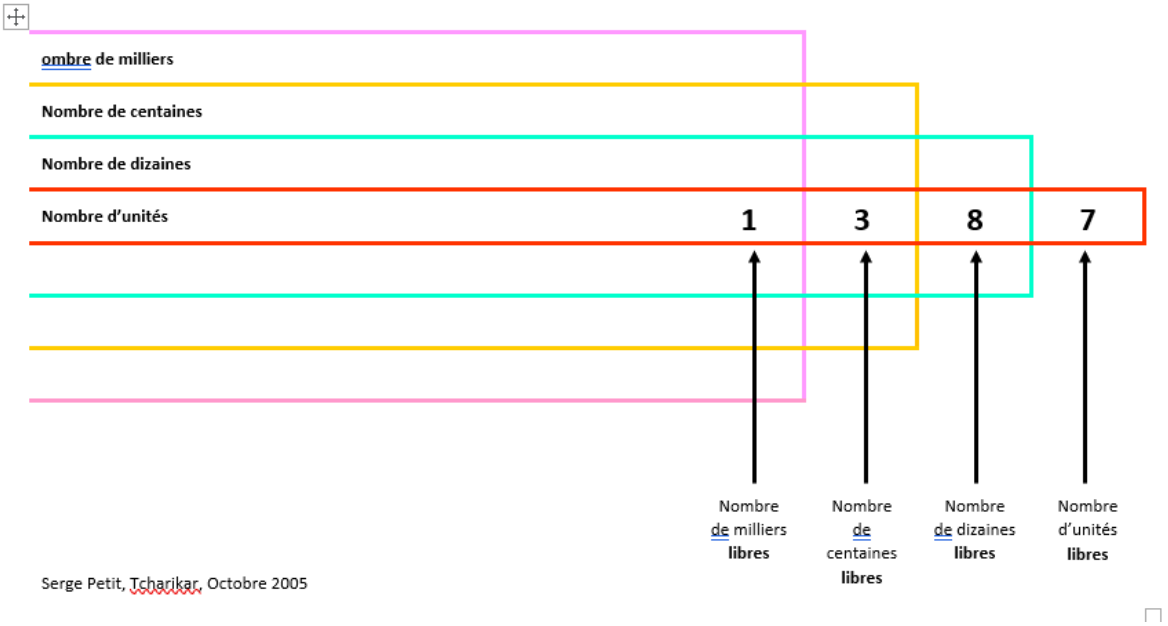
Nous reprenons en conclusion celle formulée par un participant :

« Les artéfacts matériels et symboliques (les deux) sont porteurs de savoirs qui doivent être explicites tant pour les enseignants que pour les élèves. Au-delà de la dimension opératoire des artéfacts à laquelle on les cantonne la plupart du temps, il ne faut pas sous-estimer leurs dimensions sémiotiques, fondamentales et essentielles pour les apprentissages associés. »

Nous ajouterons qu'il est nécessaire que la formation des enseignants consacre une partie de la (trop faible) durée de formation à une réflexion sur le concept d'artéfacts, de leur dimension sémiotique et de la nécessité de penser en amont la médiation de l'enseignant.

IV - ANNEXE

Représentation des écritures chiffrées des nombres



V - BIBLIOGRAPHIE

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée humaine*, Peter Lang.

Mariotti M.-A., Maracci M. (2002). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique : une ressource pour le professeur, http://ardm.asso.fr/ee16/documents/cours/theme2-complet/cours-Mariotti-complet/docs-preparatoires/Chap5-MariottiMaracci.pdf.

MEN, Coll. *Le calcul en ligne au cycle 2*. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/87/9/RA16_C2_MATHS_calcul_en_ligne_587879.pdf consulté le 20 janvier 2019.

Petit S., Camenisch, A. (2007). Quelle sémiosis pour l'enseignement de la numération au cycle 2 ? in. Actes du 44° colloque de la COPIRELEM.

ATELIER A17

QUELLE EST LA PLACE DE L'ARTEFACT DANS LE LANGAGE GEOMÉTRIQUE ?

Annette BRACONNE-MICHOUX
Professeur, Université de Montréal
annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Stéphane GINOUILLAC
Enseignant-chercheur, Université de Versailles Saint-Quentin
Laboratoire LMV
stephane.ginouillac@uvsq.fr

Résumé

Nous étudions l'utilisation en formation de plusieurs situations de géométrie qui mettent en jeu l'appropriation d'un instrument de géométrie non conventionnel. Ce travail poursuit des réflexions engagées dans de précédents colloques COPIRELEM (Celi & Jore, 2014 ; Ginouillac, 2015). Aux questions déjà soulevées par ces auteurs, que nous retrouvons, nous en ajoutons d'autres, portant sur le langage. Quel est le langage qui accompagne la découverte et l'appropriation d'un nouvel instrument ? Quel est celui qui accompagne les phases de recherche et de résolution de problèmes ? Le travail mené dans l'atelier nous conduit à montrer que les langages utilisés varient considérablement selon les situations et les intentions de la personne qui parle, et que ces variations sont d'autant plus grandes que les schèmes d'utilisation de l'instrument sont en cours d'appropriation. En particulier, tant que l'appropriation de l'instrument ou l'obtention d'une solution ne sont pas achevés, les échanges font apparaitre des formulations qui s'éloignent de celles visées dans les programmes de construction. En plus des objets géométriques, ces formulations peuvent porter sur des éléments graphiques à produire, des manipulations de l'instrument à effectuer et des gestes corporels à réaliser. Apparaissent alors des registres de langage moins formalisés, transitoires, qui n'ont pas nécessairement vocation à être institutionnalisés, mais dont la prise en compte nous semble importante pour gérer la progression des élèves dans la découverte et l'apprentissage des instruments. L'attention à ces formulations intermédiaires nous semble ainsi un élément important pour les enseignants, car leurs évolutions servent de révélateurs dans l'avancée des apprentissages. Les situations que nous proposons visent à faire produire de telles formulations afin de pouvoir les analyser en formation.

Avertissement : *Ce texte cherche à analyser le potentiel didactique et les exploitations possibles en formation de plusieurs situations inhabituelles de résolution de problèmes en géométrie. Il gagne de ce fait à s'appuyer sur une expérimentation vécue de ces situations. En effet, celles-ci mettent en jeu l'appropriation d'un instrument non usuel, le « gabarit de rectangle en carton ». L'emploi de cet instrument vise à provoquer un changement de position par rapport à une position « savante » et, en particulier, à mettre les personnes qui recherchent ces problèmes dans une position proche de positions d'élèves, l'enjeu étant d'identifier ce qui peut se passer lorsque l'on est confronté soi-même à la découverte d'un nouvel instrument. Les analyses que nous en tirons bénéficient ainsi grandement d'une expérience préalable de l'appropriation de ce nouvel instrument à travers ces problèmes. Nous conseillons ainsi vivement aux personnes désireuses de lire ce texte de prendre d'abord le temps de résoudre les problèmes qui sont présentés en annexes 1 et 2 avant de continuer leur lecture.*

I - INTRODUCTION

Un atelier présenté lors d'un précédent colloque COPIRELEM (Ginouillac, 2015) avait introduit la situation géométrique dite des « constructions au gabarit de rectangle » et étudiait un certain nombre d'usages que l'on peut en faire en formation. Nous reprenons ici l'étude de cette situation en la prolongeant de plusieurs façons. Nous présentons de nouvelles situations s'appuyant sur le même instrument (notamment des situations de reproduction de figures) ainsi qu'une activité de communication, la « dictée de reproduction », dans laquelle une personne dicte à une autre ce qu'elle

doit effectuer pour reproduire une figure. Nous précisons les analyses que nous faisons du potentiel didactique de ces situations en formation et nous abordons de nouvelles questions pour la formation, notamment relatives au langage en géométrie. Nous introduisons en particulier des questions portant sur les langages non formalisés, émergents, transitoires, qui apparaissent pendant des phases de recherche de problèmes ainsi que dans les phases de genèses instrumentales (Rabardel 1995a, 1995b), c'est-à-dire les phases d'appropriation des instruments. Ces deux questions nous semblent liées parce que l'appropriation d'un instrument passe par sa mise en œuvre dans des résolutions de tâches ou de problèmes à un moment où on ne maitrise encore ni son usage, ni ses fonctions, ni les manipulations qu'il engage, ni le langage formel qui permet d'en parler. Quel langage emploie-t-on alors pour parler de cet instrument que l'on ne maitrise pas encore ? Plus généralement, quel langage emploie-t-on dans les phases de recherche en géométrie, quand on n'a pas accès au langage formel qui correspond à la solution puisqu'on la cherche encore ? Comment les Professeurs des Écoles (PÉ) sont-ils outillés pour prendre en charge ces questions dans leurs classes ? Comment sont-elles prises en charge au niveau de la formation ? Un travail sur la rédaction de programmes de construction suffit-il pour y répondre ?

Les enjeux soulevés par ces questions nous semblent rejoindre de nombreux éléments liés à la thématique de ce colloque : « *Manipuler, représenter, communiquer : quelle place pour les artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?* ». Les situations que nous proposons, qui conduisent à produire des figures à l'aide d'un instrument inhabituel, articulent naturellement des questions de *manipulation* (de l'instrument), de *représentation* (des objets mathématiques représentés par les tracés produits) et de *communication* (aussi bien des constructions qu'on propose que de l'instrument qu'on découvre). À côté des formulations mathématiques portant sur les objets géométriques représentés, elles conduisent à en produire d'autres pour communiquer notamment sur l'artefact et sur sa manipulation.

Dans ce qui suit, nous présenterons successivement les questionnements et enjeux de l'atelier (II) ; le déroulement et les situations proposées dans l'atelier (III) ; le potentiel mathématique et didactique de ces situations (IV) ; des éléments théoriques et des questionnements sur le langage en géométrie (V) ; et enfin les apports que nous retenons de l'atelier (VI).

II - QUESTIONNEMENTS ET ENJEUX DE L'ATELIER

1 Le caractère essentiellement formel des enjeux identifiés par les enseignants

Dans une conférence présentée à la COPIRELEM, Celi (2013) s'interroge sur les finalités de la géométrie et la perception qu'en ont les enseignants. Elle rend compte d'une étude qu'elle a menée auprès d'enseignants du premier degré à ce sujet :

> *J'ai invité ces enseignants à repérer deux difficultés que leurs élèves rencontrent le plus souvent en traitant des activités de géométrie. Les réponses des enseignants interrogés évoquent quasi exclusivement des difficultés dans le maniement des instruments, dans la précision des tracés et dans la maitrise du vocabulaire géométrique. En leur demandant ensuite de repérer deux difficultés qu'ils rencontrent en enseignant la géométrie, ces mêmes enseignants signalent plusieurs points (…) : comment aider les élèves à apprendre et utiliser un vocabulaire idoine et surtout à manipuler correctement les instruments. (…). Nous retrouvons ce qui préoccupait la CREM en 2002, à savoir que l'on réduit souvent la géométrie à l'apprentissage d'un vocabulaire et à la manipulation des instruments.* (p. 2)

Elle ajoute que « *les enseignants se demandent aussi comment donner du sens aux activités géométriques* » et qu'en termes de validation ils s'interrogent à nouveau « *principalement sur comment valider la maitrise des instruments ainsi que l'exactitude et la précision des tracés réalisés. (…) Ici, la prégnance des instruments et de la précision des tracés revient en force !* » (p. 2). On voit que leurs préoccupations sont centrées sur trois enjeux essentiellement formels et qui visent des questions de précision : la correction du vocabulaire, la précision des tracés et la maitrise technique de la manipulation des instruments. Ces constats rejoignent ceux formulés dans un autre colloque COPIRELEM par Bulf et Mathé (2017), qui posent l'hypothèse que les professeurs des écoles « *éprouvent majoritairement des difficultés à cibler les enjeux [de la géométrie], rabattant alors souvent les objectifs d'apprentissage à l'acquisition de vocabulaire permettant de désigner des objets*

supposés déjà là, ou à des exigences de motricité fine concernant l'usage d'instruments et la précision de tracés. » (p. 30). Ces propos rejoignent également notre propre expérience de formateurs, qui nous conduit de façon récurrente aux mêmes constats auprès des enseignants débutants que nous accompagnons : leurs préoccupations reposent de façon quasi-exclusive sur ces trois mêmes questions (correction du vocabulaire, précision des tracés, maitrise technique des instruments) au détriment du sens de l'activité géométrique ou de la notion de résolution de problème en géométrie.

Ces constats nous conduisent à deux types de questions auxquelles les situations proposées dans cet atelier cherchent à répondre, et qui vont un peu en sens inverse l'une de l'autre.

La première question est la suivante : comment déplacer le regard des PÉ de ces trois seuls enjeux formels (maniement des instruments, précision des tracés, exactitude du vocabulaire), que ce soit en formation initiale ou continue ? Comment les aider notamment à proposer des résolutions de problèmes en géométrie, à mobiliser les propriétés que l'on peut associer aux instruments ou aux tracés, à conférer au langage des enjeux d'argumentation ou de validation ?

Cependant, et c'est une deuxième question que nous nous posons, ces préoccupations des enseignants nous semblent également légitimes, compte tenu des contenus d'enseignement du premier degré, et il nous semble qu'elles doivent aussi être entendues et prises en compte en formation. Ceci nous conduit alors à notre deuxième question : comment prendre également en compte ces demandes récurrentes des PÉ en formation et comment les outiller pour y répondre ?

2 La rédaction de programmes de construction : enjeux et limite dans les programmes et dans la formation

Un outil fréquemment mobilisé pour travailler les questions liées au langage en géométrie, que ce soit dans les classes comme en formation, est celui de la lecture et de la rédaction de programmes de construction. Au niveau des programmes, le document d'accompagnement des programmes de 2016 sur la géométrie en cycle 3, intitulé « *Les programmes de construction* » (MÉNESR, 2018) donne des précisions sur ce qui est attendu de ce travail dans les classes par l'Institution. Ce texte souligne que les programmes de construction relèvent d'un « *type de texte particulier* », soumis à des contraintes langagières précises : « *Les actions décrites et les objets énoncés sont mathématiques et non techniques (par exemple on dira « Construire le cercle de centre O et qui passe par le point A » mais pas « Prendre le compas, placer la pointe sèche sur le point O et la mine sur A puis tourner »)* » (p. 1).

On voit qu'un type spécifique de langage est imposé comme objectif pour la rédaction de ces textes et que toute référence à la matérialité des instruments ou de leur maniement en est écartée. Le langage requis dans les programmes de construction est un langage standardisé, qui relève d'un registre formel, et qui est au fond en accord avec les préoccupations des PÉ concernant l'emploi d'un vocabulaire géométrique correct.

Dans ce même document, il est ensuite précisé ce que cet exercice fait travailler : « *Pour réaliser une figure géométrique à partir d'un programme de construction, un élève doit : lire et comprendre les différentes phrases du programme de construction ; connaitre la signification du vocabulaire employé ; réunir les outils nécessaires (règle, équerre, compas) ; exécuter les consignes dans l'ordre où elles sont données ; faire éventuellement un tracé à main levée pour anticiper la construction ; faire des tracés propres et précis.* » (p. 1). On voit que ces indications présupposent déjà acquises un certain nombre de connaissances, notamment celles portant sur le maniement matériel et technique des instruments et celles sur la connaissance d'un vocabulaire précis.

Dans ce document on pointe enfin également l'enjeu et l'exigence d'exécuter des tracés « *propres et précis* ». En revanche, on ne précise pas comment faire travailler les questions liées au langage tant que ces prérequis ne sont pas acquis. En effet, y aurait-il d'autres langages que le langage formel qui apparaissent au cours de l'apprentissage de l'utilisation d'un instrument ?

3 La genèse instrumentale

Pour éclairer notre propos, nous nous appuyons sur la notion de *genèse instrumentale* développée par Pierre Rabardel (1995a, 1995b) qui permet d'analyser les processus et démarches d'appropriation des instruments en général. Rabardel précise ce qu'il appelle un *instrument* en dégageant de façon centrale deux aspects de l'instrument, l'*artefact* (l'objet brut) et les *schèmes d'utilisation* (les modalités d'utilisation). L'*instrument* est alors un couple qui résulte de l'association entre un artefact et un ou plusieurs schèmes d'utilisation. La transformation de l'artefact en instrument se conçoit alors comme un processus évolutif et dynamique, réalisé par le sujet, qui nécessite d'identifier des potentialités contenues dans l'artefact et d'élaborer puis s'approprier des schèmes d'utilisation. Rabardel distingue deux directions dans lesquelles ce processus s'effectue conjointement : l'une tournée vers l'artefact, *l'instrumentalisation,* qui consiste à identifier puis faire évoluer des potentialités portées par l'artefact, et l'autre tournée vers le sujet, *l'instrumentation,* qui consiste à identifier puis faire évoluer les schèmes d'utilisation de l'artefact. Comment les enseignants peuvent-ils résoudre le paradoxe de la genèse instrumentale dans les activités qu'ils proposent aux élèves, pour que ceux-ci acquièrent tous les schèmes d'utilisation des instruments, tant du côté de l'instrumentation que de l'instrumentalisation ?

4 L'appropriation des instruments usuels de géométrie (règle, équerre, compas)

En effet, une spécificité de l'enseignement de la géométrie dans le premier degré est d'être confrontée à la découverte et l'apprentissage des principaux instruments (notamment règle, équerre et compas). Comme le soulignent Offre, Perrin-Glorian et Verbaere (2006), cet apprentissage des instruments usuels de géométrie ne va pas de soi et soulève de nombreuses difficultés. Il conduit les élèves à apprendre de façon conjointe les gestes à réaliser pour les manipuler, les tracés qu'ils permettent ou non de réaliser, le niveau de précision que l'on est en droit d'attendre de leur maniement, ainsi que le langage qui permet de décrire ou d'interpréter les tracés que ces instruments produisent : *« Nous faisons l'hypothèse que les concepts géométriques, le vocabulaire, la maitrise des instruments s'acquièrent et s'évaluent dans des activités qui les mettent en jeu simultanément. »* (p. 8).

Pour prendre un exemple, ces auteurs décrivent de la façon suivante la manipulation du compas : *« Placer la pointe sèche sur un des points et l'y maintenir, la mine sur l'autre point, faire tourner le compas en laissant la mine sur le papier, sans changer l'écartement ni la position de la pointe sèche. »* (p. 13). Comprendre une telle formulation (voire être capable de la produire soi-même pour les enseignants…) nécessite d'avoir compris et intégré de nombreux concepts mathématiques : le fait que, malgré son apparence globale, les deux branches du compas jouent des rôles dissymétriques pour tracer (mais ce n'est plus le cas quand on s'en sert pour reporter une longueur) ; que ces branches sont munies respectivement d'une « *pointe sèche* » et d'une « *mine* » ; que chacune de ces deux pointes matérielles correspond à un « *point* » géométrique ; que l'une ces pointes doit rester fixe (« *maintenir* ») tandis que l'autre est mobile (« *faire tourner* ») ; enfin que le compas incorpore et préserve deux informations essentielles : un « *écartement* » et une « *position* ». Au fond, comprendre (ou produire…) cette description d'une manipulation de l'instrument nécessite peu ou prou de maitriser les deux concepts mathématiques de centre et de rayon. On voit également que cette description combine des éléments d'ordre mathématique et graphique (*les points*), liés à des parties de l'instrument (*la pointe sèche, la mine, l'écartement*), décrivant des gestes (*placer, maintenir, faire tourner*), ainsi que des mises en relation entre différents objets (*laisser la mine sur le papier, ne pas changer la position*). On voit que produire de tels textes, ou mesurer les différences entre ce texte-ci et ceux produits par les élèves, nécessite de nombreuses compétences mathématiques, qui ne se réduisent pas à savoir rédiger dans un registre formel des programmes de construction. Elles correspondent pourtant à des besoins réels des enseignants du premier degré.

Nous aboutissons alors à une forme de paradoxe. L'exemple précédent montre que le langage qui permet de décrire d'une façon précise à la fois la manipulation des instruments de géométrie, les tracés qu'ils permettent, les gestes à employer et les éléments de contrôle à exercer, nécessite d'avoir intégré au moins une partie des notions mathématiques qui lui sont associées. Or c'est le travail sur des problèmes, engageant la production ou l'analyse de tracés et la manipulation des instruments, qui contribue à construire les notions mathématiques visées. Comment parler alors du maniement d'un instrument

quand on travaille sur les problèmes qui auront justement pour effet de permettre son appropriation ? Quel est le langage, nécessairement transitoire, que les élèves peuvent mobiliser tant qu'ils n'ont pas encore construit les concepts visés ? Les PÉ sont-ils outillés pour répondre à ces questions, et un travail en formation centré sur le seul registre du langage formel (notamment celui des programmes de construction, dont la maitrise complète n'est achevée qu'en fin de collège) peut-il suffire ? Dans le cas contraire, on peut formuler l'hypothèse que les PÉ n'ont pas d'autre choix, face à ce paradoxe, que de considérer l'acquisition d'un langage formel comme un préalable pour les phases d'apprentissage du maniement qu'ils devront gérer, ce qui peut expliquer une partie des constats relevés dans la partie précédente.

Ces réflexions nous semblent encore renforcées par une analyse comparative que Perrin-Glorian, Mathé et Leclerq (2013) font des manuels de géométrie d'aujourd'hui comparativement à ceux de 1958, et qui nous parait souligner de façon particulièrement nette l'importance des enjeux qui précèdent. Ils relèvent en particulier que, dans les manuels actuels, « l*es rapports entre géométrie théorique et objets physiques sont pudiquement passés sous silence et la question des rapports entre espace sensible et espace géométrique n'est pas vraiment abordée.* » On peut alors émettre l'hypothèse que la situation actuelle en est rendue d'autant plus délicate pour les enseignants et leurs élèves, puisque les relations entre objets matériels, objets graphiques et objets géométriques sont occultés, non seulement du langage, mais même des manuels.

5 Les questions que nous posons pour l'atelier

Un des enjeux de l'atelier était alors de discuter de l'hypothèse suivante : à côté du langage mathématique, reconnu par l'Institution, qui mobilise un vocabulaire précis, une syntaxe spécifique, des verbes particuliers (*construire, tracer, placer*) qui soulignent certaines actions tout en en occultant d'autres (*prolonger, rejoindre, effacer …*), et qui correspond à un certain degré de formalisme et de maitrise, il existe sans doute un autre, voire plusieurs autres langages moins conventionnels dans leur mise en forme. Ces derniers auront peut-être des durées de vie plus limitées ou transitoires dans la classe. Ils ne visent pas nécessairement à être institutionnalisés. Mais ils n'en accompagnent pas moins des moments importants de la démarche mathématique, notamment dans les phases où la maitrise de ce que l'on a à dire n'est encore qu'incomplète, telles les phases de découverte et d'appropriation des instruments ainsi que les phases de recherche, et il nous semble important d'attirer sur eux l'attention des enseignants en formation.

Ces éléments nous conduisent à nous poser plusieurs questions que nous adressons à la recherche comme à la formation. D'une part, que sait-on du langage qui accompagne les phases de découverte et d'appropriation d'un instrument ? Comment parle-t-on d'un instrument que l'on est en train de découvrir et dont on ne connait encore précisément ni la fonction, ni les usages, ni les éléments techniques ? Autrement dit, quel est le langage qui accompagne les genèses instrumentales ? D'autre part, quel est de façon plus générale le langage qui accompagne les moments de recherche et de résolution de problèmes ? Peut-il s'agir d'un langage aussi formel que celui des programmes de construction ? La centration sur la correction d'un tel langage ne risque-t-elle pas d'inhiber la liberté de la recherche ? Le langage qui accompagne les phases de manipulation et de représentation dans la recherche peut–il être le même que celui qui permettra ensuite la communication d'une solution ? Enfin, dernière question et non des moindres : comment interroger ces langages dans la formation ?

III - DÉROULEMENT DE L'ATELIER ET ANALYSE DES SITUATIONS PROPOSÉES

Les participants ont travaillé en trois groupes de trois ou quatre personnes. L'atelier s'est déroulé en trois temps. Le premier temps, fondé sur une résolution de problèmes de constructions, a permis une appropriation de l'instrument « gabarit de rectangle » et a conduit à une réflexion sur le potentiel mathématique et didactique de cette situation en formation. Le deuxième temps s'est appuyé sur une autre situation de recherche qui visait des questions de communication et a conduit à des réflexions sur

des questions de langage. Enfin l'atelier s'est conclu par un temps de synthèse et bilan, visant à présenter les enjeux que nous voulions aborder ainsi que la façon dont ils avaient pu être travaillés au travers des deux situations proposées. Nous présentons dans cette partie les situations-problèmes qui ont été proposées aux participants dans chacun des temps de l'atelier. La situation proposée dans la deuxième phase peut elle-même être décomposée en deux phases que l'on peut considérer comme deux situations différentes : une première étape engageant une analyse instrumentée de figures, puis une étape de communication (dictée) de reproduction.

1 L'artefact utilisé : le gabarit de rectangle en carton

Chaque personne disposait du matériel suivant : une feuille de papier blanc uni, un crayon ou un stylo et, comme unique instrument, un exemplaire du « gabarit de rectangle en carton ». Il s'agit d'un morceau de papier fort ou de carton, découpé au massicot, et ayant la forme d'un rectangle. Les dimensions que nous avons retenues pour l'atelier, comme dans les précédentes expérimentations, étaient les suivantes : 6,5 cm sur 2,5 cm (on pourrait éventuellement utiliser un ticket de métro parisien, qui possède à peu près le format et la rigidité voulue). Dans les situations présentées dans l'atelier, un seul usage du gabarit est autorisé comme instrument : celui qui consiste à tracer tout ou partie de son contour, sans avoir le droit ni d'écrire dessus, ni de le plier, ni de le déchirer.

2 Premier temps : problèmes de construction et appropriation de l'instrument

La première situation était une situation de recherche de constructions à l'aide du gabarit *(cf. annexe 1)*. Elle visait à permettre une première appropriation de l'artefact par les participants, autrement dit une première genèse instrumentale de cet instrument. Pour s'approprier la situation et l'instrument « gabarit de rectangle », les participants ont commencé par chercher en groupes pendant 30 minutes le problème suivant :

> *Le morceau de carton que vous avez reçu est un gabarit de rectangle. En utilisant seulement ce gabarit (ainsi qu'un stylo et du papier), il vous est demandé de réaliser les constructions suivantes :*
>
> 1. Tracer un carré et un rectangle avec leurs diagonales.
> 2. Tracer un rectangle superposable au gabarit et le partager en deux rectangles superposables (entre eux)
> 3. Proposer différentes façons de tracer un losange.

On peut ajouter que de nombreux exemples de problèmes similaires, ainsi qu'une analyse de leur potentiel en formation, sont présentés dans (Ginouillac, 2015). Les participants ont ensuite réfléchi, toujours en groupes, à partir des trois questions suivantes :

1. *Que feriez-vous de cette situation en formation ?*
2. *Que feriez-vous de cette situation dans des classes ?*
3. *Qu'est-ce que cette situation permet de faire travailler par rapport au langage ?*

La mise en commun qui a suivi cette première phase a permis aux trois groupes de pointer de nombreux éléments sur lesquels nous reviendrons plus en détails dans la partie VI, mais parmi lesquels nous pouvons déjà souligner les points suivants : du côté mathématique et didactique, un intérêt pour faire travailler la genèse instrumentale, lié au fait d'utiliser un instrument différent des instruments usuels (règle, équerre, etc.) ; l'utilisation d'un problème ouvert de recherche en géométrie ; une situation qui conduit à chercher et produire des stratégies ; le fait que la découverte et la manipulation du gabarit conduit à rechercher des formulations pour communiquer et introduit naturellement des questions de langage ; etc. Du côté de la formation professionnelle, les participants ont souligné l'intérêt de proposer une situation de recherche très ouverte et transposable au moins en partie pour des élèves en classe, avec quelques réserves sur lesquelles nous reviendrons (cf. VI). Ils ont aussi souligné l'intérêt que cette situation peut présenter pour la formation continue, en pointant que la géométrie est souvent un « parent pauvre » de l'enseignement des mathématiques en général, et particulièrement auprès d'enseignants qui ne se sentent pas très à l'aise dans cette discipline.

3 Deuxième temps : problème de restitution, situation de formulation et travail sur le langage

Dans le deuxième temps de l'atelier, nous avons exploité une autre situation, nouvelle par rapport à l'atelier de 2015, qui consiste à analyser des constructions déjà réalisées pour ensuite les reproduire ou les faire reproduire. Cette situation introduit deux éléments nouveaux : le fait d'utiliser le gabarit comme outil d'analyse instrumentée de figures déjà construites, présentées comme figures complexes dans leur globalité ; et celui de coupler ces analyses avec une situation visant à faire reproduire, en temps réel, la figure à une autre personne que celle qui l'a analysée, au moyen d'une dictée orale que nous proposons d'appeler « dictée de reproduction ». L'enjeu pour l'atelier était d'analyser ensuite les formulations spontanément produites pour communiquer une construction que l'on n'avait pas soi-même inventée et au moyen d'un instrument dont on continuait à découvrir les potentialités. En particulier, nous étions intéressés à voir si, dans ce contexte, les formulations mobilisées portaient sur les notions géométriques, les tracés graphiques, les manipulations de l'artefact, ou sur tout cela à la fois.

Les participants ont continué à travailler en groupes de 3 ou 4, chaque groupe étant à ce moment-là scindé en deux binômes. Chaque binôme a reçu l'une des deux feuilles A ou B présentées en annexe 2, qui proposent chacune six réponses différentes (et correctes) à la 2e question du premier temps de l'atelier, c'est-à-dire six constructions qui permettent de partager le rectangle du gabarit en deux rectangles superposables, ainsi que le contour du gabarit utilisé pour produire les figures. Les deux feuilles rassemblent ainsi 12 réponses différentes à cette question. Il a été demandé à chaque binôme de se concerter pour choisir l'une des six constructions figurant sur sa feuille, puis d'en dicter oralement la reproduction à l'autre binôme du groupe, sans préparer à l'avance cette dictée par écrit afin de conserver un langage oral aussi spontané que possible, avant d'échanger ensuite les rôles au sein du groupe. Pour chaque dictée, une personne du binôme émetteur devait assurer la dictée pendant que l'autre observait le langage employé et devait prendre des notes. Du côté du binôme récepteur, il était demandé aux deux personnes d'effectuer en parallèle le dessin de la construction demandée, ce qui permettait d'observer d'éventuelles différences en temps réel. La disposition en face à face des deux binômes émetteur et récepteur permettait à la personne qui dictait de repérer d'éventuels implicites ou d'éventuelles imprécisions dans sa formulation et aussi de valider explicitement en temps réel les tracés effectués. Il était également demandé d'enregistrer chacune des dictées pour permettre ensuite des réécoutes et des transcriptions afin d'étudier le langage employé. Nous présentons en annexe l'analyse détaillée que nous faisons de l'une des six transcriptions effectuées *(cf. annexe 3)*.

L'échange des dictées au sein des groupes a été suivi à son tour par une discussion sur les enjeux que l'on peut identifier dans ce travail et sur son intérêt potentiel en formation. Là encore, nous présentons dans la partie VI des analyses plus détaillées à partir des notes prises pendant l'atelier et des transcriptions des six dictées, mais nous pouvons indiquer dès à présent les éléments suivants : le besoin de commencer par déconstruire les figures proposées et d'en réaliser une analyse instrumentée avant de pouvoir en dicter la reproduction ; des interrogations sur le niveau de précision attendu dans les tracés ; le recours dans toutes les dictées à des validations régulières d'étapes dans un contexte de rétroaction directe (*« voilà », « de l'autre côté », etc.*) ; la surprise de ne pas avoir toujours su ni pu utiliser le vocabulaire géométrique (contrairement à ce que l'activité de construction vécue dans le premier temps avait pu laisser supposer) ; enfin la prise de conscience du fait que les formulations spontanément utilisées pour décrire certaines des actions dont on maitrise pourtant les modes d'expression théorique ne sont pas toujours celles du langage formel géométrique.

3.1 Déroulement de la phase d'analyse des figures présentées

Les constructions à reproduire étaient présentées sous forme de dessins réalisés à l'aide de l'instrument, dont le contour figurait au centre de la feuille *(cf. annexe 2)*. Les figures et ce contour-modèle étaient tous présentés en position prototypique, ce qui a ensuite été discuté (cf. VI). La seule consigne formulée était de choisir une construction parmi les six proposées afin d'en dicter ensuite la reproduction. Elle n'évoquait pas que, pour ce faire, il faut d'abord analyser les six figures et déconstruire au moins celle que l'on a choisie. Comme les participants l'ont souligné, un intérêt important de cette situation est qu'elle oblige à effectuer une analyse instrumentée des figures. En effet, il faut retrouver à la fois de

quelles façons l'instrument a été utilisé, pour quelles raisons, et dans quel ordre ces actions ont été menées. Il s'agit ainsi de réaliser à la fois des déconstructions figurales, dimensionnelles, instrumentales et chronologiques des figures présentées (cf. IV.2). Ceci conduit à une autre façon de découvrir les propriétés de l'instrument gabarit. En effet, dans la recherche des problèmes de construction du premier temps, la conception des manipulations précédait souvent leur réalisation : on envisage une utilisation du gabarit avant de l'essayer, et la mise en œuvre sur le papier vient valider ou invalider l'idée mathématique envisagée. À l'inverse, pour l'analyse instrumentée des constructions, nous avons observé que la manipulation précédait le plus souvent la conception mentale et c'est souvent l'observation d'une coïncidence entre la figure et l'artefact (« *Tiens, ceci [cet élément de la figure] coïncide avec cela [telle partie du gabarit]* ») qui conduit à la conceptualisation d'une idée, puis à la reconstitution d'une possible construction. Les participants ont également souligné que, pour choisir une figure, il fallait les considérer toutes. Leurs critères de choix furent le plus souvent de retenir une figure dont ils avaient bien compris le procédé de construction, qui leur semblait assez éloignée de celles que leur groupe avait envisagées pendant le premier temps et assez difficile pour être intéressante, mais qu'ils se sentaient capables de verbaliser, ou du moins pour laquelle il n'y avait pas d'étape de construction qui leur semblait trop difficile à formuler.

Le fait de demander aux binômes de se concerter pour choisir une figure a introduit une première phase de langage avant celle qui a suivi des dictées. N'ayant pas enregistré les échanges tenus à ce moment-là au sein des binômes, nous n'en avons pas de traces et ne pouvons pas en effectuer des analyses. On peut imaginer que ces premiers échanges au sein des binômes ont pu servir de préparation et pourraient avoir fait apparaitre des formulations qui n'ont pas été reprises ensuite dans les dictées, mais seul un enregistrement pourrait permettre de le certifier. De la même façon, nous n'avons pas les moyens de l'analyser, mais on peut se demander s'il a pu y avoir dans les groupes des évolutions dans les choix et les formulations de la deuxième dictée après avoir effectué le tracé de la première.

3.2 Déroulement de la phase de « dictée de reproduction »

La phase des dictées de reproduction visait à mettre en évidence les formulations utilisées pour communiquer l'utilisation du nouvel instrument dans une construction géométrique que l'on n'avait pas soi-même imaginée. Tout en reposant sur une situation classique d'émission/réception, dans laquelle il s'agit de faire reproduire une figure à une autre personne, elle se distingue des situations habituelles de programmes de construction sur plusieurs plans : notamment, la communication est orale, elle s'effectue sous le contrôle visuel de la personne qui dicte et il y a de nombreuses rétroactions (cf. VI). Cette situation se rapproche plus des situations de « *travail en dyade* » proposées par Petitfour (2017a), avec la différence importante que nous n'apportons aucune précision sur les types de formulations visés ou autorisés, puisqu'il s'agit au contraire de faire émerger et d'observer des modes d'expression spontanés, et non de faire travailler un langage spécifique visé. Les enregistrements réalisés nous permettent de dire que l'activité de dictée sans préparation écrite s'est révélée plus délicate que ne l'avaient envisagé les participants et, du coup, beaucoup plus riche au niveau des choix et formulations utilisées *(cf. VI et annexe 3)*. Nous l'interprétons comme la marque d'une tâche inhabituelle, que nous avons eu rarement l'occasion de travailler, et qui pose de ce fait à tout le monde, y compris nous-mêmes, des difficultés. Il nous semble alors qu'elle peut être intéressante en formation pour permettre une « décentration » par rapport à des habitudes très intégrées, notamment des habitudes de langage correspondant à la géométrie du collège, et mettre ainsi les enseignants en formation dans une situation qui se rapproche d'une situation d'élèves.

IV - LE POTENTIEL MATHÉMATIQUE ET DIDACTIQUE DE CES SITUATIONS EN FORMATION

Nous présentons certains des éléments mathématiques et didactiques pour lesquels il nous semble que les situations que nous proposons autour du gabarit de rectangle (constructions, reproductions, dictées) peuvent contribuer à aborder et travailler en formation. Ces éléments rejoignent et complètent ceux qui

étaient déjà présentés dans (Ginouillac, 2015). Comme les participants l'ont amplement souligné, elles permettent d'abord de mettre en évidence la notion de genèse instrumentale et l'appropriation d'un nouvel instrument de géométrie. Comme l'indiquent Offre, Perrin-Glorian et Verbaere (2006), « *l'usage des instruments de géométrie ne va pas de soi et [une] présentation ostensive ne saurait suffire pour que les élèves puissent acquérir des schèmes d'utilisation des instruments qui leur permettent de conjuguer maitrise technique et utilisation à bon escient des propriétés géométriques* » (p. 29). Le travail effectué avec le gabarit permet de se rendre compte du chemin suivi pour s'approprier ce nouvel instrument, avec la différence importante que, dans ce cas, la genèse instrumentale conduit *in fine* à retrouver des fonctions qui correspondent à des instruments déjà connus : on peut l'utiliser comme une règle, une équerre, un gabarit de longueurs, etc. Ces situations permettent également d'aborder en formation d'autres notions qui nous semblent importantes pour les enseignants et sur lesquelles nous revenons ici : la déconstruction dimensionnelle, la différence entre dessin et figure et les paradigmes géométriques, le travail sur la validation en géométrie.

1 La déconstruction dimensionnelle

Duval et Godin (2005) identifient trois voies différentes pour analyser les figures : la perception des formes, les propriétés géométriques et les instruments pour les reproduire ou les construire. Ils appellent « *déconstruction dimensionnelle* » le processus qui consiste à déporter son regard des objets d'une dimension donnée vers ceux des dimensions inférieures, notamment de « *faire passer d'un regard centré sur les surfaces et leurs contours à un regard qui fait apparaitre le réseau de droites et de points sous–jacent aux différentes figures* » (p. 8). Ils identifient ce processus comme constituant un enjeu central pour les élèves en géométrie et ils soulignent l'importance d'un travail spécifique à mener à son sujet. Il s'ensuit que cette question constitue un point important sur lequel attirer l'attention des enseignants en formation. Ils ajoutent : « *il y a une priorité cognitive des figures 2D sur les figures 1D. (…) La déconstruction dimensionnelle des formes impliquée par l'introduction des connaissances géométriques va à l'encontre des processus spontanés d'identification visuelle des formes* » (p. 7). Autrement dit, pour reproduire une figure, un élève doit se livrer à une certaine déconstruction dimensionnelle, dans laquelle le choix des instruments dont il dispose joue le rôle de variable didactique. En effet, selon que l'instrument utilisé produit des formes 2D (pochoir, gabarit) ou 1D (instruments de traçage comme la règle ou le compas), l'élève doit changer de regard sur la figure et passer d'une analyse en termes de surfaces (2D) à une analyse en termes de lignes (1D) ou de points (0D). En utilisant un gabarit de carton (figure 2D) pour produire des tracés 1D (perpendiculaires, parallèles) ou 0D (milieux), les situations que nous proposons conduisent à mettre en œuvre différents points de vue et différents usages de l'instrument. En posant le gabarit sur la figure, on perçoit sa forme globale (2D), mais pour produire tel ou tel tracé (1D ou 0D), on doit opérer une déconstruction dimensionnelle à son sujet comme au sujet de la figure. C'est ce que les participants ont vécu et ont pu verbaliser pendant l'atelier.

2 La distinction entre dessin et figure et les paradigmes géométriques

Les situations présentées dans l'atelier nous semblent également intéressantes pour travailler en formation des questions liées à la distinction entre dessin et figure, à la validation en géométrie et aux paradigmes géométriques. Commençons par rappeler la distinction entre les concepts de dessin et de figure, telle que Parzysz (1988) : « *la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit, tandis que le dessin en est une représentation.* » (p. 340). Houdement et Kuzniak (Houdement, 2013 ; Houdement et Kuzniak, 2006 ; Kuzniak, 2003) relient des malentendus didactiques en géométrie à l'existence de différents paradigmes qui traversent la géométrie du premier et du second degré ainsi que celle travaillée dans la formation des PÉ : « *Étudiant(e)s, professeur(e)s, enseignant(e)s et élèves se situent implicitement fréquemment dans des paradigmes différents : cette différence de posture épistémologique est source de malentendus didactiques.* » (Houdement et Kuzniak, 2006, p. 178). Nous retenons ici les deux premiers paradigmes qu'ils présentent, soit « Géométrie I » (GI ou géométrie naturelle) et « Géométrie II » (GII ou géométrie axiomatique naturelle). De façon globale, dans GI, les objets étudiés sont des objets matériels, comme les tracés graphiques. Les savoirs géométriques ont leur place, de même que les raisonnements, mais l'étude porte directement sur les objets graphiques,

notamment à l'aide des instruments, et les actions exercées dans le registre matériel et graphique permettent de légitimer les propriétés observées. Le degré de précision des tracés revêt alors une grande importance, dans la mesure où il engage à la fois la possibilité effective et la garantie de preuve des validations. À l'inverse, dans GII, les objets considérés sont des objets idéels dont les dessins ne sont que des représentations. Le dessin devient alors un support de raisonnement mais n'est plus un objet d'étude en soi et la validation se fait alors par des déductions (ilots déductifs). Les instruments servent encore à construire les dessins qui représentent les figures, mais ne permettent plus d'en valider les propriétés.

Avec les instruments de géométrie usuels (règle, équerre, compas), les dessins produits possèdent un niveau élevé de précision et il est possible d'interpréter le dessin comme une représentation relativement « fidèle » de la figure ; la distinction entre un travail en GI ou GII peut être difficile à expliciter. Avec le gabarit en carton, il en va tout autrement. En effet, l'artefact qui lui sert de support a une nature pauvre, légère, peu rigide : c'est un morceau de carton peu épais, qui s'abime rapidement quand on l'utilise. Il ne permet pas de faire des tracés très précis, y compris quand on les exécute avec soin. Le dessin ne peut plus alors être perçu comme une représentation fiable de la figure. Il appartient alors à la personne qui le regarde de l'interpréter, au-delà de ses imprécisions graphiques, dans un statut de figure. Ceci nous semble intéressant à exploiter en formation pour questionner l'importance que les PÉ accordent à la précision des tracés (cf. I) et déplacer leur regard vers une lecture des figures comme représentant des propriétés ou des mises en relations entre des objets géométriques à un niveau théorique. Nous retrouvons l'idée d'Houdement et Kuzniak d'amener les étudiants en formation à identifier les paradigmes géométriques et travailler explicitement leurs différences, en particulier, reconnaitre simultanément la légitimité et les limites d'un travail d'étudiants en formation (en GI-GII) et celle d'un élève (en GI) (Houdement, 2013, p. 5).

3 La validation des constructions

De plus, la nature imprécise des tracés produits au gabarit conduit au fait que le critère de validité d'une construction ne peut pas résider sur la précision du dessin, mais sur la démarche de construction utilisée. En particulier, les personnes peuvent facilement s'accorder à reconnaitre un tracé effectué au gabarit comme « juste » dans des cas où le dessin est visiblement imprécis.

Ce n'est ainsi pas la « fidélité graphique » du tracé, mais la justesse théorique et mathématique du procédé de construction opéré qui garantit la validité. La validation de chaque dessin repose alors en dernier ressort sur celle de sa construction en tant que figure.

Si la construction s'effectue dans le paradigme GI, sa validation ne peut s'opérer que dans le paradigme GII. Ceci peut être perçu pour partie comme un inconvénient : cela rend en particulier impossible de valider les constructions par superposition avec un calque, comme on peut le faire avec les instruments usuels, c'est-à-dire en se ramenant à un contrôle du tracé. La piètre qualité des tracés rend même parfois les validations visuelles ou perceptives moins opérantes.

Ces constats, qui correspondent à des limites de la situation, nous semblent cependant présenter aussi un de ses intérêts pour des exploitations en classe comme en formation. La validation s'établit alors de manière privilégiée selon deux modalités : soit une validation instrumentée, à l'aide du gabarit lui-même, en le superposant de différentes manières à la figure tracée, ce qui est la démarche que nous exploitons dans la situation de restitution de construction ; soit une validation théorique mobilisant des arguments géométriques associés aux tracés évoqués.

Ajoutons que même les validations instrumentées nécessitent encore la prise en compte de considérations géométriques, dans la mesure où la superposition entre l'artefact et les tracés n'est que rarement parfaite.

De plus, les observations que nous avons menées dans les différents contextes où cette situation a été expérimentée nous ont amenés à deux autres constats sur la validation. Selon les cas, elle peut s'effectuer en cours de route, pour valider l'étape en cours, ou bien à la fin de la construction, d'une manière

globale : « A-t-on bien construit ce qu'on voulait ? ». Enfin, elle peut être naturellement introduite par les personnes qui cherchent, ou non. Dans le second cas, il revient à la personne qui encadre et gère la situation, l'enseignant ou le formateur, de poser explicitement la question de la validation.

V - DES ÉLÉMENTS THÉORIQUES POUR ANALYSER LE LANGAGE

Pour préciser ce que nous cherchons à regarder au niveau du langage dans les situations proposées dans l'atelier, et notamment dans les dictées, nous commençons par considérer un exemple de différentes rédactions possibles pour une même construction : celle de la droite perpendiculaire à une droite donnée *(d)* passant par un point donné *A*. Si les phrases qui suivent sont rédigées par nous-mêmes, elles nous semblent correspondre à des formulations que l'on peut effectivement trouver dans des productions ou des copies d'étudiants en formation initiale à qui on demanderait par exemple d'*« écrire un texte qui permette à une autre personne de reproduire la figure ».*

(1) *« Trace la perpendiculaire à (d) passant par A. »*
(2) *« Avec ton équerre, trace la droite perpendiculaire à la droite (d) qui passe par le point A. »*
(3) *« Place un côté de l'équerre le long de la droite (d) de telle façon que le point A soit situé sur l'autre côté de l'équerre. Trace le trait le long du côté de l'équerre qui passe par A. Prolonge ensuite ce trait avec ta règle pour faire une droite. »*
(4) *« Prends ton équerre. Place un côté de l'angle droit sur la droite (d). Fais glisser l'équerre le long de (d) jusqu'à placer l'autre côté de l'équerre sur le point A. Prends alors ton crayon. Trace le trait le long de ce côté qui passe par A. Enlève l'équerre puis, avec ta règle, prolonge ce trait de l'autre côté de la droite (d). »*

On note tout de suite que ces quatre textes révèlent des choix de rédaction très différents, ainsi qu'une compréhension différente de ce que signifie « permettre à une autre personne de reproduire la figure ».

Dans la rédaction (1), on se contente d'indiquer l'objet géométrique que l'on doit tracer, dans un domaine purement mathématique. On s'adresse à une personne, élève ou collègue, qui n'a rien à apprendre de cette action.

Dans la version (2), on s'adresse également à une personne qui sait manier les instruments et qui est capable d'effectuer de façon autonome les gestes à réaliser mais, à la différence de la formulation précédente, on prend soin d'indiquer le principal instrument à employer.

À l'opposé, les formulations (3) et (4) font mention de deux instruments, l'équerre et la règle, et on y fait la distinction entre demi-droites et droites, ou plus exactement entre les tracés graphiques qui représentent (ou s'interprètent comme) des demi-droites ou des droites entières. De plus, dans ces deux rédactions on introduit une chronologie dans les tracés. Autrement dit on y précise un élément de (dé)construction chronologique, là où, dans les rédactions (1) et (2), on suppose cette connaissance déjà acquise et spontanément mobilisable.

Enfin, la principale différence entre les deux rédactions (3) et (4) est que, dans la rédaction (3), on indique une succession de tracés à réaliser, tandis que dans la rédaction (4), on décrit aussi les gestes à effectuer pour réaliser ces tracés. On peut dire que, dans la rédaction (3), on décompose le tracé demandé en une succession de tracés intermédiaires qui en constituent les étapes, en s'adressant à une personne qui maitrise le maniement des instruments. Dans la rédaction (4), on ne préjuge pas que la personne possède ou maitrise ces connaissances, et on décompose le tracé en une succession de gestes qui en permettent la reproduction. Quelle formulation, quel langage sont attendus d'un élève de cycle 3 ? D'un enseignant qui intervient en classe de cycle 2 ou de cycle 3 ? D'un étudiant qui prépare le concours ? Ce qui est attendu au niveau du concours est-il congruent avec ce qui servira ensuite dans l'exercice du métier ?

Pour développer et creuser ces questions, nous allons nous appuyer sur des éléments théoriques relatifs au langage dans les disciplines scolaires (V.1) et au cadre d'analyse de l'action instrumentée (V.2).

1 La distinction entre langue et langage et le processus de secondarisation des discours

Tout d'abord, pour ce qui concerne le langage en général, nous nous appuyons sur les travaux de linguistes qui travaillent sur les pratiques langagières au sein des disciplines scolaires, notamment Jaubert et Rebière (Jaubert & Rebière, 2011, 2012 ; Rebière, 2011). Elles introduisent une distinction entre langue et langage. La langue désigne l'outil général, formel, indépendant de ses usages, qui est à la disposition de tout le monde, dont le vocabulaire et la syntaxe sont présentés dans les dictionnaires et les grammaires, et qui sert de support au langage. Le langage, quant à lui, désigne une activité et une pratique, un usage collectif de la langue par un groupe de locuteurs donnés, dans un type de contexte donné. Le langage comprend ainsi une dimension sociale : il intervient au sein d'une communauté de discours, dite « communauté discursive », et il est engagé dans des actions prenant en charge notamment des usages et des pratiques. Jaubert et Rebière (2012) conçoivent alors l'utilisation du langage comme un facteur central pour les disciplines scolaires : « *le langage s'avère (…) le lieu et l'outil privilégié des apprentissages* » (p. 5).

Comme le soulignent Barrier, Hache et Mathé (2014), la dimension du langage qui nous intéresse alors en géométrie est celle d'un langage engagé dans l'action, et notamment dans la résolution de problèmes : « *Il se passe des choses fondamentales, d'un point de vue cognitif, au sein des interactions langagières orales qui se développent autour de la résolution matérielle des activités des élèves en classe de géométrie.* » (p. 5). Ils ajoutent : « *Le langage, et en particulier le langage verbal, auquel nous attachons une attention particulière, est pour nous constitutif de l'activité géométrique des élèves, au même titre que leurs actions matérielles, plus classiquement analysées en didactique des mathématiques.* » (p. 15)

Pour analyser ce langage qui intervient de façon cognitive dans des interactions, Jaubert et Rebière (2012) s'intéressent alors, plus qu'à la maitrise des formes standardisées scolaires, aux déplacements et modifications qui se produisent dans le langage : « *toute reformulation, modification, entraine un déplacement de significations* » (p. 3). Ceci les conduit à introduire la notion de « secondarisation » : « *Ce qui importe (…), c'est le processus de transformation progressive du langage déjà là, sa mise en travail, ce que nous appelons la « secondarisation » des pratiques langagières.* » (Jaubert, 2007, p. 208). Comme le reprend Hache (2012) du côté de la didactique des mathématiques, « *le langage est outil de construction, de négociation et de transformation des significations* » (p. 3).

Pour pouvoir prendre en charge les transformations qui s'opèrent dans le langage, l'enseignant ne peut pas regarder seulement le langage finalisé visé, mais il doit prêter attention aux évolutions et modifications du langage effectivement employé dans les situations, pour les interpréter comme autant d'indices d'évolution d'un rapport au savoir, autrement dit d'un apprentissage. Ce sont alors les possibilités de choix de formulations et reformulations sur lesquelles nous souhaitons attirer l'attention des enseignants en formation, et que nous cherchons à mettre en évidence à partir des situations que nous proposons dans l'atelier.

Cependant, pour pouvoir être en mesure de repérer de telles évolutions dans le langage spontanément employé lors d'une activité mathématique, encore faut-il le laisser exister, sans commencer d'abord par trop le formater. Comment sensibiliser les enseignants à la présence et à l'évolution de ces différents langages ? Comment leur permettre de s'autoriser à laisser vivre en classe des pratiques langagières non conformes, non standard, non reconnues par l'Institution, qui n'ont pas vocation à être institutionnalisées et sont souvent contraires aux pratiques scolaires les plus courantes, voire parfois invalides ? Il nous semble qu'il y a là une question d'ordre à la fois mathématique et didactique qui a une grande importance pour la formation en mathématiques.

2 Le cadre d'analyse de l'action instrumentée

Pour analyser les places respectives que peuvent prendre, non seulement l'artefact, mais aussi le corps, les gestes, les tracés et les notions mathématiques dans le langage employé dans les situations de géométrie, nous nous appuyons également sur le cadre d'analyse de l'action instrumentée élaboré par

Petitfour (2015, 2017b), qu'elle a développé pour étudier et décrire les besoins d'élèves dyspraxiques en géométrie. Nous reprenons ici ces outils d'analyse pour formaliser les questions que nous nous posons sur la place du langage auprès d'élèves « ordinaires », dans des situations de genèse instrumentale des instruments de géométrie d'une part, et dans des situations de recherche et de résolution de problèmes d'autre part. Ceci nous conduira parfois à adapter certaines dénominations du cadre d'analyse pour mieux « coller » aux besoins particuliers qui sont les nôtres, ce que nous signalerons à chaque fois que nécessaire. Nous présentons d'abord les éléments de ce cadre d'analyse que nous retenons, puis la façon dont nous nous en servons pour éclairer les questions que nous nous posons.

Le premier élément que nous retenons est le suivant : le cadre théorique de l'action instrumentée conduit à distinguer différents types d'objets qui sont présents conjointement dans les situations de géométrie, ainsi que les relations qui existent entre eux. Les différents objets mis en relation sont les notions géométriques qui interviennent, les tracés qui les représentent, les manipulations des instruments qui permettent de réaliser ces tracés, et les gestes du corps à effectuer pour mettre en œuvre ces manipulations, le tout intervenant dans un contexte général qui nécessite une organisation d'ensemble. Petitfour (2015) définit alors l'action instrumentée comme l'*« action du sujet qui, dans son environnement, utilise des objets techniques, numériques ou matériels, pour produire des objets graphiques, porteurs de propriétés géométriques.* » (Memento et annexes, p. 3)

2.1 Quatre types d'objets

Le cadre d'analyse de l'action instrumentée distingue dans un premier temps quatre types d'*objets* :

- les *objets mathématiques* sont les concepts et notions géométriques qui interviennent. Ils sont de nature mentale ou abstraite.

- les *objets graphiques* sont les tracés matériels qui représentent des objets géométriques ou qui peuvent s'interpréter comme tels. Dans l'interprétation que nous en faisons, nous prenons en compte dans les objets graphiques non seulement les tracés, mais aussi les marques, repères, traits de construction, codages, etc. qui peuvent être produits, donc aussi reproduits, qu'ils conduisent ou non à une interprétation sémiotique.

- les *objets techniques* sont les artefacts mobilisés qui permettent de produire ces tracés. Ici, l'*objet technique* principal est naturellement le gabarit, mais nous intégrons également dans les objets techniques les autres artefacts qui interviennent et qu'il est possible de faire figurer dans le langage, notamment la feuille de papier, le crayon, la gomme, etc.

- enfin, le *corps du sujet* et les *gestes* qu'il faut effectuer pour manipuler les instruments afin de produire les tracés. Nous intégrons dans ce type d'objets ou de gestes corporels à la fois les gestes au sens propre, liés aux mains, mais aussi le regard, les positions du corps, etc.

Nous cherchons alors à analyser comment les objets géométriques, graphiques, techniques et les gestes sont conjointement pris en compte dans le langage qui accompagne une situation de recherche ou de genèse instrumentale.

2.2 Différentes composantes d'analyse

Le cadre d'analyse de l'action instrumentée distingue ensuite quatre *composantes* qui correspondent à des niveaux de relations entre les différents types d'objets.

- La « *composante sémiotique* » correspond aux relations entre les objets géométriques et les objets graphiques. Ceux-ci entrent en relation selon une double relation sémiotique d'interprétation/représentation, qui intervient selon deux directions : d'une part les objets graphiques servent à représenter graphiquement des objets géométriques ; d'autre part les objets géométriques permettent d'interpréter géométriquement des objets graphiques déjà tracés. C'est notamment au sein de cette composante que l'on peut situer la distinction entre « dessin » et « figure ». D'une façon plus générale, nous appellerons « *graphico-géométriques* » les relations qui existent entre objets graphiques et objets géométriques.

- La « *composante technico-figurale* » correspond aux relations entre les objets techniques et les objets graphiques. Cette relation est, elle aussi, duale : d'une part, les objets techniques permettent de réaliser les tracés effectifs des objets graphiques ; d'autre part, les objets graphiques résultent (a priori) d'un usage des objets techniques dont ils sont la trace. De fait, un objet graphique tracé peut s'interpréter comme étant la trace d'une utilisation (et, déjà, d'un positionnement) d'un objet technique. Une analyse instrumentée des tracés peut alors permettre de restituer les objets graphiques dont ils portent l'empreinte, notamment dans les cas où cette empreinte est partielle. Pour ne pas prendre position sur des questions de figuration, relatives à la dimension sémiotique, ni sur la distinction entre dessin et figure, nous appellerons simplement « *technico-graphiques* » les relations qui existent entre objets techniques (incluant la gomme) et objets graphiques (incluant des marques et repères).

- La « *composante manipulatoire* » correspond aux relations entre le corps du sujet et les objets techniques à manipuler, par le biais des gestes que l'on doit effectuer. En cohérence avec nos choix précédents, nous appellerons « *technico-gestuelles* » ces relations entre objets techniques et gestes.

- Enfin, la « *composante organisationnelle* » englobe l'ensemble des relations du sujet avec l'environnement spatial.

On peut alors résumer les quatre types d'objets et les quatre composantes que nous considérons par un schéma tel que le suivant :

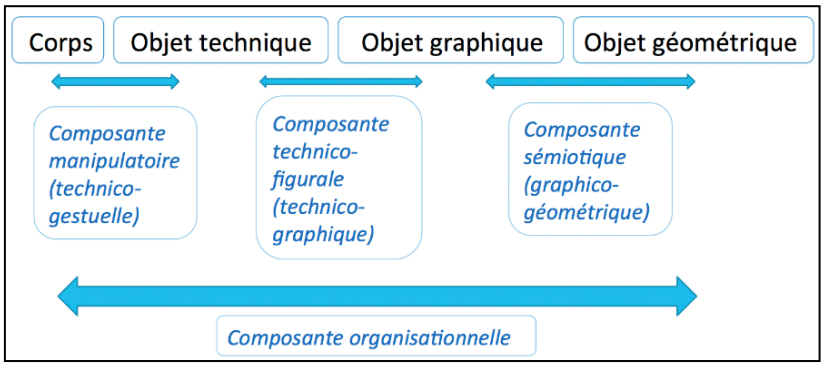


Figure 15: Objets et composantes de l'action instrumentée

2.3 Visées et langages associés aux composantes

Le cadre d'analyse de Petitfour (2015) associe ensuite des *visées,* qui sont des intentions d'action, puis des *langages,* à chacune de ces quatre composantes. La visée *sémiotique* (graphico-géométrique) correspond à l'« *intention de représenter graphiquement un objet géométrique* » (Mémento et annexes, p. 5). La *visée technico-figurale* (technico-graphique) correspond au « *projet d'utiliser un ou des objets techniques pour produire un objet graphique* ». La *visée manipulatoire* (technico-gestuelle) correspond à l'« *intention motrice de manipuler les objets techniques avec dextérité pour produire un objet graphique* ». Enfin la visée organisationnelle correspond à la « *conception de l'organisation des actions du sujet* » (Mémento et annexes, p. 5).

À chacune de ces visées sont ensuite associés différents types de *langages*. Sont ainsi distingués des *langages à visée sémiotique*, des *langages à visée technico-figurale*, des *langages à visée manipulatoire* et des *langages à visée organisationnelle* (Mémento et annexes, pp. 10-11).

2.4 Ce que nous retenons pour nos questions et pour nos analyses

Nous retenons de ce cadre d'analyse les éléments suivants. Le sujet en géométrie est placé dans un environnement, dans lequel il est conduit à mener des actions. Ces actions sont réalisées en mobilisant des instruments reposants sur des artefacts techniques dont il faut connaitre et maitriser le maniement. Les actions réalisées avec ou sur les instruments visent à produire des tracés graphiques. Les tracés produits peuvent, dans une double relation sémiotique, viser à représenter des objets géométriques ou être interprétés comme porteurs d'une signification géométrique. Ces différents niveaux interagissent de façon complexe et nécessitent pour être mis en œuvre d'être pris en charge au niveau global par une

organisation, tout à la fois mentale, chronologique et temporelle, mais aussi pratique, gestuelle et matérielle.

Nous proposons alors d'utiliser ces différents éléments pour analyser les discours tenus et les langages utilisés en particulier dans des situations de genèse instrumentale des instruments de géométrie. En effet, ces situations permettent de découvrir tout à la fois les notions géométriques visées, les tracés qui les représentent, le maniement des instruments à utiliser, les gestes corporels à effectuer, ainsi que le langage qui permet d'en parler. Nous formulons alors l'hypothèse que les connaissances liées à ces gestes, aux objets techniques, aux tracés graphiques et aux concepts géométriques vont se co-construire simultanément par le biais des situations travaillées, en interaction constante avec le langage.

3 Exploitation de ces éléments théoriques pour analyser les échanges oraux de l'atelier

Les situations travaillées dans l'atelier ont conduit de fait les participants à créer une communauté discursive autour du gabarit de rectangle. Cet instrument étant non habituel, les participants ont dû recourir à des formulations spontanées, partagées d'abord au sein des groupes, puis de l'atelier. Les transcriptions dont nous disposons sont bien entendu trop limitées pour pouvoir aller jusqu'à mettre en évidence de façon précise des « langages » au sens de Jaubert et Rebière, mais nous pouvons au moins analyser ces transcriptions pour regarder « de quoi on parle » et « comment on le fait » pour communiquer, entre des indications qui portent sur les mathématiques, les tracés, l'artefact ou les gestes corporels. De fait, on observe que la situation de genèse instrumentale en cours, associée à la situation de recherche, a conduit les participants à mobiliser dans leurs échanges des types variés de formulations qui ne relèvent pas toutes du seul langage mathématique. Selon les cas, nous avons repéré des choix de formulations qui peuvent porter sur un seul type d'objet (géométrique, graphique, technique ou gestuel) ou qui mettent en relation au contraire deux (voire parfois plus) de ces types d'objets. Enfin, compte-tenu de ce que nous avons rappelé ci-dessus sur le langage (cf. V.1), un enjeu important serait de pouvoir analyser comment ces choix de formulations évoluent en fonction de l'avancée de l'appropriation du gabarit comme instrument, mais les enregistrements que nous avons relevés, centrés sur un seul moment de l'atelier, ne nous le permettent pas.

VI - APPORTS DE L'ATELIER

Nous présentons ici les apports de l'atelier et, plus particulièrement, les éléments qui nous semblent intéressants à exploiter en formation à partir des situations proposées. Ce qui suit s'appuie à la fois sur les commentaires émis par les participants pendant les moments d'échange et de mise en commun, sur les observations que nous avons pu relever nous-mêmes pendant les phases de travail au cours l'atelier, et sur les analyses que nous avons effectuées ensuite des transcriptions des dictées qui ont été enregistrées.

1 Apports concernant la situation des problèmes de construction (*premier temps)*

Après une trentaine de minutes consacrées à la découverte de la situation, puis un moment d'échanges informels au sein des groupes, le premier temps portant sur les problèmes de construction s'est achevé par une discussion collective en réponse aux trois questions suivantes :

1. *Que feriez-vous de cette situation en formation ?*
2. *Que feriez-vous de cette situation dans des classes ?*
3. *Qu'est-ce que cette situation fait travailler par rapport au langage ?*

1.1 L'observation du vécu par les participants de la situation

Signalons d'abord que nous avons retrouvé chez les participants de l'atelier le même enthousiasme devant cette situation que lors de nos expérimentations précédentes, que ce soit celle du colloque COPIRELEM de 2015, dans des formations d'enseignants ou auprès d'étudiants. En effet, l'utilisation du gabarit de rectangle en carton pour réaliser des constructions présente un défi qui se révèle à chaque fois

très stimulant et permet ainsi d'enrôler fortement les participants de ces différents publics dans la recherche.

Pour chaque construction, des démarches très diverses ont été proposées. On peut cependant ajouter que, comme nous l'avions déjà observé en 2015, dans les formations ou auprès d'étudiants, celles-ci ne s'accompagnent que très rarement de traces écrites, que ce soit des commentaires d'ordre théorique ou des références permettant de retrouver facilement les étapes de la construction. Si, au sein de l'atelier, les participants ont su retenir les propriétés théoriques convoquées *(justifications)*, les gestes de maniement de l'instrument qui permettaient de les traduire sur la figure *(manipulations)* et l'ordre chronologique précis qu'ils avaient adopté *(déconstruction chronologique)*, il n'en va pas toujours de même pour tous les publics et l'absence de traces écrites peut parfois rendre plus difficile l'expression des démarches suivies.

Toutefois, notre expérience nous a montré que si, pour faciliter la mémorisation, on demande des rédactions de textes, le langage employé a tendance à se rapprocher de celui attendu dans les programmes de construction et à s'éloigner des formulations orales spontanées que nous cherchons à mettre en évidence. La proposition des dictées orales, assortie de leur enregistrement pour réécoute, peut être reprise en formation pour faire apparaitre les formulations que nous cherchons à étudier ici.

1.2 Usages et exploitations possibles de la première situation en formation

En réponse à la première question, tout le monde s'est accordé sur l'intérêt d'utiliser la situation des constructions en formation initiale ou continue et ce, pour différentes raisons, qui rejoignent nos analyses de la partie IV. Parmi celles qui ont été soulignées, on peut citer le fait que cette activité repose sur une situation attractive parce qu'originale et riche, et qui a l'avantage de présenter une situation de résolution de problème dans un contexte non numérique. En formation initiale, elle conduit les étudiants à considérer les propriétés théoriques du rectangle pour envisager différents usages que l'on peut faire du gabarit comme instrument. Le choix d'un artefact qui ne permet pas, par nature, de produire des tracés très précis ni très fiables a aussi été signalé. Ce choix écarte de fait radicalement l'enjeu de la précision des tracés, dont le caractère central pour les enseignants peut faire obstacle à leur perception ou à leur prise en compte d'autres questions (cf. II.1). Enfin, comme plusieurs participants l'ont souligné, l'utilisation d'un instrument non conventionnel permet effectivement de recréer pour des adultes une situation de genèse instrumentale. Elle permet alors d'interroger en formation à la fois l'utilisation des instruments de géométrie, les difficultés liées à leur appropriation et les propriétés géométriques qui justifient les emplois de l'instrument. Les participants ont ainsi jugé intéressant de reprendre cette situation en formation dans une stratégie de transposition, pour amener les étudiants ou enseignants à percevoir des difficultés que peuvent rencontrer des élèves face des instruments nouveaux pour eux comme la règle, l'équerre ou le compas, alors que pour des adultes l'usage de ces instruments est devenu complètement transparent et naturalisé.

Enfin, la communication sur les constructions a très vite posé, au sein des groupes, la question abordée dans la suite de l'atelier : quelles formulations employer pour décrire ce que l'on propose et pour se faire comprendre, quand on n'a pas encore acquis une maitrise complète des manipulations de l'instrument ni de ses propriétés ? Suffit-il de recourir au langage géométrique décrivant les objets mathématiques sous-jacents, en mettant de côté les manipulations de l'artefact ou les gestes à effectuer ? Faut-il au contraire parler des gestes, d'éléments liés à l'artefact qu'on utilise ou d'éléments particuliers des tracés pour faire reproduire matériellement des constructions que l'on propose, quitte à s'éloigner de formulations mathématiques ?

1.3 Usages et exploitations possibles en classe de la situation des constructions

À la deuxième question, qui portait sur les utilisations possibles en classe de la première situation, les participants ont estimé que cette activité présente un intérêt en cycles 3 et 4, en soulignant que la diversité des procédures possibles sera plus grande en cycle 4 car les connaissances des élèves sont plus nombreuses. À ces niveaux scolaires, la situation présente l'intérêt de mettre l'accent sur l'utilisation des propriétés et non sur la qualité des tracés. En effet, la validation par un calque étant essentiellement impossible, elle ne peut passer que par des arguments théoriques ou instrumentés, ce qui permet

d'accompagner un passage de la géométrie I à la géométrie II. Un tel changement de contrat didactique, rendu nécessaire par les limites de l'artefact, peut se révéler intéressant et motivant pour les élèves, en particulier pour ceux qui sont par ailleurs un peu malhabiles avec les instruments. Enfin, la diversité des procédures possibles, même dès le cycle 3, amène en classe une situation de résolution de problème qui est très loin de posséder une unique solution, ce qui est aussi en soi intéressant. Les participants ont cependant mentionné une difficulté que ce dernier point peut soulever du côté des enseignants, notamment débutants. Face à la variété des procédures que les élèves peuvent proposer, et l'impossibilité de les valider au moins partiellement par calque, il revient à l'enseignant de pouvoir valider ou invalider chaque proposition sur la base d'un argument théorique, qu'il doit élaborer pour lui-même en temps réel, ce qui demande de fait un certain recul mathématique.

1.4 Les questions liées au langage

Même pour le public expérimenté de l'atelier, la recherche en groupes ainsi que l'aspect inédit de la situation ont amené les participants à échanger très rapidement entre eux sur les constructions qu'ils proposaient, notamment pour en questionner ou confirmer la validité. Nous avons pu observer que cela les a conduits à élaborer un premier langage commun au sein des groupes pour se comprendre et pour échanger sur la situation, que l'on pourrait qualifier de « premier langage d'action », notamment pour décrire les gestes qu'ils effectuaient et les procédures qu'ils proposaient. La question formelle du « vocabulaire correct » à employer s'est alors retrouvée déplacée, dès lors, vers celle plus générale d'un langage qu'il faut élaborer et mutualiser, pour déterminer « quoi dire » et « comment en parler ». Pendant la mise en commun qui a suivi, nous avons pu observer qu'à ce premier stade de l'atelier certains participants n'avaient pas encore pris conscience du fait qu'ils avaient parfois eux-mêmes recouru à des formulations qui ne relevaient pas du langage mathématique pour communiquer dans cette phase de recherche. Une personne a par exemple posé la question suivante : *« Nous, nous avons spontanément utilisé le vocabulaire de géométrie juste, mais est-ce que des étudiants auraient su faire pareil ? »*. Or notre écoute active de leurs échanges pendant le travail nous a permis d'observer que, contrairement à cette représentation, le « vocabulaire juste » n'a été le seul utilisé. Les participants l'avaient certes spontanément utilisé fréquemment, mais pas constamment, et ils n'avaient pas utilisé que ce langage. Les échanges menés dans cette phase n'ont pas été enregistrés de façon systématique, mais nous avons pu noter quelques phrases échangées au sein des groupes, qui nous semblent s'écarter des formulations de géométrie entièrement standards et correctes *(cf. annexe 4)*. Cela rejoint des observations déjà relevées dans l'atelier de 2015 (Ginouillac) où, par exemple, une personne avait signalé le réemploi d'une procédure qui était devenue à ce moment-là un schème partagé au sein du groupe sous la forme orale suivante (accompagnée d'un geste) : *« et là tu fais tchouck-tchouck ! »* Il nous semble qu'il y a là une chose qui se passe en partie « à l'insu » de nos propres conceptions, y compris pour nous-mêmes, formateurs et mathématiciens, et que seul un travail spécifique permet de la mettre en évidence ; et il en va sans doute de même pour les PÉ dans leurs propres classes. C'était précisément l'enjeu du deuxième temps de l'atelier que de faire apparaitre de telles formulations pour mieux permettre de les observer.

2 Apports concernant les situations d'analyse et de « dictée de reproduction » *(deuxième temps)*

Le deuxième temps de l'atelier a permis de mettre en évidence les difficultés que les questions de formulation soulèvent ainsi que la variété des ressources que les participants mobilisaient dans leurs échanges spontanés, alors qu'ils pouvaient penser n'avoir recours a priori qu'à des expressions proches du langage géométrique. La phase de dictée leur a ainsi permis de repérer, après coup, que cette variété de formulation était déjà présente dans la situation de recherche qui avait précédé. La discussion et la mise en commun qui ont suivi ont permis de mettre en évidence l'utilité et le recours inévitable à d'autres langages que celui des programmes de construction pour parler des actions et des concepts engagés dans les phases de genèse instrumentale (appropriation d'un instrument) comme dans les phases de recherche (appropriation d'une solution). De ces remarques découle une question pour la formation qui reste pour le moment sans réponse : que proposer aux enseignants qui ont à enseigner l'usage de la règle, du compas et de l'équerre à leurs élèves et qui se retrouvent peu ou prou comme les

participants avec le gabarit de rectangle en carton, dans des situations où le langage formel se retrouve inaccessible et/ou inopérant ?

Dans les situations de classe, la question se posera certainement et on ne peut pas se contenter de proposer seulement aux enseignants des stratégies de monstration qui se limiteraient à dire aux élèves : « *Regardez, je vous montre* » ou « *vous faites comme ça* ». Une première proposition que nous pouvons formuler à l'issue de cet atelier serait de ne pas travailler en formation les questions de langage en géométrie par le seul biais des programmes de constructions, mais également de faire travailler les PÉ sur des formulations qui leur permettent aussi de parler avec précision des manipulations de l'instrument, des gestes du corps à effectuer ou des propriétés matérielles des tracés.

2.1 La préparation des dictées et la nécessité d'une analyse instrumentée des figures

Il était demandé aux binômes de se concerter pour choisir, parmi les six figures de leur feuille, celle dont ils allaient dicter la construction. Des discussions ont donc été engagées au sein des binômes. Nous avons vu les participants réaliser alors des analyses instrumentées des figures à l'aide du gabarit, afin de reconstituer des procédés de construction possibles pour chacune d'elles. Pour savoir si tel ou tel élément identifié visuellement sur un dessin provient effectivement de telle ou telle construction à l'aide du gabarit, il est nécessaire de le superposer directement aux tracés graphiques pour identifier les propriétés qui ont pu être utilisées. Le fait que le gabarit soit un instrument nouveau, dont on ne maitrise pas encore tous les aspects, limite de fait la portée des analyses perceptives et visuelles, ce qui renforce le besoin de réaliser des analyses instrumentées avec (une copie de) l'instrument qui a servi à produire les figures. Ceci constitue à nos yeux un intérêt majeur de cette situation d'analyse de figures produites à l'aide du gabarit.

La nécessité de cette analyse instrumentée préalable n'était à dessein pas explicitée dans la consigne. Comme des participants l'ont souligné, « *même si ce n'était pas indiqué, il fallait comprendre qu'il y avait d'abord besoin d'analyser la figure pour pouvoir la reproduire* ». Les participants ont jugé que ce point était intéressant, soulignant que dans les classes « *les élèves apprennent très peu à analyser et à décomposer des figures complexes* ».

Ajoutons que la première approche pour cette analyse et cette déconstruction ne passe pas par du langage mais par une manipulation matérielle de l'instrument : en l'occurrence, superposer le gabarit au dessin de différentes façons pour rechercher des coïncidences de taille ou de forme et reconstituer un procédé de construction. Le langage intervient dans un second temps, pour se mettre d'accord au sein du binôme à la fois sur la figure à retenir et sur un procédé qui permet effectivement de la reproduire. Cette phase a alors conduit les binômes à produire des formulations pour expliciter les procédures de construction qu'ils identifiaient, et qui n'étaient pas forcément celles qu'ils auraient eux-mêmes spontanément mobilisées. Ces formulations combinaient des éléments liés aux tracés et à l'instrument (du côté de l'analyse instrumentée et de la prise d'information) et d'autres liés aux propriétés mathématiques (du côté du procédé de construction et de sa validation), tout en s'appuyant sur des expressions non encore standardisées à ce moment de l'atelier.

En revanche, lors de la mise en commun qui a clôturé cette activité, la restitution des éléments identifiés a été principalement formulée en langage mathématique : « *il fallait commencer par tracer les médiatrices* », « *il fallait prolonger la longueur du rectangle et reporter sa largeur* ». Les modalités d'utilisation du gabarit qui permettaient ces tracés, et les éléments d'analyse instrumentée qui avaient été mobilisés, n'étaient plus évoqués à ce moment de l'atelier ; ce qui n'a rien d'étonnant, puisque le travail effectué avait permis aux participants de s'approprier la situation. On peut ajouter d'ailleurs que les productions langagières que nous avons enregistrées, qui sont celles des dictées qui ont suivi la première phase d'appropriation, correspondent sans doute déjà à des reformulations et des remises en forme plus élaborées des tout premiers échanges au sein des binômes, qui du coup échappent à nos analyses.

2.2 Les retours de l'atelier sur les dictées

Notre restitution des retours de l'atelier sur les dictées s'appuie notamment sur les transcriptions des dictées de l'atelier, que nous présentons en annexes 4 et 5 *(dictées 1 à 6)*.

Ce qui est attendu d'une dictée

Dans la mise en commun, des groupes ont interrogé les exigences attendues pour les dictées et les critères que l'on peut proposer pour les évaluer. Jusqu'à quel point la figure produite doit-elle être « identique » au modèle ? Faut-il respecter la chronologie et toutes les propriétés géométriques présentes sur le modèle ? Comme l'a exprimé un groupe : *« Faut-il que les figures soient exactement superposables ? Quels sont les attendus ? Quelles sont les exigences ? »*. Cette question s'est posée notamment pour la dictée dont nous présentons la transcription en annexe 3 *(dictée 1)*. Le texte propose une procédure qui aboutit effectivement au résultat voulu (partager le rectangle en deux) mais sans reprendre toutes les propriétés géométriques du modèle. La construction obtenue est alors mathématiquement correcte, mais n'est pas superposable à la figure initiale. Cette différence a conduit à une discussion au sein du groupe, puis à des réflexions sur les enjeux visés. Est-ce qu'il importe d'obtenir exactement la même figure en tous points que celle qui est présentée ? Ou est-ce que la description d'une procédure qui lui corresponde encore, et qui conduit également à une réussite, mais sans reprendre toutes les particularités de la figure présentée est suffisante ? Les deux sont évidemment possibles et il y a là un choix de contrat didactique à faire, sur lequel l'atelier n'a pas tranché.

La position prototypique des figures et l'utilisation de vocabulaire de position spatiale

Des participants ont souligné que la présence du contour du gabarit dessiné au centre de la feuille en position prototypique, ainsi que le fait que toutes les constructions étaient également présentées à partir de cette même position, avait grandement facilité l'appropriation visuelle de chacune d'elles (*« on savait d'où on devait partir »*), ainsi que le travail de dictée, en permettant le recours à du vocabulaire de position spatiale (*« en haut », « en bas », « à droite »*, etc.). Il y a là une variable didactique que l'on peut exploiter pour adapter cette situation. L'écoute des enregistrements montre qu'en cas de difficultés, les personnes qui dictaient se sont fréquemment rabattues sur des indications de positions spatiales, comme en dernier recours. Dans la mise en commun, les binômes ont indiqué avoir cherché à éviter autant que possible ce recours à du vocabulaire de position, sans avoir toujours réussi à y parvenir (*« Nous on a été obligés d'utiliser du vocabulaire de position ». « Nous on se l'est interdit ».).*

La déconstruction dimensionnelle et les perceptions 2D ou 1D

En comparant les deux figures A1 et B1 (cf. annexe 2), certains binômes ont pu retrouver les éléments présentés par Duval et Godin (2005) sur la déconstruction dimensionnelle. En effet, elles correspondent au même procédé de construction, mais diffèrent dans leur présentation graphique. Dans la figure A1, on retrouve les tracés de construction qui correspondent au contour entier du gabarit (tracés 2D), tandis que dans la figure B1 on ne voit que certains de ses côtés (tracés 1D). Les participants ont souligné que les positionnements du gabarit, et donc l'identification du procédé de construction, étaient plus faciles à percevoir et à restituer dans le premier cas que dans le second. De plus, la dictée est également plus facile à formuler. En effet, pour indiquer les mêmes tracés que ceux du modèle, il suffit d'évoquer alors des positionnements globaux du gabarit, tandis que l'autre construction demande d'indiquer également certaines de ses parties. Il y a là une variable didactique que l'on peut choisir d'exploiter pour faire varier un niveau de difficulté à partir d'une même construction.

Désigner ou non les points par des lettres

Aucune indication n'avait été donnée, à dessein, sur le fait de désigner ou non les points par des lettres dans la formulation des dictées. Sur les six binômes, deux ont choisi d'y recourir *(dictées 4 et 6)* et les quatre autres ne l'ont pas fait. Ces deux binômes ont échangé leurs dictées avec des binômes qui avaient fait le choix inverse, ce qui a conduit à des discussions au sein des groupes puis dans l'atelier. Tous les binômes ont confirmé s'être posé la question, certains choisissant de s'interdire l'utilisation de lettres pour rester au plus près de ce que des élèves pourraient faire en classe et pour se confronter à la même difficulté que celle des PÉ dans leur enseignement. Ils ont alors cherché des façons de contourner la difficulté (*« au sommet situé dans le même demi-rectangle »*), parfois en recourant à du vocabulaire de

position spatial. D'autres binômes ont indiqué avoir eu recours aux lettres parce qu'ils n'avaient pas vu comment ils pouvaient s'en sortir autrement. Pour autant, le fait de nommer les points n'a cependant pas toujours permis d'éviter le recours à des indications de repères de positions : *« Tracer la perpendiculaire à (EF) passant par E vers l'extérieur du rectangle. Vers l'extérieur du rectangle… L'extérieur ! J'insiste ! » ; « Placer le point E en reportant la largeur du rectangle à partir de A sur le segment [AB] »*, ni à éliminer tous les implicites : *« Placer G en reportant la largeur du rectangle sur le segment que vous venez de tracer. » (dictée 4).*

Les rétroactions et reformulations

Des participants ont souligné l'effet important des rétroactions (dans les deux sens : contrôle visuel de la part des personnes qui dictaient et questionnements de la part des personnes qui dessinaient), qui conduisaient à des reformulations en retour. Des groupes se sont d'ailleurs interrogés pendant la dictée sur la légitimité d'utiliser ou non de telles rétroactions : *« - Tu as le droit de répondre, si on te pose une question, ou pas ? - Oui, bien sûr ! C'est des variables didactiques ! ».* Les réajustements produits en réponse suivent alors une certaine forme de pragmatisme : lorsqu'un type de formulation produit une incompréhension ou un effet différent de l'effet escompté, on en change. Comme l'a dit une personne dans la mise en commun : *« Je l'ai dit d'une certaine façon, mais ça ne réagissait pas, et du coup j'ai essayé de le dire autrement. Il faut vraiment, quand on est sur l'écrit, se mettre à la place de l'autre, alors que sur l'oral, il y a l'autre qui réagit. Et même un silence suffit à exprimer quelque chose. ».* On peut ajouter que ces reformulations s'accompagnent le plus souvent d'un changement de visée. Par exemple, si une formulation mathématique n'est pas comprise, la reformulation peut indiquer une manipulation de l'artefact ou un geste à mobiliser. Si à l'inverse la description d'une manipulation n'est pas claire, l'indication de ce qui est visé au niveau mathématique peut être ajoutée. Un autre groupe a indiqué : *« Ce que je trouve intéressant, c'est que ce sont de classiques activités d'émission-réception, mais en direct. Donc on voit les autres faire, et on peut ajuster le discours en direct. »* Tous les groupes ont d'ailleurs repéré, dans leurs propres dictées, la présence importante des mots de validation (*« Voilà », « Non », « De l'autre côté »)* ainsi que celle des silences sous-entendant une approbation. On peut souligner pour finir que la validation dont il est question ici relève d'un ordre essentiellement gestuel et graphique : il s'agit de la validation d'un tracé effectué ou d'un geste de positionnement du gabarit préalable à un tracé, donc au fond de la compréhension du message et de la réussite de la situation de communication, mais pas de la validation mathématique de la construction effectuée, qui à ce moment-là n'était pas interrogée.

La validation mathématique

En effet, il est intéressant de noter qu'au cours des phases d'échanges de dictée, la validation mathématique des démarches proposées n'a jamais été interrogée. En revanche, en situation de classe ou de formation initiale ou continue, une telle question mériterait surement d'être soulevée. En effet, si la question n'est pas posée, les élèves ou les étudiants peuvent se retrouver dans une situation de copie graphique sans comprendre les justifications sous-jacentes. On ne serait alors plus dans une situation d'apprentissage en géométrie, mais dans une situation de communication sur un objet graphique de nature quelconque, ce qui n'est pas ici l'objectif visé.

La prise en compte de la genèse instrumentale dans la situation de communication

Au cours de cette étape, les participants ont constaté à quel point il était difficile de parler du maniement d'un instrument inhabituel quand, d'une part, on ne le maitrise pas entièrement soi-même, et que d'autre part on ignore également le degré de maitrise qu'en possède la personne à qui l'on s'adresse. Il nous semble que cette difficulté peut faire écho à celle que rencontrent les enseignants du premier degré quand ils enseignent le maniement de la règle, de l'équerre ou du compas à des élèves qui ne partagent pas le degré de maitrise très naturalisé qu'ils ont eux-mêmes de l'instrument. Par ailleurs, les transcriptions montrent qu'il est très difficile d'utiliser, en dictée, un langage formel pour décrire le maniement d'un instrument dont l'usage n'a pas été institutionnalisé. Dans le doute, il faut trouver dans l'échange un mode de communication qui soit à la fois explicite et clair pour la personne qui trace, et qui reste cohérent avec le projet d'action de la personne qui dicte. Loin d'être ici une limite de la situation, la

présence des rétroactions directes constitue alors un levier important pour permettre la construction partagée d'un langage commun dans le cours de l'échange et dans la situation.

Le choix des formulations en fonction de l'intention de la personne qui dicte et des visées

Si on analyse la situation de dictée à la lumière du cadre théorique de l'action instrumentée tel que nous l'avons présenté dans la partie V, on voit qu'elle prend en charge simultanément des enjeux qui relèvent de différentes visées. Il s'agit de faire produire à une autre personne une manipulation physique du gabarit (visée technico-gestuelle) et des autres artefacts (papier, crayon) afin de produire un tracé graphique (visée technico-graphique) qui doit être jugé géométriquement pertinent pour la procédure de construction envisagée par la personne qui dicte (visée graphico-géométrique). Celle-ci peut alors choisir de s'exprimer de différentes façons, selon qu'elle met l'accent plus particulièrement sur telle ou telle de ces visées, qui sont mises en œuvre de façon conjointe. La personne qui dicte peut, par exemple, choisir d'indiquer des tracés à produire en relation avec les objets géométriques qu'ils représentent dans la composante graphico-géométrique en faisant, dans ce cas, l'hypothèse que les gestes à effectuer pour y arriver seront clairs pour la personne qui doit tracer. Elle peut aussi le faire en décrivant des gestes du corps et des manipulations de l'instrument à effectuer pour produire ces tracés en se plaçant alors dans la composante graphico-gestuelle et en s'éloignant de la signification géométrique des tracés. Elle peut également changer de choix ou de visée selon les cas, en fonction de ce qui lui semble plus facile à dicter. Ce changement peut également être produit en réponse à une rétroaction qui conduit à un besoin de reformulation (constat visuel d'un tracé inadéquat, incompréhension perçue ou manifestée, question explicite de la personne qui trace, etc.)

3 Des éléments en conclusion sur le langage

Bien entendu, le premier temps de l'atelier était trop court pour avoir permis une genèse instrumentale complète de l'artefact « gabarit de rectangle » et aboutir à la production de schèmes d'utilisation solidement partagés, et le deuxième temps était également trop court pour pouvoir être également conclusif. L'enjeu que nous visions était, d'une part, de faire produire des formulations qui accompagnent ou décrivent la manipulation du gabarit (dans les deux temps) et, d'autre part, de permettre une prise de conscience des écarts entre ces formulations et celles du langage géométrique formel (dans le deuxième temps). Par ailleurs, un point intéressant serait de pouvoir mettre en évidence une évolution des formulations au cours du temps, mais enregistrer les échanges à un seul moment ne saurait être suffisant. Néanmoins, l'écoute des participants à des moments différents de l'atelier (sans avoir d'enregistrement pour en témoigner) nous semble indiquer qu'une même personne pouvait changer de langage et, *in fine,* témoigner ainsi d'une évolution et une progression dans l'appropriation de la situation. Nous formulons l'hypothèse que ces évolutions dans les choix de langage peuvent servir d'indicateurs de la progression dans la maitrise de l'instrument (genèse instrumentale) ou dans la résolution d'un problème (phases de recherche du problème).

VII - CONCLUSION ET QUESTIONS

Les situations présentées et travaillées dans l'atelier (constructions au gabarit de rectangle, analyses instrumentées de constructions, dictées de reproduction) nous semblent intéressantes à reprendre en formation pour de nombreuses raisons : ce sont des situations de géométrie non usuelles, qui présentent des situations-problèmes dans un cadre non-numérique, il s'agit de problèmes qui possèdent de nombreuses solutions, et elles possèdent un fort niveau d'enrôlement. Outre l'aspect « atypique » des questions posées, un des leviers de cet enrôlement réside sans doute dans le défi de faire produire, grâce à un gabarit caractérisé par une forme donnée, d'autres formes que la sienne, augmenté du défi d'en produire le plus possible. Un autre levier d'enrôlement réside certainement aussi dans le faible degré technique et la pauvreté intrinsèque du matériel employé, qui contraste avec la richesse des figures qu'il est possible de tracer. Un dernier levier réside enfin dans les limites effectives de l'instrument qui

possède une taille définie et souvent plus petite que les segments que l'on doit tracer. Les étudiants à qui cette situation a été proposée, comme les participants de l'atelier, ont reconnu qu'elle fait immédiatement sortir à coup sûr du triptyque formel centré sur la précision des tracés, la manipulation correcte de l'instrument et la correction du vocabulaire. Ici, à l'inverse, on doit s'emparer d'un instrument qu'on ne sait pas manipuler correctement, qui ne produit, même avec soin, que des tracés imprécis, et pour lequel il n'existe pas de vocabulaire mathématique standard qui permette d'en parler. Le défi révèle des questions qui émergent très vite : des questions liées à la construction (« *Comment faire ?* ») ; des questions liées à la justification et la validation (« *Ce qu'on a fait est-il correct ? Comment le justifier ? Quels sont les critères qui permettent de savoir qu'une construction est correcte ?* ») ; et enfin des questions liées au langage (« *Comment s'exprimer et communiquer ses idées ?* »).

Le travail mené dans l'atelier montre qu'au cours de l'apprentissage du maniement d'un instrument, ou dans toute activité de recherche, avant l'expression en langage mathématique formel, émergent des expressions liées aux tracés à produire, aux gestes à effectuer, et qui font référence aux composantes technico-graphique et technico-gestuelle du cadre d'analyse que nous avons choisi d'employer. Ces expressions possèdent une reconnaissance transitoire dans la communauté discursive du groupe qui cherche ou de la classe, sans aller jusqu'à être ensuite institutionnalisées. Elles correspondent à un langage qui possède une validité sociale à un moment du travail et qui diffère du langage géométrique. Pour reprendre la question que nous posons en titre, dans ce langage il y a une place pour les formulations qui parlent de l'artefact. L'enseignant a alors la lourde responsabilité d'identifier ces expressions, de les laisser vivre au moins un « certain temps », pour permettre aux élèves de s'approprier à leur façon des schèmes d'utilisation des instruments, avant que le langage formel ne soit institutionnalisé.

Les situations travaillées dans le cadre de l'atelier ont permis aux participants de découvrir et de s'approprier un nouvel instrument, tout en commençant à construire le langage qui l'accompagne. Ils en ont apprécié l'intérêt pour aborder en formation initiale ou continue des questions liées à l'introduction des instruments de géométrie dans les classes. La situation de dictée a permis aux participants de constater que le langage oral utilisé dans les communications dans un contexte d'utilisation d'un nouvel instrument peut être relativement éloigné du langage formel prescrit pour les programmes de construction, y compris pour des mathématiciens experts. Les choix de formulation mobilisés par la personne qui dicte doivent être reconnus, appréciés pour leur efficacité, tout en pouvant avoir une durée de vie limitée dans la classe, et il nous semble que les enseignants débutants ou chevronnés devraient être avertis de cette réalité. Pour aller plus loin, d'autres expériences et d'autres recherches restent à mener pour augmenter nos connaissances concernant le langage oral en situation de recherche ou de découverte, notamment par comparaison avec celui mobilisé dans les programmes de construction.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

Barrier, T., Hache, C. et Mathé A.-C. (2014). Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N*, *93*, 13-37.

Bulf, C. et Mathé, A.-C. (2017). Agir-parler-penser en géométrie. Un point de vue sémiotique sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire, *Actes du 44e Colloque COPIRELEM*, Épinal.

Celi, V. et Jore, F. (2014). Les constructions à la règle à bords parallèles en formation initiale des professeurs des écoles. Pourquoi ? Comment ? *Actes du 41e Colloque COPIRELEM*, Mont-de-Marsan.

Celi, V. (2013). Que veut-on que les élèves de l'école primaire apprennent en géométrie ? *Actes du 40e Colloque COPIRELEM*, Nantes.

Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, *76*, 7-27.

Ginouillac, S. (2015). Élaboration d'une ressource pour la formation en géométrie : les constructions à l'aide du gabarit de rectangle, *Actes du 42e Colloque COPIRELEM*, Besançon.

Hache, C. (2012). Langage mathématique à la transition primaire-collège, *Actes du 39e Colloque COPIRELEM*, Quimper.

Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques,* Note pour l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot, Paris. Repéré à : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00957166/document

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11*, 175-193.

Jaubert, M. (2007). *Langage et construction de connaissances à l'école, un exemple en sciences*. Bordeaux : PUB.

Jaubert, M. et Rebière M. (2011). Positions énonciatives pour apprendre dans les différentes disciplines scolaires : une question pour la didactique du français ? *Pratique linguistique, littérature, didactique*, *149-150,* 112-128, OPENEDITION JOURNALS, repéré à https://journals.openedition.org/pratiques/1718

Jaubert, M. et Rebière, M. (2012). Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative, *forumlecture.ch, plate-forme internet sur la littératie*, repéré à http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

Kuzniak, A. (2003). *Paradigmes et espaces de travail géométriques,* Note pour l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot, Paris. Repéré à : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01256036/document

MÉNESR (2018). (Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche) Espace et géométrie au cycle 3. Les programmes de construction, *Ressources d'accompagnement des nouveaux programmes de l'école et du collège, Cycle 3–Cycle de consolidation,* repéré à http://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J. et Verbaere, O. (2007). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, *77*, 7-34.

Parzysz, B. (1988). Voir et savoir. La représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace, *Bulletin Vert de l'APMEP*, *364*, 339-350.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A.-C. et Leclercq, R. (2013). Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, *90*, 7-41.

Petitfour, É. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris. Repéré à : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01228248

Petitfour, É. (2017a). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition pour un dispositif de travail en dyade, *Petit x, 103,* 5-31.

Petitfour É. (2017b) Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude des difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie, *Recherches en didactique des mathématiques, 37, N° 2-3,* 247-288.

Rabardel, P. (1995a). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains*, Paris : Armand Colin.

Rabardel, P. (1995b). Qu'est-ce qu'un instrument ? *L'intégration des instruments dans l'institution scolaire,* CNDP, Die, 61-65, repéré à : http://tecfalabs.unige.ch/mitic/articles/rabardel_1995_quest-ce_quun_instrument.pdf

Rebière, M. (2011). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? Présentation de quelques concepts développés par le groupe de didacticiens du français de Bordeaux, *16e École d'été de didactique des mathématiques,* vol. 1, 219-232. Grenoble : La Pensée sauvage.

IX - ANNEXES

Dans les annexes qui suivent nous présentons les documents suivants :

- les problèmes qui ont exploités dans l'atelier *(annexe 1)* ;

- les deux feuilles A et B qui ont été utilisées dans l'atelier pour la situation de dictée *(annexe 2)* ;

- l'analyse que nous faisons d'une dictée produite dans l'atelier à partir des éléments présentés dans la partie V et du cadre d'analyse de l'action instrumentée *(annexe 3)*

- certaines formulations orales qui ont été échangées au sein des groupes au cours de la première phase (recherche de constructions) et que nous avons eu la possibilité de noter directement au moment où elles étaient produites *(annexe 4)* ;

- les transcriptions des autres dictées produites dans l'atelier (dictées 2 à 6) ainsi que d'une septième produite dans des conditions identiques à celles de l'atelier *(annexe 5)*.

ANNEXE 1 : LES SITUATIONS PROPOSÉES DANS L'ATELIER

1 Situation des problèmes de construction

Se munir d'une feuille de papier uni, d'un crayon ou d'un stylo, et d'un rectangle découpé dans du papier fort ou du carton et ayant approximativement les dimensions suivantes : 2,5 cm de largeur et 6,5 cm de longueur. (Il est particulièrement important qu'aucune de ces deux dimensions ne soit un multiple ou sous-multiple de l'autre). À simple titre d'exemple, un ticket de métro usagé de la région parisienne peut parfaitement faire l'affaire.

Situation de construction : *En utilisant seulement cet instrument comme un gabarit, c'est-à-dire en pouvant tracer tout ou partie de son contour, mais en n'ayant pas le droit d'écrire dessus, ni de le plier, ni de le déchirer, résoudre les trois problèmes de construction suivants :*

1. *Tracer un carré et un rectangle avec leurs diagonales.*
2. *Tracer un rectangle superposable au gabarit et le partager en deux rectangles superposables (entre eux)*
3. *Proposer différentes façons de tracer un losange.*

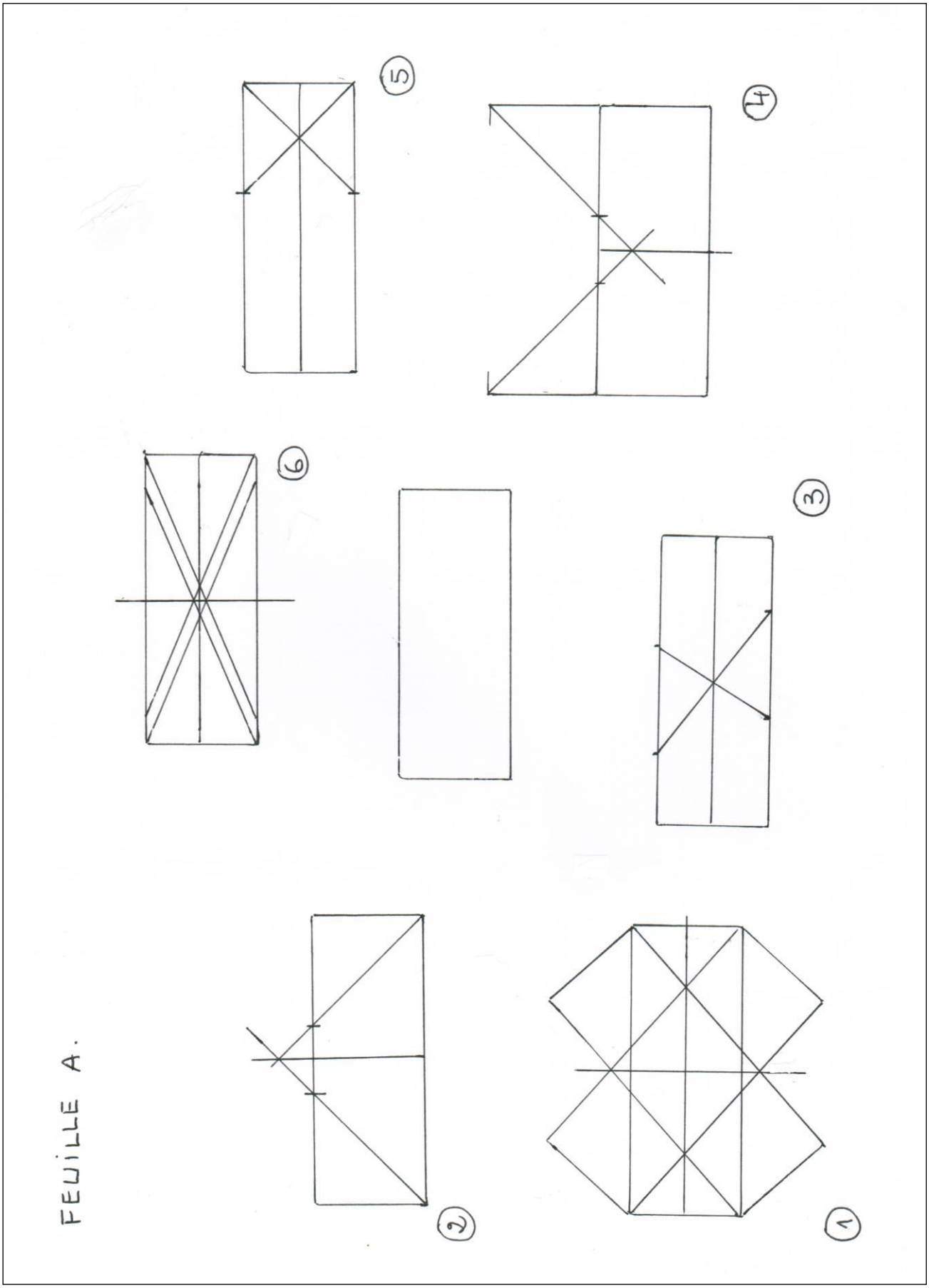
2 Situations de reproduction de figures et de dictée

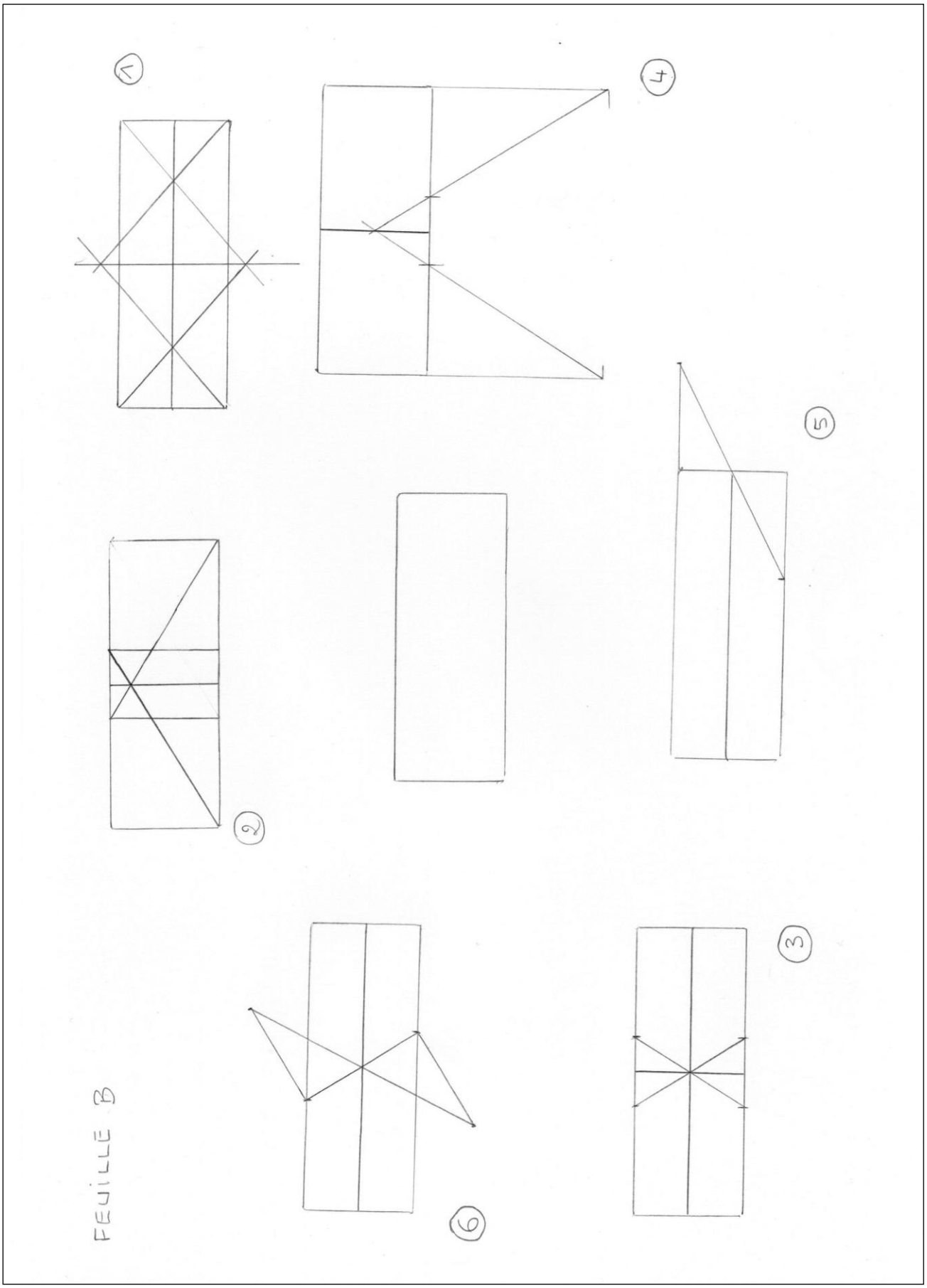
Ces deux situations s'appuient sur les deux feuilles présentées dans l'annexe 2 ci-après (feuille A et feuille B). Chacune de ces feuilles présente six constructions différentes qui apportent des réponses correctes à la question 2 de la situation précédente : elles partagent toutes un rectangle superposable au gabarit en deux rectangles superposables entre eux. Pour restituer l'échelle du gabarit utilisé, son contour est à chaque fois présenté au centre de ces deux feuilles.

Situation de reproduction de figures : *À l'aide d'un gabarit identique, reproduire ces figures.*

Situation de dictée d'une reproduction : *(À effectuer en duo avec une autre personne, ou en duo de deux binômes). Se répartir les deux feuilles A et B. Choisir une des six figures de cette feuille puis dicter sa reproduction à l'autre personne, qui dispose d'un gabarit identique. Dicter la reproduction de façon aussi spontanée que possible et sans préparer préalablement ce que l'on va dire par écrit.*

ANNEXE 2 : LES DEUX FEUILLES A ET B

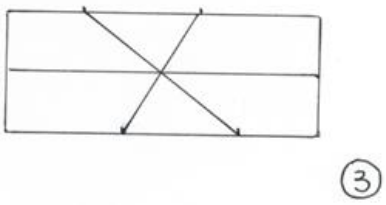



1
4
5
2
6
3
FEUILLE B

ANNEXE 3 : TRANSCRIPTION ET ANALYSE D'UNE DICTÉE DE L'ATELIER

1 Transcription et analyse d'une dictée de la figure A3 (dictée 1) :

La dictée ci-dessous, réalisée dans l'atelier, correspond à la reproduction de la figure A3. (Durée 1:20).



Texte	Éléments d'analyse, éléments implicites (acceptés ou refusés), éléments qui n'apparaitraient pas dans un programme de construction
1. Tu traces le contour du gabarit.	Met en relation le gabarit et son contour.
2. Sur une longueur, tu places deux points, dont l'écartement est la largeur du gabarit.	Implicite : la « longueur » est celle du rectangle tracé, et elle désigne en fait un segment (un côté de ce rectangle). Utilisation du mot « écartement » pour désigner une longueur ou une distance. Il y a une relation entre le tracé produit et l'instrument qui est indiquée ; le maniement de l'instrument n'est pas décrit.
3. Sur une longueur, tu places deux points dont l'écartement est la largeur du gabarit.	Répétition de la consigne (pour s'assurer que la consigne est comprise ?)
4. Sur l'autre longueur, tu fais la même chose.	Implicite : les gestes ne sont pas précisés (le destinataire a la responsabilité de l'action)
5. Où tu veux.	Réaction en réponse à une hésitation perçue visuellement.
6. Tu obtiens quatre points ;	Le fait de pointer les 4 points obtenus vise à focaliser l'attention à leur sujet pour les regrouper mentalement et les constituer comme formant ensemble un unique objet (non nommé)
7. et tu traces les diagonales qui correspondent à ces quatre points.	Implicite : les « diagonales » sont celles d'un parallélogramme qui n'a pas été mentionné (seul le regroupement mental des 4 sommets l'a été).
8. Tu obtiens un point dans le rectangle	Implicite : le point obtenu est en fait le point d'intersection des « diagonales » en question (non dit) La précision « dans le rectangle » apporte un élément redondant qui permet de garantir la communication (aspect organisationnel) mais n'apporte pas d'information.
9. et, grâce à ce point, tu traces une parallèle aux longueurs.	Implicite : la construction du segment parallèle à l'aide de l'instrument n'est pas décrite (on doit tracer un segment parallèle à un côté et passant par le point repéré), ni le maniement de l'instrument (on doit utiliser le gabarit comme une équerre.)
10. Oui.	Validation de la construction et clôture de la dictée.

ANNEXE 4 : QUELQUES FORMULATIONS ORALES ECHANGÉES PENDANT LA PREMIERE PHRASE

Nous présentons ici quelques formulations orales échangées au sein des trois groupes et que nous avons eu la possibilité de noter au cours de la première phase (recherche en groupe de constructions) :

« C'était trop grand, je me suis débrouillé autrement. »

« On a pu reporter deux fois la longueur et faire la diagonale. »

« J'ai pris une distance égale pour me raccourcir les distances et après j'ai pris le symétrique. »

« J'ai fait au milieu parce que je cherchais le centre du rectangle. »

« Moi j'ai utilisé l'alignement. »

« Dans l'autre sens, tu fais la perpendiculaire qu'est là. »

« Je me suis servi de mon gabarit comme d'un compas, comme si j'avais un compas. »

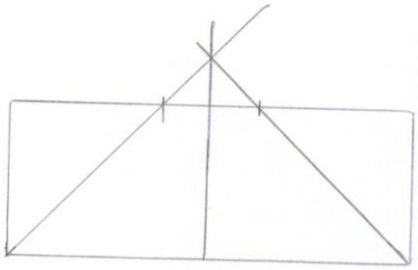
« J'ai reporté plusieurs fois la largeur. » « - Ah, oui, 2 largeurs. C'est un peu juste pour le tracer… Ah, je peux lui enlever un petit bout. »

« Une fois que t'en es là, ça c'est une médiatrice, donc tu te débrouilles... »

ANNEXE 5 : TRANSCRIPTION D'AUTRES DICTÉES

Dictée 2 (figure A2) :

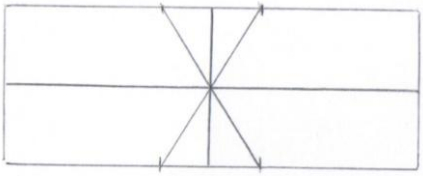
Cette dictée correspond à la reproduction de la figure A2. (Durée 1:36).



Donc, tracer le contour du gabarit. Sur un grand côté, reporter la longueur du petit côté en partant de chaque sommet et marquer deux points. Joindre chaque point au sommet situé dans le même demi-rectangle. Prolonger ces deux segments jusqu'à intersection. Tracer la perpendiculaire au grand côté du rectangle, passant par le point d'intersection trouvé précédemment. Passant par le point d'intersection trouvé précédemment. C'est terminé. Et bravo. Et nous aussi, bravo !

Dictée 3 (figure B3) :

Cette dictée correspond à la reproduction de la figure B3. (Durée 2:32).



Donc tu traces le contour du rectangle, du gabarit. Et en fait, on va tracer dans le rectangle les médiatrices des côtés. Et pour ça, il nous faut le milieu du rectangle. Pour obtenir le milieu du rectangle, on va positionner le gabarit perpendiculairement à sa position initiale ; aligner le grand côté du rectangle, enfin, les angles droits ; et, marquer l'autre bord, enfin, sur le premier rectangle tracé, le bord du gabarit. Voilà. Sur le côté. Sur le haut et sur celui du bas : sur les deux côtés ! On fait la même chose de l'autre côté, de manière symétrique. Voilà. Et ensuite,

on joint les points obtenus en diagonale. C'est-à-dire… Voilà, comme ça. Voilà. On positionne le gabarit perpendiculairement au petit côté, et qui passe par ce point qu'on vient de déterminer.

- Comme ça ?

- Non, perpendiculairement… Dans l'autre sens, enfin… (rires)… pas dans ce perpendiculaire-là, l'autre ! On le met pas debout, on le met couché ! (rires)

- Là ?

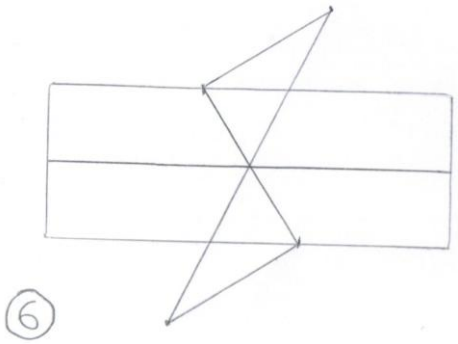
- Oui, mais ça doit passer par le point qu'on vient de tracer, là.

- Celui-là ? Ah, le point qu'on vient d'obtenir !

- Oui, celui-là. Voilà. On trace le côté. Voilà. Et après on sépare le rectangle, le premier rectangle en deux, dans la largeur, en repassant par ce point-là. Et c'est bon. On l'a obtenu.

Dictée 4 (figure B6) :

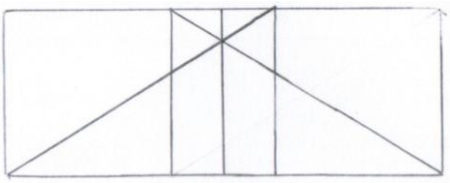
Cette dictée correspond à la reproduction de la figure B6. (Durée 2:52).



Alors, faire le contour du gabarit. Nommer le rectangle obtenu ABCD, AB étant une longueur. Alors, placer le point E en reportant la largeur du rectangle à partir de A sur le segment AB. De la même manière, placer F en reportant la largeur à partir de C sur le (inaudible). Tracer EF. Alors ensuite, tracer la perpendiculaire à EF passant par E vers l'extérieur du rectangle. Vers l'extérieur du rectangle… L'extérieur ! (rires). J'insiste ! (rires) Je dis bien : l'extérieur ! Je répète ! Dehors ; voilà, c'est ça ! Placer G en reportant la largeur du rectangle sur le segment que vous venez de tracer. La demi-droite employée (inaudible). De même, tracer la perpendiculaire à EF passant par F à l'extérieur du rectangle. Et placer… Non, à l'extérieur du rectangle. La perpendiculaire à EF en F. Ah, oui, à l'extérieur. Et puis, placer H, à… ; mais je le voyais pas, c'était caché. Tracer GH. Nommer O l'intersection des deux segments, et maintenant, tracer la perpendiculaire à AD passant par O. Sur toute la largeur du rectangle. Sur toute la longueur du rectangle, pardon ! (rires). Bravo.

Dictée 5 (figure B2) :

Cette dictée correspond à la reproduction de la figure B2. (Durée 2:32).



- Bon, donc d'abord, faire le contour du rectangle. C'est déjà fait ! (rires) D'accord.

- J'étais sûr que ça commençait comme ça…

- Alors après, il faut bien écouter, parce qu'elle est longue ma phrase. Donc il va falloir reporter la longueur du petit côté sur les deux gros côtés du rectangle. Mais quatre fois, à partir des quatre sommets du rectangle. Voilà, donc c'est bon, d'accord. Alors oui, donc vous avez obtenu deux points sur chacun des côtés. Et vous prenez le premier point, à gauche, et vous le joignez au point sur l'autre côté, sur l'autre grand côté, à gauche ; du même

côté, à gauche. Si vous préférez, il faut que le côté que vous obtenez, il soit parallèle au petit côté de votre rectangle. Et même chose en joignant les deux…

(- question inaudible)

- Si ; si, c'est perpendiculaire. Alors, ensuite, votre… un des sommets… alors, celui de gauche, en haut… J'ai un problème de vocabulaire ! (rires). Donc, les quatre points que vous avez placés, là, vous en prenez un, et vous le joignez au sommet opposé du grand rectangle, du rectangle du départ. Non, le… Alors, je recommence. Les points que vous avez placés sur les grands côtés de votre rectangle, vous prenez celui qui est en haut à gauche,

- Hmm hmm,

- et vous tracez un segment pour rejoindre ce point au sommet du grand rectangle, en bas à droite. Voilà. Et même chose avec l'autre sommet, donc celui qui est à droite, non, le point que vous avez placé à droite, le grand côté de votre rectangle, vous le joignez au sommet du côté bas de votre rectangle, à gauche. Et on y est presque ! On y est presque ! Et ensuite, vous tracez… Vous avez une intersection, là, entre ces deux segments que vous avez tracés, et vous tracez la perpendiculaire au grand côté de votre rectangle qui passe par cette intersection. (rires).

- C'est une droite ou c'est un segment, ça ?

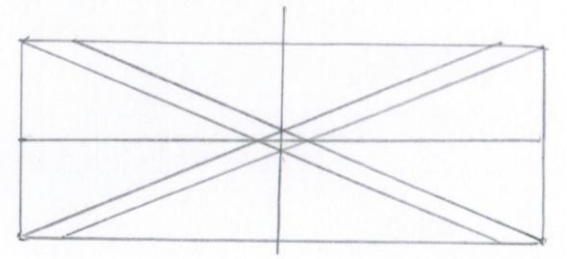
- Un segment. Voilà. Et vous obtenez… En tous cas, on s'est fait comprendre, hein ! (rires).

- Voilà ! On y est arrivés, hein !

- Mais j'étais comme vous, hein, j'étais partie à les nommer, mes quatre points, mes quatre sommets. Moi je voulais pas, au départ, j'avais vraiment, je pensais pas les nommer, je pensais que c'était interdit.

- Dictée 6 (figure A6) :

Cette dictée correspond à la reproduction de la figure A6. (Durée 3:40).



- Tracer un rectangle de la même taille du gabarit, et vous l'appelez ABCD.

- Ah, on peut faire ça ?

- Je crois ! Ben, pourquoi pas ?

- Parce que nous, on essayait de tout faire sans mettre les noms, hein. Non, mais j'ai changé.

- Nous, on aime bien, on aime bien les lettres. Alors.

- Attends… il y a un petit décalage dans le…

- ABCD en tournant, pas ABCD en croisant ? Comme ça ?

- Hmm hmm.

- Et après, c'est lequel le plus grand côté ? En termes… Tu as le droit de répondre si on pose une question, ou pas ?

- Oui, bien sur ! On va s'arroger tous les droits. C'est des variables didactiques !

- D'accord. (rires)

- Donc le plus grand côté, c'est le côté AB.

- Bien, ça va, c'est bon, on a bien placé les points.

- Ça vous va ?

- Ouais, ça va.

- Donc, à partir de là, vous tracez un segment AA'.

- Oui.

- Alors ce segment AA' a la même longueur que le plus grand côté du rectangle.

- Ouais.

- Attends, sur ?

- Vous allez tracer un segment AA' qui a la même longueur que le plus grand côté du rectangle,

- Hmm, et dans quelle direction ?

- et qui coupe DC en A'.

- Ah ! D'accord…. DC ?

- DC.

- Oui.

- Mais il faut le tracer maintenant !

- Ah, pardon. Faut le tracer !

- Ah, il faut le tracer !

- Ah, ben c'était pas dit !

- Alors, OK.

- Alors, vous allez faire la même chose en partant du point B pour tracer le point B' sur CD.

- Pourquoi c'est pas sur DC cette fois ?

- C'est pour innover !

- Oui. Ah, pardon, il faut tracer. J'ai placé juste le point…

- J'ai rien dit, mais elle m'a vu, hein…

- On refait la même chose en partant du point C pour tracer le point C' sur AB. Voilà. Et on l'appelle C'. Et après, on fait la même chose en partant du point D pour tracer le point D' sur AB.

- Ça fait un joli drapeau !

- Ouais, mais c'est déjà foutu, ma construction elle est mal faite, hein, je vois, je sais qu'elle est mal faite. Pas précise, quoi…

- Alors. Vous allez former ainsi un petit losange.

- Oui ?

- Au centre ?

- Au centre.

- Hmm. Et de ce losange, on va tracer les diagonales.

- Hmm hmm. Juste du losange ?

- Et vous allez les prolonger pour former les médianes.

- Pour former les médianes du rectangle !

- C'est bien, elles font le programme en même temps… Elles font le programme toutes seules ! (rires)

- Ah, attends, j'ai bougé.

- Il est petit, le losange, pour être précis.

- Oui, il est petit. C'est pour ça qu'on aurait pu… (inaudible)

- OK. C'est pas la manière la plus précise de tracer les médianes d'un rectangle, mais bon…

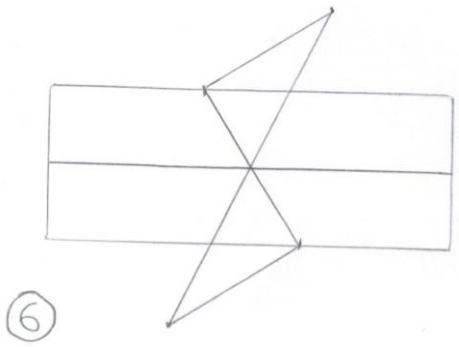
- Est-ce que ça vous va, comme ça ?

- Ben, oui ! C'est parfait !

- Ah ouais ! Vous avez bien expliqué !

Dictée 7 (figure B6) :

Cette dictée n'est pas issue de l'atelier, mais elle a été produite dans des conditions identiques à celles de l'atelier. Elle correspond à la reproduction de la figure B6. (Durée 3:16).



Alors donc, tu dessines le gabarit. OK, parfait. Tu tournes ton gabarit d'un quart de tour, voilà, et tu le glisses de façon que la largeur soit posée sur la longueur. OK, parfait. À droite. Voilà, jusque dans le prolongement. Voilà. Et tu fais une petite marque au bout de la largeur, à gauche, voilà. Ce que tu viens de faire sur le côté inférieur, tu vas le faire sur le côté supérieur, à gauche. Voilà. Et tu traces le segment qui joint ces deux points. Voilà. Maintenant, tu places le gabarit, tu appuies le gabarit sur ce segment… dans l'autre sens, s'il te plait, de façon que tu puisses tracer… oui, voilà, d'accord, donc la longueur appuyée sur le segment, et l'angle droit appuyé… l'angle droit sur l'extrémité du segment. – Oui, mais il y en a deux ? – Celle du haut. Voilà. Et donc tu traces la largeur du gabarit, qui est maintenant perpendiculaire au segment, en haut. Tu utilises ton angle droit. Voilà, tu utilises ton angle droit et tu traces, voilà ; et maintenant tu vas tracer l'angle droit alterne-interne de celui-ci sur le segment. Donc tu reposes la longueur du gabarit sur le segment - Ouais ?… - Non, sur le premier segment, pardon, voilà ; donc tu t'arranges pour que l'angle droit soit sur l'autre extrémité, voilà, et tu traces la largeur… tu fermes l'angle droit, voilà, et tu traces la largeur du gabarit. – Non, « je ferme l'angle droit », je n'ai pas compris. - Ben oui : tu traces le deuxième côté de l'angle droit. Et maintenant, tu as tes deux segments qui sont perpendiculaires, là, au segment commun ; tu prends leurs extrémités dans le vide, et tu les joins. - Ouais. - Et maintenant, le point d'inters… tu traces, perpendiculairement… tu prends ton gabarit, voilà, et tu t'arranges pour tracer la perpendiculaire à la largeur qui va passer par le point d'intersection qui est dans le gabarit. – OK ! - Gagné !

ATELIER A18

UN ARTEFACT POUR MULTIPLIER

Michel DERUAZ
Professeur HEP associé, HEP VAUD
UER MS
michel.deruaz@hepl.ch

Martine BALEGNO
Chargée d'enseignement, HEP VAUD
UER MS
martine.balegno@hepl.ch

Résumé

Beaucoup d'enseignants sont démunis lorsqu'ils doivent justifier le fonctionnement de la multiplication ou de la division posée. De plus, les liens entre la distributivité et la décomposition du nombre ne sont pas toujours disponibles. Lors du colloque 2017, nous avons proposé un artefact, que nous utilisons en formation des enseignants, pour expliquer le fonctionnement de ces opérations et les liens avec la distributivité à l'aide de planches à trous et de billes. Nous nous appuyions sur des représentations intermédiaires du nombre, construites à partir du modèle du triple code (Dehaene, 1992). Nous présentons, cette année, des expérimentations en classe de cet artefact avec des élèves, soit pour introduire la multiplication posée, soit avec des élèves qui la connaissent déjà mais qui éprouvent des difficultés à l'utiliser correctement.

I - INTRODUCTION

Cet atelier s'inscrit dans le prolongement des travaux présentés lors du précédent colloque de la Copirelem (Deruaz & Batteau, 2017). Nous avions alors proposé un artefact que nous utilisons en formation des enseignants du primaire en Suisse (Haute École Pédagogique Vaud) (Deruaz & Clivaz, 2012) pour expliquer le fonctionnement d'opérations et notamment la multiplication en colonnes. Nous avions mis en évidence ses liens avec la distributivité. Pour ce faire, nous utilisions un matériel fabriqué avec des planches à trous et des billes. En effet, comme nous le relevions déjà (Clivaz & Deruaz, 2013), beaucoup d'enseignants sont démunis lorsqu'ils doivent justifier le fonctionnement de la multiplication ou de la division posée. Par ailleurs, comme le met en évidence Constantin (2017), les liens entre la distributivité et la décomposition du nombre ne sont pas toujours disponibles chez les futurs enseignants.

Suite à ces travaux, nous avons continué notre réflexion afin de proposer une ingénierie destinée, non plus à des futurs enseignants, mais cette fois-ci, à des élèves. Nous proposons donc, dans cet atelier, de découvrir et d'analyser des expérimentations faites en classe avec cet artefact pour introduire la multiplication posée, dans un premier temps, à un chiffre puis plus brièvement à deux chiffres.

Nous allons notamment nous appuyer sur des représentations intermédiaires du nombre (Deruaz & Batteau, 2017) construites à partir du modèle du triple code (Dehaene, 1992).

II - ENJEUX DE FORMATION

Dans la formation des enseignants dispensée, dans le cadre d'un cours de mathématiques et de didactique des mathématiques, l'un des objectifs poursuivi est de démontrer que l'enseignement de la numération est un enjeu prioritaire de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. C'est pourquoi, il a tout d'abord été nécessaire de casser, auprès des étudiants, une éventuelle représentation des mathématiques et de leur enseignement. Par exemple, l'idée qu'un algorithme s'enseigne comme une

recette de cuisine.

Dès lors, nous nous sommes attachés à proposer un matériel qui puisse faire lien entre le système de numération et les opérations, en bref, à donner du sens à l'enseignement des opérations. Nous avons donc utilisé un abaque pour manipuler et faire manipuler les étudiants. Dans un second temps, nous avons décidé d'étendre notre expérience avec ce matériel, dans une classe du primaire.

C'est pourquoi, pour mieux situer l'ingénierie que nous proposons en classe pour la multiplication, il est nécessaire de dire quelques mots au sujet du nombre et de ses représentations ainsi que sur l'apprentissage de la multiplication.

1 Le nombre et ses représentations

Dans les travaux, déjà cités de Deruaz & Batteau (2017), et également à la suite de Dehaene (1992), la notion de « représentation analogique » du nombre est évoquée. Ainsi lorsqu'un nombre est associé au cardinal d'un ensemble ou d'une collection d'objets, par exemple le nombre seize à n'importe quel ensemble de seize objets, nous pouvons le représenter, de manière décontextualisée, par une collection de seize points :



Une deuxième représentation du nombre, que nous avons déjà utilisée en écrivant, en lisant ou en disant, « seize », est appelée la représentation « auditive-verbale ». À noter que c'est le cas même si le nombre est écrit « 16 », car dans le langage parlé, cette désignation écrite se dira ou s'entendra « seize ».

Lorsqu'on écrit « 16 » avec des chiffres, il s'agit d'une troisième représentation du nombre, qui code le fait que l'on peut mettre en évidence un groupement de dix des seize éléments de la collection pour en faire un groupe de dix et laisser six éléments isolés comme dans la figure ci-dessous :



Nous appelons cette représentation à l'aide de chiffres, « représentation symbolique décimale » ou « représentation symbolique en base dix ». Remarquons que cette représentation est uniquement visuelle. Lorsque nous lisons le nombre « 16 », écrit comme cela, nous sommes contraints de le dire « seize » (et non « un-six ») en utilisant la représentation auditive-verbale. L'adaptation, que nous avons réalisée, du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p. 31), dans le cadre du cours destiné aux étudiants en 1ère année, permet de visualiser en un seul schéma ces trois représentations du nombre.

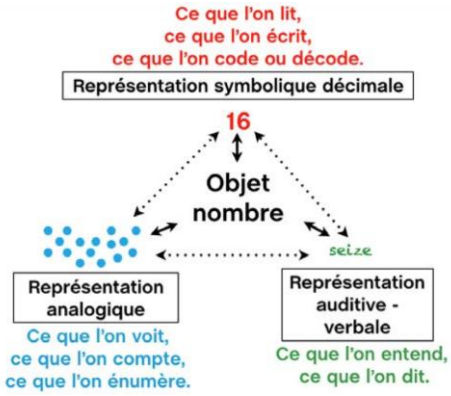


Figure 1. Représentations du nombre adapté du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p. 31)

Dans ce qui suit, nous nous intéressons essentiellement au passage entre représentation analogique et représentation symbolique, en mettant en évidence un certain nombre de représentations intermédiaires qui nous apparaissent comme importantes. En effet, dans nos travaux, nous avons cherché à faire des liens entre ces représentations analogique et symbolique afin de faciliter la compréhension dans l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication.

Nous classons ces représentations intermédiaires en deux catégories : la première contient les représentations qualifiées d'« iconiques » puisque les points sont encore présents, la seconde comporte celles qualifiées de « symboliques », qui font intervenir l'aspect positionnel de l'écriture symbolique décimale du nombre.

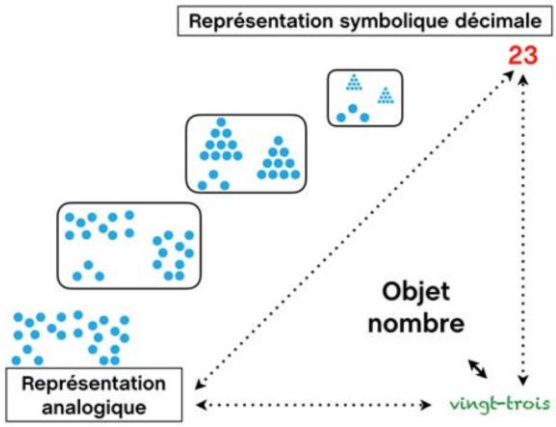


Figure 2. Représentations intermédiaires iconiques

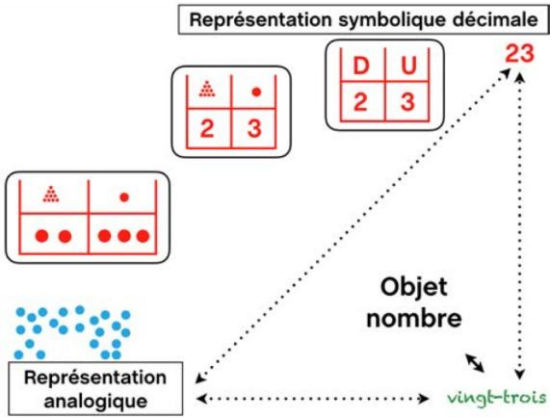


Figure 3. Représentations intermédiaires symboliques

2 La multiplication posée

Dans sa thèse, Clivaz (2011) a mis en avant le manque de connaissance des enseignants au sujet de la multiplication. Il a notamment mis en évidence que ce faible niveau de connaissances se répercute sur la manière d'enseigner l'algorithme de la multiplication. En effet, la propriété de la distributivité, ainsi que la représentation de la multiplication sous forme de produit cartésien, sont peu présentes chez les enseignants alors qu'elles sont nécessaires à un bon enseignement, ceci afin de permettre un réel apprentissage auprès des élèves.

La représentation de la multiplication à l'aide du produit cartésien est travaillée à l'aide de tâches comme « Friandises » (Danalet & al, 1998, p. 6)

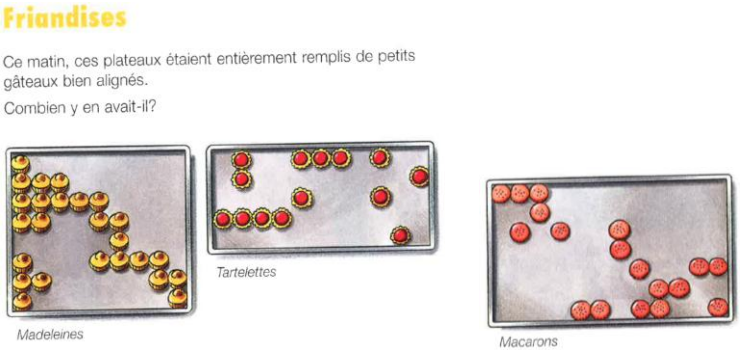


Figure 4. Friandises

De telles tâches peuvent être résolues en utilisant une représentation analogique du nombre. Par exemple, comme l'illustre la figure ci-dessous :

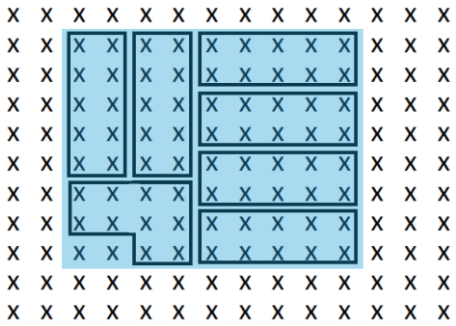


Figure 5. Exemple de résolution de la tâche Friandises (Madeleines)

Le produit cartésien associé à une représentation analogique des nombres permet aussi d'illustrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (Deruaz & Clivaz, 2018, p. 153) :

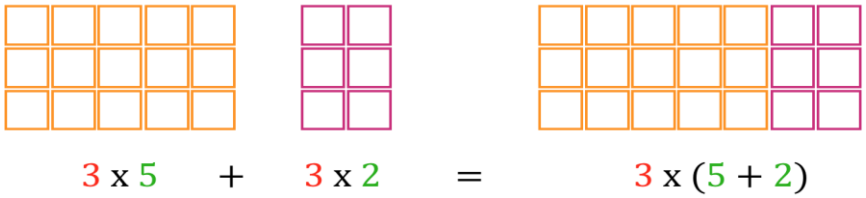
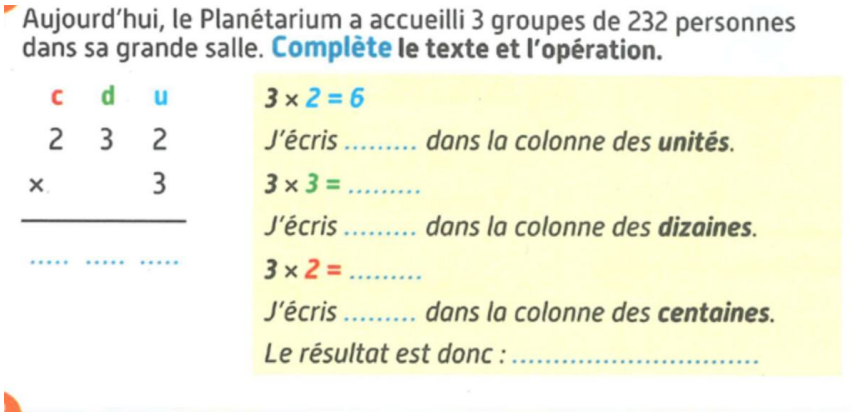


Figure 6. Produit cartésien et distributivité

Pour la multiplication, les liens entre la distributivité et le calcul posé sont souvent présentés comme la continuité de ce qui se fait en calcul mental. Nous faisons l'hypothèse que cette continuité n'est pas toujours présente lors de la multiplication posée par un nombre à un chiffre. Par exemple, dans le manuel Archimaths (Andrieu et *al.*, 2018, p. 118), la multiplication posée par un nombre à un chiffre est introduite à l'aide de l'exemple « 232 x 3 » :


Aujourd'hui, le Planétarium a accueilli 3 groupes de 232 personnes dans sa grande salle. **Complète le texte et l'opération.**

c	d	u
2	3	2
×		3
.....	.....	.....

$3 \times 2 = 6$
*J'écris ..... dans la colonne des **unités**.*
$3 \times 3 =$ .....
*J'écris ..... dans la colonne des **dizaines**.*
$3 \times 2 =$ .....
*J'écris ..... dans la colonne des **centaines**.*
Le résultat est donc : .....

Figure 7. Multiplication par un nombre à un chiffre

Les trois chiffres du nombre « 232 » sont traités séparément, les uns après les autres, en commençant par la droite, en disant qu'on multiplie 3 par 2 (sous-entendu unités), 3 par 3 (dizaines) et pour finir, 3 par 2 (centaines). On n'écrit pas (3x2) + (3x30) + (3x200). Ce qui est dit en effectuant la multiplication posée est différent de ce qui est dit en réalisant cette même multiplication en calcul mental. La propriété de distributivité est donc implicite. Cette situation peut se rapprocher d'une tâche dans laquelle il serait demandé de tripler une collection de deux pommes, trois poires et deux melons, obtenant six pommes, neuf poires et six melons. Les centaines, dizaines et unités sont momentanément considérées comme des unités indépendantes les unes des autres et les regroupements, s'ils s'avèrent nécessaires, ne sont introduits que dans un second temps. Par exemple, à l'aide d'un calcul plus complexe (Andrieu et *al.*, 2018, p. 118) :

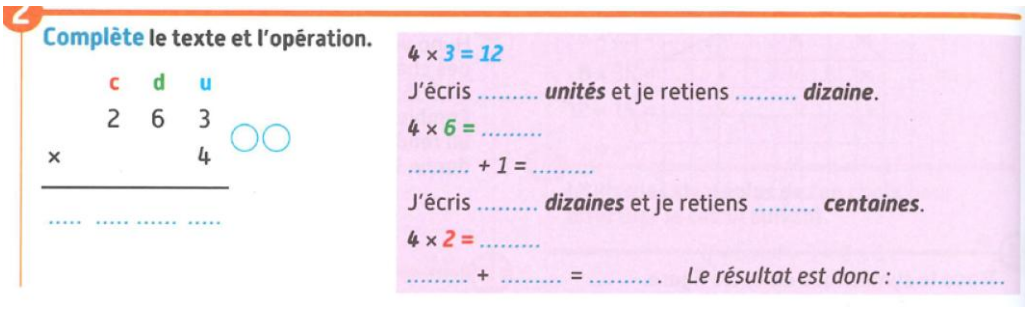


Figure 8. Multiplication par un nombre à un chiffre avec retenues

En revanche, dans ce même manuel (p. 145), pour introduire la multiplication par un nombre à deux chiffres à partir de l'exemple « 358 x 24 », la distributivité est bien mise en évidence pour la seconde étape (décomposition de « 24 » en « 4 + 20 »). Il est écrit « 358 x 20 » (et non « 358 x 2 », sous-entendu 2 dizaines), et l'égalité « 358 x 24 = 358 x 4 + 358 x 20 » est proposée.

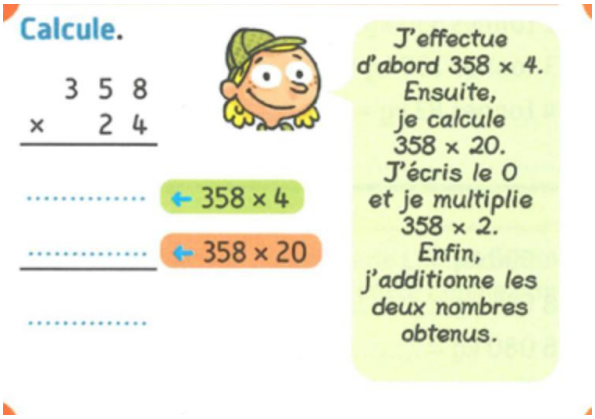


Figure 9. Multiplication par un nombre à deux chiffres

Cette procédure se rapproche d'une procédure de calcul mental : « trois-cent-cinquante-huit multiplié par vingt-quatre est égal à trois-cent-cinquante-huit multiplié par vingt auquel on ajoute trois-cent-cinquante-huit multiplié par quatre ». La multiplication posée s'écrit comme la multiplication effectuée mentalement se dit (en changeant l'ordre des termes de l'addition).

3 La multiplication par 10

Dans l'enseignement de l'algorithme de la multiplication d'un nombre par un nombre à deux chiffres, l'une des difficultés, aussi bien dans l'explication donnée par l'enseignant, que dans la compréhension du côté de l'élève, est la signification donnée au zéro ou au décalage vers la gauche, dans le résultat lorsque l'on multiplie par « le chiffre des dizaines » du second nombre. Selon Deruaz & Clivaz (2018) :

> *Pour multiplier 23 par 10, il faut prendre dix fois 23, soit dix fois les trois unités, qui deviennent ainsi trois dizaines, et dix fois les deux dizaines, qui deviennent ainsi deux centaines. Autrement dit, multiplier 23 par 10 revient à transformer les unités en dizaines et les dizaines en centaines. Ainsi, en écrivant 23 dans le tableau de nombres, la multiplication par dix revient à décaler le nombre d'une colonne vers la gauche. (...) Ce n'est qu'en supprimant le tableau et en écrivant « 230 » que l'on a réellement l'impression d'avoir ajouté un zéro à droite du 23.* (pp. 182-183)

Le schéma qui suit permet de mettre en évidence qu'il s'agit bien du décalage d'une colonne vers la gauche du tableau de numération et pas de l'ajout d'un zéro à droite du nombre que l'on multiplie par 10.

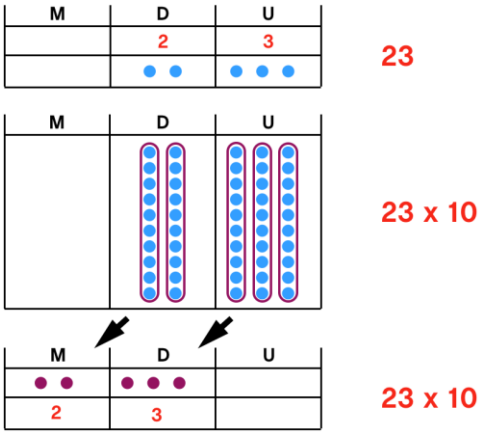


Figure 10. Multiplication par 10

III - PRÉSENTATION DE L'ATELIER

Cet atelier se déroule en quatre phases distinctes :

- une introduction théorique au sujet de la représentation du nombre et de la multiplication ;
- un moment où les participants peuvent manipuler le matériel et réfléchir à celui-ci dans le cadre de la multiplication par un nombre à un chiffre ;
- la présentation d'une expérience menée dans une classe ;
- un second moment où les participants testent brièvement le matériel dans le cadre de la multiplication par un nombre à deux chiffres.

Après une introduction théorique, les participants reçoivent le matériel, visible sur la photo ci-dessous :



Figure 11. Matériel à disposition

Ce matériel est le même que celui utilisé dans la séquence conduite dans une classe de 5ème année suisse (élèves de 9 ans) décrite plus tard. Il y a un abaque, réalisé avec des planches en bois perforées, sur lesquelles des billes sont posées et des récipients (verres en plastique). Un des avantages de ce matériel est qu'il permet d'effectuer des groupements (paquets de billes). De ce fait, les représentations analogiques sont utilisées. Sur la photo, une fiche avec les colonnes « millier, centaine, dizaine et unité » remplies de petites croix, est visible. Les participants reçoivent également la reproduction d'une page du livre de l'élève des moyens d'enseignement de 5ème année primaire, avec la tâche intitulée "Friandises" (Figure 4).

Avec tout ce matériel, les participants doivent construire une séquence pour introduire la multiplication posée. Nos objectifs étaient les suivants :

- Dans un premier temps, permettre aux participants de se familiariser avec ce matériel innovant et comprendre comment l'utiliser.
- Dans un deuxième temps, les amener à réfléchir au lien avec les différentes représentations du nombre présentées ci-dessus autrement dit : situer le registre du triple code de Dehaene dans lequel on se situe.
- Pour finir, les inciter à apporter un regard critique sur ce matériel en répondant aux questions : que remarque-t-on quand on fait l'activité ? À quoi se réfère-t-on ? Quel avis sur ce matériel ? Comment l'améliorer ?

Dans la suite de ce texte, nous présentons comment l'abaque fonctionne pour la multiplication à un chiffre. Nous décrivons ensuite une expérience conduite en classe avec ce matériel. Puis nous parlons de l'utilisation de l'abaque pour la multiplication à deux chiffres. Pour terminer, nous décrivons quelques observations faites dans l'atelier avec les participants.

Pour effectuer la multiplication « 253 × 4 » avec l'abaque, on pose « 253 » (2/5/3) en entête de colonnes de l'abaque avec les billes et le « 4 » tout à droite (figure 12). On complète alors les différentes cases de l'abaque en respectant dans chaque case le nombre de colonnes et de lignes. Cela permet d'éviter de se référer au répertoire mémorisé des tables de multiplication en auditif-verbal. En outre, l'utilisation de la représentation de la multiplication en lignes-colonnes sur chaque plaque de l'abaque permet de donner du sens au produit cartésien. Comme on travaille en base dix, on fait des groupements de dix billes à chaque fois que c'est possible et on ajoute un élément par groupement dans la colonne à sa gauche. La retenue dans une multiplication est « matérialisée », elle représente un groupement de dix billes ou une poignée de dix billes. Le nombre « 1012 » correspond au résultat de la multiplication de « 253 » par « 4 ».

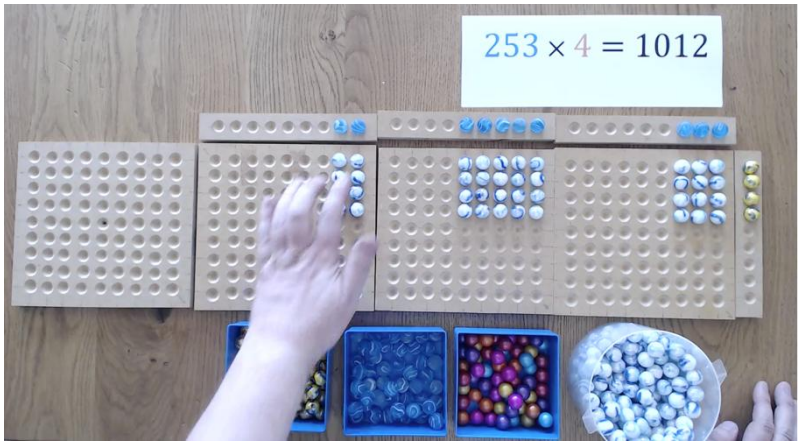


Figure 12. Dispositif pour la multiplication par un nombre à un chiffre

1. Présentation d'une séquence menée dans une classe de 5ème année primaire

Cette séquence s'est déroulée dans une classe de 23 élèves. Elle est composée de 6 leçons d'environ 45 minutes chacune. Le but de celle-ci est d'introduire et de formaliser l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication par un nombre à un chiffre. À noter qu'à ce stade, les élèves connaissent seulement une partie des résultats des tables de multiplication. En effet, ils sont en cours d'apprentissage de ces dernières et ne connaissent par cœur que celles de : 2, 4, 5, 10 et 3. Ce matériel permet d'introduire la multiplication posée sans la maîtrise totale des tables de multiplication et décharge cognitivement de cette tâche, notamment les élèves en difficulté.

Etant donné que le cœur de cette séquence était la manipulation de billes avec les abaques présentés plus haut, nous avons dû préparer un peu les élèves à ce nouveau matériel. Pour ce faire, lors de la première leçon, nous avons proposé aux élèves de dénombrer des jetons distribués et de donner leur réponse à l'aide d'un code : « 1 jeton vert = 10 jetons rouges », 1 jeton bleu = 10 jetons verts ». Ce travail permet d'une part, de vérifier qu'ils connaissent la méthode de groupement par dix et d'autre part, qu'ils sont capables de procéder à des échanges nécessaires pour mettre une retenue dans la multiplication avec

l'abaque. Dans la deuxième partie de cette leçon, nous avons distribué une feuille d'exercices avec des plateaux de friandises (figure 4).

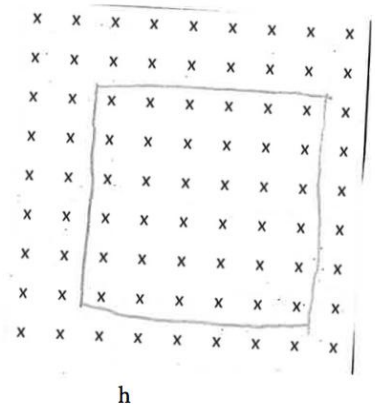


Figure 13. Un plateau de friandises représentées par des croix

Les élèves doivent indiquer le nombre de friandises présentes sur le plateau ainsi que leur démarche. Diverses procédures ont été relevées :

- utilisation de l'addition itérée
- multiplication avec mobilisation des tables de multiplication
- dénombrement de toutes les croix
- multiplication avec une résolution à l'aide de calcul réfléchi
- utilisation de groupements de dix et addition de ceux-ci

Cette dernière procédure a permis de faire le lien avec l'utilisation de l'abaque et des billes lors de la leçon suivante. Lors de celle-ci, les élèves sont partagés en deux demi classes et répartis en binômes. Cette séance a pour but de faire manipuler les élèves et de leur permettre d'appréhender plusieurs représentations du nombre. Elle permet de rendre explicites et visibles les différentes étapes de la multiplication. Elle est aussi un événement phare dans la séquence qui doit servir d'expérience commune à toute la classe et servir de référence lors du passage à la multiplication posée par écrit.

Tout d'abord, l'enseignant présente l'abaque et son utilisation avec pour commencer une multiplication assez simple du type « 6 x 4 ». Ensuite, les élèves effectuent le calcul « 27 x 4 » à l'aide de l'abaque. Une fois cette étape réussie, ils reçoivent une fiche avec le calcul « 37 x 5 ». Ils peuvent s'ils le désirent s'aider de l'abaque pour trouver ou contrôler leur réponse.



Figure 14. Utilisation de l'abaque pour 37 x 5

Pour finir, ils inventent des calculs sur une fiche.

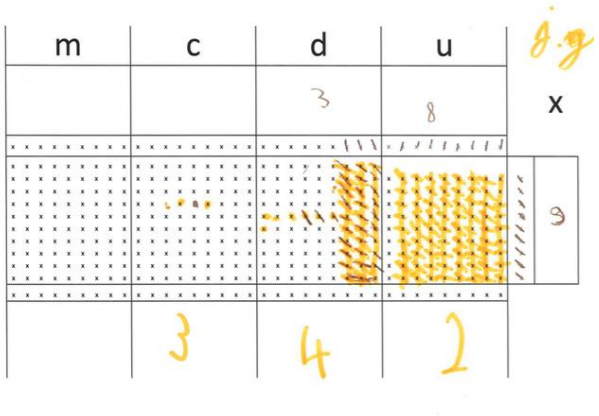


Figure 15. Exemple de fiche avec un calcul inventé par des élèves

À la troisième leçon, les élèves retravaillent à l'aide de la fiche et, pour les élèves en difficulté, des abaques sont proposés. Les élèves qui ont de la facilité peuvent essayer de résoudre un calcul à l'aide de la multiplication posée, ce qui les amène à transposer ce qu'ils ont vu au travers de l'usage de l'abaque et la représentation sur la fiche.

Lors la quatrième leçon, l'algorithme de la multiplication est expliqué au tableau. Pour ce faire, il est explicitement fait référence au travail réalisé avec l'abaque ainsi que celui avec la fiche. Les gestes, lorsqu'on remplace un groupement de billes (vider le récipient) par une autre bille (retenue) sont également réinvestis.

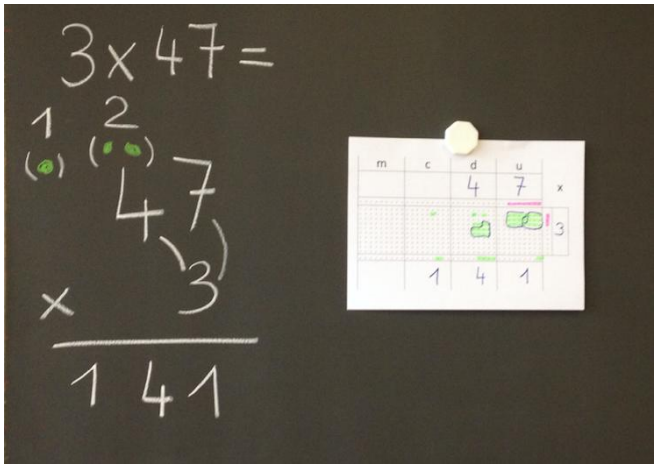


Figure 16. Trace au tableau noir

Pour finir, les élèves effectuent des exercices d'entraînement plus traditionnels avec des multiplications posées. Très rapidement, nous voyons un type d'erreur, plutôt inhabituel, apparaître chez beaucoup d'élèves : ils oublient les retenues lorsqu'ils multiplient les centaines, mais pas lorsqu'ils traitent les unités ou dizaines. Nous pouvons facilement expliquer cela par le fait que, lors de la phase de manipulation et lors du travail sur les fiches, il n'y avait pas de nombre à trois chiffres. Afin de remédier à cette erreur, nous reprenons donc un exemple au tableau (447 x 3) en collectif. Dès lors, nous constatons que cette erreur disparaît dans les exercices suivants et qu'il y a globalement peu d'erreurs de retenues.

De plus, l'erreur, généralement assez fréquente, qui consiste à multiplier la retenue au lieu de l'additionner est quasiment inexistante. Nous faisons l'hypothèse que la manipulation et la visualisation des billes permettent de mieux comprendre la signification de la retenue et de ce fait, de passer outre cette difficulté.

2. Présentation du dispositif pour la multiplication par un nombre à deux chiffres

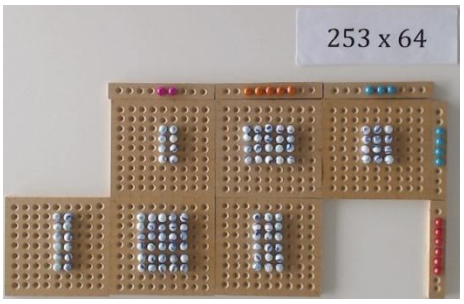
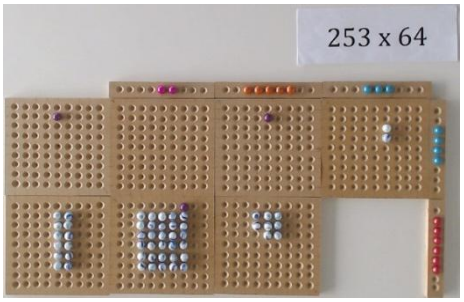
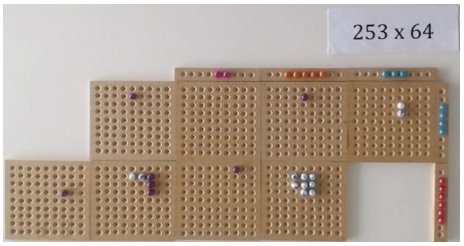
	Dans un premier temps, on procède comme pour la multiplication par un nombre à un chiffre en complétant les cases de l'abaque. Lorsque l'on a complété la seconde ligne, on l'a fait comme pour une multiplication par 6 alors que l'on multiplie par 6×10. Il faut donc décaler les colonnes d'un cran vers la gauche.
	On procède également aux groupements de dix billes si nécessaire et on utilise, pour la seconde ligne de l'abaque, le même procédé.
	Le nombre « 1012 » correspond au résultat de la multiplication de 253 par 4 et le nombre « 1518 » au résultat de la multiplication de 253 par 6. Le nombre « 15180 » correspond lui au résultat de la multiplication de 253 par 60. On additionne en regroupant dans chaque colonne les résultats obtenus sur chaque ligne. Le nombre « 16192 » correspond bien au résultat de la multiplication de 253 par 64.

Figure 17. Dispositif pour la multiplication, par un nombre à deux chiffres, posée

Avec ce matériel, les différentes étapes permettent de bien visualiser en multipliant, case après case, ce qui correspond à la distributivité. De plus, le décalage des plaques de la seconde ligne d'un rang vers la gauche qui correspond à la multiplication par un nombre de dizaines est selon nous porteur de sens. En effet, nous avons pu l'observer dans une classe de 6ème année primaire dans laquelle des stagiaires ont utilisé ce matériel avec un petit groupe d'élèves en difficulté (Brandt & Girard, 2018). Après la manipulation de l'abaque, les élèves oublient moins de décaler d'une colonne par exemple.

IV - BILAN ET CONCLUSION

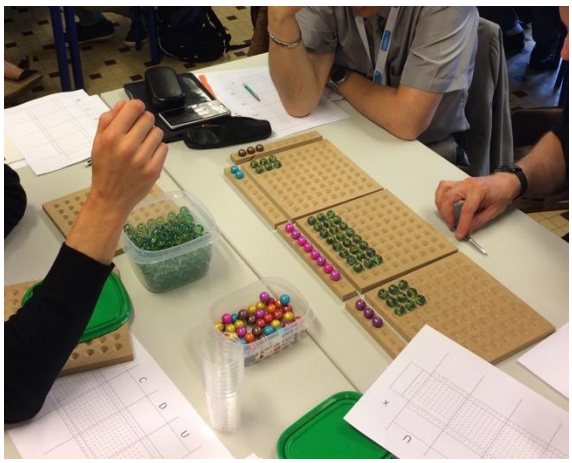
Lors de cet atelier, les participants ont tout d'abord cherché comment le matériel fonctionnait puisque nous ne leur avions pas présenté comment il s'utilisait. Nous souhaitions, par cette approche par immersion, absolument pas guidée, les amener spontanément à déceler les limites et les forces de cet outil. Nous avons pu constater qu'ils entraient facilement dans l'activité, mais pas forcément directement comme prévu pour effectuer des multiplications. À l'instar de la photo ci-dessous, ils essaient d'abord de se répartir les planches et de travailler individuellement.



Figure 18. Participants au travail de manière individuelle

Un des points de discussion a été au sujet du choix des couleurs des billes. Certains participants souhaitaient utiliser des couleurs différentes : une pour les billes qui représentaient des unités et une autre pour celles qui représentaient des dizaines, etc. Au contraire, d'autres étaient totalement opposés à cette idée, car cela allait, selon eux, à l'encontre du système de numération et de sa valeur de position. Cela risquerait donc de forger de fausses conceptions chez les élèves.

Sur les photos ci-dessous, un groupe a choisi des couleurs de billes différentes pour représenter la valeur de chaque chiffre que cela soit pour le multiplicateur ou le multiplicande et un autre groupe utilise seulement les billes transparentes.



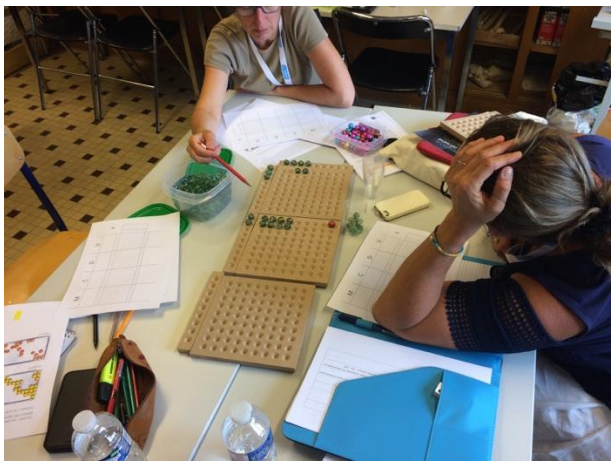


Figure 19. Traces du travail des participants

Le matériel présenté a été apprécié par son aspect innovant. En effet, le fait qu'il permette de matérialiser les algorithmes et semble apporter une meilleure compréhension est particulièrement intéressant.

Lors de cet atelier, les participants ont souligné la pertinence de l'abaque pour la multiplication à un chiffre. Ils ont vu le potentiel en termes de compréhension et d'apprentissage que la manipulation de ces billes peut engendrer. Ils ont, en revanche, émis plus de réserve au sujet du dispositif pour la multiplication à deux chiffres. Ils ont notamment remis en question le fait de décaler les planches à gauche pour rendre explicite le zéro de décalage.

En ce qui concerne nos observations lors de l'expérience avec des élèves, nous pensons que contrairement à ce qui est souvent cru, à savoir que la manipulation d'objets est chronophage, cela peut plutôt être un gain de temps. De plus, il est possible d'introduire cet algorithme plus tôt dans l'année vu qu'il n'est plus nécessaire, dans un premier temps, de maîtriser les tables de multiplications, pour d'une part, le comprendre mais d'autre part, obtenir des réponses justes.

Pour finir, il est nécessaire d'utiliser les fiches avec les élèves comme des intermédiaires entre les manipulations sur l'abaque et la multiplication posée classiquement en colonnes sur une feuille. Nous supposons que c'est la diversité des supports et surtout les liens explicitement faits et montrés par l'enseignante entre ces derniers qui facilitent l'apprentissage.

V - BIBLIOGRAPHIE

Andrieu, L., François, R., Kiffer, O., Vidal, S., Méhée, L. (2018). *Archimaths*. Paris : Magnard.

Brandt, J. & Girard, M. (2018). *L'abaque, un artefact pour faciliter l'apprentissage de la multiplication ?* Mémoire de Bachelor. Haute école pédagogique du Canton de Vaud, Lausanne.

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève.

Clivaz, S. & Deruaz, M. (2013). Des mathématiques à leur enseignement l'algorithme de la multiplication. *Grand N*, n° 92, pp. 15-23.

Constantin, C. (2017). La distributivité : Quelles connaissances pour enseigner la multiplication à l'école primaire ?. *Grand N*, n° 100, pp. 105-130.

Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998). *Mathématiques 3ème année : livre de l'élève*. Neuchâtel : COROME.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. Cognition, n° 44, pp. 1-42.

Deruaz, M. & Batteau, V. (2017). Dix ou 10 : quelle est la question ? atelier A31, *Actes du 44e colloque COPIRELEM, Épinal 13-15 Juin 2017.*

Deruaz, M. & Clivaz, S. (2012). Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maîtres du primaire. In J.-L. Dorier & C. Sylvia (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT1, pp. 183–194).

Deruaz, M. & Clivaz, S. (2018). Des mathématiques pour enseigner à l'école primaire. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

ATELIER A19

AGIR, MANIPULER, PARLER L'ESPACE POUR LE CONSTRUIRE EN MATERNELLE

Agnès BATTON
ESPE Versailles, Groupe départemental maternelle 95
membre de la COPIRELEM et de Pop'Maths
agnes.batton@u-cergy.fr

Élisabeth BOISSON
ESPE Versailles, Groupe départemental maternelle 95
ejacobboisson@free.fr

Guylaine FREGUIS
CPC DSDEN 95, Groupe départemental maternelle 95
guylaine.freguis@ac-versailles.fr

Alexandra RADOVANOVIC
CPC DSDEN 95, Groupe départemental maternelle 95
alexandra.radovanovic@ac-versailles.fr

Résumé

L'atelier vise à faire émerger des points clés d'un projet de formation sur la structuration de l'espace en maternelle dans le cadre du groupe départemental maternelle du Val d'Oise et de l'ESPE de Versailles. Il met les participants en situation de résolution de problèmes spatiaux puis en réflexion sur des outils (qui seront mis en ligne sur le site de la DSDEN 95) : conception et analyse de scénarios ; progressions ; objectifs communs et différenciés ; analyse de matériels et supports ; scénarios accompagnés d'extraits vidéos (TPS, PS, MS, GS).

I - PRÉSENTATION DES PROBLÉMATIQUES ET PRÉSENTATION DE L'ATELIER

L'atelier démarre par un bref historique de la recherche-action.
Cette recherche fait suite à un premier travail mené sur le nombre, dans le cadre du Groupe Départemental maternelle du Val d'Oise (95). Le point de départ a été, comme sur le nombre, une commande de l'IEN-A Maternelle, E. Collin, au vu du peu de ressources institutionnelles sur le sujet. Dans le département, il y a eu d'autres travaux sur l'espace en lien avec les arts plastiques et l'EPS mais la focale de cet atelier a été plus orientée vers les mathématiques.
Les premières observations en classe nous ont permis de constater la pratique d'activités isolées concernant le langage spatial et les formes. Elles ont révélé, de la part des enseignants, un réel questionnement et une forte demande de formation.

L'objectif de cet atelier est de présenter plusieurs types d'apports, plusieurs natures d'outils permettant de construire et mener des formations avec des formateurs, des enseignants, des stagiaires, afin d'en discuter et de mutualiser nos ressources :

- trois mises en situation pour faire émerger des composantes de la structuration de l'espace ;
- des apports théoriques et quatre principes pour enseigner l'espace ;
- des expérimentations de classe pour tous les niveaux de la maternelle, de la TPS à la GS.

II - MISES EN SITUATION DES PARTICIPANTS SUR TROIS SITUATIONS

L'atelier se poursuit par trois mises en situation successives des participants, chacune suivie d'une phase de bilan : la première, « C'est dans la boite », aborde la notion de point de vue ; la deuxième, « Pékin Express », porte sur la question de l'orientation et des repères ; enfin, « Le plan du quartier de l'ESPE » porte sur la question du codage et du passage du méso au micro-espace.

1 « C'est dans la boîte »

Cette situation est tirée de (Emprin et Rajain, 2004).

1.1 Description

Les participants sont placés par groupes de cinq joueurs (A-B-C-D-E). A est dessinateur, B, C et D, E forment deux équipes de deux constructeurs. Le joueur A est placé face aux deux équipes de joueurs B-C/ D-E. Chaque binôme de constructeurs dispose de dix cubes. Chaque cube est constitué de deux faces bleues, deux faces rouges et deux faces jaunes, opposées deux à deux. Chaque dessinateur a une boite en carton avec deux ouvertures et dans laquelle est caché un assemblage de dix cubes.



Figure 1. Mise en situation : « C'est dans la boîte »

La consigne est la suivante : « *Dans une boite, j'ai caché un assemblage de 10 cubes. Tous les cubes de l'assemblage sont positionnés de la manière suivante pour la personne qui regarde dans la boite : la face visible bleue est face à elle, la face visible rouge est du côté des fenêtres de la salle, et la face visible jaune est parallèle au plafond. Deux cubes se touchent toujours par une face. Vous allez vous répartir en groupes de cinq : deux équipes de deux (B-C et D-E) et un joueur seul (A). A regardera par les fenêtres de la boite et dessinera, à plat (pas en perspective) en deux exemplaires ce qu'il voit puis donnera un dessin à chacune des équipes B-C et D-E. Les équipes B-C et D-E construiront un assemblage de cubes à partir des informations reçues. Il est important de ne pas regarder la production de l'équipe voisine.* »

Une fois la tâche réalisée par les dessinateurs et les constructeurs, les deux binômes du même groupe comparent les constructions sans ouvrir les boites. Ils constatent en général, avec le dessinateur, que les constructions ne sont pas identiques même si elles correspondent bien aux mêmes vues dessinées.

1.2 Constats et échanges

- La question se pose de savoir pourquoi il y a ces différences de construction. Les équipes ont reçu un plan identique, pourtant il y a plusieurs possibilités de construction conformes aux vues. On fait alors apparaitre que si l'on veut construire un seul et même assemblage, il manque une troisième vue, la vue de dessus (la vue jaune).
- Un participant propose d'utiliser un artefact, un appareil photo, pour aider celui qui regarde et dessine. En effet, certains élèves en grande difficulté, n'ayant pas confiance en eux, confirment leur regard par celui de l'appareil photo.

Reprise de la situation : les dessinateurs ouvrent le toit des boites, et rendent visible la vue de dessus (jaune) qu'ils ajoutent à leur plan. Puis les constructeurs utilisent la vue de dessus pour modifier leur assemblage initial de 10 cubes, les constructions des deux binômes sont alors – sauf erreur - identiques.

1.3 Mise en commun de la situation de codage-décodage

Les échanges portent d'abord sur les obstacles liés à la situation :

- La position en face à face du dessinateur et des constructeurs qui met les constructeurs en difficulté : il leur est nécessaire d'adopter le point de vue de celui qui a dessiné pour construire, pour orienter les cubes, et il leur est nécessaire d'orienter le dessin pour construire en se mettant à la place du dessinateur (ils font le plus souvent « tourner le dessin » de 180°, ou bien se déplacent effectivement pour se mettre dans la position initiale du dessinateur). L'effet miroir du positionnement des participants est donc une difficulté à prendre en compte.
- La transposition d'une représentation en 3 dimensions (la construction) en une représentation à plat en deux dimensions (le plan). Il est parfois nécessaire d'ajouter des repères pour orienter les faces les unes par rapport aux autres. Par exemple, la vue de face bleue est dépendante de la vue de dessus jaune. Dans le dessin proposé ci-dessous, le participant indique par des « vaguelettes » le plan horizontal qui donne le point de vue du dessinateur. Les constructeurs pourront ainsi adopter le point de vue retenu par le dessinateur.

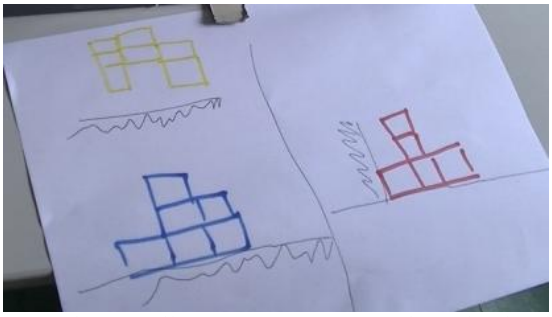


Figure 2. « C'est dans la boîte » : production d'un participant qui indique le plan horizontal (par des vaguelettes)

- L'utilisation de repères fixes aide à réaliser la tâche : prendre des repères fixes dans la salle (les fenêtres, le plafond, la place du dessinateur) aide au repérage pendant la tâche et permet d'avoir des repères communs pour communiquer. Ces repères communs ne sont pas nécessaires pour résoudre la tâche, mais ils facilitent la résolution et permettent la communication.
- Les trois vues permettent de construire sans ambiguïté.

Les obstacles levés sont ensuite mis en parallèle avec des situations d'apprentissage auprès des élèves.
Au niveau de l'espace, il est utile d'aborder avec les élèves :

- les différents points de vue sur les objets : de face, de côté, de dessus ;
- l'utilisation de repères fixes pour s'orienter dans l'espace ;
- des situations où l'on se met à la place de l'autre, où l'on adopte le point de vue de l'autre, en prenant en compte la position relative de la personne qui dessine, qui construit par rapport à l'objet ;
- l'utilisation du dessin comme outil de représentation de l'espace.

2 « Pékin-Express »

2.1 Présentation de l'activité

Le but du jeu est de se repérer sur le plan circulaire d'une ville inconnue.

Les participants sont placés par groupes de cinq joueurs, A, B, C, D et E. A joue le rôle de meneur, B le rôle du secrétaire et C, D, E le rôle des dessinateurs. C, D et E jouent individuellement.

Le meneur reçoit un plan circulaire d'un quartier de la ville de Pékin sans repère symbolique connu des participants. Sur ce plan sont placés deux points : un point rouge qui indique le départ, et un point vert

qui indique l'arrivée. Un itinéraire identifié par des flèches est tracé pour se rendre du point rouge au point vert. Les trois dessinateurs disposent du même plan de la ville, mais sur lequel n'est placé que le point rouge de départ.

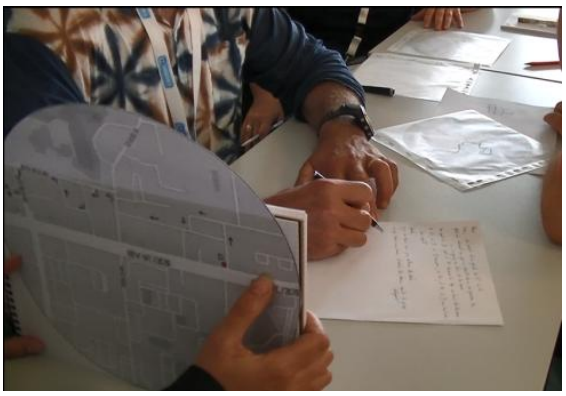


Figure 3. Mise en situation : « Pékin-Express »

Les consignes sont les suivantes :
Pour le meneur : « *Mener les trois dessinateurs du point rouge au point vert en les accompagnant uniquement par le langage oral* ».
Pour le secrétaire : « *Noter mot à mot les instructions du meneur pour garder une trace du message oral donné par celui-ci.* »
Pour les dessinateurs : «*A l'aide d'un crayon, tracer sur le plan, au fur et à mesure des instructions, le chemin indiqué par le meneur. Aucune question n'est permise sauf pour faire répéter une consigne.* »
Après avoir tracé les itinéraires pour se rendre du point rouge au point vert, les participants comparent les trajets obtenus et commentent les façons de se diriger sur le plan. Ils tentent de se mettre d'accord en se référant à la transcription du trajet du secrétaire.

2.2 Mise en commun de la situation de communication : constats et échanges

Selon les groupes, les résultats sont différents : pour certains, les dessinateurs n'ont pas réussi à atteindre le point vert attendu. D'autres ont tracé des itinéraires différents alors que le message reçu était le même. Enfin, certains ont réussi l'exercice demandé.

Les échanges portent sur les obstacles liés à la situation :

- Le plan n'est pas orienté au démarrage : il est circulaire, les repères écrits en mandarin ne sont pas des repères connus pour les participants, les repères absolus (Nord, Sud, Est, Ouest) sont absents. La première difficulté relève de *« Comment orienter le plan pour qu'il soit positionné pour tous de la même manière, tant pour les dessinateurs que pour le meneur de jeu ? »*. Il s'avère que selon les groupes, l'attention est ou non portée sur la nécessité de trouver une orientation initiale commune, et dans ce cas le vocabulaire utilisé est plus ou moins efficace pour parvenir à cette orientation commune.
- Il faut prendre en compte le point de vue de l'autre quand on utilise des repères relatifs : se situer par rapport à la droite du meneur, la droite du dessinateur, prendre en compte l'effet miroir de la situation qui nécessite de se recentrer toujours par rapport à un repère. Suite aux échanges, il ressort que l'utilisation de repères absolus sur le plan facilite la situation de communication et lève les ambiguïtés de positionnement dans l'espace ; par exemple, « on place l'avenue la plus large horizontalement, avec les deux écritures sur la partie gauche de la feuille».
- Il est nécessaire d'utiliser un vocabulaire précis pour expliciter le parcours et se comprendre.

2.3 Mise en parallèle des obstacles levés avec des situations d'apprentissages auprès de jeunes élèves

- Nécessité de travailler la notion de point de vue, pour être capable de prendre en compte le point de vue de l'autre, de s'orienter par rapport au point de vue choisi.
- Outiller les élèves avec des premiers outils de représentation –positions et déplacements- , ici oraux, pour qu'ils puissent parler l'espace, le décrire et s'y orienter :« horizontal, haut bas, partie gauche, droite, aller tout droit, tourner à droite… »

Des participants font des analogies avec le langage utilisé dans des situations avec le logiciel « scratch », avec des robots (Beebot), en géométrie.

3 « Plan du quartier de l'ESPE de Blois »

3.1 Présentation

La consigne est la suivante : *« Réalisez individuellement un plan de Blois sur lequel figure l'ESPE. Si vous le souhaitez, vous avez le droit de vous lever et de regarder par la fenêtre de la salle ou par celles des couloirs. »*
L'entrée dans la tâche est différente selon les personnes. Certains expriment une méconnaissance de Blois et d'autres des difficultés à dessiner. Mais finalement tous les participants tentent de répondre à la consigne.

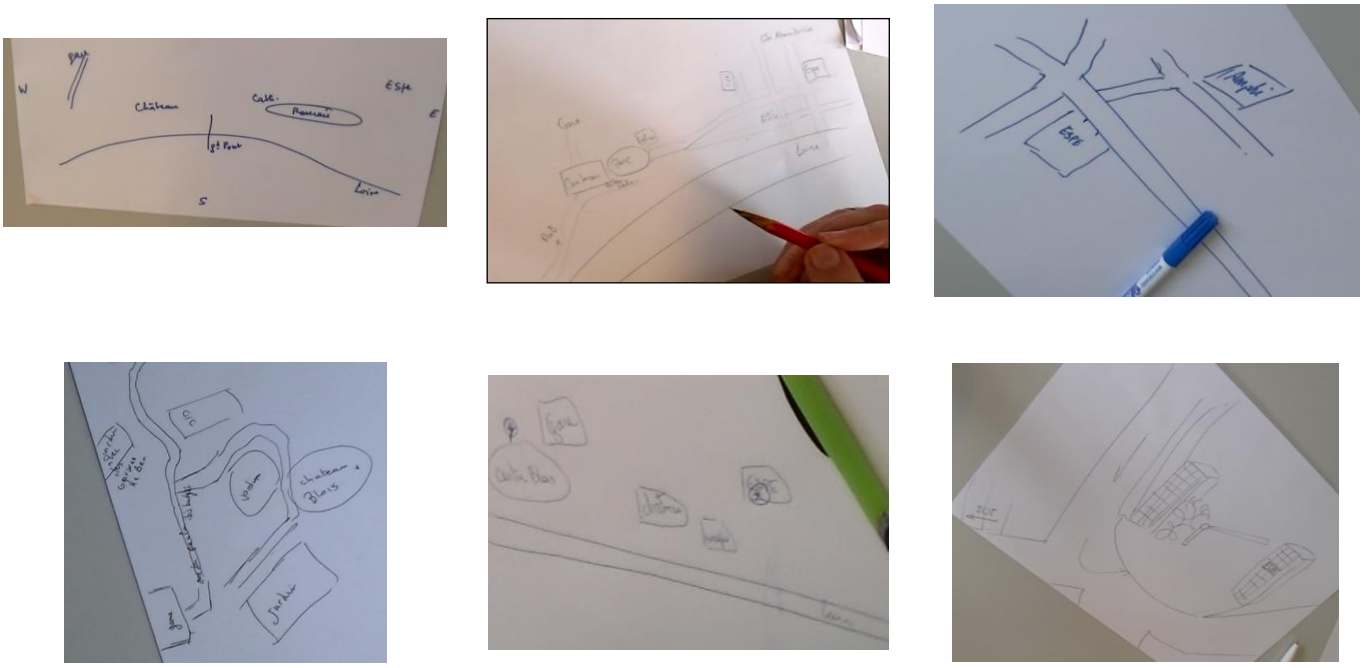


Figure 4. Mise en situation : « Plan du quartier de l'ESPE de Blois ».

3.2 Mise en commun et échanges

Pour démarrer une mise en commun des produits et pour amorcer les échanges, la question posée est : « *Comment vous y êtes-vous pris* ? »

Pour dessiner ce plan, les participants se sont servis de leur vécu. Ces vécus sont différents selon qu'ils habitent, travaillent dans la région ou s'ils ont fait le trajet « avec leur corps » pour venir au colloque.

- *« Etant de la région, j'ai un plan représenté dans la tête, j'ai représenté le nord et le sud. »*
- *« J'ai suivi le GPS de la voiture, je n'ai donc aucun repère, mais j'ai dû chercher un logement, donc j'ai une représentation synthétique de Blois. »*
- *« Je suis arrivée avec mon GPS. Comme je n'ai pas mangé avec vous, j'ai été mangé au parc du Château, le long de la Loire, j'ai repéré quelques petites rues. »*

Une discussion s'est aussi engagée sur la taille des plans :

«J'ai entendu la consigne et compris qu'il fallait faire un plan de Blois, pas de l'ESPE.
- Oui tu as raison mais notre espace de référence était petit autour de l'ESPE. Mon plan est réduit à celui de l'ESPE. »

Malgré les différences citées ci-dessous, on constate aussi de nombreuses ressemblances.

- La Loire est une référence culturelle commune à toutes les productions. « *On sait qu'il y a la Loire.* »
- Tous, sauf une personne, ont fait un plan vu d'en haut. En classe, il est nécessaire, pour les élèves, de préciser la notion de plan et d'expliciter ce que cela signifie en terme de point de vue : on dessine avec une vue du dessus. En classe, les élèves dessinent les chaises vues du dessus avec des carrés et ajoutent des pieds au carré....
- Les plans cardinaux apparaissent dans certaines productions.
- Des rues, des grands axes, des châteaux, la gare sont indiqués dans toutes les productions.
- Une certaine proportionnalité dans les distances entre les éléments du plan et les éléments de la réalité apparaît globalement.
- Des formes géométriques sont dessinées pour modéliser : le rectangle pour représenter des bâtiments, par exemple, ou les droites parallèles pour les routes.
- Des flèches pour le sens de circulation de certaines rues ne sont indiquées que sur quelques productions.
- Un participant a représenté les feux rouges, sens interdits, sens uniques avec une vue de face, à plat alors que les autres éléments du plan sont dessinés avec la vue de dessus. Il y a un mélange de points de vue, la représentation n'est pas unifiée.

3.3 Enjeux et difficultés

La consigne est très ouverte car elle ne précise pas l'objectif, afin de ne pas induire certains types de représentations et de faire émerger toutes celles des participants. Cette émergence permet de faire un point sur les implicites liés au codage du plan. Ces implicites sont souvent à l'origine de difficultés d'élèves. Ils ne comprennent pas leurs erreurs car les codages du plan ont une signification : c'est une représentation simplifiée des éléments vus du dessus (point de vue).

Le plan est dessiné sur une feuille. Et dans cette feuille on doit faire « entrer » un « grand » espace dans lequel on vit, on se déplace et que l'on voit de façon séquentielle. Cette contrainte est aussi une difficulté pour les élèves.

III - ÉLÉMENTS THÉORIQUES

> *Nous croyons qu'un **enjeu essentiel** des activités sur l'espace est d'amener l'enfant à **s'y situer et à s'y repérer.** A terme en effet, il s'agit pour lui de **« se comprendre dans l'espace »** et l'école a un rôle essentiel pour favoriser ce processus de **« décentration ».*** (Brissiaud, 1994a, p. 84)

Partant des orientations qu'indiquent les programmes de l'école maternelle (MEN, 2015), cette citation nous semble correspondre à l'objectif fondamental d'un enseignement de l'espace.

Pour penser et enseigner la structuration de l'espace, nous apportons quelques éléments théoriques, et posons quatre principes.

1 Concepts clés pour penser la structuration de l'espace

1.1 Se situer et se repérer dans l'espace : trois types de représentation de l'espace

Se situer et se repérer dans l'espace requiert des compétences très différentes, selon la tâche proposée.

Pour donner un cadre à notre réflexion sur l'apprentissage de l'espace, nous retiendrons d'abord la distinction entre trois types de représentation spatiale qu'introduit la psychologue Liben (1981, citée par Pêcheux, 1990, p. 22-23).

Le jeune enfant dispose intuitivement, comme l'animal, de ce que Liben appelle la **« mémoire spatiale »**,*« savoir implicite qui peut être mis en œuvre en dehors de toute réflexion »*, qui lui permettra de « se débrouiller » dans un espace familier (école, quartier), ou de reproduire un agencement d'objets donnés. Mais s'il veut expliciter son trajet pour qu'un camarade qui ne le connaît pas puisse l'effectuer, ou donner des instructions pour que son camarade réalise un agencement d'objets cachés, il ne pourra réussir sans utiliser des outils de représentation: langage et/ou représentation figuratives.

Un apprentissage explicite est alors nécessaire, de ce que Liben appelle des **« produits spatiaux »**, ***« toutes les productions qui mettent en jeu des relations spatiales*** *: cartes, dessins (…), maquettes, mais également descriptions verbales ».*

Le but d'un apprentissage explicite de l'espace sera alors que l'élève se construise progressivement ce que Liben appelle une **« pensée spatiale »**, c'est-à-dire « ***toutes les activités mentales portant sur des contenus spatiaux****. Ce qui importe ici, c'est le travail de transformation qui est opéré mentalement sur les données, par exemple d'anticiper sur les résultats d'un découpage dans un papier plié ».*

1.2 Décentration

Concernant la structuration de l'espace, une « pensée spatiale » exige de l'enfant qu'il adopte différents points de vue sur un même objet, pour pouvoir effectuer mentalement une action sur cet objet, du lieu où il se trouve. Piaget (1964) définit ainsi la **« centration »** :

> *Par exemple, j'avais soutenu [lors de résultats obtenus sur le plan du langage] que la pensée du jeune enfant est égocentrique, non pas dans le sens d'une hypertrophie du moi, mais dans celui d'une* ***centration du point de vue propre*** *: il s'agissait donc d'une* ***indifférenciation initiale des points de vue****, rendant nécessaire une différenciation par décentration pour aboutir à l'objectivité.* (p.91-93)

Pour se représenter un objet ou un espace sans se référer à son seul point de vue d'observateur, l'enfant devra identifier son propre point de vue et accéder au point de vue d'un autre, Piaget (1994) explicite ce processus de « **décentration »** :

> *Or l'étude du développement sensori-moteur de l'espace, au niveau antérieur à l'acquisition du langage, conduit exactement au même résultat :* ***le développement débute par la construction d'une multiplicité d'espaces hétérogènes (buccal, tactile, visuel..) , dont chacun est centré sur le corps ou la perspective propres*** *; puis, à la suite d'une sorte de révolution copernicienne en petit****, l'espace finit par constituer un contenant général, qui contient tous les objets y compris le corps propre et se trouve ainsi entièrement décentré.*** (Ibid, note 5)

1.3 Se représenter l'espace à partir d'expériences perceptives

Construire une ***pensée spatiale*** c'est alors, pour l'élève, en reprenant la distinction de Boule (1985) entre trois types de situations, accéder à un ***espace représenté***, à partir de son expérience dans ***l'espace vécu***, et à travers des ***espaces transposés*** **:**

> ***Espace vécu***
> *La situation la plus aisément saisie est celle qui fait intervenir physiquement les enfants, leur position dans un espace défini, leurs mouvements.*
> ***Espace transposé***
> *« Par la suite, il est intéressant de faire intervenir une décentration qui reste en rapport étroit avec la situation vécue, par le moyen d'une maquette, par exemple, ou de poupées.*
> ***Espace représenté***
> *« A la fin, on fait appel à des représentations externes, construites par les enfants eux-mêmes, soit imagées (dessin), soit verbales (description).*

Ces trois types de situations ne correspondent **pas à des étapes chronologiques** mais à des entrées différentes ; les représentations verbales ont leur place dans chaque type de situation et dans les passages entre elles.

1.4 Conceptions d'espaces

Constatant avec Brissiaud (1994a, p.85) que l'enfant « n'a pas du tout les mêmes expériences perceptives suivant la taille de l'espace dans lequel il agit », nous nous appuierons sur la distinction introduite par Brousseau (2000) entre « trois « conceptions » d'espaces et par conséquent trois « milieux » spatiaux correspondants ».

Le ***macro-espace,*** que Brousseau (2000, note 9) définit comme **«***territoire beaucoup trop grand pour qu'il puisse l'embrasser d'un regard* **».** Il est hors de portée de l'expérience perceptive et motrice (quartier, ville…), et Brissiaud (1994a, p.86) précise : *« L'enfant ne peut accéder au* ***macro-espace*** *qu'à mesure qu'il s'en approprie les représentations culturelles. »*

Le ***micro-espace,*** que Brousseau (2000, note 7) définit ainsi :

> *A l'opposé, l'enfant construit ses premières connaissances spatiales dans la manipulation de petits objets. Par le toucher avec ses mains et sa bouche, autant que par la vue, par les mouvements qu'il leur fait subir, il identifie leur consistance, leur forme solide, leurs positions relatives et leurs propriétés. Le micro-espace est le milieu de l'élaboration de la conception du mouvement des objets autres que l'observateur. Il s'agit de conception, pas de taille objective des objets.*

Brissiaud précise que *:*

> *Dans le « tout petit espace » d'une feuille de papier par exemple, l'enfant dispose d'une vue globale et « unifiante » qui lui permet de considérer simultanément le tout et ses parties (…). Dans ce micro-espace, l'enfant peut apprendre à coordonner des points de vue successifs et locaux avec un point de vue global et simultané. »*

Enfin le ***méso-espace,*** que Brousseau définit à partir d'un certain type de situations vécues par l'enfant.

> *Les situations où l'enfant doit concevoir ses propres déplacements* ***dans un territoire placé sous le contrôle de sa vue,*** *sont l'occasion de développer des représentations différentes de celles du micro-espace et qui préfigurent celles qui seront nécessaires dans le macro-espace.*

1.5 La hiérarchie des géométries selon Piaget

Pêcheux (1990) présente, dans un tableau de Lepecq (1982) (voir ci-dessous), une « hiérarchie des géométries » proposée par Piaget, qui visait à identifier la prise en compte de contraintes de plus en plus nombreuses, dans l'évolution avec l'âge des comportements spatiaux : de l'équivalence[80] de toutes les formes (équivalences topologiques), on passera par exemple à la restriction de cette équivalence à tous les quadrilatères (équivalence projective) puis à tous les carrés/rectangles (équivalences euclidiennes) jusqu'à différencier ces carrés en fonction de leur dimension (équivalence métrique).

[80] Dans le tableau, les figures F1 et F2 sont considérées comme équivalentes du point de la géométrie indiquée dans la colonne 1 de la ligne correspondante. Par exemple, F1 et F2, sur la première ligne, sont deux figures fermées équivalentes. L'équivalence topologique permet la constitution, pour une figure donnée, d'une classe regroupant toutes les figures ayant les mêmes propriétés topologiques (continuité, voisinage, séparation, ordre) indiquées dans la troisième colonne du tableau.

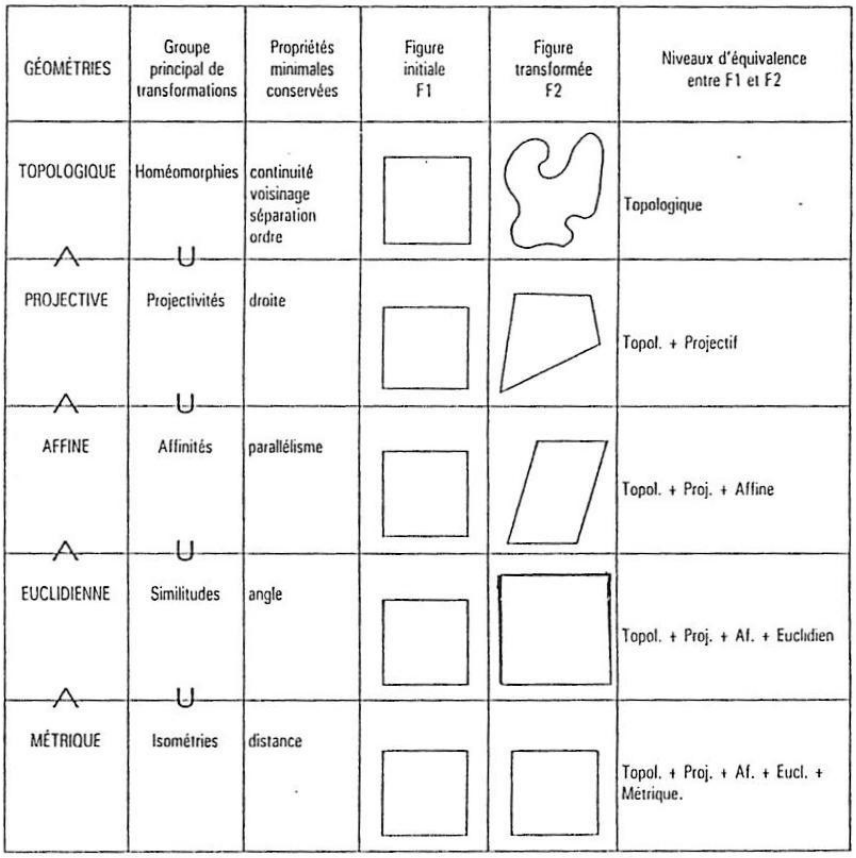


Figure 6 - La hiérarchie des géométries selon Piaget (d'après Lepecq, 1982).
⋀ relations de subordination entre géométries,

Figure 5. La hiérarchie des géométries selon Piaget (Lepecq, 1982, cité dans Pêcheux, 1990)

De fait, si l'on pensait développement de l'enfant avec Piaget, on pouvait imaginer une progression qui suive cette hiérarchie des géométries. Mais les travaux de Vigotsky, repris par Pêcheux (1990, p. 20), qui associent développement et apprentissage, nous amènent à penser davantage en termes de « trajectoires locales » faites d'allers et retours entre différents espaces, en jouant sur une nouvelle variable : la familiarité de l'espace considéré : *« Les représentations des zones et objets familiers sont organisés selon des règles projectives ou métriques, alors que les espaces flous ou contingents qui les relient ne sont appréhendés qu'au niveau topologique »*.

2 Quatre principes pour enseigner l'espace à l'école maternelle

Pour penser l'enseignement de la structuration de l'espace, nous proposons quatre principes, les deux premiers précisent les enjeux essentiels d'apprentissage, les deux suivants concernent leur mise en œuvre avec les élèves.

L'accès à une « pensée spatiale » nous semble conditionné par un double apprentissage :

- **premier principe** : favoriser le processus de « décentration » à l'aide d'un travail sur les perceptions de l'espace, afin d'expérimenter et de nommer différents points de vue ;
- **deuxième principe** : favoriser l'appropriation d'outils de représentation de l'espace, langagiers et figuratifs, pour amener l'élève à utiliser le micro-espace comme « *un modèle pour tous les espaces possibles* » (Brissiaud, 1994a, p. 86).

Pour cela,

- **troisième principe** : l'enseignant proposera des « tâches clé » visant à développer et expliciter des procédures, à passer de gestes effectifs à des gestes mentaux lors d'allers et retours entre les différents espaces
- **quatrième principe** : l'enseignant mettra en relation différents contextes d'activités spatiales en utilisant des variables.

Nous précisons ci-dessous les tâches, procédures, variables et contextes que nous avons choisis pour cette mise en œuvre avec les élèves.

Des tâches – clés : (se) situer / (se) repérer, (se) déplacer dans l'espace vécu, micro- et méso-espace.

Dans les activités suivantes :

- construire, compléter, transformer, reproduire ;
- représenter : associer une représentation à une situation vécue ;
- nommer, décrire (verbal).

Des procédures :

- premières : se déplacer pour changer de perception et accéder à un nouveau point de vue (expérience vécue) ;
- *expertes* : changer de point de vue sans bouger en mobilisant les expériences et les points de vue déjà construits.

Des variables sur l'espace :

- tailles d'espace : micro-meso-macro ;
- dimensions : 2D et 3D (et 1D) ;
- types de situations : vécues, transposées, représentées ;
- représentations de l'espace : mémoire, produit, pensée ;
- modes d'appréhension de l'espace : perceptif, instrumenté, déductif ;
- types de géométrie : topologique, projective, affine, euclidienne, métrique

Des contextes :

- situation ritualisée, fonctionnelle, construite ;
- à partir d'expériences vécues dans le quotidien de la classe, dans des espaces familiers ;
- en référence à des histoires qui mettent en scène des personnages réels ou fictifs.

IV - EXPÉRIMENTATIONS

1 Présentation des expérimentations

Les expérimentations que nous présentons se sont déroulées durant une année sur des classes de la toute petite section (TPS) à la grande section (GS) dans le département du Val-d'Oise[81].

La diapositive ci-dessous liste les activités pratiquées et filmées dans les classes (cadre gris), en référence aux trois grands objectifs indiqués (flèches bleues).

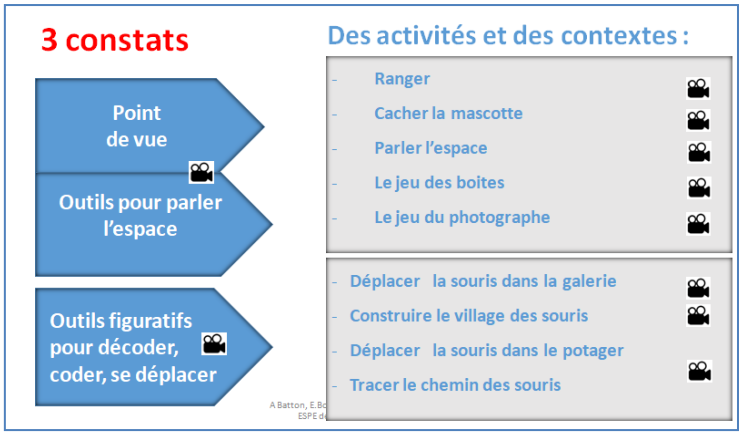


Figure 6. Récapitulatif des activités pratiquées.

[81] Classes d'Émilie Serres à Bezons en TPS, de Joëlle Kneipp à Montigny les Cormeilles en PS, de Céline Pegurri-Tran à Sarcelles et Mélanie Renault à Cergy (MS), et de Natacha Cassan à Sarcelles (GS).

Nous sommes partis de l'observation des élèves, cherchant des éléments qui montrent de quelle manière ils s'appropriaient l'espace. Nous nous sommes aperçus que leurs activités spontanées n'évoluaient pas sans l'intervention de l'enseignante (pas de rangement pour les TPS ; vocabulaire très pauvre pour parler l'espace ; les élèves n'explorent pas tous les espaces de la classe ; les expérimentations avec les constructions sont toujours du même ordre : alignements et empilements ; monter le plus haut possible et faire tomber). Nous avons alors choisi et mis en place des activités pour déclencher l'activité des élèves autour de problématiques liées à l'espace et pour permettre la construction d'apprentissages progressifs.

En TPS et PS, nous avons choisi des activités liées au contexte de la classe, proches du vécu des élèves

- **ranger** à partir de l'album *Lou et Mouf : faut tout ranger !* (J. Ashbe, Ecole des Loisirs, 2003) ;
- **cacher** et **chercher** la mascotte ;
- la lecture de l'album des *Trois petits cochons*, qui devient alors une histoire commune à la classe pour déclencher l'activité de « **se cacher** », et des activités de **construction avec les solides** dans des espaces de tailles différentes (sur la table, dans la salle de motricité, sur le tapis de jeu de la classe) ;
- des jeux traditionnels comme « *promenons-nous dans les bois* ».

En MS et GS, nous avons choisi et utilisé des activités plus décontextualisées :

- le jeu « Go getter » (SmartGames) ;
- les albums de la revue EPS : *Les nuits blanches de Pacha : un album à grandir*, in Les aventures de Pensatou et Têtenlère (revue EPS 2010), et *Sur les traces de Têtenlère : un album à s'orienter* in Les aventures de Pensatou et Têtenlère (revue EPS 2013).

Les situations de classe proposées mettent en lien les deux premiers principes posés lors de la partie théorique (le point de vue, les outils pour parler, coder, décoder, l'espace et s'y déplacer) avec les deux principes suivants (pratiquer des activités, des tâches clés dans des contextes variés).

Ces deux albums sont particuliers, conçus pour un travail en motricité. Il faut donc prendre le temps de faire pratiquer les activités associées et indiquées dans le livret d'accompagnement. Les activités mathématiques proposées en GS ont, dans le livret, un statut de prolongements de celles de motricité ; celles proposées pour les MS ont été imaginées directement à partir l'album. Les enjeux d'apprentissage spatiaux sont respectivement :

- *Pacha* : déplacements dans la maison et codages de ces déplacements, du point de vue d'un personnage (le chat qui regarde les souris par une ouverture du grenier) ;
- *Têtenlère* : découverte de nouveaux produits spatiaux et codage (photos, maquettes, plans, illustrations multiples), l'histoire étant racontée de deux points de vue : récit des amis de Têtenlère, récit de ses amis.

Ces albums sont différents de ceux utilisés en PS et TPS car ils ne sont plus un prétexte à l'activité mais le contexte commun pour faire les activités. Tout ce qui est travaillé peut être fait dans un autre contexte. C'est d'ailleurs ce qu'ont fait des classes de Saint-Ouen l'Aumône en se détachant de l'album et en le transposant dans des activités en salle de motricité.

2 Premières observations, analyse et activités en TPS-PS

2.1 Premier constat lié au premier principe : « le point de vue » :

Prendre en compte le point de vue de l'autre est une compétence qui se construit peu à peu. Dans nos expérimentations, cette compétence n'est pas acquise en TPS. Les vidéos montrent des élèves qui n'ont pas encore compris ce que signifie « se cacher » et restent visibles du regard de celui qui les cherche, ou bien qui se cachent partiellement (sous une table, sous une couverture, derrière une poubelle). Ne voyant plus les autres, ils croient ne plus être visibles...

En PS, cette compétence commence à se construire, avec des écarts importants entre les élèves qui se cachent complètement derrière un assemblage de cartons en tenant compte de la place dans la salle de celui qui les cherche, et celui qui reste assis sur un carton visible de tous. Les élèves sont capables de répondre au problème soulevé par l'enseignante « *Comment faire pour ne pas être vu du loup ?*», de se mettre en posture de chercheur, de se questionner et d'apporter des réponses multiples (construire en hauteur un mur de cartons, se cacher à l'intérieur des boites).





Figure 7. Prendre en compte le point de vue l'autre : se cacher.

Dans notre expérimentation, nous avions fait le choix de proposer comme première activité « se cacher soi-même » en pensant que le passage par le corps faciliterait la compréhension de la tâche, et comme deuxième activité « cacher la mascotte de la classe » pour que d'autres la trouvent. Suite aux analyses de situations, aux réponses proposées par les élèves, nous avons constaté qu'il est plus facile de « cacher la mascotte » que de « se cacher » car « se cacher » demande de prendre en compte le point de vue de l'autre, c'est-à-dire se décentrer, ce qui est encore difficile pour nombre d'élèves de cet âge.

2.2 *Second constat lié au second principe : « outils pour parler l'espace »*

Les élèves ont très peu d'outils, ils manquent de vocabulaire pour « parler » l'espace : ils désignent du doigt, utilisent spontanément les adverbes « *là* », « *ici* », sans utiliser les adverbes de position spatiale comme « *dessus, dessous, derrière, entre…* »



Figure 8. Parler l'espace : manque de vocabulaire.

2.3 *Les activités mises en œuvre pour travailler le point de vue et enrichir les représentations spatiales des élèves en TPS et PS*

Ranger la classe

Après avoir écouté la lecture de l'album *Lou et Mouf : faut tout ranger*, l'enseignante fait prendre conscience aux élèves du « bazar » de la classe. Les élèves commencent le rangement, accompagnés de l'enseignante qui verbalise leurs actions et les aide à prendre des repères dans la classe :

- identifier les différents espaces de la classe (le bac à véhicule, l'espace cuisine...) ;
- catégoriser (les voitures vont dans le bac à véhicules, les dinosaures dans le bac à animaux…) ;
- nommer (accompagnement langagier de l'enseignante très présent).



Figure 9. Ranger la classe.

Prolongement en MS : activité inspirée de (Brissiaud, 1994b).
Sur une feuille, différents objets sont représentés selon différents points de vue. Il est alors possible de mener différentes activités à partir de la fiche, comme : identifier l'objet, aller le chercher dans le bon espace.

Cacher la mascotte

La situation se déroule en différentes étapes autour du thème « cacher la mascotte ».

Dans un premier temps, l'enseignante cache la mascotte dans la classe, puis les élèves la cherchent. Une fois trouvée, l'enseignante photographie la cachette de la mascotte à l'aide d'une tablette numérique. La situation est répétée plusieurs fois afin d'expérimenter plusieurs cachettes et de les prendre en photo en présence des élèves.

Dans un second temps, l'enseignante affiche les différentes photographies des cachettes hors de la classe et demande aux élèves d'émettre des hypothèses sur les lieux représentés par les photos, cachettes potentielles de la mascotte. Elle cache à nouveau la mascotte dans l'une des cachettes maintenant identifiées. Le groupe classe part à sa recherche, en se référant aux hypothèses de départ.



Figure 10. Les cachettes de la mascotte.

Dans cette situation, l'enseignante amène les élèves, en contexte, à construire et utiliser des objets spatiaux de nature différente :

- **des produits spatiaux langagiers, à l'oral.** L'enseignante accompagne par le langage les actions des élèves, commente les situations vécues : elle apporte du vocabulaire pour nommer les objets, elle utilise des adverbes de position pour enrichir les compétences langagières des élèves. Les élèves commencent à émettre des hypothèses pour parler l'espace à partir d'un espace vécu.
- **des produits spatiaux figuratifs : les photos.** Les élèves utilisent un langage d'évocation en commentant les photographies, ils commencent à construire une pensée spatiale en émettant des hypothèses et commencent ainsi à organiser un espace vécu.

3 Premières observations, analyse et activités en MS-GS

Nous décrivons des activités mises en œuvre pour travailler le point de vue et enrichir les représentations spatiales des élèves en MS et GS.

Parler l'espace - MS

Les objectifs principaux de ces activités sont de parler l'espace et de construire les premières représentations spatiales à différentes échelles (maquette et parcours de motricité). Les activités se raccrochent à l'histoire de Pacha (culture commune construite par la lecture et la mise en scène de l'histoire).

			
Après avoir fabriqué un film d'animation montrant les souris qui se déplacent sur un parcours de la cuisine, les élèves, avec l'aide de la maitresse, utilisent un vocabulaire spatial adéquat. Ils construisent un premier produit spatial. Des difficultés apparaissent avec les termes « à l'intérieur » et « en dessous ».	Les élèves construisent un parcours « comme les souris » en salle de motricité. Ils se déplacent sur ce parcours et parlent leur déplacement. L'enseignante et les autres élèves de la classe continuent à construire un vocabulaire commun pour parler l'espace et les déplacements.	En classe, avec du matériel de la vie quotidienne trouvé dans une cuisine, les élèves construisent un parcours pour les souris. Ils déplacent les souris sur leur parcours et verbalisent les déplacements. Une confusion fréquente de vocabulaire apparait entre « sur » et « par-dessus ».	Après avoir construit un court parcours, un élève dicte à un autre le déplacement. Pour être compris, il devra utiliser les bons produits spatiaux : le bon vocabulaire.

Le jeu des boîtes – MS

L'objectif principal de cette activité est d'aider les élèves à prendre en compte le point de vue de l'autre. Les boîtes ont été construites en fonction des pièces de la maison. La mise en activité a un lien avec l'histoire du livre : les souris ne doivent pas être vues par le chat.

Les élèves ont une boîte avec quatre trous de couleurs différentes. Le but du jeu est de cacher la souris pour qu'on ne la voie pas à travers le trou bleu. L'enfant vérifie à chaque fois et comprend que pour être caché il faut prendre en compte le point de vue de celui qui le regarde.

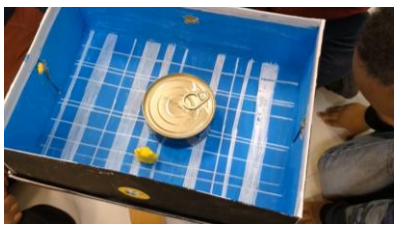


Figure 11. Le jeu des boîtes : cacher la souris.

Le jeu du photographe – GS

Cette activité est inspirée de l'atelier « Jeu du photographe » (Brissiaud, 1994b). L'objectif est d'adopter un point de vue et de décrire une image avec du vocabulaire spatial. C'est une activité « décrochée ».

Les élèves ont différentes photos de la cour. Dans la cour sont disposés des « appareils photos » (plot avec masque de visée). Les élèves doivent alors trouver à quel endroit s'est positionné le photographe pour prendre la photo.
Sous le plot a été déposée la photo-réponse (activité autocorrective).
Lorsque les élèves décrivent les photos ils prendront conscience des différents plans d'une photo. Même si l'on voit un toboggan sur deux photos, elles ne sont pas forcément prises du même endroit. Il faudra alors discuter des autres éléments de la photo par rapport au toboggan et de « l'éloignement » de celui-ci par rapport au photographe, par exemple.



Figure 12. Le jeu du photographe.

Construire le village des souris - GS

L'objectif est de construire un produit spatial (maquette) en verbalisant les étapes de construction. Les élèves devront aussi opérer des corrections en fonction des propositions des autres élèves.

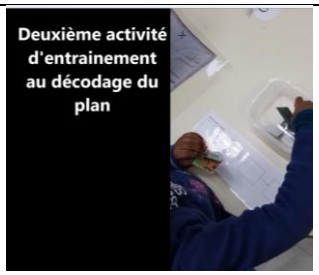
A partir du poster du village, les élèves construiront le village des souris. Les maisons pourront être construites avec des cubes ou des boîtes de médicaments.

Pour les élèves les plus en difficulté, les premières maquettes devront être proches de la réalité (par exemple : coller des photocopies des éléments sur du rouleau de papier toilette pour garder la verticalité).

Déplacer la souris dans le potager et tracer le chemin des souris – GS

L'objectif principal est de comparer des produits spatiaux afin de les comprendre et d'en comprendre les représentations.

			
Les élèves construisent une maquette du potager avec des Kaplas, des cubes et d'autres objets de la classe utiles, tels que la boîte à mouchoirs pour la serre. Avec l'aide de la maîtresse, ils font correspondre chaque élément de la maquette à celui du poster (vérification collective ou par groupe). La maquette devient un produit spatial de référence dont chaque élément est reconnu de tous.	Un élève ou la maîtresse dicte un déplacement à un élève qui doit l'effectuer dans la maquette du potager. Les élèves doivent bien repérer les éléments et utiliser un vocabulaire de déplacement correct.	Après avoir comparé la maquette du potager avec un plan du potager, un élève dessine un chemin sur le plan pour le dicter aux autres. C'est la première fois qu'ils rencontrent ce produit spatial. Ils doivent comprendre que c'est une représentation du potager, au même titre que la photographie ou la maquette, mais avec un codage différent et une vue de dessus. De nombreux élèves, lors de la dictée du déplacement dans le plan, ne nomment pas les éléments du potager mais les figures géométriques : « Tourne au carré, traits, là… ».	

		
Même situation que la précédente, sauf que la situation se prête davantage à comprendre la vue de dessus. En effet, un oiseau porte Têtenlère sur son dos pour le ramener au village et lui donne un plan pour lui indiquer le trajet. Les élèves doivent comparer les deux représentations et placer sur le plan des formes qui leur permettront de mémoriser des éléments du trajet. La forme « disque » posera problème. Les élèves comprendront à force de comparaison que c'est un arbre car, vu de haut, « un arbre c'est rond. »		Ces activités sont des entrainements au codage et décodage d'un plan. Elles sont inspirées de situations de (Brissiaud, 1994b). Première activité : un élève trace un chemin passant par quatre lieux sur le plan. Le deuxième élève devra, sur la matrice des chemins, coller les quatre images correspondantes. Deuxième activité : situation inverse. Sur la matrice des chemins, un élève place quatre lieux dessinés. Un autre devra dessiner le chemin sur le plan.

V - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'accueil, par les participants de l'atelier, de nos propositions, tant théoriques que didactiques, a conforté nos hypothèses de travail et l'intérêt de poursuivre notre recherche concernant :

- la nécessité de réfléchir des « trajectoires locales » (Pêcheux, 1990, p.30) pour concevoir l'apprentissage de l'espace chez l'enfant, d'où la perspective d'envisager de nouvelles expérimentations dans les classes, dans des directions complémentaires, à partir des éléments théoriques apportés, et les propositions d'autres collègues. L'équipe du CREM, qui a proposé une communication au colloque (Guissard et Lambrecht, 2019), a apporté une approche différente et complémentaire de l'apprentissage de la structuration de l'espace.
- la formation des enseignants : l'intérêt d'une démarche qui articule des mises en situations, apports théoriques et présentations d'expérimentations conduites dans les classes des différents niveaux concernés, à partir de documents filmés.

Comme perspective théorique, Batton propose de réfléchir sur l'outil suivant inspiré du tableau sur le calcul mental de la COPIRELEM (2012), construit sur un exemple :

Procédures : fonctionnement cognitif / Productions à construire ou à utiliser	Expérience effective, « mémoire spatiale » et « produits spatiaux » : actions matérielles	Pensée spatiale : actions mentales ou déplacements mentaux
Produit langagier	Ex : décrire un chemin en le parcourant	Ex : décrire un chemin en regardant un film, décrire un chemine de mémoire ou décrire un chemin d'après une représentation codée

Représentation 3D	Ex : construire une maquette comme premier modèle d'un espace ou d'une structure ex : se déplacer autour d'une maquette pour la voir sous différents points de vue ou déplacer des objets à l'intérieur	Ex : construire mentalement une maquette ex : s'y déplacer mentalement pour avoir différents points de vue ou y déplacer mentalement des objets
Représentation 2D -figurative -abstraite (modélisée, symbolique)	Photo, dessin ou figure codée	images mentales planes

Le travail présenté lors de l'atelier est le fruit de deux ans d'action-recherche. Il n'a pas vocation à être modélisant mais vise à fournir aux enseignants et aux formateurs des outils qui vont être mis en ligne sur le site de la DSDEN 95[82] : un rappel des concepts, des principes; des scénarios d'enseignement illustrés par des micro-vidéos; des activités complémentaires (albums, arts plastiques, motricité…).

Le groupe travaille actuellement à l'élaboration d'un parcours hybride présentant ces outils.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Boule, F. (1985). *Manipuler, organiser, représenter, prélude aux mathématiques*. A. Colin.

Brissiaud, R. (1994a). *J'apprends les maths* GS, *Livre du maître*, Retz.

Brissiaud, R. (1994b). *La mallette de Géom.* Retz.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire, L'étude de l'espace et de la géométrie. Conférence publiée dans les *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques*, Rethymon (Grèce).

COPIRELEM (2012). *Calcul mental à l'école primaire*. Collection Ressources et formation. ARPEME : Paris, 2012.

Emprin, F. et Rajain, C. (2004). *Apprendre à (se) représenter l'espace*. AIS Adapter les pratiques Intégrer les élèves, SCEREN, CRDP Champagne Ardennes.

Guissard, M.-F. et Lambrecht, P. (2019). Math & Manips : favoriser l'apprentissage de l'organisation spatiale par la manipulation à l'école maternelle. *Actes du 45ème colloque de la Copirelem*, *Blois,* IREM Centre Val de Loire.

MEN (2015). B.O. spécial n°2 du 26 mars 2015, Programme de l'enseignement de l'école maternelle.

Pêcheux, M.-G. (1990). *Le développement de la structuration de l'espace chez l'enfant*. Nathan Université.

Piaget, J. (1964). *La pensée du jeune enfant, Six études de psychologie*. Folio, Essais, Gallimard.

[82]DSDEN 95 pédagogie maternelle : http://www.ac-versailles.fr/dsden95/pid37119/ecole-maternelle.html, consulté en mars 2019.

VII - ANNEXE 1 : FICHE DE PRÉPARATION « C'EST DANS LA BOITE »

Activité : encodage – décodage

Principes travaillés :

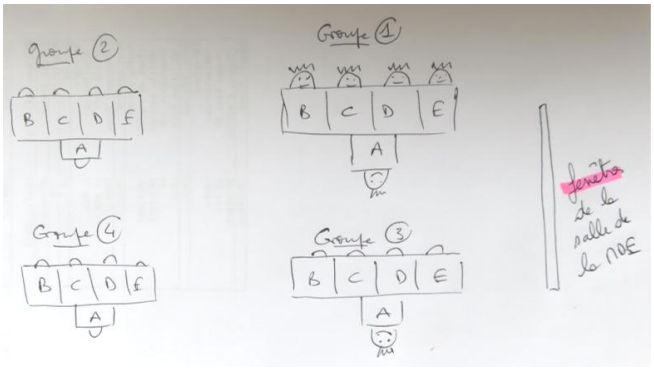
- utiliser différents **points de vue** pour décrire un assemblage de cubes orienté
- utiliser des **produits spatiaux** pour communiquer, décrire : représentation par dessin (on dessine ce que l'on voit)
- lire des représentations, des dessins : **adopter le point de vue** de celui qui encode pour construire à son tour

But du jeu :

- dessiner des vues d'un assemblage (joueur A) ;
- construire à partir d'un dessin le même assemblage de 10 cubes que celui caché dans une boite (joueurs B-C-D-E)

Mise en œuvre :

- nombre de joueurs par équipe : 5 (A-B-C-D-E).
- A est dessinateur, B, C et D, E sont deux équipes de constructeurs. Le joueur A est placé face aux deux équipes de joueurs B-C/ D-E
- matériel : 30 cubes par équipe de 5 joueurs (chaque cube est constitué de deux facesbleues, deux faces rouges et deux faces jaunes, opposées deux à deux), une boite en carton sur laquelle on aura découpé deux ouvertures, 3 feutres de couleur (Bleu, rouge, jaune)



Matériel :

- 12 boites découpées
- 360 cubes (extraits de boites de jeux STRUCTURO)
- 36 feutres ou crayons de couleur : 12 bleus, 12 jaunes, 12 rouges

Mise en situation :

1- Présenter le jeu et la position des cubes à partir d'un exemple que l'on gardera comme référence ensuite sur la table.



2- *« Dans une boite, j'ai caché un assemblage de 10 cubes. Tous les cubes de l'assemblage sont positionnés de la manière suivante pour la personne qui regarde dans la boite : la face visible bleue est face à elle, la face visible rouge est du côté des fenêtres de la salle, et la face visible jaune est parallèle au plafond. Deux cubes se touchent toujours par une face ».*

Le placement des joueurs en face à face va demander aux récepteurs de prendre en compte le point de vue de A quand il a dessiné. Pour la construction des assemblages des cubes, l'orientation des faces ne sera plus la même (rotation de 180°). La face rouge risque de poser problème.

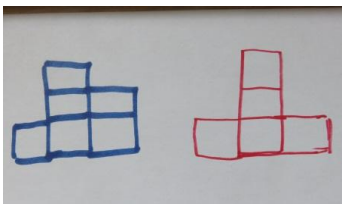
3- Présenter le déroulement et le but du jeu

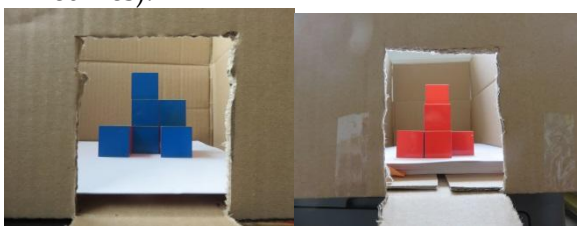


« Vous allez vous répartir en groupes de cinq : deux équipes de deux (B-C et D-E) et un joueur seul (A).

- ***A** regardera par les fenêtres de la boite et dessinera en deux exemplaires ce qu'il voit puis donnera un dessin à chacune des équipes B-C et D-E.*
- *Les équipes B-C et D-E construiront un assemblage de cubes à partir des informations reçues. Il est important de ne pas regarder la production de l'équipe voisine. ».*

4- **A regarde par les deux fenêtres du carton** (face à lui, du côté de la fenêtre) et **dessine** ses deux vues sur une même feuille, en deux exemplaires (deux feuilles).

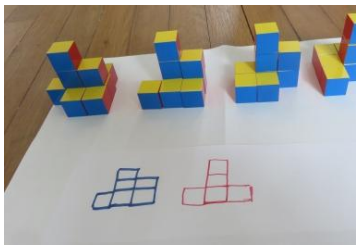




5- **C et D-E construisent un assemblage à partir de la feuille reçue** avec les deux vues.

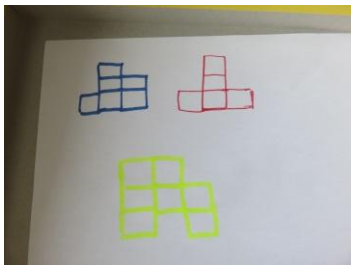
On compare les constructions des deux binômes d'un même groupe puis de l'ensemble des binômes de la salle (soit 8 constructions) **sans ouvrir les boites**.

On constate : Les constructions ne sont pas toutes identiques.



- On vérifie que toutes les constructions correspondent aux vues dessinées.
- On se pose la question, pourquoi il y a des différences ?
- Il y a plusieurs possibilités conformes aux vues.
- Si l'on veut construire un seul et même assemblage, il manque une vue, la vue de dessus (la vue jaune).

6- A reprend la feuille et **ajoute le dessin de la vue de dessus**.

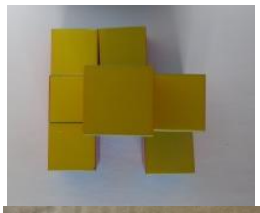


Puis il redonne la feuille à B-C/ D-E qui **construisent** à partir de la nouvelle information.

Dans chaque groupe, on **compare** les constructions de B-C et D-E à celle de A cachée dans la boité.

Normalement, les constructions et le modèle sont identiques. S'il y a des différences, chercher et analyser les erreurs.

7- **Mise en commun :** faire verbaliser les procédures, les difficultés de lecture, de construction.









- *orientation des cubes- prendre des repères fixes dans la salle qui vont aider au repérage pendant la tâche et devenir des repères communs pour communiquer. Toutes les équipes ont été placées dans la même position, les repères (fenêtres…) sont donc communs Ces repères communs ne sont pas nécessaires pour résoudre la tâche, mais ils facilitent la résolution puis permettent la communication ;*
- *adapter son regard (adopter le point de vue de celui qui a construit) ;*
- *transposer le dessin à la construction (dessin à plat, en 2 D, construction en 3D – passage qui peut poser problème), et changement d'orientation du dessin.*

Au niveau de l'espace, qu'a-t-on abordé ?

- *les différents points de vue sur les objets : de face, de côté, de dessus ;*
- *l'orientation du dispositif (les joueurs face à face, la position de la boite, l'orientation du dessin) par rapport à des repères fixes (la fenêtre-le plafond) ;*
- *les points de vue des différents joueurs selon leur position (relative) par rapport à l'objet, position différente pour le dessinateur et les constructeurs ;*
- *la représentation par le dessin, un outil pour décrire l'espace.*

8 - Reprendre une nouvelle situation de jeu, en changeant de A (si le temps le permet)

A construit librement avec 10 cubes, dessine les trois vues et donne à B-C/D-E qui construisent à leur tour. Nouveaux échanges.

VIII - ANNEXE 2 : FICHE DE PRÉPARATION « PEKIN EXPRESS »

Activité : Faire émerger les obstacles au déplacement à l'aide d'un message oral.
Principes travaillés :

- Se construire des **points de vue** grâce au langage : en haut, en bas, à gauche, à droite, à côté, au-dessus, au-dessous, entre, devant, derrière, deuxième, troisième, rectangle… (principe 1)
- **Concevoir l'espace, construire une pensée spatiale :** Parler l'espace selon les positions (absolues, relatives, orientation, déplacement). (Principe 1)
- **Accéder à des produits spatiaux.** Repérer un chemin dans une ville inconnue sur une représentation en deux dimensions en utilisant un vocabulaire spatial. (Principe 2)

But du jeu : se repérer sur le plan circulaire d'une ville inconnue.
Mise en œuvre : nombre de joueurs par équipe 5 (1 meneur et 4 participants).
Matériel : des plans circulaires plastifiés d'un quartier de la ville de Pékin sans repère symbolique connu des participants. (format A3).

- Le meneur dispose d'un plan circulaire de la ville contenant un point rouge (départ) et un point vert (arrivée).
  N.B. : Plusieurs plans de meneur sont à prévoir pour pouvoir rejouer une seconde partie avec un autre meneur.
- Les 4 participants disposent d'un plan de la ville contenant un point rouge (départ) uniquement.
- Des feutres effaçables (un par participant).



Plan d'un quartier de PEKIN

Mise en situation

1. Distribution des plans

Consigne : « *Dans votre groupe de cinq, choisissez celui qui sera le meneur du groupe et celui qui écrira les instructions du meneur. Les trois autres participants auront à construire le trajet.*
Nous allons vous distribuer le plan d'un quartier de la ville de Pékin. »
Distribution des plans :
- Un plan avec un point rouge et vert pour le meneur.
- Des plans avec un point rouge pour chaque participant.

Attention ! Veillez à ce que les participants ne visualisent pas le plan du meneur.
Remarque pour les formateurs : *les outils de repérage ont volontairement été supprimés.*

2. Présenter le déroulement et le but du jeu

Consignes :
Pour le meneur : « *Tu vas tenter de mener ton équipe du point rouge au point vert en les accompagnant uniquement par le langage oral. Tu traceras ce trajet sur ton plan.*»
Pour le secrétaire *: « Tu noteras mot à mot les instructions du meneur pour en garder une trace.* »
Pour les autres participants : « *Le meneur doit vous conduire du point rouge (départ) au point d'arrivée connu de lui seul. A l'aide du feutre, vous tracerez sur votre plan, au fur et à mesure des instructions, le chemin indiqué par le meneur. Aucune question n'est permise sauf pour faire répéter une consigne.* »
Remarque pour le formateur : on s'attachera à repérer et noter le vocabulaire utilisé, vocabulaire quotidien (lac, étang, jardin, parc …), lexique spatial (en haut, en bas, à gauche, à droite, à côté, au-dessus, en-dessous, entre, devant, derrière, perpendiculaire, première, deuxième, troisième, rectangle…)

3. Comparaison au sein de chaque équipe

Au bout de 5 minutes environ les participants comparent les trajets et commentent les façons de se diriger sur le plan et tentent de se mettre d'accord en se référant à la transcription du trajet.
Remarque pour les formateurs :
on vérifiera que chacun des trajets est conforme à la transcription (premier niveau de validation)
Ensuite seulement le meneur dévoile son plan.
Remarque pour les formateurs : on vérifiera alors la conformité de la description du trajet au trajet initialement choisi (deuxième niveau de validation)

4. Mise en commun

En grand groupe, faire verbaliser :
- les difficultés rencontrées,
- les réussites ;
- les procédures.

- Faire émerger les obstacles au déplacement à l'aide d'un message oral.
- Parler des difficultés à se repérer sur une représentation en deux dimensions sans repère fixe (familier).
- Faire prendre conscience de la nature de l'accompagnement langagier nécessaire pour parler l'espace (quotidien, spatial précis..).
- Faire comprendre les repères, les codages utilisés pour se repérer et se déplacer sur le plan
- Verbaliser les positions et les déplacements choisis.

5. Rejouer en changeant le meneur (si possible)

Chaque équipe choisit un nouveau meneur et un nouveau secrétaire.
Prendre un nouveau plan de meneur avec de nouveaux points de repères de départ et d'arrivée.

IX - ANNEXE 3 : FICHE DE PRÉPARATION PLAN DU QUARTIER DE L'ESPE DE BLOIS

Activité : Produire un produit spatial – dessiner le quartier
Principes travaillés :

- Construire une représentation spatiale (plan) de l'espace vécu (méso) dans le micro-espace devenant « un modèle pour tous les espaces possibles »
- Pratiquer des tâches-clé (se situer, se repérer) dans l'espace vécu (méso), dans le petit espace (micro), et articulées lors d'allers et retour entre des problèmes posés dans ces différents d'espaces (tailles différentes, vécus ou représentés).
- Utiliser des **produits spatiaux**pour communiquer, décrire : représenter un plan d'un espace vécu (méso-espace) par un dessin (micro-espace) pour être compris de tous et être le plus proche de la réalité.

But du jeu :

- Dessinerle plan de Blois avec l'ESPE
- Comparer les différents plans produits
- Faire émerger les principes de construction pour prendre conscience des enjeux de cette activité.

Mise en œuvre : individuelle puis collective pour la comparaison.
Matériel :

- Feuille et crayon
- Les vues par différentes fenêtres de l'ESPE.

Mise en situation :

1. Demander à chacun de construire le plan de Blois avec l'ESPE.
   Pour ceux qui ne connaissent pas, ils peuvent se déplacer dans la salle, voire dans la salle d'à côté si cela leur semble nécessaire.
   Ce travail est à **faire individuellement**.
   Pendant ce temps-là le formateur observe les productions et prend des indices pour la mise en commun : sur les productions et réflexions de chacun (ex : où s'arrête le quartier, la forme de l'ESPE : rectangle, T, U…, la distance entre les différents constituants du plan, nécessité d'écrire des mots, les participants dessinent-ils des objets mobiles, tels que les voitures, dessinent-ils des arbres, pourquoi ?)
2. **Mise en commun** : Questionner les participants pour faire émerger les principes de production.
   Comment vous y êtes-vous pris ?
   Par où avez-vous commencez ?
   Vos constituants du plan se ressemblent-ils ? Pourquoi ? Quelles sont les différences ?
   Est-on dans le même espace lorsqu'on parle du quartier et de son plan ? Quelles vont être alors les difficultés pour la représentation ?
   …
   Comparaison des productions pour faire émerger les enjeux de la construction du plan.
   a. L'expérience et la connaissance des lieux. Selon l'expérience l'ESPE ne sera pas dessinée au même endroit (centre ou non de la feuille). Si c'est une expérience à partir d'un trajet, l'ESPE seraprobablement soit au début du trajet représenté, soit à la fin. Si les personnes connaissent le quartier, elle sera probablement au centre.
   b. « Séquençage » de l'espace vécu pour le représenter sur une feuille donnant une vue globale du « tout » en une fois.
   c. Utilisation d'objets géométriques identiques (rectangle pour les bâtiments, droites ou courbes pour les routes…). Connaissances « scolaire » car on sait qu'un plan est une vue du **dessus** du quartier. Il n'a pas été utile de le préciser dans la consigne. Souvent l'ESPE sera représentée par un rectangle unique, or elle ne l'est pas.
3. Comparer avec un vrai plan– facultatif

X - ANNEXE 4 : EXTRAITS DES PROGRAMMES DE L'ÉCOLE MATERNELLE CONCERNANT LA STRUCTURATION DE L'ESPACE (2015)

Le domaine « Mobiliser le langage dans toutes ses dimensions » réaffirme la place primordiale du langage à l'école maternelle comme condition essentielle de la réussite de toutes et de tous. La stimulation et la structuration du langage oral d'une part, l'entrée progressive dans la culture de l'écrit d'autre part, constituent des priorités de l'école maternelle et concernent l'ensemble des domaines.

Les domaines « Agir, s'exprimer, comprendre à travers l'activité physique » ; « Agir, s'exprimer, comprendre à travers les activités artistiques » permettent de développer les interactions entre l'action, les sensations, l'imaginaire, la sensibilité et la pensée.

Les domaines « Construire les premiers outils pour structurer sa pensée » et « Explorer le monde » s'attachent à développer une première compréhension de l'environnement des enfants et à susciter leur questionnement. En s'appuyant sur des connaissances initiales liées à leur vécu, l'école maternelle met en place un parcours qui leur permet d'ordonner le monde qui les entoure, d'accéder à des représentations usuelles et à des savoirs que l'école élémentaire enrichira.

4. Construire les premiers outils pour structurer sa pensée

4.2. Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées

Très tôt, les jeunes enfants discernent intuitivement des formes (carré, triangle...) et des grandeurs (longueur, contenance, masse, aire...). À l'école maternelle, ils construisent des connaissances et des repères sur quelques formes et grandeurs. L'approche des formes planes, des objets de l'espace, des grandeurs, se fait par la manipulation et la coordination d'actions sur des objets. Cette approche est soutenue par le langage : il permet de décrire ces objets et ces actions et favorise l'identification de premières caractéristiques descriptives. Ces connaissances qui resteront limitées constituent une première approche de la géométrie et de la mesure qui seront enseignées aux cycles 2 et 3.

4.2.1. Objectifs visés et éléments de progressivité

Très tôt, les enfants regroupent les objets, soit en fonction de leur aspect, soit en fonction de leur utilisation familière ou de leurs effets. À l'école, ils sont incités à « mettre ensemble ce qui va ensemble » pour comprendre que tout objet peut appartenir à plusieurs catégories et que certains objets ne peuvent pas appartenir à celles-ci.

Par des observations, des comparaisons, des tris, les enfants sont amenés à mieux distinguer différents types de critères : forme, longueur, masse, contenance essentiellement. Ils apprennent progressivement à reconnaître, distinguer des solides puis des formes planes. Ils commencent à appréhender la notion d'alignement qu'ils peuvent aussi expérimenter dans les séances d'activités physiques. L'enseignant est attentif au fait que l'appréhension des formes planes est plus abstraite que celle des solides et que certains termes prêtent à confusion (carré/cube).

L'enseignant utilise un vocabulaire précis (cube, boule, pyramide, cylindre, carré, rectangle, triangle, cercle ou disque (à préférer à « rond ») que les enfants sont entraînés ainsi à comprendre d'abord puis à utiliser à bon escient, mais la manipulation du vocabulaire mathématique n'est pas un objectif de l'école maternelle.

Par ailleurs, dès la petite section, les enfants sont invités à organiser des suites d'objets en fonction de critères de formes et de couleurs ; les premiers algorithmes qui leur sont proposés sont simples. Dans les années suivantes, progressivement, ils sont amenés à reconnaître un rythme dans une suite organisée et à continuer cette suite, à inventer des « rythmes » de plus en plus compliqués, à compléter des manques dans une suite organisée.

4.2.2. Ce qui est attendu des enfants en fin d'école maternelle

- Classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme. Savoir nommer quelques formes planes (carré, triangle, cercle ou disque, rectangle) et reconnaître quelques solides (cube, pyramide, boule, cylindre).
- Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance.
- Reproduire un assemblage à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides).
- Reproduire, dessiner des formes planes.
- Identifier le principe d'organisation d'un algorithme et poursuivre son application.

5. Explorer le monde

5.1. Se repérer dans le temps et l'espace

Dès leur naissance, par leurs activités exploratoires, les enfants perçoivent intuitivement certaines dimensions spatiales et temporelles de leur environnement immédiat. Ces perceptions leur permettent d'acquérir, au sein de leurs milieux de vie, une première série de repères, de développer des attentes et des souvenirs d'un passé récent. Ces connaissances demeurent toutefois implicites et limitées. L'un des objectifs de l'école maternelle est précisément de les amener progressivement à considérer le temps et l'espace comme des dimensions relativement indépendantes des activités en cours, et à commencer à les traiter comme telles. Elle cherche également à les amener à dépasser peu à peu leur propre point de vue et à adopter celui d'autrui.

5.1.1. Objectifs visés et éléments de progressivité

L'espace

Faire l'expérience de l'espace

L'expérience de l'espace porte sur l'acquisition de connaissances liées aux déplacements, aux distances et aux repères spatiaux élaborés par les enfants au cours de leurs activités. L'enseignant crée les conditions d'une accumulation d'expériences assorties de prises de repères sur l'espace en permettant aux enfants de l'explorer, de le parcourir, d'observer les positions d'éléments fixes ou mobiles, les déplacements de leurs pairs, d'anticiper progressivement leurs propres itinéraires au travers d'échanges langagiers. L'enseignant favorise ainsi l'organisation de repères que chacun élabore, par l'action et par le langage, à partir de son propre corps afin d'en construire progressivement une image orientée.

Représenter l'espace

Par l'utilisation et la production de représentations diverses (photos, maquettes, dessins, plans...) et également par les échanges langagiers avec leurs camarades et les adultes, les enfants apprennent à restituer leurs déplacements et à en effectuer à partir de consignes orales comprises et mémorisées. Ils établissent alors les relations entre leurs déplacements et les représentations de ceux-ci. Le passage aux représentations planes par le biais du dessin les amène à commencer à mettre intuitivement en relation des perceptions en trois dimensions et des codages en deux dimensions faisant appel à certaines formes géométriques (rectangles, carrés, triangles, cercles). Ces mises en relations seront plus précisément étudiées à l'école élémentaire, mais elles peuvent déjà être utilisées pour coder des déplacements ou des représentations spatiales. De plus, les dessins, comme les textes présentés sur des pages ou les productions graphiques, initient les enfants à se repérer et à s'orienter dans un espace à deux dimensions, celui de la page mais aussi celui des cahiers et des livres.

Découvrir différents milieux

L'enseignant conduit les enfants de l'observation de l'environnement proche (la classe, l'école, le quartier...) à la découverte d'espaces moins familiers (campagne, ville, mer, montagne...). L'observation des constructions humaines (maisons, commerces, monuments, routes, ponts...) relève du même cheminement. Pour les plus grands, une première approche du paysage comme milieu marqué par l'activité humaine devient possible. Ces situations sont autant d'occasions de se questionner, de produire

des images (l'appareil photographique numérique est un auxiliaire pertinent), de rechercher des informations, grâce à la médiation du maître, dans des documentaires, sur des sites Internet. Cette exploration des milieux permet aussi une initiation concrète à une attitude responsable (respect des lieux, de la vie, connaissance de l'impact de certains comportements sur l'environnement...).

À partir des expériences vécues à l'école et en dehors de celle-ci par les enfants de la classe et des occasions qu'il provoque, l'enseignant favorise également une première découverte de pays et de cultures pour les ouvrir à la diversité du monde. Cette découverte peut se faire en lien avec une première sensibilisation à la pluralité des langues.

5.1.2. Ce qui est attendu des enfants en fin d'école maternelle

…- Situer des objets par rapport à soi, entre eux, par rapport à des objets repères.

- Se situer par rapport à d'autres, par rapport à des objets repères.

- Dans un environnement bien connu, réaliser un trajet, un parcours à partir de sa représentation (dessin ou codage).

- Élaborer des premiers essais de représentation plane, communicables (construction d'un code commun).

- Orienter et utiliser correctement une feuille de papier, un livre ou un autre support d'écrit, en fonction de consignes, d'un but ou d'un projet précis.

- Utiliser des marqueurs spatiaux adaptés (devant, derrière, droite, gauche, dessus, dessous...) dans des récits, descriptions ou explications

XI - ANNEXE 5 : ÉLEMENTS THÉORIQUES (DANS L'ORDRE D'APPARITION)

Les différents niveaux de représentations spatiales, Liben

Extraits de (Pêcheux, 1990), p. 22-23.

Au cours de la résolution d'un problème spatial, perception, représentation, opérations spatiales interagissent constamment.

> *Des mécanismes et des stratégies différentes peuvent mener à des performances identiques, et ce qui est obtenu, à un niveau de développement donné, par l'organisation laborieuse d'opérations de morcellement sera à un autre niveau joyeusement maîtrisé d'un seul coup d'œil. Une modification apparemment minime de la situation – par exemple la possibilité de corriger une première réponse – peut entraîner une performance très différente. Et le concept de représentation, central dans le domaine de l'espace, se révèle regrouper des mécanismes extrêmement divers. (…) Il paraît impossible d'établir une trajectoire caractérisée par l'utilisation successive d'un certain nombre de mécanismes.*
>
> *Produits spatiaux, pensée spatiale et mémoire spatiale*
> *Introduisant un symposium sur « Représentation spatiales et comportements spatiaux tout au long de la vie », Liben (1981) propose de distinguer trois types de représentations spatiales, avec deux contenus possibles, et cette classification éclaire d'un jour nouveau une controverse fort embrouillée, où la notion de représentation spatiale avait tendance à se diluer jusqu'à ne plus rien vouloir dire.*
> *Pour ce qui est des types de représentation spatiale, Liben considère séparément les « produits spatiaux », la « pensée spatiale » et la « mémoire spatiale » :*
>
> *- Type 1 : par **produits spatiaux** Liben désigne toutes les productions qui mettent en jeu des relations spatiales : cartes, dessins (Freeman, 1981), maquettes, mais également descriptions verbales (Clark, 1973 ; Vion, 1978). Dans ce cas l'étude de tous les mécanismes (moteurs, linguistiques, sociaux) qui interviennent dans cette externalisation de l'image sont de toute première importance. Chez l'enfant le*

développement du contrôle moteur, et l'acquisition de conventions représentatives, par exemple, interviennent massivement dans la manière dont il élabore des « produits spatiaux ».

- Type 2 : sous le terme de ***pensée spatiale*** *Liben regroupe toutes les activités mentales portant sur des contenus spatiaux. Ce qui importe ici, c'est le travail de transformation qui est opéré mentalement sur les données, par exemple lorsqu'il s'agit d'anticiper les résultats d'un découpage dans un papier plié (cf épreuve 24 de Thurstone, Fig.3), ou de juger de l'identité de deux configurations éventuellement superposables par rotation (Shepard, 1978 ; Marmor, 1977).*

- Type 3 : la ***mémoire spatiale*** *s'oppose à la pensée spatiale en ce quelle constitue un savoir implicite, qui peut être mis en œuvre en dehors de toute réflexion sur cette connaissance. Ainsi on peut parler de mémoire spatiale chez l'animal (Olton, 1979). S'il y a prise de conscience, réflexion, travail mental sur cette information stockée en mémoire, on passe au type 2 de représentation.*

Cette distinction en trois classes de comportements montre bien que le terme de « représentation spatiale » est un terme générique : on peut considérer qu'un blaireau, rentrant à son gîte, fait preuve de mémoire spatiale, ce qui n'implique pas qu'il puisse élaborer une carte du chemin ni opérer mentalement sur les contenus de cette mémoire spatiale.

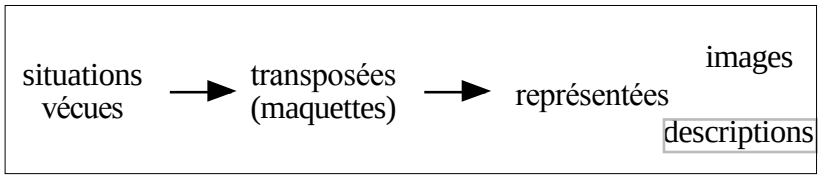
Situations vécue, transposée, représentée

Extraits de (Boule, 1985)

De ce qui précède résulte un ordre en ce qui concerne les modes de présentations relatifs à une notion donnée. La situation la plus aisément saisie est celle qui fait intervenir physiquement les enfants, leur position dans un espace défini, leurs mouvements. Par la suite, il est intéressant de faire intervenir une décentration qui reste en rapport étroit avec la situation vécue, par le moyen d'une maquette, par exemple, ou de poupées. À la fin, on fait appel à des représentations externes construites par les enfants eux-mêmes, soit imagées (dessin), soit verbales (description). Mais il doit être évident qu'on introduit là deux difficultés majeures :

- *la première parce que cette modalité nécessite de leur part une représentation interne bien construite,*
- *la seconde parce qu'on fait appel à des capacités graphiques ou verbales on peut avoir une représentation mentale claire et distincte et être néanmoins malhabile à la dessiner ou la décrire.*

C'est pourquoi on devra veiller à réduire les handicaps graphiques (en proposant des éléments déjà découpés à assembler, par exemple) ou verbaux (en introduisant très progressivement les mots qui pourraient être mal maîtrisés).



Bien entendu toutes les situations ne se prêtent pas au déroulement complet de ce schéma.

Espace concret, espace abstrait

Extrait de (Pêcheux,1990, p.24-25)

Dans la solution mise au point pour un problème particulier, la part doit être faite de ce qui est spécifique à cette situation et de ce qui en est abstrait et peut être transféré à une autre situation. … En première analyse, la classification proposée par Liben ne permet pas plus que les autres approches de tracer cette trajectoire du développement de la maitrise de l'espace au cours de l'enfance, qui nous échappe toujours. Mais en proposant des distinctions à l'intérieur de la notion générique de « représentation spatiale », elle permet peut-être de mieux s'interroger sur tout ce qui vient informer, structurer et donner sens à ces différents types de représentation.

…(signification parasite, signification symbolique…exemple T couché sur le ballon ou sériation impossible pour cause de fratrie, dissociation entre caractéristique géométrique et signification symbolique)

Sans doute le raisonnement géométrique abstrait constitue-t-il un outils puissant, utilisable dans maintes situations concrètes. Mais peut-on considérer qu'il se conquiert par éliminations de significations parasites.

Plus que d'éliminations c'est d'étayage qu'il faudrait parler. Peut-être la trajectoire qui aboutit à la maitrise du raisonnement hypothético-déductif sur des données spatiales est-elle l'histoire de ces étayages et de ces dissociations.

Trois « conceptions » d'espace G. Brousseau, repris par R.Brissiaud)

Extraits de (Brissiaud, 1994a).

[L'enfant] « n'a pas du tout les mêmes expériences perceptives et motrices suivant les dimensions de l'espace dans lequel il agit. »

- le micro-espace

Dans « le tout petit espace » d'une feuille de papier par exemple, il dispose d'une vue globale et « unifiante » qui lui permet de considérer simultanément le tout et ses parties.

Dès lors, il peut agir (par exemple colorier, dessiner, écrire …) en tenant compte de la structure d'ensemble. Il peut ainsi relier deux points éloignés tout en contournant des objets-obstacles ou apprendre à se déplacer dans un labyrinthe en anticipant les impasses et en testant des hypothèses sur des portions de parcours, etc.

*Dans ce **micro-espace** l'enfant peut apprendre à coordonner des points de vue successifs et locaux avec un point de vue global et simultané.*

- le méso-espace

*Par contre, dans un espace bien plus grand, comme l'école ou le quartier, chaque endroit est nécessairement perçu de manière isolé. De chacun, l'enfant forme une sorte de tableau, plus ou moins riche de détails, agencés d'après le point de vue de la perception ordinaire, c'est-à-dire de face. En outre, quand ces divers tableaux sont liés entre eux, ils le sont sous forme de « séquences » qui se suivent dans l'ordre des parcours réellement effectués. Ces divers endroits sont perçus et mémorisés en s'enchainant de manière séquentielle. » Du coup, des anticipations du même ordre que dans le labyrinthe du « tout petit espace » ne sont plus possibles. Par exemple, si un trajet donné n'a été parcouru que dans un sens, il est fréquent que l'enfant ne sache pas le parcourir en sens inverse. Par exemple encore, il est extrêmement difficile à un jeune enfant de prévoir que s'il tourne successivement quatre fois à droite dans un quartier ou les rues se croisent à la manière d'un quadrillage, il se retrouvera à son point de départ. Pour prévoir ce phénomène, il devrait construire une carte mentale de ce quartier, c'est-à-dire adopter un point de vue virtuel de cet espace, celui d'un observateur situé « en l'air » et qui se donne une vue schématique du pâté de maison (en le ramenant à un quadrilatère) ou du quartier (en le pensant comme un quadrillage). Faute de ce type de reconstruction mental, dans ce **méso-espace**, l'enfant n'a que des expériences perceptives et motrices locales et successives. Il ne dispose pas d'un point de vue unifiant qui lui permettrait de les coordonner dans une représentation du tout.*

- le macro-espace

Enfin, s'agissant d'espaces bien plus grands encore, l'enfant n'en a aucune expérience perceptive et motrice. Ou bien s'il se déplace vraiment, faute d'une représentation adéquate de l'inclusion des espaces, il ne peut relier l'expérience de ce macro-espace à celui de son cadre de vie. Il y a ainsi tout un monde entre un trajet perçu par l'enfant qui voyage en train et ce même trajet représenté sur la carte de France, beaucoup plus qu'entre le schéma d'un objet et l'objet lui-même. Quand l'adulte montre un point sur la carte de la météo et dit : « Mamie est là, elle aura beau temps demain », le jeune enfant, qui pourtant va fréquemment chez sa grand-mère en vacances reste perplexe. Tant qu'il n'a pas compris cette carte comme une représentation miniaturisée et schématisé de la réalité, il n'y a pas de raison qu'il accepte de situer sa grand-mère en un point de l'écran de télévision où elle n'apparait pas. L'enfant ne peut accéder au macro-espace qu'à mesure qu'il s'en approprie les représentations culturelles.

Macro, meso, micro-espaces

Extraits de (Brousseau, 2000)

Le jeu des variantes et des variables de la situation fondamentale de l'espace permet de déterminer au moins trois "conceptions" de l'espace et par conséquent trois "milieux" spatiaux correspondants : le micro-espace, le meso-espace, et au moins trois macro-espaces.

Le Macro-espace

Les situations où un sujet doit prendre des décisions relatives à un territoire beaucoup trop grand pour qu'il puisse l'embrasser d'un regard, lui posent - comme à notre chauffeur de taxi - des problèmes, entre autres de recollement de cartes et d'incrustation. Pour identifier et retrouver un lieu, établir un trajet, déterminer la forme d'un territoire etc. il est nécessaire de développer des concepts et des moyens spécifiques. Les solutions sont d'ailleurs différentes suivant qu'il s'agit de la terre entière ou d'une zone urbaine, rurale, sylvestre, souterraine, maritime ou aérienne.

Le Micro-espace

A l'opposé, l'enfant construit ses premières connaissances spatiales dans la manipulation de petits objets. Par le toucher avec ses mains ou sa bouche autant que par la vue, par les mouvements qu'il leur fait subir, il identifie leur consistance, leur forme solide, leurs positions relatives, et leurs propriétés. Le micro-espace est le milieu de l'élaboration de la conception du mouvement des objets autres que l'observateur. Il s'agit de conception pas de taille objective des objets. Un pilote d'hélicoptère peut interpréter le sol à ses pieds à l'aide de sa conception micro-spatiale.

Le Meso-espace

Les situations où l'enfant doit concevoir ses propres déplacements dans un territoire placé sous le contrôle de sa vue, sont l'occasion de développer des représentations différentes de celles du micro-espace et qui préfigurent celles qui seront nécessaires dans le macro-espace

Pour des raisons ergonomiques et à cause des techniques différentes qu'elles imposent, la conception des objets de la géométrie est différente dans chacun de ces milieux. La "droite" peut être déterminée, dans le micro-espace par le glissement qu'elle permet ou par l'intersection de deux plans, dans le meso-espace, par un alignement visuel, dans le macro espace, par le prolongement à l'aide d'un angle plat… Dans le micro-espace les distances sont des longueurs d'objets, les angles des "formes" ou des rotations ; les meures de longueurs y sont beaucoup plus économiques que les mesures d'angles, dans le macro-espace c'est l'inverse.

Les conceptions spatiales nécessaires à l'établissement des rapports humains avec leur milieu ne sont que très modestement prises en charge par la géométrie élémentaire[1]. Elle élimine naturellement toutes les techniques professionnelles, trop spécifiques et trop complexes, mais elle laisse sans connaissances et sans répertoire adapté, des situations très banales.

> *La situation qui consiste à indiquer à quelqu'un les déplacements d'un mobile dans un espace urbain en est un exemple (situation n°5). Cette situation suppose la gestion simultanée des mouvements relatifs de six trièdres de références : ceux liés au terrain, et au mobile réel, ceux liés à la carte et à la représentation du mobile, ceux liés aux deux interlocuteurs ; alors qu'il n'existe même pas une méthode standard pour évoquer précisément un carrefour en patte d'oie.*

Travaux de Piaget

Processus de décentration

Décentrer l'action propre ce n'est pas simplement ajouter d'autres actions à l'acte initial et le relier après coup par un processus de pure extension cumulative. Décentrer, c'est inverser les relations elles-mêmes et construire un système de réciprocité, qui est qualitativement nouveau par rapport à l'action de départ. C'est donc détacher l'objet de l'action immédiate pour le situer dans un système de relations entre les choses, correspondant terme à terme au système des opérations virtuelles que le sujet pourrait effectuer sur elles de tous les points de vue possibles et en réciprocité avec tous les autres sujets. C'est pourquoi chaque

décentration constitue un double progrès simultané dans la construction de l'objet et dans les coordinations opératoires du sujet (...). I.E.G., Vol. II., pp.107-108.

Processus de décentration et réduction phénoménologique

(...) *la psychogenèse rencontre un problème qui converge assez exactement avec celui de la «réduction» phénoménologique, mais sur le terrain de l'expérience elle-même. Il est parfaitement exact qu'aux niveaux inférieurs du développement, les réactions cognitives du sujet demeurent dominées par des conditions spatio-temporelles. Le jeune enfant ne parvient ainsi à manipuler les classes logiques et les premiers nombres entiers que sous des formes figurales («classifications figurales», etc.) dans lesquelles interviennent son expérience perceptive, ses images mentales, etc., donc toutes sortes d'éléments empruntés au «monde spatio-temporel» comme dit Husserl. Seulement, le fait remarquable est qu'il parvient à en sortir et que, sitôt constituées les premières «opérations», même concrètes (classes, relations et nombres) et a fortiori propositionnelles (implications, etc.), c'est-à-dire entre sept huit ans et quatorze ou quinze ans, il réussit à concevoir les classes ou les nombres, etc., comme indépendants de l'espace et du temps: la preuve est qu'il atteint la réversibilité opératoire alors qu'il n'existe pas de réversibilité vraie dans le «monde» physique.* L.C.S., p. 1257

Passage du spatio-temporel aux liaisons extra-temporelles ou logico-mathématiques

Or, ce passage du spatio-temporel aux liaisons extra-temporelles ou logico-mathématiques s'effectue grâce à un processus de conversion qui rappelle d'assez près la «réduction» de Husserl (toute considération transcendantale mise à part): d'abord centré sur son moi, c'est-à-dire assimilant toute transformation ou configuration à des données tirées de l'action propre ou de la conscience immédiate, le sujet parvient à se décentrer dans la mesure où il raisonne par coordinations, réciprocités, inversions, etc., c'est-à-dire où il constitue des systèmes de transformations opératoires indépendantes du point de vue propre et s'imposant avec une nécessité intrinsèque. Cette décentration coordinatrice a donc pour effet de substituer au sujet égocentrique un sujet épistémique qui échappe aux limitations spatio-temporelles autant qu'à l'individualité (et qui se libère ainsi de l'«attitude naturelle»). L.C.S., pp. 1257-1258

Décentration et Progrès intellectuel

Décentrer signifie «grouper», et c'est grâce aux réciprocités atteintes en sortant du point de vue nécessairement déformant et égocentrique de départ que s'élaborent corrélativement les connexions réelles et la réversibilité opératoire. C'est pourquoi le progrès intellectuel n'est ni simplement linéaire ni simplement cumulatif, mais simultanément constructif et réflexif parce que dû à un double mouvement d'intégration externe et de coordination interne. IEG.II., p. 108

ATELIER A21

UTILISATION DES AZULEJOS DANS L'ENSEIGNEMENT CYCLE 3

Olivier GARRIGUE
Enseignant en mathématiques, COLLEGE LA CARRAIRE
IREM D'Aix-Marseille, Groupe Collège
olivier.garrigue@ac-aix-marseille.com

Résumé

L'azulejo (carreau) d'Eduardo Nery, artiste Portugais, et ceux créés par Jorge Rezende, mathématicien Portugais, sont avant tout des merveilles de petits carreaux articulés, leurs compositions géométriques attirent l'œil du mathématicien et éveille ses sens géométriques. De multiples questions mathématiques peuvent naître de la manipulation des azulejos. Dans le but de susciter toutes ces questions, nous avons présenté ces azulejos sous la forme d'une douzaine de carreaux plastifiés à des élèves de cycle 3, (du CM1 à la 6e). Nous avons distingué trois phases de travail qui jalonnent ce parcours d'étude et qui peuvent être aussi appliquée à chaque séance afin de ritualiser le travail auprès des élèves et pour qu'ils soient plus efficaces dans leur travail : une phase d'adaptation, une phase de penser dans l'action et une phase du développement du questionnement et de la réflexion.

Au cours de deux phases de travail, les participants à cet atelier ont pu manipuler des azulejos, différents à chacune des phases. Le matériel, créé par les élèves, a ainsi été étudié afin d'alimenter la discussion sur les possibilités qu'offrent les azulejos pour un enseignement mathématique. L'objectif de l'atelier était donc double. Dans un premier temps, c'était l'occasion de faire vivre aux participants et en accéléré, l'expérience des élèves de collège en « parcours[83] » à partir de l'objet « Azulejos (carreaux) ». Puis, dans un deuxième temps, il s'agissait d'éprouver les questions mathématiques qui pouvaient naître et de discuter des possibilités de s'en saisir en classe pour dérouler un « parcours » avec des élèves de Primaire.

I - PREMIÈRE PHASE : PRISE EN MAIN DE DEUX AZULEJOS.

1 Présentation de la première phase.

Dans une première phase de manipulation, nous avons proposé aux participants les deux azulejos habituellement proposés aux élèves lors des deux premières séances de leur parcours d'étude Azulejos. Ces deux carreaux sont donnés aux élèves lors de deux séances différentes et ne sont pas compatibles ; pour l'atelier nous les avons distribués simultanément pour accélérer le parcours afin que les participants puissent jouer avec les deux azulejos que nous avons pour habitude de présenter aux élèves lors des deux premières séances consacrées à ce parcours d'étude (un respectivement pour chaque séance).

L'azulejo créé par l'artiste portugais Eduardo Nery (1966) :
(Chaque participant disposait de 12 azulejos)
C'est le premier azulejo que nous proposons à l'étude à nos élèves.



L'azulejo créé par le mathématicien Jorge Rezende (2012) :
(Chaque participant disposait de 12 azulejos)
C'est le deuxième azulejo que nous proposons à l'étude à nos élèves.



83 Parcours que nous différencions d'une démarche de projet. Un projet étant un parcours dont on fixe le but dès le départ.

Ainsi les participants à l'atelier, regroupés dans la mesure du possible par deux, pouvaient manipuler librement ces deux types d'azulejos, puis communiquer entre eux afin d'échanger sur les diverses possibilités de mise en œuvre au primaire.

2 Premier moment de synthèse :

Les différentes réactions et propositions des participants à cet atelier pendant et à la fin de cette première phase de manipulation sont rapportées ci-dessous[84] :

a) On peut demander aux élèves de trouver le plus de pavages possibles. La prise de photos semble faire consensus pour garder en mémoire les pavages réalisés par les élèves. En effet, cela permet à l'enseignant de prendre appui sur ces différentes productions pour les synthèses de classes. De plus, cela permet aux élèves de faire et défaire leurs pavages tout en conservant une trace de leur travail. À noter que : « Le plus de pavages possibles » peut renvoyer vers la question : « Combien y a-t-il de possibilités ? »
b) L'invention d'un codage en forme de fourche comme dans la figure 5 pour noter également la position des azulejos peut être une alternative aux photos ; il y a certes une perte de la richesse proposée par l'azulejo manipulé mais l'élève a ainsi une possibilité de communiquer plus facilement la disposition des azulejos dans un pavage ou une frise à ses camarades ou au professeur.
c) Il peut être demandé aux élèves de construire des pavages avec des axes de symétrie. Les participants ont alors évoqué la limite des 12 azulejos. En effet, avec les azulejos d'Eduardo Nery par exemple, si les élèves se limitent à 12 carreaux alors ils peuvent être limités dans le nombre d'axes s'ils se cantonnent à un pavage 3×4 et qu'ils n'ont pas l'idée d'extrapoler (« si on avait plus d'azulejos »). La question s'est alors posée : « si l'on propose plus de 12 carreaux aux élèves leurs réactions seraient-elles différentes et quel serait leur questionnement ? »
d) Élaborer un travail plus important sur les transformations du plan avec les azulejos semblait aussi naturel pour les participants. Symétrie axiale bien entendu, mais aussi : translation, rotation, symétrie glissée.
e) Certains participants ont évoqué le fait que positionner les azulejos au hasard donne toujours une figure cohérente. Le hasard est une notion qui peut être évoquée avec des élèves de cycle 3.
f) Les programmes de construction ont aussi été évoqués ainsi que des pavages « téléphonés » : un travail entre deux groupes d'élèves par exemple : un premier groupe qui propose un modèle à reconstruire à un deuxième groupe. À noter que si les élèves ont connaissance d'une notation des carreaux, en forme de fourche (figure 5) comme évoquée précédemment par exemple, celle-ci peut être utilisée de manière pertinente et ainsi légitimée.
g) La notion de construction des azulejos avec des instruments de géométrie a aussi été évoquée. Plusieurs types de travail pourront être envisagés. Notamment sur papier quadrillé puis sur papier blanc.
h) Toujours en ce qui concerne les tâches de construction géométrique : on peut aussi proposer aux élèves de réduire ou d'agrandir un azulejo donné.
i) Il est aussi évoqué le fait que les élèves peuvent se poser des questions sur l'origine de tel ou tel pavage ou « motif » ; existe-t-il un motif de base ? Ou bien, existe-t-il des motifs plus grands ?
j) Certaines constructions de pavages ou de frises peuvent faire appel à des démarches algorithmiques.
k) Quelques participants se sont posés la question du nombre de configurations possibles avec deux pièces.

84 A partir de mes notes et de celles qu'a bien voulu prendre Agnès Gâteau, je l'en remercie.

3 Éclaircissement sur notre pratique enseignante avec des élèves de 6e :

À ce stade, une fois ces premières observations effectuées par les participants, il nous paraît important d'apporter quelques précisions sur la façon dont nous avons abordé les azulejos avec les élèves dans des classes de 6e depuis l'année scolaire 2016-2017.

Nous nous sommes tournés vers un enseignement reposant sur les éléments suivants :

Une démarche : Au début de l'année, nous proposons aux élèves « ***un parcours*** » d'étude sur les azulejos. À raison d'une séance toutes les deux ou trois semaines environ et ceci jusqu'à la fin de l'année, les élèves vont être les acteurs de séances indépendantes de l'enseignement classique que nous leur dispensons au quotidien.

Un artefact : les azulejos plastifiés présentés au début comme un trésor caché dans une enveloppe (« habillage pédagogique »), c'est ce qui va être étudié tout au long de l'année. Au rythme des séances, les élèves découvriront différents azulejos (celui d'Eduardo Nery (1966), celui de Jorge Rezende (2012) et bien d'autres, …).

Un carnet de bord : Chaque élève dispose d'un carnet de bord tout au long du projet et il écrit dedans tout ce qu'il jugera bon pour mieux comprendre la nature de l'objet étudié. Ce carnet lui sert de fil rouge.

L'autonomie : Il était important pour nous de respecter deux points qui nous semblaient fondamentaux. Le premier est le principe de la « démarche ouverte », c'est-à-dire que ce sont les élèves qui pilotent le plus possible l'avancée du parcours et les pistes de réflexion, et le deuxième point est le respect du rythme de chaque élève. On prendra garde à une dérive standard de la mise en œuvre d'un tel dispositif à plus forte raison avec des élèves de 6e. Du fait de leur enthousiasme, les élèves peuvent rapidement partir dans toutes les directions. C'est ici que le rôle de l'enseignant prend tout son sens. Dans ce type d'enseignement, il est le garant du respect du cadre, c'est-à-dire qu'il peut lui arriver de recadrer le questionnement des élèves par le biais de ***questions stratégiques*.**

4 Du point de vu de l'enseignant et de l'enseignement, que s'est-il passé ?

Lors de notre travail avec les élèves, nous avons distingué à chaque séance trois phases. Cette ritualisation a été bénéfique dans le travail des élèves rendant plus efficace leur réflexion.

4.1Phase d'adaptation :

Les élèves découvrent le cadre de travail et s'adaptent à la situation proposée par l'enseignant. C'est un moment clef. En ouvrant l'enveloppe ils découvrent les azulejos et se familiarisent avec l'objet. Nous remarquons le plus souvent que les élèves se posent énormément de questions durant cette phase. Dès les premières séances, l'enseignant doit montrer une grande part d'adaptabilité aux différentes réactions des élèves. Ainsi, comme les participants l'ont fait remarquer lors de cette première phase de manipulation, les élèves vont multiplier les productions, les observations et les questions. C'est à partir de cela et des photos qu'il aura prises que l'enseignant peut noter, reformuler et ordonner des ***questions stratégiques*** qu'il soumettra à l'ensemble des élèves lors de moments de synthèse et ainsi approfondir l'étude des azulejos.

4.2Phase de penser dans l'action :

En premier lieu, comme l'ont naturellement évoqué les participants de l'atelier, cette phase peut être l'occasion de travailler de manière plus approfondie sur les pavages et la symétrie ainsi que sur les frises et les motifs glissés mais l'objectif principal de cette phase reste d'appuyer la pensée des élèves et de leur permettre de formuler explicitement leurs questions, leurs opinions. Les élèves continuent de manipuler les azulejos pour mieux expliquer à leurs camarades et/ou au professeur leurs points de vue, leurs questions. Il s'agit de montrer aux élèves qu'il faut être précis et rigoureux dans l'argumentation.

4.3Phase d'élaboration du questionnement et de la réflexion :

À la fin de la deuxième phase, il est judicieux de faire une synthèse des réflexions des élèves. Lors de nos expérimentations, la question du dénombrement est souvent l'une des questions qui a suscité le plus d'intérêt chez nos élèves, ainsi que la façon dont les azulejos sont conçus pour avoir de telles propriétés.

L'enseignant peut alors poser la question du nombre de possibilités différentes de créer une frise de deux carreaux, puis de trois, etc. Ici, l'invention d'un système de notation efficace est effectivement décisive dans l'avancée de la réflexion des élèves. Nous avons pu constater qu'une telle notation finissait toujours par être mise en place puis utilisée par les élèves. Établir des règles rigoureuses pour construire un azulejo semble-être aussi une bonne piste de travail pour les élèves et peut être étroitement lié à la question du dénombrement. Toutefois, si nous revenons au principe d'un parcours tel que nous l'envisageons, il se peut que les élèves ne prennent pas du tout cette orientation et ce sera alors à l'enseignant d'accompagner les élèves dans de nouvelles voies.

5 En guise de transition :

Lors de cette première phase de manipulation et de ce premier moment de synthèse, les participants ont pu vivre en accélérer ce que les élèves vivent lors de ces phases de travail que nous venons de définir. Pour ensuite mieux appréhender le travail des élèves, mais aussi pour essayer de mieux comprendre en quoi consiste la troisième phase : « la phase d'élaboration du questionnement et de la réflexion », nous avons proposé une deuxième phase de manipulation aux participants.

II - DEUXIÈME PHASE DE MANIPULATION : ÉTUDE DE QUELQUES AZULEJOS SUPPLÉMENTAIRES ET DE QUELQUES PRODUCTIONS D'ÉLÈVES.

1 Présentation de la deuxième phase de manipulation.

Dans une deuxième phase de manipulation, nous avons présenté dans cet atelier deux enveloppes « n°2 » à chaque binôme (figure 1 ci-dessous) afin que les participants puissent prendre en main et toujours de façon libre des azulejos pouvant présenter d'autres caractéristiques ainsi que des azulejos créés par des élèves durant ce parcours.



Figure 1. Exemples d'enveloppes « n°2 »

2 Deuxième moment de synthèse :

Tout d'abord, les premières manipulations de ces nouveaux azulejos par les participants ont été majoritairement guidées par la recherche de pavages symétriques. Un autre objectif fort est la comparaison de ce que l'on obtient avec l'un ou l'autre des azulejos mais aussi avec les azulejos des enveloppes n°1. Si toutes les remarques et observations établies à l'issue de la première phase de manipulation sont toujours valables d'autres questions, plus en rapport avec notre expérimentation avec

les élèves, ont été soulevées par les participants, voici celles que nous avons pu noter plus particulièrement :

a) Comment les élèves s'y sont pris pour fabriquer leurs propres azulejos ?
b) Se sont-ils aperçus que certains azulejos n'avaient pas le même nombre d'axes de symétrie ? Quelles conséquences cela a-t-il engendré dans leur travail ?
c) Ont-ils aussi essayé de compter le nombre de combinaisons possibles avec ces nouveaux azulejos ou avec ceux qu'ils ont créés ?

2.1Concrètement, quelles ont été les démarches des élèves ?

Comme nous l'avons déjà dit, lors de notre expérimentation de ce parcours avec les élèves, nous avons pu constater que les deux principales questions sur lesquelles ils se focalisent sont :

1. Combien de possibilités avons-nous de créer des frises avec deux azulejos, trois azulejos, etc. ?
2. Comment peut-on créer nous-même des azulejos ?

Chacune de ces questions partent d'un constat lorsque les élèves manipulent les azulejos comme les participants ont pu le faire. Pour la première question, les élèves voient qu'ils peuvent créer une multitude de frises ou de pavages, « oui mais une multitude ça veut dire combien ? », si certains évoquent une infinité de possibilités, d'autres ne sont pas d'accords. Quelques groupes d'élèves ont donc la curiosité de dénombrer les possibilités pour deux, puis pour trois azulejos. Pour la deuxième question, nous pouvons rebondir sur l'une des remarques faites par les participants : « *positionner les azulejos au hasard donne toujours quelque chose de construit* ». En effet, les élèves remarques immédiatement que quel que soit la position des azulejos la « continuité » des lignes et des couleurs en particulier est toujours respectée. Les élèves essayent donc de copier les azulejos sur leur carnet de bord puis parfois de les modifier, enfin et surtout de construire leurs propres azulejos.

Par le biais des questions stratégiques, l'enseignant peut pousser naturellement les élèves à répondre successivement à ces questions de manière approfondie. Lors des deux années, si un travail sur les transformations a toujours été mené par les élèves, il en a été de même pour la recherche d'une réponse satisfaisante à ces deux questions. C'est ce que nous allons illustrer rapidement dans les paragraphes suivants.

2.2Travail sur les transformations du plan.

Si la recherche de motifs particuliers est souvent ce qui revient spontanément chez les élèves lors de la toute première manipulation des azulejos, l'utilisation de transformations du plan ou bien la recherche de configuration avec des axes de symétrie est ce qui peut advenir dans un second temps. Dans le premier exemple de la figure 3, l'élève explique qu'il a disposé les 6 azulejos de droite puis qu'il a disposé les six autres de gauche comme s'il avait opérer un retournement de 180° dans le sens anti-horaire des six premiers. Il pointe du doigt avec sa main droite le centre du pavage et avec la main gauche montre le déplacement.

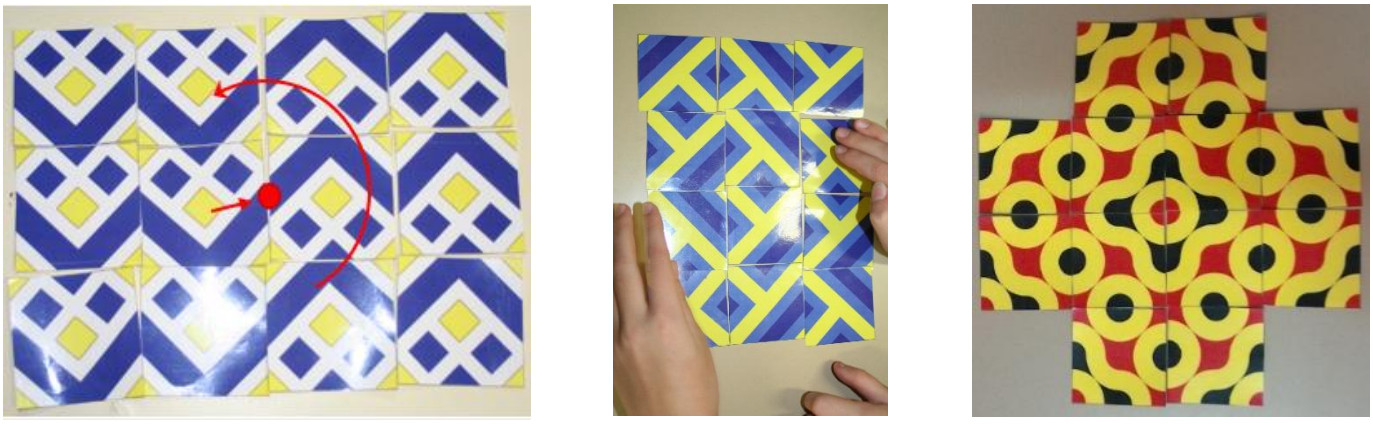


Figure 3. Exemples de travail sur les transformations du plan

Dans l'exemple n°2 de la figure 3, nous avons le cas d'un groupe d'élèves qui a créé un pavage 4 x 3 avec un axe de symétrie. Certains groupes vont essayer d'obtenir des pavages 4 x 3 avec plus d'axes de symétrie, ils pourront en obtenir 2 avec certains azulejos de Jorge Rezende. Comme les participants l'ont fait remarquer lors de la première phase de manipulation (remarque c), il est vrai que les élèves se restreignent aux douze azulejos mis à leur disposition. À ce sujet, sur les deux années où nous avons expérimenté l'utilisation des azulejos avec les élèves, à notre souvenir, seul un ou deux groupes sont allés demander des azulejos supplémentaires à l'enseignant ou aux autres élèves pour essayer de « voir au-delà » … Mais ce n'était pas dans le cadre de la recherche de symétries dans des pavages plus importants. Nous avons tout de même des élèves, comme dans l'exemple n°3 de la figure 3 qui vont obtenir une configuration avec 4 axes de symétrie en sortant de la contrainte d'un pavage 4 x 3.

Avec plusieurs classes un travail sur la translation[85] d'un motif a aussi été effectué par les élèves comme le montre la figure 4.

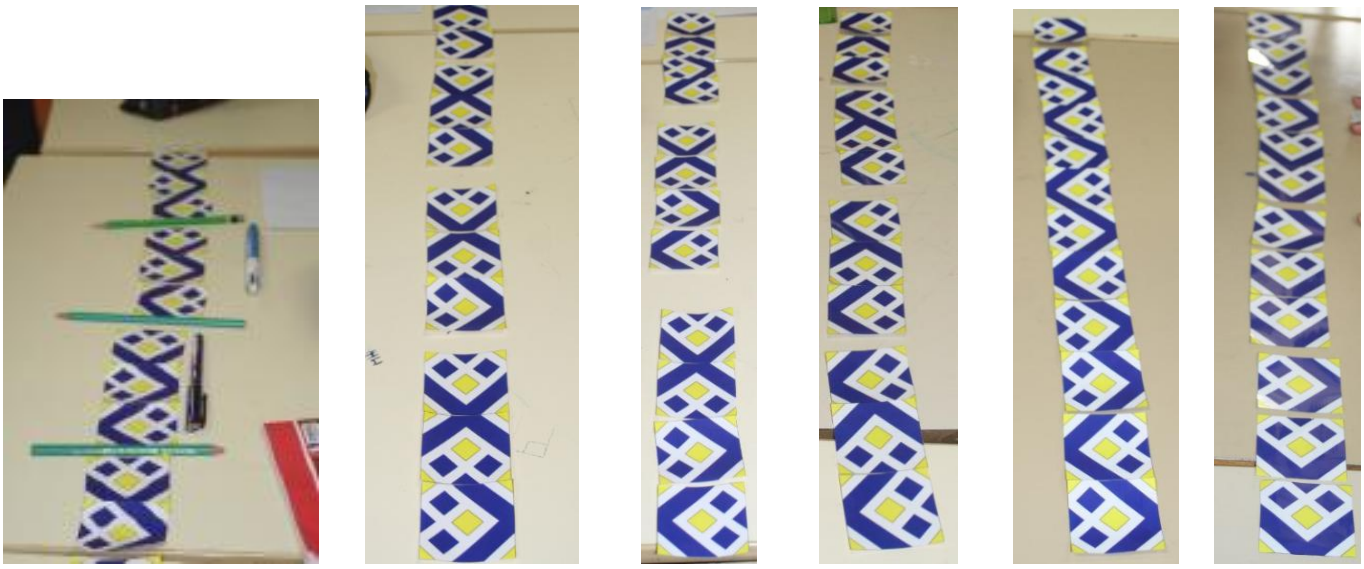


Figure 4. Travail sur des frises avec le glissement de motif.

2.3Travail sur le dénombrement des possibilités.

La question du dénombrement des possibilités est toujours revenue dans le questionnement des élèves[86]. Si les élèves ne le formulent pas clairement, l'enseignant peut alors poser la question stratégique suivante : « combien y a-t-il de possibilités avec tel ou tel azulejo de faire une frise de deux azulejos, puis avec trois azulejos, etc. ?

Les méthodes des différents groupes vont de la simple énumération, jusqu'à l'invention d'une notation. Pour presque tous les groupes d'élèves nous notons des stratégies pour mieux compter : notamment laisser le premier azulejo « fixe » pendant que le deuxième « tourne ». L'énumération des 16 possibilités arrivent très vite, le professeur demande une justification orale : « Pourquoi est-ce que vous vous êtes arrêté là ?» ; « Pourquoi dites-vous qu'il y a 16 combinaisons au maximum ? » ; « Êtes-vous sûr d'avoir terminé ? » ; « Expliquez-moi comment vous avez procédé. » ; … Les justifications des élèves sont souvent très claires – explication de la stratégie - et souvent illustrées par le geste avec les azulejos. Ceux qui utilisent une notation, comme le montre la figure 5, s'appuient dessus toujours de façon pertinente. À noter que c'est quand la question du nombre de possibilités pour une frise de trois azulejos survient que les élèves constatent les limites de cette notation (figure 6). Pour être plus performant dans leurs argumentations, les élèves vont alors privilégier le texte et les « multiplications par quatre successives » (figure 7).

85 Précisons toutefois que le terme employé auprès des élèves est celui de glissement.

86 Nous renvoyons le lecteur à la lecture de trois extraits de séance avec des élèves de 6ème en Annexe 1.

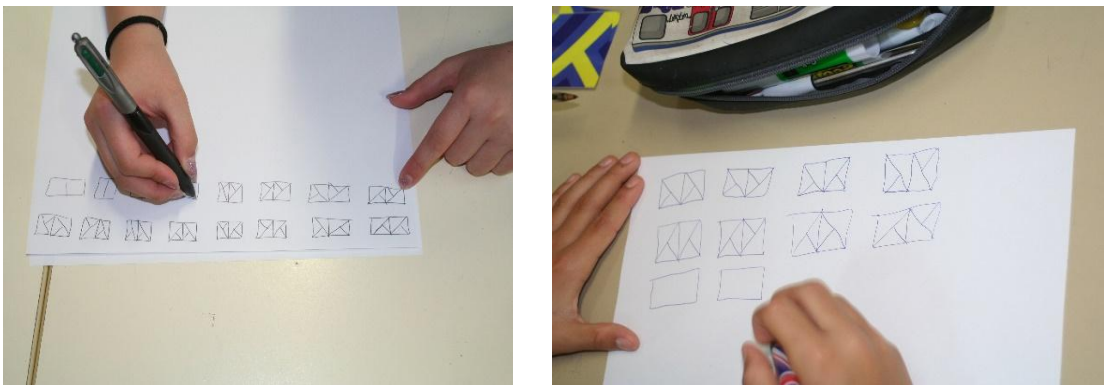


Figure 5. Utilisation d'une notation pour dénombrer et expliquer

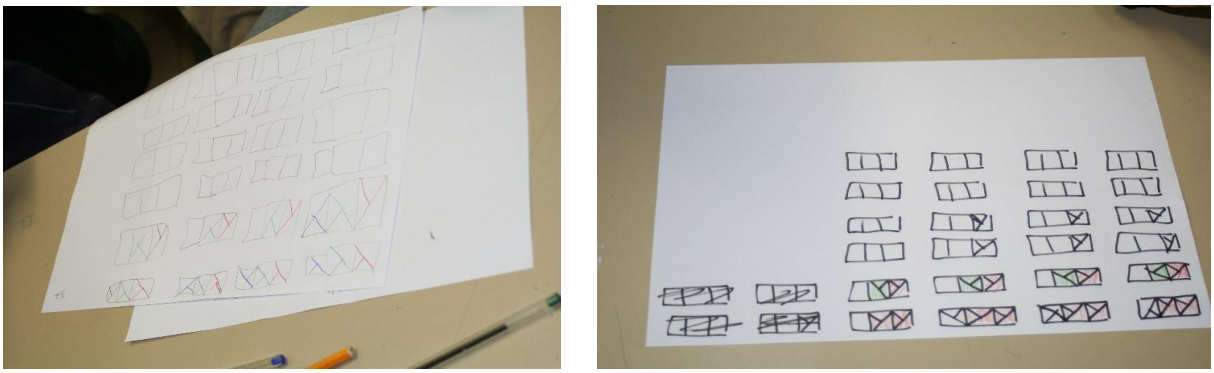


Figure 6. « Il y en a trop ! »

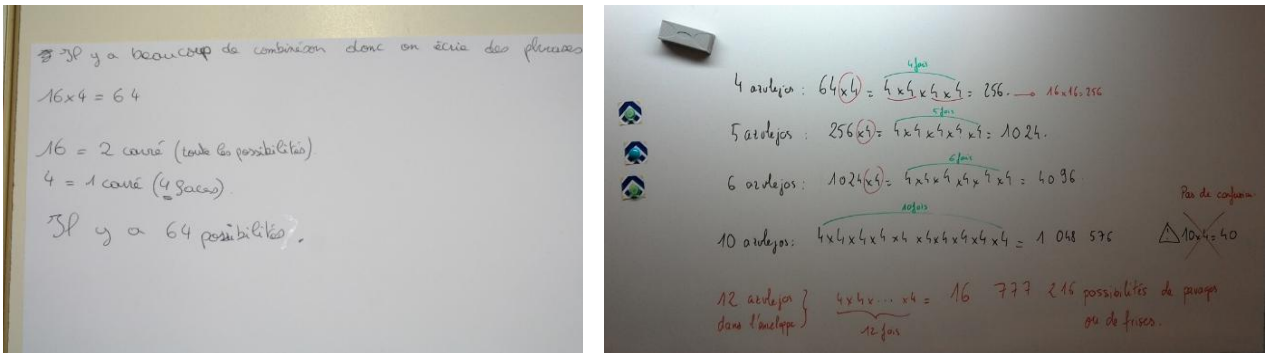


Figure 7. « Comme ça, c'est mieux ! » - Synthèse de la classe au tableau

2.4Travail sur la construction d'un azulejo.

Comme nous l'avons évoqué dans l'atelier, deux questions principales peuvent surgir à propos de la construction d'un azulejo. Tout d'abord comment peuvent se construire géométriquement les azulejos d'Eduardo Nery et de Jorge Rezende ? Et ensuite comment construire son propre azulejo ; quelles sont les règles à respecter ? Si pour la première question nous renvoyons le lecteur à l'annexe 4, nous nous pencherons surtout sur la deuxième question que se sont posés tout naturellement les élèves lors de notre expérimentation de ce parcours. À la page suivante nous proposons une fiche conçue par des élèves de 6ème de l'année scolaire 2017–2018 (figure 8). En guise de commentaire, nous pouvons dire tout d'abord que les élèves se focalisent en premier lieu sur les bords de leurs azulejos. En effet les lignes et les couleurs doivent coïncider, mais les élèves découvrent ensuite qu'établir d'autres règles s'avère nécessaire. Par exemple, l'une des autres règles qui fait rapidement consensus auprès des élèves est que les carreaux doivent être superposables. Pour ce qui est des autres règles, les élèves les ajoutent au fur et à mesure de leurs différentes tentatives et à l'issue de moments de synthèse effectués en classe entière.

Conception de deux azulejos identiques : Rappel des règles de construction.

Cette fiche sert à :

1) *Se souvenir des règles et des observations faites en classes sur la conception de deux azulejos identiques.*
2) *Utiliser les conseils pour mieux accomplir le travail demandé.*
3) *Autoévaluer son travail en se servant des 4 colonnes de droite.*

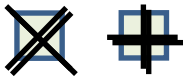
Règles	Conseils	👍☺	☺	😐	☹
1) Les dimensions de l'azulejo doivent-être facilement divisibles.	Par exemple : 12 cm, 15 cm ou 16 cm.				
2) Les deux azulejos doivent-être identiques dans le sens de « superposables ».	Attention ! Superposables ne veut pas dire symétriques.				
3) Il doit y avoir continuité des lignes d'un azulejo à l'autre quel que soit leur orientation l'un par rapport à l'autre.	Préparer un brouillon en plaçant des repères sur les côtés des deux azulejos, les découper et faire des essais avant de mettre au propre le travail.				
4) Il doit y avoir continuité des couleurs d'un azulejo à l'autre quel que soit leur orientation l'un par rapport à l'autre.					
5) Utiliser des formes géométriques simples pour composer l'azulejo.	Exemples : Des quarts de cercles ou des demi-cercles, des triangles rectangles, des rectangles…				
6) Pour être « intéressant » un azulejo ne doit pas posséder trop d'axes de symétrie. « Intéressant » veut dire qu'il y a plusieurs possibilités d'assemblages.	Exemples : Avec un axe de symétrie :  Avec deux axes de symétrie :  Mais pas avec quatre axes de symétrie.				
7) Utiliser au maximum trois couleurs en jouant sur les contrastes, les couleurs complémentaires. Une couleur doit être appliquée de manière uniforme et soignée.	Exemples de couleurs complémentaires : Bleu/orange, Jaune/violet, Rouge/vert. L'utilisation du noir ou du blanc peut s'avérer utile. (Mais pas des deux en même temps.) Il faut s'appliquer !				

Figure 8. Fiche d'aide pour construire un azulejo – Synthèse classe année 2017/2018

Les élèves se servent le plus souvent de cette fiche comme un moyen d'autoévaluer leur production. Si les élèves choisissent de produire deux azulejos superposables, c'est pour mieux vérifier leur travail.

Voici, ci-dessous, quelques exemples de productions d'élèves manipulés lors de l'atelier. À noter que certaines productions étaient présentées en « grand format » aimantés au tableau pour permettre aux participants de mieux apprécier le recul que peuvent prendre les élèves lorsque l'enseignant procède à des moments de synthèse au tableau et soumet certaines de ces productions à toute la classe après l'accord des élèves concernés :



En classe, les élèves remarquent que si un azulejo à « trop d'axes de symétrie », les possibilités de créer des frises diminuent, ils vont même jusqu'à classer les azulejos qu'ils ont étudiés et ceux qu'ils ont créés (figure 9).

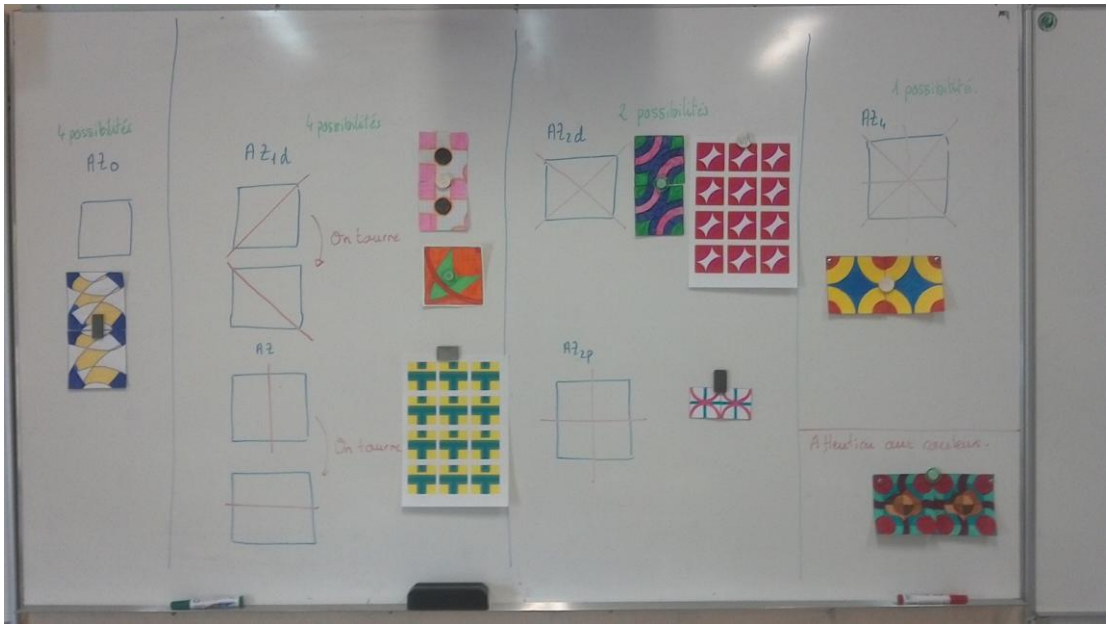


Figure 9. Les élèves se lancent dans une classification

Pour clore ce paragraphe, il faut insister sur le fait que ce ne sont pas les seules démarches possibles des élèves. Certaines classes peuvent se lancer dans la création d'exposés, de panneaux à partir des azulejos créés par les élèves et bien d'autres choses encore. Rappelons que selon le principe du parcours tel que nous l'avons défini plus haut les élèves peuvent prendre d'autres directions lors de l'étude des azulejos. Les démarches que nous avons donc exposées ici sont celles qui sont revenues lors de nos deux années d'expérimentation.

III - PROLONGEMENTS ET CONCLUSION

À la fin de l'atelier, dans le temps qui nous était imparti, nous avons soumis brièvement aux participants quelques expérimentations ponctuelles effectuées avec des élèves de cycle 4, plus particulièrement des élèves de 3ème. Ceci afin d'avoir une vision plus large de l'utilisation qui peut être faite des azulejos dans l'enseignement des mathématiques.

1 Première proposition de prolongement : lors de séances informatiques.

Lors d'un travail de groupes, des élèves de 3e ont pu manipuler ces azulejos plastifiés, il leur a ainsi été proposé sur deux séances la question suivante :
Quel type de programme simple pourrait-on proposer à des utilisateurs (des élèves de sixièmes par exemple) ou à des spectateurs (des adultes venant apprécier le travail des élèves de 6e et de 3e par exemple) afin de vivre et partager une partie de l'expérience vécue par les élèves de 6e lorsqu'ils ont étudié les azulejos cette année ?
À noter que plusieurs idées ont été échangées par les élèves du groupe, trois idées principales ont été retenues :

1) « Créer un programme où l'utilisateur peut « cliquer » sur un des azulejos du pavage déjà en place pour le tourner autant qu'il veut ; si c'est une tablette ce sera encore mieux. »
2) « Créer un programme où l'ordinateur construit au fur et à mesure le pavage en demandant à chaque fois à l'utilisateur quelle position il doit donner aux azulejos. »
3) « Créer un programme qui, une fois lancé, agit de façon autonome pendant une heure en exposant aux spectateurs un pavage qui évolue toutes les secondes de façon aléatoire. »

Ces programmes ont été exécutés tour à tour sur tablette et en vidéo-projection aux participants de l'atelier afin de mieux apprécier le travail des élèves (Annexe 2).

2 Deuxième proposition de prolongement : Travail de recherche.

Un devoir à la maison (Annexe 3) est donné aux élèves sous la forme d'un travail de recherche. Ils ont un délai d'une dizaine de jours pour remettre leur travail. Pendant le temps de la recherche, les élèves peuvent aller poser des questions aux élèves de sixième ou aux élèves de cinquième qui ont travaillé sur les azulejos l'année précédente. Nous précisons que l'élève Lydia évoquée dans le sujet (Annexe 3) est une élève réelle et a bien travaillé sur les azulejos l'année précédente (2016-2017). Elle détiendra d'ailleurs, pendant ces dix jours, une douzaine des azulejos qu'elle a créé dans le cas où des élèves de troisième venaient à lui poser des questions. Ils peuvent aussi consulter les programmes qui ont été développés par les élèves de troisièmes lors des séances informatiques et qui sont donnés en pièce-jointe par l'intermédiaire du cahier de texte en ligne.

CONCLUSION

L'atelier nous a permis d'étudier différents azulejos et d'explorer des pistes d'enseignement au niveau du cycle 3 principalement. Nous avons également évoqué quelques pistes de travail au niveau du cycle 4. Bien d'autres pistes peuvent être exploitées notamment autour d'un travail multidisciplinaire mais nous ne sommes pas allés plus loin dans cet atelier. Cependant, d'autres documents sur le sujet peuvent être consultés sur le site de l'IREM d'Aix-Marseille comme mentionnés dans la première note de bas de page. Ces documents seront mis à jour ces prochaines années au grès de nos expériences futures si cela semble utile ou nécessaire.

Les deux années d'expérimentation (2016-2017 et 2017-2018) ont été vécues certes différemment sur la forme, ne serait-ce que parce que lors de la première année, le travail n'a commencé qu'à partir de la moitié de l'année scolaire. Par contre, au niveau du fond, au vu du contenu des premières séances et ce qu'il en ressort à la fin de ces deux années, nous pouvons dire que les idées générales mises en œuvre par les élèves sont identiques et sont celles qui ont été évoquées durant cet atelier.

Pour finir ce travail semble pouvoir être réinvesti dans le contexte de la formation initiale de futurs professeurs d'école mais notre inexpérience en la matière ne nous permet pas de préciser davantage cette question (pour cela nous laissons le lecteur seul juge)[87].

BIBLIOGRAPHIE

Convay, J.H., Burgiel, H. et Goodman-Strauss, C. (2018) The Symmetries of Things, A K Peters/CRC Press.

Deledicq, A. et Raba, R. (2014) Le monde des pavages – Les voir et les faire – ACL – Les éditions Kangourou.

EDUSCOL Ressources pour l'évaluation en mathématiques. http://eduscol.education.fr/ressources

EDUSCOL, Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer, un exemple de tâche intermédiaire, Analyse et Construction d'un pavage, http://eduscol.education.fr/ressources.

Grunbaum, B et Shepard, G. C. (2016) Tilings and Patterns, Dover Books on Mathematics.

Guenais, M. (2018) Un aller-retour au pays des pavages, Images de Mathématiques, CNRS, http://images.math.cnrs.fr/Un-aller-retour-au-pays-des-pavages.html

Rezende, J. (2012) A Contribution for a mathematical classification of square tiles, arXiv :1206.3661v1 [math.HO]

Schattschneider, D. The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation, American Mathematical Monthly, Volume 85, issue 6, 439-450.

Sites :

REZENDE, J. http://polyedros.blogspot.fr/

L'Art de l'Azulejo au Portugal, Centre Virtuel de l'Instituto Camões, http://cvc.institutocamoes.pt/azulejos/fr/index.html

Pavages 2: un logiciel libre pour réaliser des pavages du plan. http://pascal.peter.free.fr/pavages.html

87 *Ce travail est le fruit d'une collaboration au sein de l'IREM d'Aix-Marseille, Groupe Collège. Y ont directement participé : Olivier Garrigue, Professeur de Mathématiques au collège La Carraire de Miramas (13) et ses élèves, Jorge Rezende, Universidade de Lisboa et Ricardo Lima, Dream & Science Factory et CNRS, Marseille. Merci à Myriam Quatrini pour ses encouragements.*

ANNEXE 1 : TROIS EXTRAITS SUR LE DÉNOMBREMENT.

1. Lors de la première séance, classe 6ème B.

Les élèves s'intéressent aux possibilités offertes par les azulejos, certains essayent d'obtenir des petits carrés « le plus possibles » (sixième exemple), d'autres font naturellement un pavage 4x3 : « 12 c'est 4x3, vas-y, fais un rectangle de 4 sur 3 ». « C'est comme un puzzle. ». Certains groupes commencent à chercher des variantes possibles d'assemblage.

Une fois chaque production photographiée, le professeur enchaine « Mais alors combien peut-il y avoir de pavages différents ? » Beaucoup d'élèves lèvent la main pour dire « une infinité ! » Trois-quatre élèves semblent ne pas être d'accord, l'un d'eux lève la main : « Il ne peut pas y avoir une infinité de possibilités, il n'y a que douze azulejos. » Un autre veut prendre la parole : « Oui ça limite les possibilités. » Le professeur : « Pourquoi ? » Le premier élève : « B'hein douze azulejos c'est pas infini. » L'enseignante de technologie : « On peut les mettre comme on veut non ? », un élève : « oui mais en fait chaque azulejo n'a que quatre possibilités donc ça n'ira pas jusqu'à l'infini. » Le professeur : « tu en es sûr ? ». L'élève : « Oui, douze carreaux avec chacun quatre possibilités, ça fait beaucoup mais ça ne fait pas l'infini. » Le professeur : « Est-ce que tu veux aller plus loin dans ton idée ? » L'élève : « Non. »

2. Lors de la troisième séance, classe 6ème B.

Beaucoup d'élèves veulent s'exprimer, le professeur choisi de rester au tableau pour mieux gérer le débat. Jusqu'à la fin de la séance, il notera les suggestions des élèves sur le tableau blanc. Une élève (du binôme n°8) qui jusque-là ne s'était pas exprimée tient à expliquer pourquoi on doit obtenir 64 combinaisons.

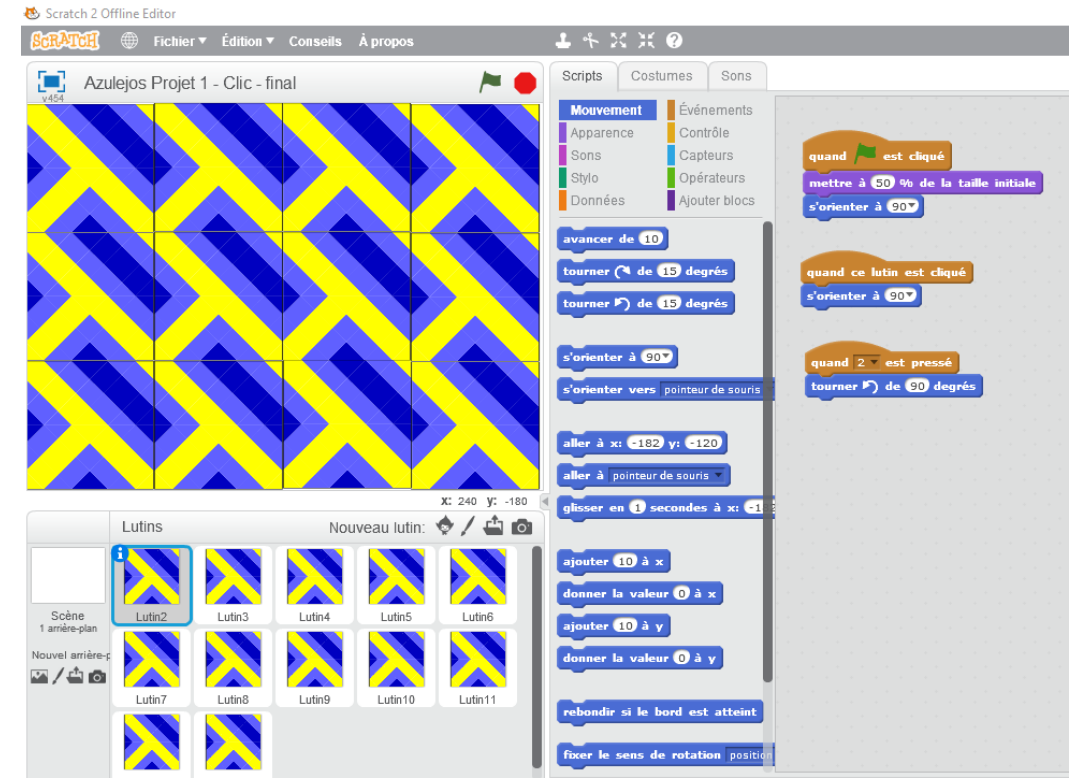
- « Le raisonnement est identique, pour deux azulejos ont a 4 × 4 = 16 possibilités, donc pour trois on doit calculer 4 × 4 × 4, du coup, on sait déjà que 4 × 4 = 16, on doit juste calculer 16 × 4. »
- « Et ça fait 56 ! » Dit son voisin.
- « Non ça fait 64 ! » Reprend l'élève interrogée.

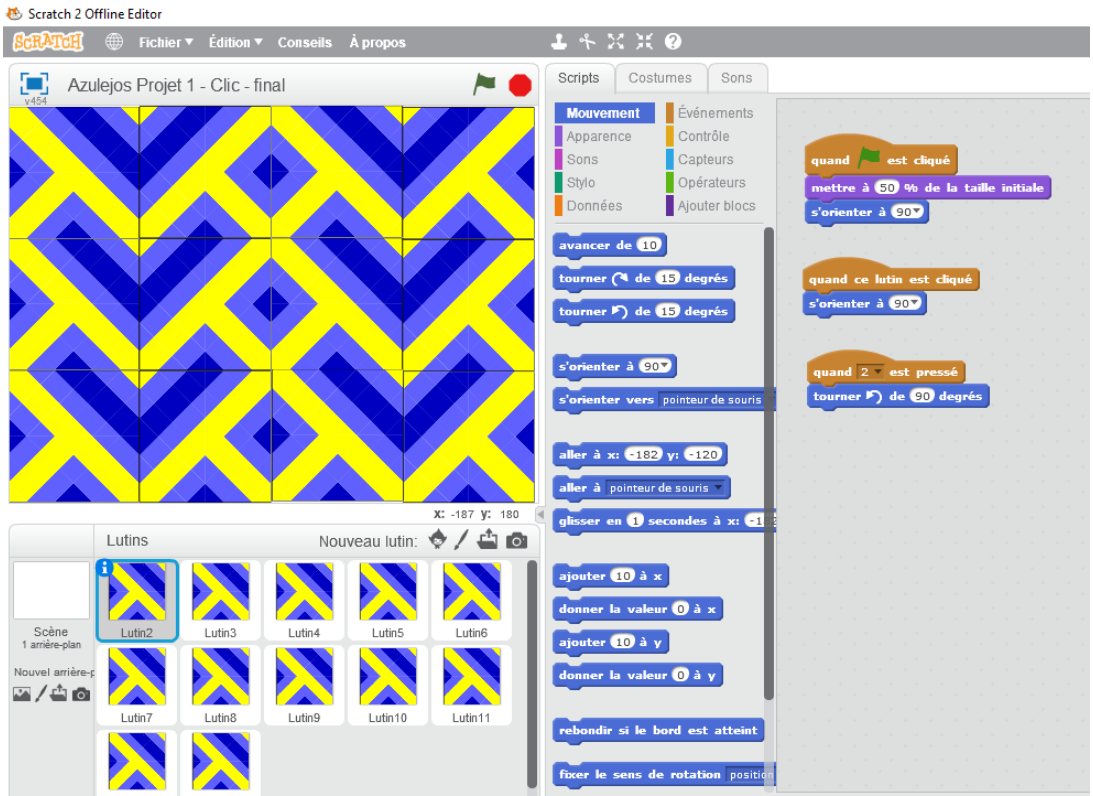
Quinze minutes après.

Le professeur : « Est-ce que tout le monde est d'accord ? »
Elève #1 : « C'est finalement plus facile de compter le nombre de possibilités que de noter toutes les combinaisons… »
Le professeur : « Je ne sais pas, qu'est-ce que tu en penses ? » « Les autres, qu'est-ce que vous en pensez ? »
Elève #2 : « Moi je préfère compter, en plus, on peut assembler les multiplications par 4.»
Le professeur : « C'est intéressant ce que tu dis, par exemple, si je te demande de me donner le nombre de combinaisons pour six azulejos, qu'est-ce que tu peux me répondre ? » (Au milieu du tableau)
Elève #2 : « Pour quatre azulejos, j'aurais fait 4 × 4 × 4 × 4 ça donne 16 × 16 et enfin le résultat c'est 256. »
Le professeur : « Et tu as fait le calcul de tête ? »
Elève #2 : « Non j'ai pris ma calculatrice pour 16 × 16. »
Le professeur : « D'accord, mais et pour six azulejos alors ? »
Elève #3 : « alors là on reprend comme pour trois azulejos, on sait que : 4 × 4 × 4 = 64 donc là je fais 4 × 4 × 4 × 4 × 4 × 4 ça donne 64 × 64 = 4096. Mais là j'ai aussi pris ma calculatrice pour 64 × 64. »
Elève #4 : « Oui, quand les calculs se répètent c'est intéressant quand même la calculatrice… »
Le professeur : « Puisqu'il reste un peu de temps (10h51) qui peut m'expliquer : si je veux calculer : 4 × 4 × 4 × 4 × 4 × 4 ×4 × 4 × 4 × 4, comment je fais ? »
Elève #5 : « On regroupe par 2, ça donne : 16 × 16 × 16 × 16 × 16, et après 64 × 64… il en reste un, il faut encore écrire …× 16. »
Elève #6 : « C'est long quand même ! »
Elève #7 : « Mais il y a pas une histoire de puissance ? »
Elève #8 : « Non de racine carrée ! »
Le professeur : « C'est très intéressant ce que vous dites, mais est-ce que vous savez de quoi de vous parlez ? »
Elève #9 : «C'est pas la racine carrée, c'est une sorte de 'V' comme ça (l'élève fait le symbole de la racine carrée). »
Le professeur au tableau : « comme ça ? »
Elève #9 : Oui comme ça !
Le professeur : « Alors, puissance ou racine carrée ? »
Elève #7 : « Moi je pense que c'est la puissance. »
Les autres élèves ne se prononcent pas mais parlent entre eux. La séance touche à sa fin.
Le professeur : « Je propose que d'ici la semaine prochaine vous réfléchissiez à ça, faites vos recherches et on en reparlera. »
[Fin de la séance]

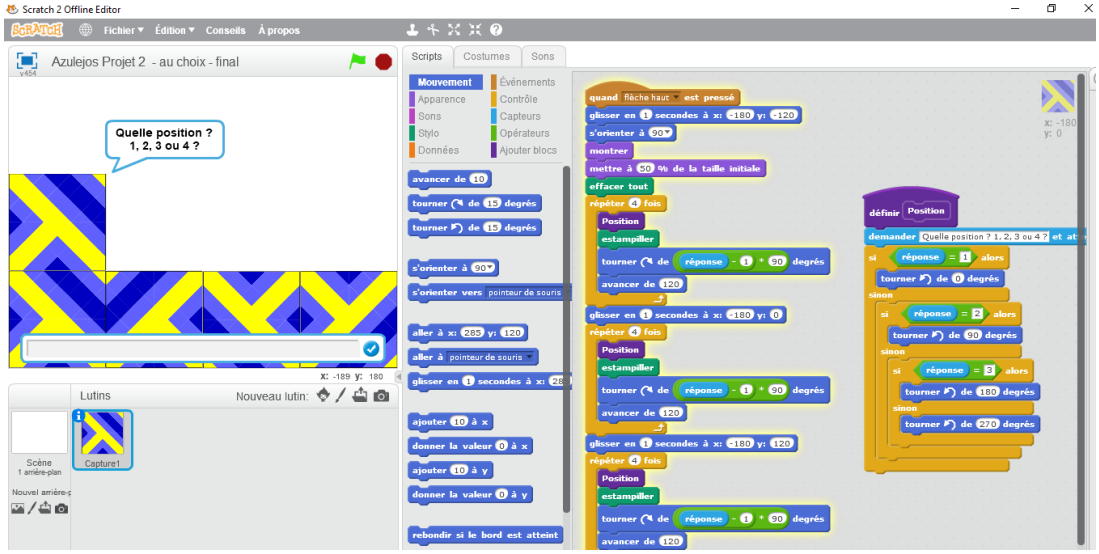
ANNEXE 2 : PROGRAMMATION EN INFORMATIQUE AVEC LES AZULEJOS.

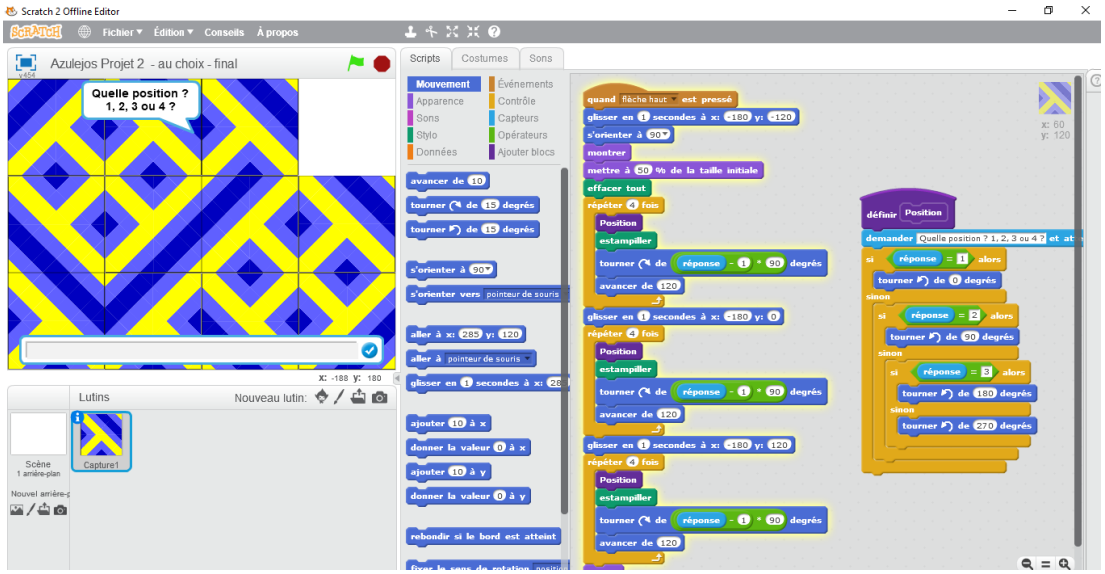
Projet n°1



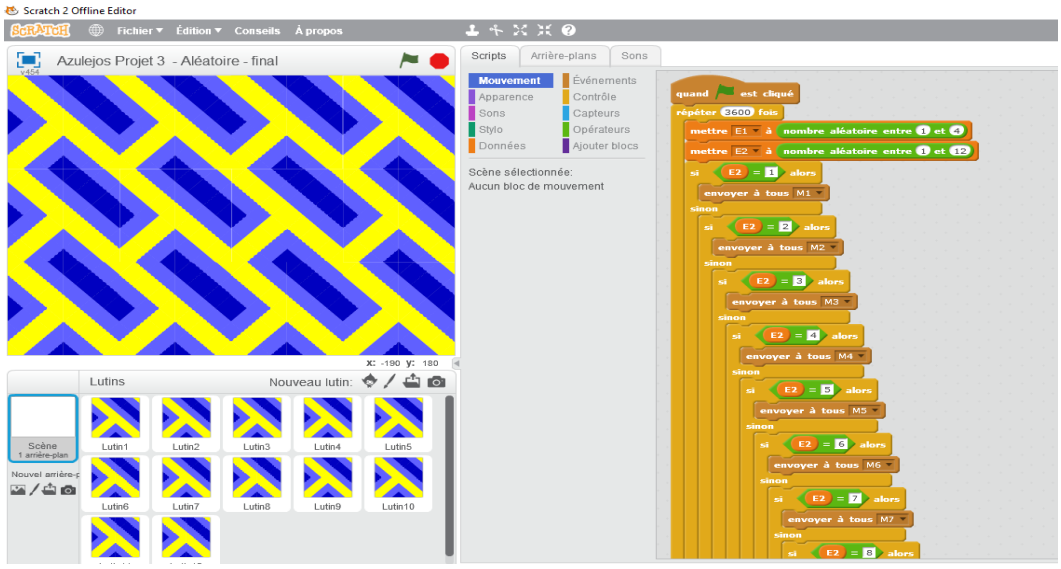


Projet n°2

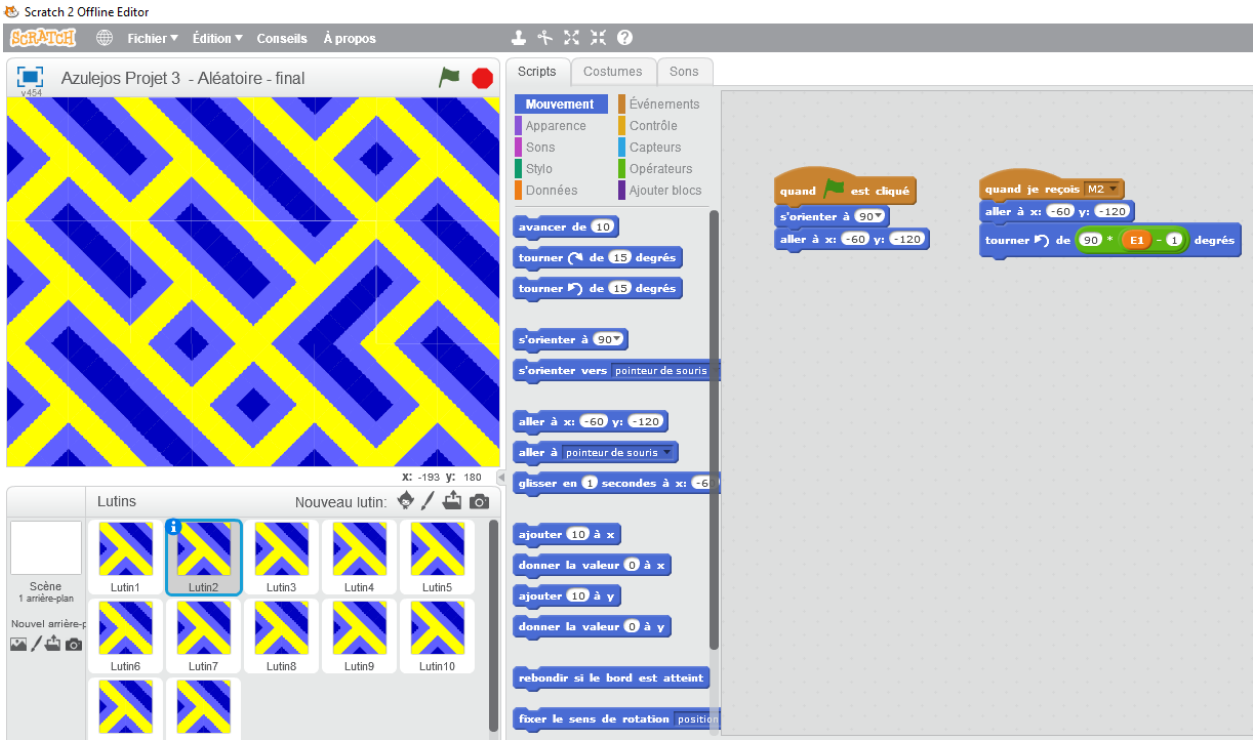




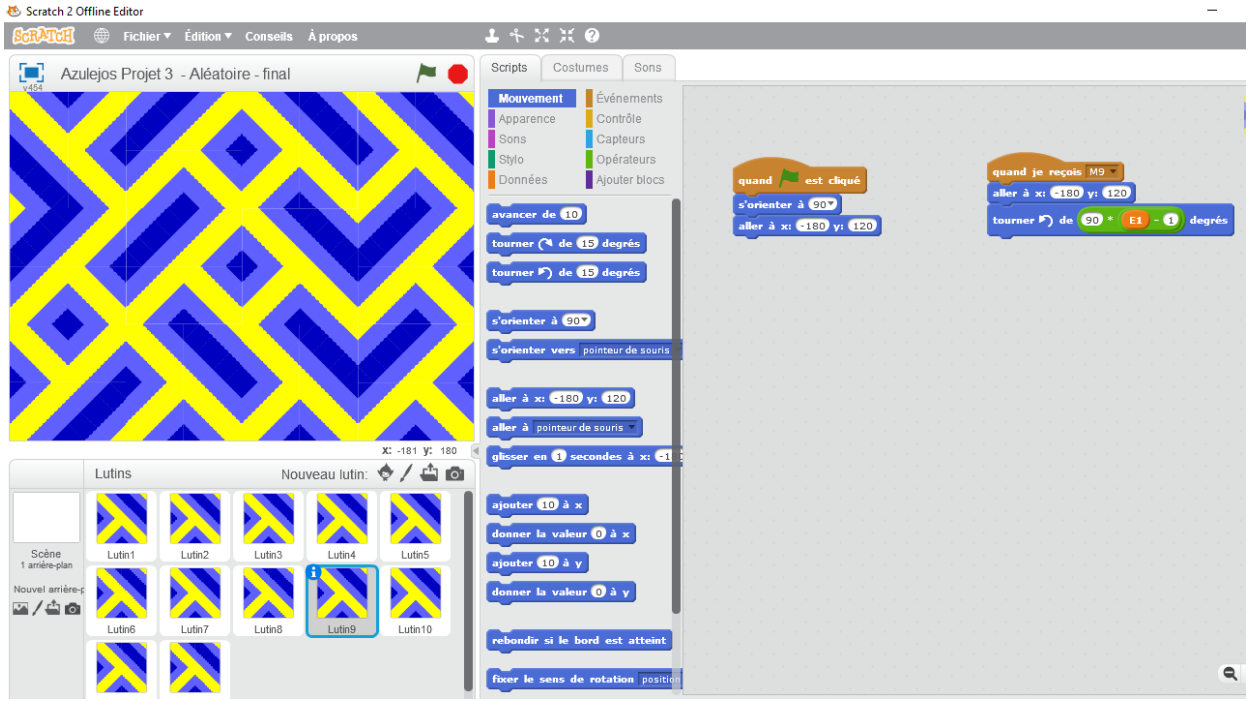
Projet n°3



Après exécution du programme du projet 3 :

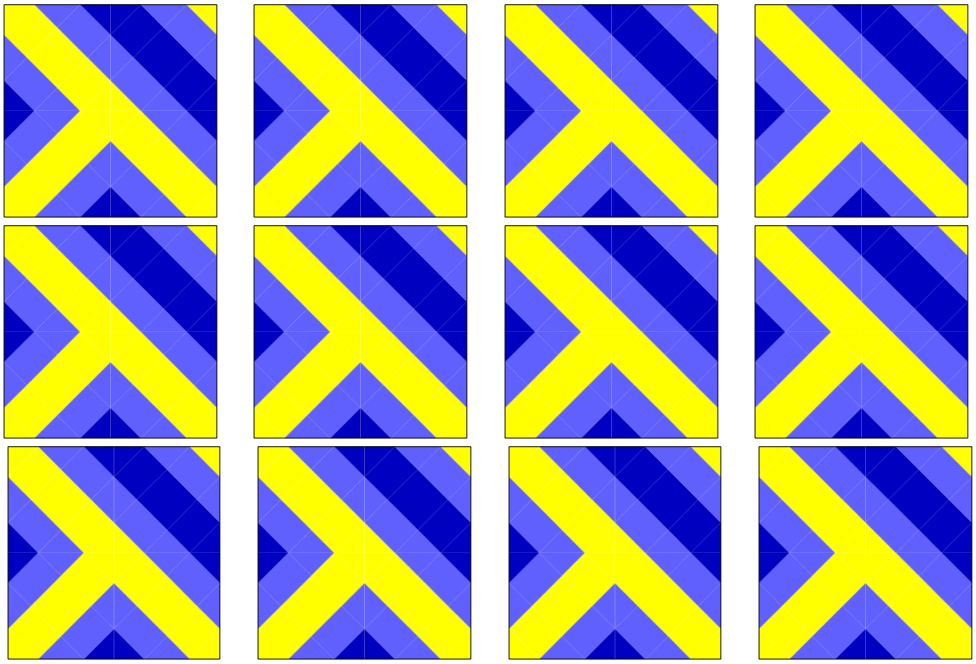


Puis …



ANNEXE 3 : SUJET DONNÉ AUX ÉLÈVES POUR LE TRAVAIL DE RECHERCHE.

Eduardo Nery est un artiste Portugais (2 septembre 1938, Figueira da Foz, Portugal - 2 mars 2013, Lisbonne, Portugal) qui, avec d'autres artistes, consacra une partie de son œuvre à « *la revalorisation esthétique des espaces urbains quotidiens…* » « *Nery réutilise les azulejos pour la création d'ambiances actualisées, dans un premier temps par l'exploration de mécanismes optiques purs, puis par l'analyse du sens des images traditionnelles sur les azulejos du XVIII*ème *siècle ([1] et [3]).* » Voici un pavage avec 12 exemplaires identiques de l'un des azulejos (carreaux) créés en 1966 par Eduardo Nery :



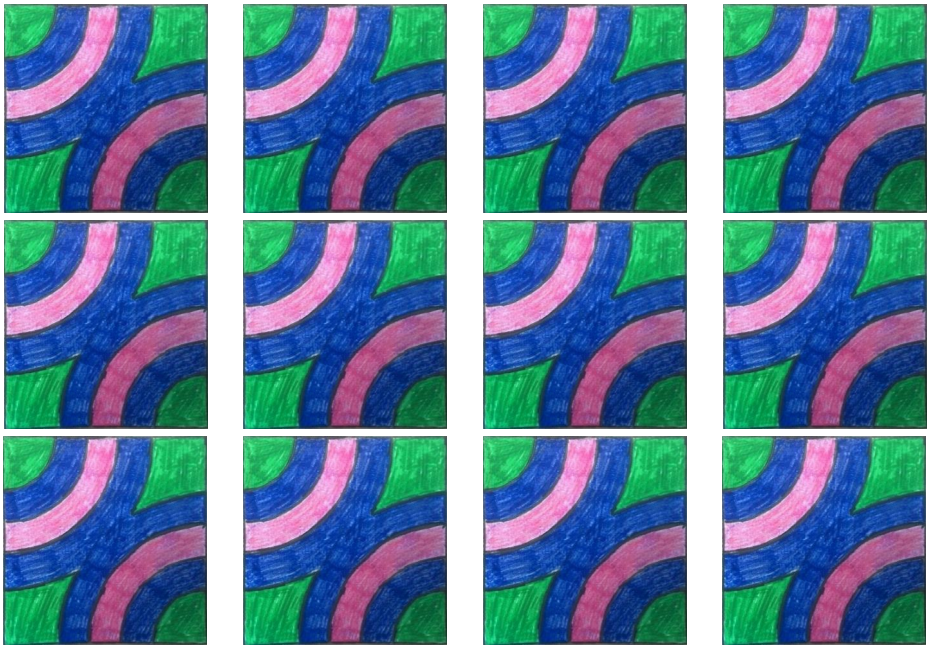
Pavage d'Eduardo Nery

Jorge Rezende, mathématicien à l'Université de Lisbonne, étudie les propriétés mathématiques des frises et des pavages construits avec ce type d'azulejos depuis environ six ans. (Voir en particulier le lien suivant : http://polyedros.blogspot.fr/)

Vous pourrez utiliser les trois programmes informatiques sous Scratch présents en pièces jointes sur votre cahier de texte en ligne pour vous aider à trouver les réponses aux questions présentes dans ce devoir ou bien découper les douze azulejos ci-dessus si vous préférez.

1) Prenez uniquement les deux premiers azulejos en haut et à gauche du pavage d'Eduardo Nery ci-dessus. Combien de frises différentes pouvez-vous former avec ces deux azulejos ? Avez-vous une façon de vérifier qu'il n'y a pas deux dessins identiques dans les frises que vous avez construites ?
2) Maintenant, prenez les trois premiers azulejos en haut à gauche du même pavage. Combien de frises différentes pouvez-vous former avec ces trois azulejos ? Comment pouvez-vous être sûr de ne pas avoir oublié quelques possibilités ?
3) Comment continuer ce calcul pour une frise de quatre, cinq etc. azulejos ? Finalement, comment arriver jusqu'au nombre de combinaisons de frises avec les douze azulejos présents dans le pavage précédent ?
4) [BONUS] Si vous vouliez montrer en classe toutes les possibilités avec les douze azulejos, lequel des trois programmes sous Scratch choisiriez-vous ? Pourquoi ? Combien de temps il vous faudrait pour montrer toutes les possibilités avec les douze azulejos ? (Donner une estimation.)

Parmi d'autres élèves de 5ème, Lydia G. de 5ème B a eu l'idée de créer un azulejo en essayant de suivre les mêmes principes de conception d'Eduardo Nery. Voici son travail :



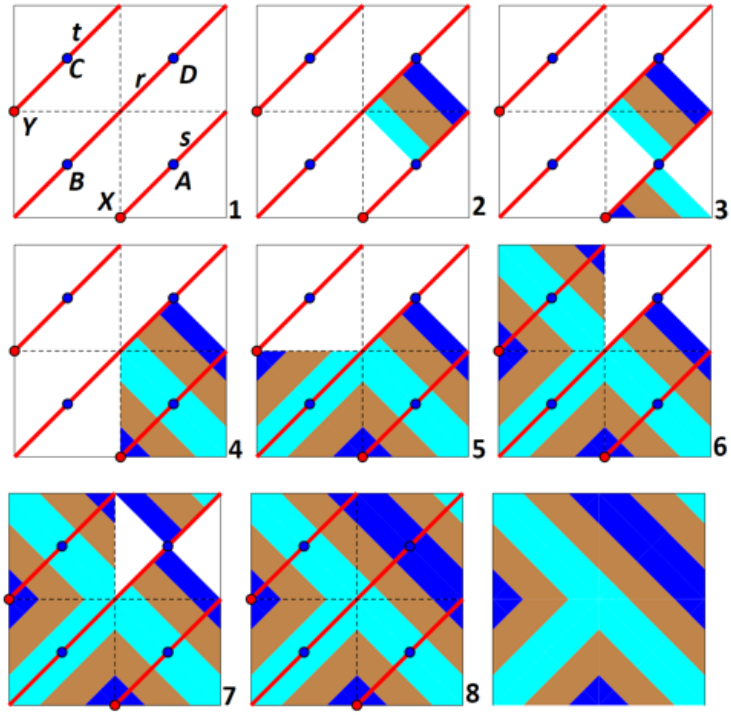
Pavage de Lydia G. 5ème B. *Année scolaire 2016/2017*.

(Ces azulejos pourront être découpés pour être manipulés et pour permettre de mieux répondre aux questions de ce devoir.)

5) Prenez uniquement les deux azulejos en haut à gauche du pavage de Lydia. Combien de frises différentes vous pouvez former avec ces deux azulejos ?
6) Maintenant, prenez les trois premiers azulejos en haut à gauche du pavage de Lydia. Combien de frises différentes vous pouvez former avec ces trois azulejos ?
7) Quelle est la différence entre l'azulejo d'Eduardo Nery et celui de Lydia qui justifie des résultats différents dans les deux cas ?

ANNEXE 4 : EXTRAITS DU TRAVAIL DE JORGE REZENDE SUR LA CONSTRUCTION GEOMÉTRIQUE DE QUELQUES AZULEJOS.

Azulejo d'Eduardo Nery :



Soient les transformations du plan suivantes :

Rotations d'angle π au tour d'un centre de rotation d'ordre 2 : A, B, C et D.

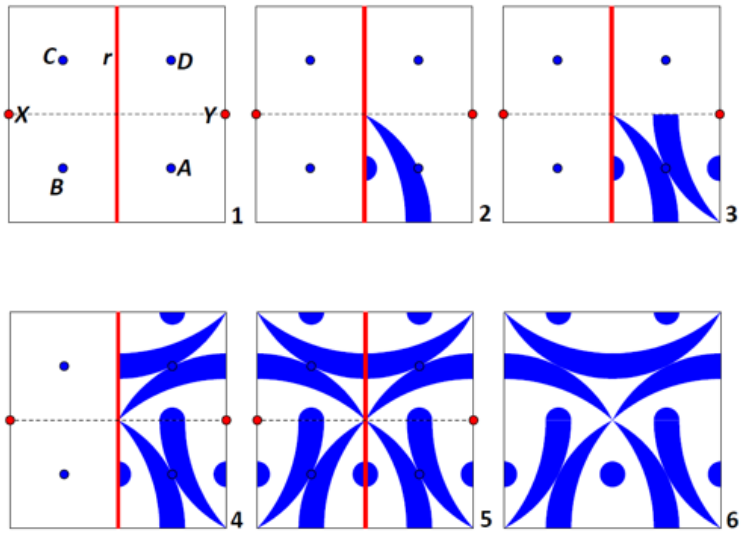
Rotations d'angle $\pi/2$ au tour d'un centre de rotation d'ordre 4 : X et Y.

Réflexions d'axe r, s, t. (facultatives, mais si la réflexion

Ainsi, l'azulejos d'Eduardo Nery peut se construire de cette façon :

- De 1 à 2: Le huitième de l'azulejo.
- De 2 à 3: en utilisant A
- De 3 à 4: en utilisant s
- De 4 à 5: en utilisant X
- De 5 à 6: en utilisant Y
- De 6 à 7: en utilisant D
- De 7 à 8: en utilisant r
- De 8 à 9: Bingo!

Azulejo de Jorge Rezende :



Soient les transformations du plan suivantes :

Rotations d'angle π au tour d'un centre de rotation d'ordre 2 : A, B, C et D.

Rotations d'angle $\pi/2$ au tour d'un centre de rotation d'ordre 4 : X et Y.

Réflexion d'axe r

Ainsi, l'azulejos de Jorge Rezende peut se construire de cette façon :

- De 1 à 2 : Le huitième de l'azulejo.
- De 2 à 3 : En utilisant A.
- De 3 à 4 : En utilisant Y.
- De 4 à 5 : En utilisant r.
- De 5 à 6 : Bingo!

ATELIER A22

LES BIDULES OU COMMENT REPRODUIRE UN SOLIDE SOUS CONTRAINTES

Tatiana BELIAEVA
MCF, Espé de Strasbourg
Irma
tatiana.beliaeva@espe.unistra.fr

Corinne JAECK
Prag, Espé de Strasbourg
corinne.jaeck@espe.unistra.fr

Catherine THOMAS
Prag, Espé de Strasbourg
catherine.thomas@espe.unistra.fr

Résumé

L'objectif de l'atelier est de présenter et d'analyser une séance de formation à destination des futurs enseignants du premier degré. Cette séance consiste, en premier lieu, à décrire et observer un objet en carton nommé « bidule » (phase manipulation), en vue de, dans un deuxième temps, le reproduire par groupes de cinq étudiants suivant des contraintes différentes selon les groupes (phase manipulation/représentation), puis enfin de dégager ensemble les connaissances produites en réponse aux différentes questions provoquées par lesdites contraintes (phase représentation/communication). L'institutionnalisation de la séance conduit à identifier un *type de tâche* (au sens de Chevallard, 1999) commun apparu dans les différents groupes, faire la liste des différentes *techniques* apparues pour l'accomplir et leur lien avec les différents *instruments* utilisés (Duval & Godin, 2005) et dégager quelques *éléments technologique*s justifiant ces techniques, en reconnaissant celles qui peuvent être produites au premier degré et celles qui ne le peuvent pas. Ainsi, on rend les étudiants conscients du *lien entre instrument et concept*. Cette situation permet également de dégager l'importance de la *déconstruction/reconstruction dimensionnelle* dans la pensée géométrique.

I - INTRODUCTION

La situation présentée dans cet article est issue d'une séquence de formation mise au point à l'ESPE de Strasbourg.

Initialement, elle était conçue pour faire vivre aux étudiants une situation de classe qui leur permettrait de comprendre ce que l'on entend par « apprendre les mathématiques en résolvant des problèmes ». Elle permettait également de revisiter certains savoirs en géométrie, essentiels pour maîtriser leur enseignement.

Le cœur du problème consistant à fabriquer un objet peu usuel, il est apparu que, très spontanément, les étudiants proposaient une grande diversité de techniques de construction. Nous avons alors voulu davantage maîtriser cette diversité en l'organisant et en la provoquant. Inspirées par les différentes lectures d'articles issus des travaux dits du groupe de Lille[88], nous avons souhaité mettre à jour le lien

[88] Le groupe dit « de Lille » fait référence à une recherche financée par l'IUFM Nord-Pas-de-Calais, et réalisée par une équipe comprenant entre autres, R. Duval, C. Gaudeul, M. Godin et B. Keskessa. Le premier article produit par cette équipe est Duval & Godin (2005).

entre les techniques de construction employées par les étudiants, les outils qui étaient à leur disposition, et surtout, les concepts qu'ils (re)construisaient ainsi.

La situation est alors devenue plus ambitieuse. Les objectifs initiaux restaient bien entendu valables, mais nous avons souhaité que la situation permette également une première rencontre avec d'autres notions de la didactique de la géométrie, telle *la déconstruction/reconstruction dimensionnelle*[89] et le lien entre instrument et concept.

La *déconstruction/reconstruction dimensionnelle* est ici particulièrement à l'œuvre, notamment parce que l'activité de départ consiste à fabriquer un objet de l'espace (en 3D), mais que toute la problématique de construction se travaille dans le plan (en 2D), avec des figures planes dont il faut retrouver des éléments (1D ou 0D) pour pouvoir les tracer.

Et, nous l'avons dit, les différentes techniques employées par les étudiants pour effectuer la tâche vont dépendre d'outils que nous choisissons de mettre à leur disposition. Mais, pour aller plus loin, et dégager le lien entre instrument et concept mathématique, nous avons prolongé ce premier temps de fabrication de l'objet par l'analyse approfondie d'un type de tâche apparu systématiquement lors de l'activité, à savoir *reproduire un cercle*. Cette analyse nous a permis de montrer l'évolution du concept de cercle au long de la scolarité, en lien avec les différents instruments qui participent à sa construction.

Cette situation étant arrivée à maturité, nous avons souhaité la mettre à l'épreuve en la proposant sous forme d'un atelier aux autres formateurs et aux chercheurs de la communauté.

L'objectif annoncé de cet atelier était donc de présenter cette situation de formation dans le but de s'interroger à la fois :

1) sur l'enseignement de la géométrie, que ce soit le nôtre en tant que formatrices ou celui des futurs enseignants du premier degré, en le mettant en lien avec les différents apports de la recherche en didactique

2) sur les modalités de la formation des futures enseignantes et futurs enseignants en participant à l'analyse et l'approfondissement d'une situation de formation par homologie.

S'agissant d'un atelier, nous avons privilégié une mise en activité introductive des participants, plutôt qu'un exposé de notre expérience de formation. Cette mise en activité, basée sur celle proposée aux étudiants a permis aux collègues de vivre cette situation. Nous les avons ensuite invités à user de leur regard critique pour analyser cette situation.

La suite de l'article présente une analyse détaillée de cette séquence de formation, inspirée à la fois par nos différentes années d'expérience et par les discussions qui ont eu lieu lors de l'atelier.

II - DESCRIPTION DE LA SITUATION DE FORMATION

La situation de formation est construite à partir d'une activité de fabrication d'objet, nommé le *bidule*. Cette activité est ce que Mangiante & al. (2017) nomme une *activité amorce*, c'est-à-dire qu'elle permet à la fois d'initier un apprentissage et de donner du sens aux concepts qui sont précisément les objets de cet apprentissage.

Nous présentons dans cette partie la situation telle que nous la faisons vivre aux étudiants, puis nous détaillons les adaptations que nous avons faites pour les participants lors de l'atelier.

La tâche initiale proposée dans cette situation est, nous l'avons dit, la fabrication d'un objet, *bidule*, dont les particularités rendent cette fabrication problématique, et donc potentiellement riche d'apprentissages. Lesquels et comment sont deux questions-clés que nous détaillerons lors de l'analyse de la situation. Nous la décrivons ici succinctement afin d'en avoir rapidement une vue d'ensemble.

[89] Les expressions *déconstruction/reconstruction dimensionnelle*, *restauration de figure*, *jeu de coût*, … sont toutes issues des travaux dits du groupe de Lille, dont le premier article de référence est celui de Duval & Godin (2005).

1 Qu'est-ce que le bidule ?

Le *bidule* est un objet fabriqué à partir de neuf disques. Un carré est inscrit dans cinq d'entre eux et un triangle équilatéral est inscrit dans chacun des quatre restants. Les carrés et les triangles équilatéraux ont tous leurs côtés de même longueur. Les disques sont ensuite pliés en suivant les côtés des polygones inscrits et les segments circulaires ainsi obtenus servent de pattes de collage vers l'extérieur.





Nous obtenons ainsi un solide d'aspect un peu curieux qui peut se modéliser, si l'on ne tient pas compte des pattes de collage, par un cube surmonté d'une pyramide régulière à base carrée[90].

La contrainte essentielle de cet objet est l'égalité entre les longueurs des côtés des carrés et ceux des triangles équilatéraux. Elle induit un fait peu visible à l'œil nu si l'on n'y prête pas attention : les disques « des carrés » ne sont pas de la même taille que ceux « des triangles équilatéraux ». Une grande partie de l'intérêt de cette activité réside précisément dans cette ambiguïté sur laquelle nous avons joué.

2 La première séance

2.1 Structure

La première séance s'organise en trois étapes d'inégales durées.

La première étape est une phase d'observation et de description. Un *bidule* de grande dimension est présenté à la classe. Il est d'abord observé en tant qu'objet physique puis décrit et analysé du point de vue de l'objet géométrique sous-jacent.

La deuxième étape, la plus longue, est celle de la fabrication de l'objet. Les étudiants doivent, par groupes de trois ou quatre personnes, fabriquer un *bidule*. Chaque groupe reçoit des contraintes différentes au niveau de la taille de l'objet (identique au modèle ou non), de l'accès au modèle et des outils à disposition. Comme il est important que chaque groupe ait le temps de fabriquer entièrement son bidule, les éventuels groupes qui terminent en avance ont pour consigne de construire un patron de l'objet théorique (nonaèdre).

[90] Cet objet est issu d'une activité mise en place par des collègues de l'IUFM de Basse-Normandie, au début des années 2000, dans le cadre de la préparation au concours.

La troisième et dernière étape consiste à mettre en commun et effectuer une première synthèse de l'activité. Afin de préparer cette mise en commun, nous demandons à chaque groupe de désigner un rapporteur et de remplir une feuille sur laquelle on trouve :

- les contraintes auxquelles était soumis le groupe ;
- les questions posées, et les difficultés rencontrées ;
- les éventuelles réponses apportées après réflexion.

On trouvera en annexe 1 une description plus détaillée de la séance et en annexe 2 la synthèse des questions posées par les étudiants.

Nous faisons ensuite une synthèse de la séance à deux niveaux :

- niveau des savoirs mathématiques : liste des questions principales rencontrées (voir annexe 2) ; les réponses à ces questions doivent être sues et constituent un premier corpus des savoirs géométriques à maîtriser. On distinguera, à la suite de ce premier corpus, un type de tâche particulier « reproduire un cercle », qui fera l'objet de la séance suivante.
- niveau des connaissances didactiques et pédagogiques : nous mettons particulièrement en avant le fait que ces connaissances sont explicitées comme réponse à un problème posé, ce qui permet de leur donner du sens. La question des choix faits par les formatrices, donc des variables didactiques pertinentes et du choix de leurs valeurs est également débattue.

2.2 Les choix d'organisation et les contraintes imposées sur les outils

L'originalité de la phase de fabrication réside dans le choix des outils proposés aux étudiants. Avant de détailler ces choix, précisons qu'il est important que le travail se fasse par groupe et que chaque groupe fabrique un *unique* objet. En effet, les étudiants sont ainsi contraints à travailler ensemble ; le moment de l'assemblage des faces est alors un moment crucial car il permet de valider ou d'invalider certaines hypothèses implicites, comme, par exemple, le fait que tous les disques auraient le même rayon. Il s'agit typiquement d'une activité auto-validante.

<table>
<tr><td colspan="2">Nous imposons à chaque groupe une consigne et des contraintes d'outils selon le tableau 1 :Consigne a</td><td colspan="2">Consigne b</td></tr>
<tr><td colspan="2">« Reproduisez un unique exemplaire du bidule que je viens de déposer sur votre table »</td><td colspan="2">« Construisez un unique bidule semblable à celui posé sur mon bureau »</td></tr>
<tr><td colspan="4">Outils et artefacts à disposition
Feuilles, ciseaux, colle et crayon pour tous. Par ailleurs, les groupes disposent de :</td></tr>
<tr><td><u>groupe 1</u></td><td>le bidule (aucun instrument de géométrie)</td><td><u>groupe 4</u></td><td>règle graduée, compas, équerre et sans rien d'autre</td></tr>
<tr><td><u>groupe 2</u>:</td><td>le bidule, compas et règle non graduée (si possible, deux groupes dans cette situation)</td><td><u>groupe 5</u></td><td>un exemplaire du disque qui devra contenir un carré (présenté comme tel)</td></tr>
<tr><td><u>groupe 3</u></td><td>le bidule, tout matériel, dont équerre et règle graduée.</td><td><u>groupe 6</u></td><td>un exemplaire du disque qui devra contenir un triangle (présenté comme tel).</td></tr>
</table>

Tableau 1: Organisation des groupes en formation

À la fin de la première séance, au moment de la synthèse, il nous parait important de faire prendre conscience aux étudiants de tous les choix à faire lors de la construction d'une telle séance ; les nôtres ont principalement été :

du côté des choix pédagogiques

- construire une activité presque transférable (en tout cas dans son organisation) aux élèves (ce qu'on appelle formation par homologie) ;
- organiser le travail par groupes dont le nombre et la taille sont fixés (la composition en est laissée libre) ;
- donner des consignes différentes pour chaque groupe ;
- faire fabriquer un objet par groupe (et non par personne) ;
- faire vivre l'activité jusqu'au bout, et donc prévoir une tâche supplémentaire prévue pour ceux qui ont terminé plus tôt (construire le patron).

du côté des choix didactiques

- l'accessibilité de l'objet à découvrir :
  - objet d'abord accessible seulement visuellement ;
  - objet sur la table de chaque groupe ;
- le type de tâche : reproduire à l'identique ou construire un objet semblable ;
- la disponibilité de l'objet-modèle lors de sa fabrication : sur la table ou pas ;
- les outils et autres artefacts à disposition.

L'objectif principal de tous ces choix est de faire émerger le plus de techniques possibles pour pouvoir analyser l'influence du choix des instruments[91] sur les techniques produites et donc sur les concepts en jeu.

Lors de la troisième phase, les choix que nous avons faits pour construire la séance sont explicités et analysés avec les étudiants. Cette analyse permet d'illustrer la complexité et la richesse de gestes professionnels en jeu lors de l'élaboration d'une situation d'enseignement. Elle est tout particulièrement indiquée pour faire vivre la notion de variable didactique.

3 La séance suivante

Lors de la mise en commun de la première séance, un type de tâche particulier apparait dans (presque) tous les groupes : *reproduire un cercle* dont on ne connait ni le centre ni rayon. Quelques solutions à ce problème (dont le pliage) sont en général dégagées par les étudiants.

Il nous a paru donc cohérent de nous appuyer sur ce type de tâche pour la suite de la séquence de formation.

Ainsi, lors de la séance suivante, nous donnons à chaque étudiant un cercle (sans aucune indication de mesure des longueurs ni de points particuliers) avec pour consigne de le reproduire par au moins deux techniques différentes.

Ils doivent ensuite s'astreindre à décrire précisément ces techniques, ce qui n'est pas un exercice trivial. Ils doivent préciser les instruments utilisés et produire au moins un début de justification pour chaque technique.

[91] au sens de Rabardel (1995). Nous revenons sur ce point et le précisons dans le paragraphe concernant les objectifs didactiques de la situation.

Lors de la mise en commun, pour chaque procédure analysée, sont explicités les éléments techniques et technologiques ainsi que la conception[92] sous-jacente du cercle. Nous recueillons les diverses propositions et les organisons dans un tableau du type de celui de l'annexe 3.

Nous leur indiquons également la lecture de Artigue (1982) sans nécessairement revenir dessus.

Nous prolongeons ensuite la situation de formation par des deux séances supplémentaires sur le lien entre les concepts mathématiques en jeu et les instruments utilisés avec un nouvel artefact : GeoGebra.

Ces prolongements n'ayant été évoqués que très brièvement lors de l'atelier, par manque de temps, nous ne les développons pas ici. On trouvera une proposition un peu détaillée de ces séances au paragraphe V.

4 Adaptation de la situation pour l'atelier

Lors de l'atelier de la COPIRELEM, et puisqu'il s'agissait d'un atelier, précisément, nous avons privilégié une mise en activité introductive des participants (qui sont eux-mêmes formateurs pour beaucoup d'entre eux), plutôt qu'un exposé de notre expérience de formation. Cette adaptation de l'activité proposée aux étudiants, à quelques modifications près, a permis aux collègues de vivre « de l'intérieur » cette situation.

Ainsi cet atelier s'est déroulé en quatre phases :

- Phase 1 – Mise en situation (phase 1 et 2 de la première séance « étudiante »)
- Phase 2 – Étude du potentiel de cette situation
- Phase 3 – Présentation de notre propre analyse
- Phase 4 – Discussion sur la suite de la séquence de formation et ses prolongements possibles ou les pistes d'amélioration.

La phase d'observation du bidule s'est déroulée à l'identique.

Lors de la phase de fabrication, nous avons légèrement modifié les contraintes par rapport à celles données aux étudiants (voir tableau 2).

Nous avons par exemple enlevé la contrainte du groupe 1 (aucun instrument) car elle a pour objectif principal de montrer aux étudiants que l'on peut se servir de l'objet physique comme instrument, ce qui nous semblait avoir peu d'intérêt avec les formateurs.

Nous avons également rajouté parfois l'obligation d'utiliser les instruments donnés.

Avec le bidule sur la table	Avec le grand bidule hors de portée de main
Groupe 1 Avec tous les instruments de géométrie et possibilité d'utiliser ceux que l'on veut	**Groupe 3** Avec tous les instruments de géométrie
Groupe 2 Avec compas et règle non graduée et obligation de les utiliser	**Groupe 4** Avec un disque distribué et tous les instruments de géométrie
	Groupe 5 Avec un disque distribué, règle non graduée et compas

Tableau 2: organisation des groupes en atelier

Les deux dernières phases ont permis de riches échanges dont le contenu a nourri les analyses qui suivent.

[92] au sens de Artigue (1982)

III - UNE ANALYSE DE L'ACTIVITE AMORCE

1 Analyse *a priori*

1.1 Analyse de la première phase

La phase 1, observation et description de l'objet, permet en premier lieu de distinguer l'objet physique (« lanterne » orange avec des pattes de collage) de son modèle géométrique (cube surmonté d'une pyramide, dont les faces sont toutes inscrites dans des disques).

Si le problème est posé dans le monde physique, les questions qu'il soulève se résolvent pour une bonne part dans le monde géométrique, mais l'on constate un retour spontané des étudiants dans le monde physique dès qu'ils ont réussi la tâche : beaucoup d'entre eux s'approprient l'objet en le décorant (dessins sur les faces) et/ou en lui donnant un rôle (« maison de la grenouille », « boîte à meuh », personnage, …).

Nous provoquons cette dualité par la forme même de notre première question : « Que pouvez-vous dire de cet objet ? »

On peut informer tout de suite ou plus tard, selon la réaction de la salle, qu'il faudra le reproduire plus tard, et donc préciser la question : « trouver toutes les informations nécessaires pour sa fabrication ».

Certaines d'entre nous posent des exemplaires du bidule sur les tables, d'autres se promènent dans la salle avec un unique grand exemplaire que personne ne touche.

Nous séparons en deux les informations que l'on peut recueillir, sachant que certaines d'entre elles peuvent appartenir aux deux catégories.

Informations relevant principalement de l'objet physique :

- la forme/l'objet ressemble à… on dirait une maison, une lanterne, …
- la couleur
- la matière
- la fabrication : les morceaux collés avec les « oreilles »
- le « cube » a cinq faces
- le « chapeau » a quatre faces
- le pliage des disques
- les longueurs des différents éléments (dans le cas où l'objet est accessible)
    - longueur des côtés des polygones
    - diamètre des cercles
    - diagonale des carrés

Informations relevant principalement de l'objet géométrique sous-jacent :

- l'objet est un cube surmonté d'une pyramide régulière
- les triangles équilatéraux et les carrés sont inscrits dans des cercles
- la longueur des côté des carrés est la même que celle des côtés des triangles équilatéraux
- les rayons des cercles circonscrits aux carrés sont différents de ceux des triangles.

Cette dernière information est souvent, soit absente, soit présente sous forme de question à laquelle on se garde bien de répondre et qui sera résolue lors de la fabrication. Elle dépend évidemment de la conscience ou non que l'on a de l'égalité des longueurs des côtés des triangles et des carrés.

En revanche, il faut confirmer les hypothèses sur la forme des faces ; en effet, les carrés pourraient tout aussi bien être des rectangles, et les triangles équilatéraux, des triangles isocèles, ce qui produirait des *bidules* non voulus.

Cette phase est également une occasion de rappeler l'usage des termes « face », « arête », « sommet ». Elle permet donc une première mise au point de la terminologie correcte des objets géométriques.

1.2 Analyse a priori de la phase de construction

L'analyse que l'on expose ici est non seulement à l'intention de celles et ceux qui souhaitent s'approprier la situation, mais est également proposée aux étudiants, en tant qu'ils sont de futurs enseignants. L'objectif est de les outiller dans le choix des variables didactiques, selon les types de tâches qu'ils souhaiteront privilégier.

Il existe deux entrées différentes dans le protocole de construction du *bidule* : l'entrée que nous nommerons « polygone » (on commence par construire un carré et/ou un triangle équilatéral), ou l'entrée « cercle » (on commence par tracer les cercles circonscrits aux carrés ou ceux circonscrits aux triangles).

La suite de la construction est quasiment imposée par ce premier choix.

Mais quel que soit le protocole choisi, en plus de la construction des objets de bases (cercle, carré, triangle), il est nécessaire d'effectuer deux des quatre types de tâches suivantes :

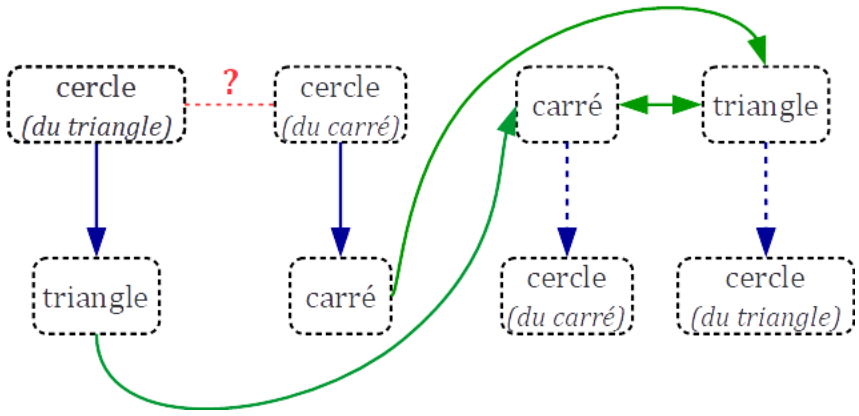
- T_1 - inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné ;
- T_2 - inscrire un carré dans un cercle donné ;
- T_3 - circonscrire un cercle à un carré ;
- T_4 - circonscrire un cercle à un triangle équilatéral.

Le choix des contraintes imposées à chaque groupe influe fortement, mais pas exclusivement, sur l'ordre dans lequel ces tâches sont réalisées.

Notons que toutes les combinaisons ne sont pas forcément possibles d'après l'analyse *a priori* ; par exemple, si l'on commence par circonscrire un cercle à un carré donné, on ne peut pas poursuivre en inscrivant un triangle dans un cercle, car il n'y a pas de lien direct entre les deux cercles. Il faut d'abord construire les triangles équilatéraux à partir des carrés, puis leur cercle circonscrit.

Nous verrons, lors de l'analyse *a posteriori*, que cela n'a pas empêché certains groupes de suivre ce chemin menant à une impasse ; il leur a suffi pour cela d'inventer un lien entre les deux cercles, le plus souvent en supposant que les cercles étaient de même rayon. L'assemblage des pièces a permis ensuite d'invalider cette hypothèse.

Lors de la mise en commun des différentes stratégies de construction avec les étudiants, on établit le schéma de synthèse suivant, qui résume tous les protocoles de construction possibles :



Les encadrés représentent les types de tâche : *construire un objet élémentaire* (cercle, carré, triangle équilatéral).

Les flèches correspondent au lien entre les différents objets élémentaires :

- flèches bleues pleines : polygone **inscrit** dans un cercle ;
- flèches bleues pointillées : cercle **circonscrit** à un polygone ;
- flèches vertes : **égalité** des longueurs des côtés des polygones ;
- pointillé rouge : lien supposé entre les dimensions des deux cercles.

En conséquence, les quatre colonnes correspondent aux quatre types tâches T_i décrites ci-dessus.

La réalisation de chacune de ces tâches dépend évidemment des contraintes imposées aux groupes, mais également des choix faits par les étudiants.

Nous donnons en annexe 4 une description détaillée d'un grand nombre de techniques possibles pour ces différentes constructions.

2 Analyse *a posteriori*

La première observation que l'on a pu faire est que les procédures élémentaires de construction à la règle non graduée et au compas (en particulier le tracé de la droite perpendiculaire à un segment donné passant par une extrémité de ce segment) ne sont pas disponibles chez les étudiants. Il faut souvent la rappeler aux groupes qui ne peuvent pas s'en passer.

Les étudiants qui ont accès aux disques vont assez naturellement utiliser le pliage pour retrouver le centre du disque ou pour construire un carré, plus rarement pour construire le triangle ; en général ils ont du mal à expliquer pourquoi leur procédure fonctionne.

Les étudiants qui ont accès au bidule **et** aux instruments ne pensent pas à utiliser le bidule comme gabarit. L'autorisation d'utiliser des instruments est très souvent perçue comme une obligation de les utiliser.

Systématiquement le seul groupe à utiliser le bidule comme gabarit est celui qui n'a pas d'instruments de construction à disposition, et l'idée de le faire n'est pas toujours immédiate. Mais une fois que les étudiants se permettent de le faire (et souvent elles/ils utilisent le bidule comme gabarit pour les cercles seulement, les polygones s'obtenant ensuite par pliage), c'est généralement le groupe qui termine le premier.

L'objectif de cette consigne (reproduire sans utiliser d'instruments) avait pour objectif initial d'attirer l'attention des étudiants sur le côté purement physique de la tâche et d'amener la discussion sur le statut de la figure et une première approche des paradigmes géométriques. Nous avons finalement abandonné cette entrée pour privilégier la mise en valeur du lien entre technique attendue et niveau de connaissance travaillée. Cette consigne n'a donc pas été retenue pour l'atelier avec les formateurs.

Les informations trouvées lors de la première phase ne sont pas toujours utilisées pleinement. En particulier, à chaque fois, au moins un groupe ne prend pas en compte l'égalité des côtés, mais part de l'hypothèse que les disques sont tous de même diamètre.

Cela permet de dégager de façon lumineuse deux aspects d'une situation au sens de Brousseau :

- la situation est auto-validante ; si chaque membre du groupe a construit sa propre face (triangle ou carré) de son côté, la mise en commun est nécessaire pour la construction d'un seul bidule ; et là, ça fonctionne ou non, et sans intervention du formateur ;
- la rétro-action du milieu (ici, le bidule ne fonctionne pas) oblige chacun à revenir sur ses hypothèses et/ou ses techniques. Et donc à mettre à l'épreuve ses propres conceptions et, dans le meilleur des cas, à les faire évoluer, toujours sans intervention du formateur.

Nous n'avions pas prévu initialement une question qui émerge dans la plupart des groupes, et d'année en année, ce qui tend à montrer qu'elle n'est pas contingente mais fait partie de la situation :

Comment trouver le centre d'un disque ?

La grande diversité des techniques pour le faire, selon les instruments mis à disposition, nous a incité à rebondir sur cette question pour la suite. Nous nous sommes servies de la justification de chacune de ces techniques pour ajouter les deux derniers objectifs à la liste suivante :

- revoir de nombreuses propriétés de géométrie plane ;
- travailler la preuve en mathématique, particulièrement la démonstration en géométrie ;
- mettre à jour le lien entre l'instrument et le concept ;
- illustrer l'évolution des objets géométriques (passage de la vision globale au concept mathématique) à travers le cercle et la notion de déconstruction/reconstruction dimensionnelle.

IV - SYNTHÈSES DES OBJECTIFS DE LA SITUATION

La Copirelem (Copirelem, 2018) distingue quatre objectifs à l'enseignement des mathématiques pour les futurs enseignants du premier degré :

- *dominer les notions à enseigner ;*
- *comprendre et s'approprier les programmes ;*
- *comprendre les séquences, séances et manuels et les mettre en œuvre ;*
- *analyser les procédures des élèves.*

Nous nous y référons dans la suite pour analyser les concepts travaillés lors de la situation.

1 Les objectifs mathématiques

Les contraintes imposées à chaque groupe influent évidemment fortement sur les connaissances mises en jeu, nous reviendrons largement sur ce point lorsque nous développerons les objectifs didactiques, mais la synthèse de l'activité permet à tout le monde de (re)voir particulièrement les notions suivantes, sans que la liste soit exhaustive :

- les objets élémentaires : *cercle*, *disque*, *carré* et *triangle équilatéral ;*
- les objets relatifs : *cercle circonscrit à … , médiatrice* d'un segment, *centre* d'un cercle ;
- les différentes techniques de construction de ces objets ;
- les propriétés mathématiques justifiant ces techniques ;
- des ébauches de démonstration en géométrie.

Toutes ces connaissances sont anciennes et il serait souhaitable qu'elles soient disponibles[93] pour les étudiants Elles répondent particulièrement au premier objectif *dominer les notions à enseigner*. Il s'agit donc en premier lieu de permettre aux étudiants de revisiter des notions de géométrie de base, dans le but de les maîtriser, en particulier en leur donnant du sens.

De surcroît, l'organisation de la séquence doit également leur permettre de distinguer celles qu'ils devront à leur tour enseigner de celles qu'ils doivent connaître pour atteindre un niveau de maîtrise suffisant à leur future pratique professionnelle. Ceci relève donc du deuxième objectif, à savoir comprendre la logique interne des programmes.

Par exemple, si la médiatrice d'un segment peut être rencontrée à l'école primaire, sa construction au compas et à la règle non graduée nécessite une compréhension fine de ses propriétés qui va au-delà des programmes actuels, mais qui doit cependant être connue des enseignants. Ainsi, si nos étudiants souhaitent reprendre la situation des bidules avec leurs propres élèves, il leur faudra savoir jusqu'où la mener, et revisiter les objectifs pour l'adapter à leur classe.

[93] au sens d'Aline Robert (1999) : « Nous parlons de connaissances mobilisables pour indiquer que les élèves [ici les étudiants] peuvent les utiliser correctement mais à la demande, alors que nous parlons de connaissances disponibles pour indiquer que cette utilisation peut être improvisée par les élèves, à bon escient, sans aucune indication externe. » , note de fin n°19, p 152

La deuxième séance permet tout particulièrement de dégager l'évolution du concept de cercle dans la scolarité (de la reconnaissance globale à l'ensemble de points) et d'éclairer ainsi une partie du programme d'enseignement.

2 Les objectifs didactiques

Il est clair que, pour les futurs enseignants, toutes les connaissances didactiques sont nouvelles mais selon la place de la séquence dans l'année, certaines d'entre elles peuvent déjà avoir été rencontrées et explicitées. Comme nous avons placé cette première séquence de géométrie vers le mois d'octobre, nous avons déjà eu l'occasion d'installer en particulier le concept de *variable didactique*. La classification proposée est par conséquent dépendante de l'organisation générale de la formation.

Nous la présentons d'abord résumée puis nous développons chaque point :

- **L'ancien**
  - variable didactique
  - milieu réactif
  - situation auto-validante
- **Le nouveau implicite** : analyse praxéologique (Chevallard,1999)
  - tâche et type de tâche
  - techniques associées
  - éléments technologiques justifiant les techniques
- **Le nouveau explicite**
  - déconstruction/reconstruction dimensionnelle (Duval & Gaudin, 2005)
  - lien entre instrument et concept

2.1 L'ancien

La situation telle qu'elle est proposée (avec des contraintes différentes selon les groupes) permet dans un premier temps de faire vivre en acte la notion de *variable didactique*, et d'illustrer *in situ* comment ses variations permettent d'influer fortement sur les procédures des élèves (ici des étudiants).

La variable la plus évidente est bien évidemment *le choix des artefacts*[94] ou outils, mis à disposition de chaque groupe dans la situation de la construction du bidule. Bien évidemment, tous les groupes disposent de crayon, de ciseaux et de colle, mais pour l'un d'entre eux, nous avons choisi de ne rien lui donner d'autre. Pour les autres, nous modulons entre le « tout autorisé » et l'obligation de n'utiliser que la règle non graduée et le compas, en passant par l'utilisation des gabarits des disques du carré et du triangle, voire du bidule lui-même.

Selon que les groupes disposaient d'un modèle ou non, le type de tâche n'était pas tout à fait le même : pour les uns, il s'agissait de reproduire un bidule isométrique (mêmes longueurs et mêmes propriétés angulaires), pour les autres, il s'agissait d'en construire un objet semblable (mêmes propriétés angulaires, mais pas nécessairement mêmes longueurs).

Il est apparu que quelles que soient les contraintes imposées aux différents groupes, ils se sont tous (à l'exception du groupe sans outils) heurtés à la même question – qui a plus ou moins fait obstacle – à savoir : comment retrouver le centre des cercles circonscrits. Ce centre est nécessaire pour les uns afin de reproduire les cercles, pour les autres afin de tracer les polygones inscrits dans lesdits cercles. Il nous a donc paru fertile de prolonger l'activité des bidules par une analyse praxéologique de ce type de tâche. Nous avons déjà évoqué la séance qui suit l'activité des bidules, et nous en développons les objectifs dans le paragraphe suivant.

Le second concept de didactique que nous réemployons ici est celui de *milieu réactif*. C'est une nouvelle fois l'occasion de pointer l'intérêt d'une situation *auto-validante* (il existe un lien entre les disques du

[94] Nous préférons le terme *artefact* à celui d'*instrument* car, au sens de Rabardel (1995), celui-ci dépend de l'utilisation qui en est faite ; par exemple, l'un utilisera le compas (artefact) comme report de longueur, et l'autre comme traceur de cercle

carré et ceux du triangle équilatéral dont il faut prendre conscience sinon le bidule est « bancal »). Les questions que les groupes se posent sont issues des difficultés qu'ils éprouvent à réaliser la tâche. Ainsi, il devient nécessaire de développer une technique pour trouver le centre d'un cercle, pour pouvoir, par exemple, tracer celui-ci ; cette technique n'est donc pas apportée gratuitement par un enseignement frontal mais répond au besoin de résoudre un problème.

2.2 Le nouveau implicite

Nous ne faisons pas de cours explicite sur la Théorie Anthropologique du Didactique, mais nous nous servons souvent des concepts développés par Yves Chevallard (dans, par exemple, Chevallard 1999) pour analyser une activité. En particulier, nous reprenons les termes de *tâche*, *type de tâche* et *technique* dans le sens même de la TAD. En revanche, nous parlons plutôt d'*éléments technologiques* ou *théoriques* plutôt que de *technologie* ou *théorie*, sans d'ailleurs les distinguer. Nous précisons que ces éléments permettent de justifier et/ou de comprendre les techniques employées, et qu'ils servent de point d'appui pour élaborer une justification de ces techniques.

Il nous parait particulièrement important que les étudiants distinguent les notions de *technique* et *éléments technologiques*, afin de les outiller dans l'analyse des productions d'élèves et des énoncés de manuels.

La séance succédant à celle de la construction du bidule permet une utilisation en acte de ces distinctions car nous nous concentrons sur un *type de tâche* particulier : reproduire un cercle.

Nous avons préféré ce type de tâche à celui de « trouver le centre d'un cercle donné » car il nous a permis de focaliser sur l'objet « cercle » en mettant à jour, à travers les différentes techniques de sa reproduction, l'évolution de ses différentes conceptions (voir par exemple Artigue, 1985).

Par exemple, la technique consistant à découper le disque à reproduire et en dessiner le contour (technique disponible dès que l'on sait se servir d'une paire de ciseaux) s'appuie sur une conception première du cercle, celle de « contour d'un disque », alors que tracer les médiatrices de deux cordes pour trouver son centre s'appuie sur des éléments théoriques beaucoup plus élaborés (par exemple, le cercle est l'ensemble des points équidistants d'un centre, et la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment).

Une analyse praxéologique de ce type de tâche (dont on rappelle qu'on en trouve une synthèse en annexe 3) nous a permis, non seulement d'étudier l'objet « cercle » et son évolution depuis la maternelle jusqu'au cycle 4, mais également d'introduire la notion de déconstruction dimensionnelle et du lien entre les instruments et les concepts mis en jeu. Ces deux points ont, quant à eux, fait l'objet d'une explicitation, et sont devenus de vrais outils didactiques de la géométrie.

2.3 Le nouveau explicite

Le bidule est en réalité une fausse situation 3D, au sens où ses objectifs ne se situent pas (ou très peu) en géométrie dans l'espace. Il nous semble remarquable que le point de départ soit un solide alors que les notions mathématiques en jeu relèvent toutes de la géométrie plane.

C'est pour cette raison que cette situation nous parait idéale pour une première rencontre avec la notion de *déconstruction dimensionnelle*[95].

En effet, la construction du solide oblige évidemment à produire les faces de ce solide, et donc à une déconstruction 3D/2D. Ensuite, quelles que soient les contraintes, et donc les techniques déployées par les groupes, chacun d'entre eux devra repérer les pliages correspondant aux arêtes des polygones inscrits dans les cercles, et donc produire des éléments 1D. Pour la plupart d'entre eux, cela devra également passer par le repérage de points particuliers (centre des cercles, sommets des polygones, milieu des côtés, …) et donc par la mise en évidence d'objets 0D.

Ainsi, nous pouvons expliciter deux aspects particuliers de l'enseignement de la géométrie :

[95] voir note 2

- Chaque objet nD est d'abord rencontré comme élément (face, contour, intersection…) d'objets (n+1)D, ce qui induit en particulier une logique d'enseignement des solides vers les points (et non le contraire) ;
- Les techniques de construction dépendent des artefacts mis à disposition ; ces artefacts deviennent des instruments privilégiés pour produire des objets particuliers ou vérifier des propriétés particulières.

La séance d'analyse praxéologique de la construction d'un cercle permet d'insister particulièrement sur ces deux points. En effet, les différentes techniques utilisées pour construire un cercle sont évidemment dépendantes des artefacts utilisés, ce qui nous permet d'insister sur ce lien entre artefact et concept (ici, conception du cercle). La déconstruction/reconstruction dimensionnelle est aussi à l'œuvre : en dégageant les objets 2D/1D/0D liés au cercle ; on illustre comment on peut faire évoluer le regard des enfants sur cet objet.

Nous continuons à travailler ces deux points dans les prolongements de la situation initiale, par des activités de restauration de figure. Nous l'évoquerons dans le paragraphe V.

3 Les objectifs pédagogiques

La situation-amorce est très clairement une situation qui peut se transposer, moyennant quelques ajustements mineurs, dans une classe de l'école élémentaire. Les étudiants, mis en position réflexive par rapport à la situation qu'elles ou ils viennent de vivre, peuvent dégager différents principes pédagogiques comme :

- l'organisation d'une séance à partir d'une situation-amorce réactive : mise en activité par groupe, observation, mise en commun, synthèse … ; en particulier, apprentissage d'une posture de retrait en situation a-didactique ;
- en amont, analyse de la situation et choix des différentes valeurs des variables didactiques – ici, par exemple, réflexion sur les choix des instruments, ou , plus tard, choix des coûts des instruments dans une activité de restauration de figure ;
- en amont toujours, articulation de la première situation avec des séances de prolongements et d'entraînement ;
- en aval, retour réflexif sur les choix effectués et les productions des élèves.

V - PROLONGEMENTS DE LA SITUATION DE FORMATION

La séquence de formation, nous le rappelons, commence par une séance de 2h consacrée à la construction et à l'analyse de *bidules*, suivie d'une deuxième séance centrée sur une tâche de reproduction d'un cercle. Elle est ensuite prolongée par deux séances centrées sur la déconstruction dimensionnelle avec un nouvel outil, GeoGebra.

Pour l'atelier, nous avons fait le choix de ne pas exposer cette séquence telle que nous l'animons auprès des étudiants, mais plutôt de proposer aux participants de l'atelier de réfléchir à la conception d'une telle séquence. Nous leur avons demandé en particulier de détailler les connaissances visées[96], ainsi que d'imaginer les prolongements possibles. Faute de temps, nous n'avons pu qu'évoquer avec eux ces prolongements. Nous donnons donc ici quelques pistes.

1 La déconstruction dimensionnelle avec un logiciel de géométrie dynamique

Si la situation des *bidules* devient une situation de référence pour comprendre le lien entre instrument et concept, elle ne nous semble cependant pas suffisante pour espérer que les travaux du groupe de Lille puissent diffuser dans les classes et modifier les pratiques de l'enseignement de la géométrie.

[96] Mangiante et al. (2017) distinguent trois types de connaissances que l'on vise à faire acquérir aux futur.e.s enseignants : mathématiques, didactiques et pédagogiques. Nous avons repris ces distinctions.

C'est pourquoi nous prolongeons cette première séquence par une seconde dédiée spécifiquement à la déconstruction/reconstruction dimensionnelle; celle-ci nous sert de prétexte au maniement du logiciel GeoGebra, qui pose d'ailleurs la question de la nature des instruments utilisés pour construire une figure (les outils GeoGebra sont des artefacts différents des outils usuels de la géométrie).

Nous clôturons la séquence par une activité de construction avec coûts.

Pour des raisons pratiques, nous utilisons le logiciel GeoGebra ; les étudiants peuvent se le procurer facilement en ligne ; une grande majorité d'entre eux disposent d'un ordinateur portable qui permet de transformer rapidement notre salle de cours classique en salle informatique (il suffit d'apporter des rallonges pour les chargeurs).

La prise en main du logiciel est laissée à leur initiative, nous leur mettons à disposition un léger tutoriel leur permettant d'acquérir les gestes de base (trouver un outil, sélectionner/déplacer/effacer un objet, …).

Voici donc quelques activités possibles.

1.1 Reprise des constructions liées au bidule

Nous demandons aux étudiants de reproduire les figures obtenues lors de la construction du bidule, à savoir un carré et un triangle équilatéral chacun inscrit dans un cercle, avec le logiciel de géométrie dynamique, d'abord sans contrainte particulière.

Cela nous permet, lors d'une première synthèse, de définir les concepts de figure *molle* et figure *robuste*, que nous empruntons à Healy (citée par Restrepo, 2008) : une figure robuste est une figure qui conserve toutes ses propriétés géométriques au cours d'un déplacement[97] quelconque, alors qu'une figure molle ne conserve pas toutes les propriétés géométriques demandées.

Contraindre les étudiants à obtenir une figure robuste nécessite l'utilisation de techniques s'appuyant sur les propriétés géométriques des objets et de leurs relations.

De plus, les contraindre à commencer par le cercle pour construire un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle n'utilise pas les mêmes propriétés que construire la même figure en commençant par le triangle.

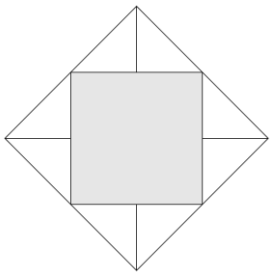
Pour les plus rapides, nous pouvons imposer la contrainte supplémentaire que les côtés du carré et du triangle équilatéral soient de même longueur.

Cette première activité permet donc de travailler en profondeur les savoirs géométriques visés dans la situation des *bidules*.

Mais elle permet également de s'approprier un nouveau type d'instruments, indiqués selon leur fonction première plutôt que par un nom commun générique (par exemple outil *droites perpendiculaires* plutôt que *équerre*) ; il n'est pas évident pour les étudiants et *a fortiori* pour leurs futurs élèves, qu'il faille utiliser l'outil *cercle* pour construire un triangle équilatéral robuste ; pourtant, sur papier, ils ou elles utilisent sans hésiter leur compas. Il n'est donc pas inutile d'expliciter, même à leur niveau, le lien entre le compas et le cercle, ou, plus exactement, pourquoi un compas permet de tracer des cercles. Dans le cadre des travaux du groupe de Lille, ce lien entre *compas* et *cercle* est largement étudié et développé par Bulf & Celi (2016).

1.2 La déconstruction/reconstruction dimensionnelle avec GeoGebra

L'exercice suivant consiste à reproduire des dessins de façon robuste, comme par exemple celui-ci.



Les étudiants sont d'abord en position d'élèves pour effectuer la tâche demandée. Pour chaque dessin proposé, il est nécessaire d'analyser d'abord sa structure, et donc de forcer son regard à ne pas se contenter de ce qu'il voit, mais à déterminer les relations entre différentes composantes de ces

[97] Déplacement au sens de l'outil « déplacer » de GeoGebra, et non d'un déplacement au sens mathématique du terme.

figures. Il s'agit donc bien, en acte, de les décomposer, et même de les déconstruire, pour mieux les reconstruire ensuite.

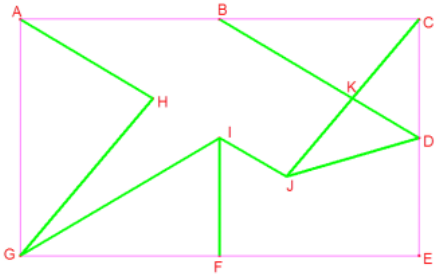
Par exemple, pour le dessin proposé, il faut prendre en considération que les sommets du carré central sont les milieux des côtés du grand carré ; il convient donc de considérer des éléments 1D et 0D qui n'apparaissent pas *a priori* dans les figures pour pouvoir les reproduire, comme par exemple, les droites supportant les diagonales du grand carré.

Lors de la correction de ces constructions, nous revenons sur la notion de changement de regard nécessaire sur les figures pour pouvoir les comprendre.

1.3 La restauration de figure avec GeoGebra

La première activité de restauration se fait avec GeoGebra. Nous avons choisi pour cela une figure inspirée de Keskessa, Perrin-Glorian & Delplace (2007). Elle s'appuie sur un réseau de ligne qu'il faut retrouver pour construire la figure à moindre coût.

Reproduire la figure ci-contre à partir du rectangle ACEG
(*on doit pouvoir déplacer les sommets du rectangle tout en conservant la configuration obtenue).*



Selon les outils utilisés, votre réalisation coûte plus ou moins cher :

- Le rectangle ACEG coûte 0 point, quelle que soit la manière de le construire ;
- L'outil *point* coûte 0 point ;
- Les outils *droite*, *demi-droite* et *segment* coûtent 1 point ;
- L'outil *cercle (centre ; point)* coûte 1 point ;
- Les outils *droite parallèle* et *droite perpendiculaire* coûtent 4 points ;
- L'outil *médiatrice* et l'outil *compas* coûtent 8 points ;
- L'outil *milieu ou centre* coûte 10 points ;

Tous les outils utilisant une mesure coûtent 12 points.

Toutes les manipulations consistant à mettre en forme le dessin, tel que nommer des points, rendre invisible des objets, les colorier … ne coûtent rien.

Là encore, les étudiants sont d'abord placés en situation d'élèves pour effectuer la tâche demandée. Beaucoup se prennent au jeu et cherchent à améliorer leur première construction. Nous n'avons pas de difficulté à les convaincre qu'il en sera de même pour leurs futurs élèves.

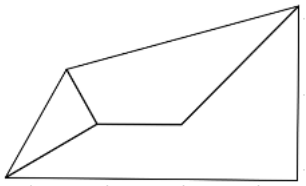
Ici, les coûts ont délibérément été choisi pour privilégier l'utilisation des alignements de points. Nous faisons prendre conscience aux étudiants du lien entre la notion que nous souhaitons travailler, et les instruments utilisés pour la construction.

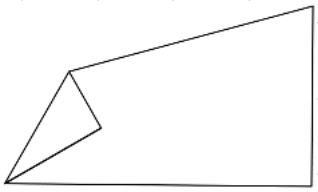
Afin de promouvoir ce genre d'activité dans les classes, nous souhaitons poursuivre sur ce thème dans un environnement papier/crayon, d'abord pour être plus près de la réalité probable de leurs futures classes, et ensuite pour permettre aux étudiants de faire un pas de côté, et de se positionner en tant qu'enseignant-chercheur. C'est l'objectif de la dernière partie de la séquence.

2 Le jeu des coûts en situation de restauration de figure

Nous partons d'une figure inspirée de Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian (2014).

- Chaque groupe doit proposer un ***système de coût des outils géométriques*** nécessaires à la reproduction d'une figure (figure de gauche), à partir d'une amorce (figure de droite) :





- Chaque système de coût doit correspondre à un objectif d'apprentissage, ce qui signifie que la restauration de figure est possible à moindre coût avec l'objectif visé.
- Les objectifs d'apprentissage sont à chercher dans les programmes

Les étudiants peuvent ainsi commencer à se positionner en tant que futurs enseignants en construisant eux-mêmes leur exercice, en fonction des objectifs qu'ils souhaitent travailler.

Un débat fructueux est ensuite organisé en classe pour discuter des différentes propositions.

VI - CONCLUSION

La situation que nous venons de décrire nous semble pertinente d'un point de vue didactique. Elle a le mérite d'être robuste et permet d'atteindre les mêmes objectifs d'année en année. En plus de réactiver les connaissances de géométrie élémentaire chez les étudiants, elle permet de dégager les principes complexes de la conception d'une activité basée sur la résolution de problème et le travail de groupe, et, surtout, elle permet de développer certains éléments théoriques importants de la didactique des mathématiques. Pour ne citer que les plus importants :

- le rôle des variables didactiques ;
- la déconstruction/reconstruction dimensionnelle pour l'analyse de figures ;
- le lien entre instrument de construction et concept mathématique.

Elle sensibilise de plus les futurs enseignants à l'intérêt de nouvelles activités en géométrie, encore peu présentes dans les manuels, telles que la restauration de figure. Une telle activité de restauration à partir d'une amorce, couplée à un jeu de coût sur les outils proposés, est riche d'apprentissage pour les élèves, comme le montrent tous les travaux du groupe de Lille.

Nous espérons contribuer ainsi à la diffusion de ces travaux, et nous remercions tous les participants à notre atelier, dont les réactions et le retour ont permis la maturation de notre réflexion et la rédaction de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (1982). A propos des conceptions du cercle. Présentation de situation de classes privilégiant certaines de ces conceptions, *Grand N*, 27, 45-72

Bulf C. & Celi V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire. Une transition clé : du gabarit au compas. *Grand N*, 97, 21-58

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–265

COPIRELEM. (2018). *Quelles mathématiques pour une formation initiale des professeurs des écoles ?* En ligne http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/formation-initiale-maths-pe-copirelem2018-24-04.pdf

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27

Keskessa B., Perrin-Glorian M.J. & Delplace J.R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, 79, 33-60

Kuzniak, A. (2003). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du 1er degré en mathématiques, *Carnets de route de la COPIRELEM, Concertum tome 3*, COPIRELEM, 7-22

Mangiante, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A., Tempier, F. & Winder, C. (2017). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles. *Actes du quatrième colloque ARCD 2016.* Université de Toulouse, France.

Mangiante-Orsola C. & Perrin-Glorian M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des Maîtres, *Grand N*, 94, 47-83

Rabardel, P. (1995). Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. *Outils pour le calcul et le traçage des courbes*. CNDP-DIE, 61-65. En ligne https://tecfalabs.unige.ch/mitic/articles/rabardel_1995_quest-ce_quun_instrument.pdf

Restrepo, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de sixième*. Grenoble : Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Robert, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia*, 15, 123-157. En ligne http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/didaskalia/INRP_RD015_5.pdf

ANNEXES

Annexe 1 – Description détaillée de l'activité

Matériel

- Un bidule grand format.
- 7 ou 8 bidules petit format.
- Plusieurs feuilles de format A4 (80 mg suffisant).
- Ciseaux, colle.
- Matériel habituel (règle, compas, équerre).
- Un disque correspondant au cercle circonscrit au carré.
- Un disque correspondant au cercle circonscrit au triangle.
- Une feuille de synthèse par groupe.

Déroulement

Phase 0 - Observation

La classe est organisée en six groupes de quatre ou cinq personnes chacun.

Chaque groupe reçoit un bidule avec pour consigne de l'observer pendant environ deux minutes, puis de le décrire lors de la phase collective orale. On peut ne pas autoriser les étudiants à manipuler l'objet, les informations prises ne sont alors que visuelles (à partir de l'objet grand format bien visible pour tous par exemple).

L'enseignant intervient éventuellement pour parvenir au but recherché (voir synthèse) : combien de faces ? nature des faces ? nature des triangles ? forme des « oreilles » ? lien entre les « oreilles » et les faces ?

Un étudiant au tableau prend des notes lors de la mise en commun.

Synthèse 1

Le première but de cette synthèse est de faire une distinction entre objet physique et objet géométrique sous-jacent (cube, pyramide) et de (re-)voir le vocabulaire associé.

> **Objet physique :** fabriqué à partir de neuf disques (on observe que pour les étudiants le mot « disque » désigne quasi exclusivement l'objet physique et non une partie du plan délimitée par un cercle), dans lesquels sont inscrits des triangles équilatéraux et des carrés ; les segments de disque, obtenus par pliage le long des côtes des triangles et des carrés, servent de pattes de collage.
>
> **Objet géométrique** : les segments circulaires n'appartiennent pas à cet objet théorique ; l'objet est donc un polyèdre à neuf faces (nonaèdre), dont cinq faces sont des carrés et quatre faces sont des triangles équilatéraux. On peut également le voir comme un cube surmonté d'une pyramide régulière à base carrée.

Le deuxième objectif est de confirmer certaines hypothèses nécessaires à la fabrication du bidule : les quadrilatères sont bien des carrés (ils pourraient être des rectangles non carrés) et les triangles sont bien équilatéraux (ils pourraient être simplement isocèles).

En revanche, s'il n'est pas apparu que les disques n'ont pas tous le même rayon, ou que les carrés et les triangles équilatéraux ont des côtés de même longueur, on ne cherche pas à le faire préciser. Ces propriétés seront nécessaires pour la phase 2, et seront découvertes à ce moment-là.

Remarque : il est possible (mais nous ne l'avons pas expérimenté) de ne pas réaliser la phase d'observation et de lancer directement les groupes dans la fabrication. On entamerait ainsi directement l'activité par une situation d'action, et la situation de formulation viendrait ensuite, dans un schéma plus classique.

Phase 1 – Construction du bidule

Chacun des six groupes reçoit une consigne et des contraintes différentes de matériel.

Consigne a - « Reproduisez un unique exemplaire du bidule que je viens de déposer sur votre table »

groupe 1 : le bidule, aucun instrument de géométrie, uniquement feuilles, ciseaux, colle, crayon

groupes 2 et 2 bis : le bidule/compas et règle non graduée (deux groupes si possible)

groupe 3 : le bidule, tout matériel, dont équerre et règle graduée.

Consigne b - « Construisez un unique bidule semblable à celui posé sur mon bureau »

groupe 4 : règle, compas, équerre et sans rien d'autre

groupe 5 : un exemplaire du disque circonscrit au carré (présenté comme tel)

groupe 6 : un exemplaire du disque circonscrit au triangle (présenté comme tel).

Pendant que les groupes travaillent, ils reçoivent une feuille de synthèse sur laquelle ils doivent :

- rappeler leurs contraintes
- noter les questions qu'ils se sont posées, ou les difficultés auxquelles ils se sont heurtés
- décrire le plus précisément possible les réponses apportées.

Ces notes serviront ensuite à la mise en commun

Il est important de laisser chaque groupe aller au bout de la fabrication. Il faut donc prévoir une tâche supplémentaire pour les groupes qui terminent plus tôt. Nous avons choisi la construction (à la règle et au compas) d'un patron de l'objet théorique.

Phase 2 – Mise en commun

Chaque groupe présente ses contraintes, sa démarche et des difficultés éventuelles.

Phase 3 Synthèse 2

On met en évidence l'existence de deux stratégies : aller du disque (ou cercle) vers le polygone inscrit ou du polygone vers son cercle circonscrit ; certaines procédures nécessitent les deux stratégies alors que d'autres n'en nécessitent qu'une seule. On analyse l'influence des outils et artefacts à disposition sur le choix de telle ou telle stratégie.

Phase 4 Reproduction d'un cercle

Ce travail prend une séance entière après la séance de reproduction de bidule. Le travail est individuel.

Chaque étudiant reçoit une feuille avec un cercle sans aucun point distinctif. La consigne est de trouver au moins deux techniques différentes pour reproduire ce cercle à l'identique. Les étudiants choisissent eux-mêmes les outils pour chacune de ces techniques.

Annexe 2 – Questions posées par les étudiants - Synthèse

1. Comment retrouver le centre d'un cercle ?
2. Comment inscrire un triangle équilatéral dans un cercle ?
3. Comment construire un carré ?
4. Comment tracer le cercle circonscrit à un carré ?
5. Comment tracer le cercle circonscrit à un triangle ?
6. Comment inscrire un carré dans un cercle ?
7. Comment déterminer le diamètre d'un cercle ?

Annexe 3 – Tableau de synthèse – Construction d'un cercle

Type de tâche : **Reproduire un cercle**					
Technique/procédure/méthode	**Éléments technologiques /propriétés mathématiques associés**	**Avec ou sans mesure ?**	**Outil(s) ou instruments ?**	**Regard sur les objets**	**Niveau ou cycle**
Découper le disque et en tracer le contour	Un cercle est le contour d'un disque. Un cercle est une ligne courbe de courbure constante.	sans	Ciseaux - Gabarit d'un disque	Vision 2D (disque) → vers une vision 1D : contour du disque	Cycle 1 GS
Décalquer le contour du disque	Un cercle est une ligne courbe de courbure constante.	sans	Papier calque	Vison 1D : Cercle comme ligne, éventuellement comme contour d'un disque	Cycle 1
(Découper le disque,) le plier une première fois en deux sur lui-même (bord contre bord) ; le déplier puis le replier de la même façon mais en un autre endroit, de façon à obtenir deux plis qui s'interceptent. Prendre au compas l'écartement entre le point d'intersection des plis et le bord du disque, puis tracer un cercle avec cet écartement.	Un disque a une infinité d'axes de symétrie, chacun support d'un diamètre ; tous les diamètres ont le même milieu, centre du disque ; tous les points du cercle sont à égale distance du centre.	sans	Ciseaux - Compas	Vision 2D (disque, demi-disque) → vers une vision 1D : pli comme diamètre → Vers une vision 0D : intersection des diamètres comme centre du cercle.	Cycle 2 CE1
Découper le disque, le plier une première fois en deux sur lui-même (bord contre bord), puis une seconde fois ; tracer un trait en suivant l'un des bords droits du secteur de disque obtenu ; tracer au compas un cercle dont ce trait est un rayon	Un disque a une infinité d'axes de symétrie, chacun support d'un diamètre ; tous les diamètres ont le même milieu, centre du disque ; un rayon a pour longueur la moitié d'un diamètre ; le centre du cercle est l'une des extrémités du rayon ; tous les points du cercle sont à égale distance du centre.	sans	Ciseaux - Compas	Vision 2D (disque, demi-disque, secteur angulaire) → vers une vision 1D : pli comme diamètre, bord du secteur angulaire comme rayon → Vers une vision 0D : extrémité du rayon comme centre du cercle.	Cycle 2

Type de tâche : **Reproduire un cercle**					
Positionner l'origine de la règle graduée sur un point du cercle ; faire pivoter la règle autour de son origine jusqu'à trouver la longueur maximale de l'autre côté du cercle ; immobiliser alors la règle (et tracer d'un bord à l'autre du cercle. Mesurer sa longueur, et en) prendre la moitié pour déterminer le rayon du cercle ; utiliser un compas ouvert au rayon déterminé.	Un diamètre est une corde de longueur maximale ; tous les diamètres mesurent la même longueur ; le rayon d'un cercle est le demi-diamètre ; un cercle est l'ensemble des points équidistants d'un point/centre	avec	Règle graduée ; compas	Vision 1D (ligne, diamètre) → vers une vision 0D (point sur le cercle, milieu d'un diamètre, centre du cercle comme extrémité d'un rayon)	Cycle 2 CE2
Tracer une corde, la mesurer pour en déterminer le milieu, puis tracer la perpendiculaire à la corde passant par son milieu. Mesurer le diamètre obtenu pour en calculer la moitié et trouver ainsi le rayon ; ouvrir le compas à cette mesure du rayon obtenue et tracer le cercle.	Le centre d'un cercle se trouve sur la médiatrice de n'importe quelle corde de ce cercle ; (la médiatrice d'un segment vu comme l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment) ; la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu ; ...	avec	Règle ; équerre ; compas	Vision 1D (corde, médiatrice, diamètre, …) → vers une vision 0D (milieu de la corde, centre du cercle comme extrémité d'un rayon)	Cycle 3 (6ème)
Tracer une corde ; construire sa médiatrice par intersection d'arcs de cercles ; tracer une deuxième corde ainsi que sa médiatrice ; reporter au compas l'ouverture entre le point d'intersection des deux médiatrices et un point quelconque du cercle ; tracer un nouveau cercle avec cette ouverture.	La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment ; Le centre du cercle est équidistant de tous les points du cercle ; le centre d'un cercle se trouve à l'intersection des médiatrices de deux cordes quelconques.	sans	Règle non graduée ; compas	Vision 1D (corde, médiatrice, cercle) → vers une vision 0D (intersection des médiatrices)	cycle 4

Type de tâche : **Reproduire un cercle**					
Avec le compas, évaluer approximativement le lieu du centre, piquer la pointe en ce lieu, écarter le compas jusqu'au cercle, puis vérifier le lieu du centre en traçant un cercle ; procéder ensuite par ajustement pour obtenir le meilleur écartement possible du compas ; tracer ensuite un cercle avec ce même écartement.	Le centre du cercle est équidistant de tous les points du cercle ; cette distance est le rayon du cercle	sans	compas	Vision 1D (cercle) et vision 0D (centre comme point isolé)	Cycle 2
On trace une corde quelconque, puis une deuxième corde perpendiculaire à cette corde à partir de l'une de ses extrémités, puis une troisième et une quatrième de façon à former un rectangle ; on trace ensuite les diagonales de ce rectangle ; on pique le compas à l'intersection des diagonales et on l'ouvre jusqu'au cercle. On trace ensuite un cercle avec ce même écartement.	Un rectangle est toujours inscriptible dans un cercle car il se caractérise par des diagonales de même longueur et se coupant en leur milieu. L'intersection des diagonales est le centre du cercle, chaque diagonale est un diamètre du cercle.	sans	règle non graduée, équerre, compas	Vision 1D (cordes, perpendicularité, diagonales) → vers une vision 0D (centre comme intersection des diagonales, encore 1D)	Cycle 3
On trace une corde quelconque, puis une deuxième corde perpendiculaire à cette corde à partir de l'une de ses extrémités ; on joint ensuite les deux autres extrémités des cordes de façon à obtenir un triangle rectangle. On trace la médiatrice de son hypoténuse ; on pique le compas à l'intersection de l'hypoténuse et de sa médiatrice, puis on l'écarte jusqu'au cercle. On trace ensuite un cercle avec ce même écartement.	L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le diamètre de son cercle circonscrit ; la médiatrice d'un segment passe par le milieu de ce segment ; le milieu d'un diamètre est le centre du cercle.	sans	règle non graduée ; (équerre) ; compas	Vision 1D (cordes, perpendicularité, hypoténuse, médiatrice, …) → vers une vision 0D (milieu comme intersection, encore 1D)	Cycle 4
On trace trois cordes successivement de façon à former un triangle inscrit dans le cercle. On trace deux médiatrices de ce triangle (méthode au choix, à décrire). On ouvre le compas entre l'intersection des médiatrices et le cercle, pour ensuite tracer un cercle avec ce même écartement	Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de concours de ses médiatrices	sans ou avec *(selon la technique utilisée pour tracer une médiatrice)*	règle non graduée, compas (ou en plus règle graduée et équerre selon la technique utilisée pour tracer les médiatrices	Vision 1D (cercle, corde, médiatrices) → vers une vision 0D (centre comme intersection de ligne)	Cycle 4

Remarque - En fin de séance, nous demandons de relire l'intégralité des programmes des cycles 1, 2 et 3, pour y trouver des présences du cercle et de son évolution, et remplir ainsi la dernière colonne du tableau, à savoir situer la technique décrite dans un cycle, voire une année si possible.

Annexe 4 – Construction des différents objets

1 Les figures élémentaires

Quelles que soient les contraintes données à chaque groupe, les étudiants doivent choisir un objet de base par lequel commencer, celui qu'il faut construire indépendamment de ses relations avec les autres objets.

Le carré

Le carré peut être construit soit à partir de son côté soit à partir de sa diagonale. En fonction d'outils disponibles et de l'analyse faite pendant la phase de découverte, le segment en question peut être construit :

- En utilisant le bidule comme gabarit (cette procédure permet de reproduire le carré directement).
- En prenant la mesure sur le bidule puis en utilisant la règle graduée pour tracer le segment de longueur nécessaire.
- En reportant la longueur du segment avec un compas ou une règle informable (c.à.d. une règle sur laquelle il est possible d'inscrire des marques correspondant à des extrémités de segments ; elle peut donc servir d'outil de report et de comparaison de longueurs).

Les procédures possibles pour la construction du carré à partir de sa diagonale :

1) Procédure qui permet de construire le cercle circonscrit au même temps :
   a) Tracer le segment
   b) Tracer sa médiatrice
      - Soit à la règle non graduée et au compas
      - Soit en trouvant le milieu du segment à la règle graduée et en traçant (à l'équerre) la droite perpendiculaire passant par le milieu
   c) Tracer le cercle du centre le milieu du segment passant par une extrémité du segment
   d) Relier les points d'intersection avec le cercle.
2) Procédure qui permet de construire le carré seul :
   a) Tracer le segment
   b) Trouver son milieu à la règle graduée
   c) Tracer deux segments perpendiculaires d'extrémité le milieu et de longueur la moitié de la longueur du segment de départ (à l'équerre et règle graduée).

Les procédures possibles pour construire le carré à partir de son côté.

1) À la règle non graduée et au compas

   Pour simplifier, on nomme le segment donné [AB].
   a) Tracer la droite (AB)
   b) Tracer le cercle de centre A et de rayon AB. Soit E le deuxième point d'intersection du cercle avec la droite (AB)

c) Construire la médiatrice (d) du segment [BE]. Soit D un point d'intersection de (d) avec le cercle.
d) Tracer le cercle de centre B et de rayon AB et le cercle de centre D et de rayon AB. Soit C le point d'intersection de ces cercles, différent de A.
e) Tracer le quadrilatère ABCD.

2) À la règle graduée et à l'équerre
   a) Tracer les deux perpendiculaires au segment passant par les extrémités
   b) Reporter la mesure de longueur du segment sur les deux perpendiculaires (de même côté du segment)
   c) Relier les deux points obtenus
3) À la règle non graduée, l'équerre et le gabarit de moitié d'un angle plat (p.ex. équerre isocèle)
   a) Tracer les deux perpendiculaires au segment passant par les extrémités
   b) Tracer les bissectrices intérieures des deux angles droits obtenus
   c) Relier les points d'intersection entre les bissectrices et perpendiculaires
4) Différentes procédures qui mélangent des éléments des procédures précédentes

Le triangle équilatéral

Le triangle équilatéral ne peut être construit qu'à partir de son côté. Le côté peut être construit en utilisant les mêmes procédures que celles décrites ci-dessus. Les procédures possibles :

1) Utiliser le bidule comme gabarit (repérer les trois sommets puis les relier.
2) Tracer deux cercles de centre une extrémité du segment et passant par l'autre extrémité puis relier un point d'intersection de ces cercles aux extrémités du segment.

Le cercle/disque

Deux procédures possibles :

- Utiliser le bidule comme gabarit (disponible seulement pour les groupes ayant le bidule à leur disposition)
- Tracer le cercle au compas.

Pour la deuxième procédure tous les groupes sauf ceux qui n'ont pas la contrainte de reproduction à l'identique sont confrontés à la tâche : trouver le rayon du cercle à reproduire. En fonction d'outils et artefacts à disposition, les procédures possibles sont :

- Plier le disque en quatre (pour retrouver implicitement deux axes de symétrie).
- Mesurer le diamètre (comme diagonale du carré, ou la plus grande corde, …), diviser la mesure par deux pour obtenir la mesure du rayon.
- Tracer une corde, tracer sa médiatrice à la règle et au compas, mesurer le diamètre obtenu puis diviser par deux.
- Tracer deux cordes distinctes, tracer leurs médiatrices, puis prendre la longueur du segment d'extrémités le point d'intersection des médiatrices et l'intersection d'une médiatrice avec le cercle comme rayon.

3 Inscrire un polygone dans un cercle/disque

Le carré

En fonction des instruments disponibles, les procédures possibles sont les suivantes.

1) Le pliage
   a) Le disque est plié en quatre
   b) Les bouts des plis sont reliés à la règle ou par pliage.
2) A l'équerre et à la règle graduée
   a) Tracer un angle droit inscrit dans le cercle
   b) Tracer la corde sur laquelle il s'inscrit. C'est un diamètre du cercle
   c) Mesurer la moitie la moitié du diamètre et marquer son milieu
   d) Tracer la droite passant par ce milieu et perpendiculaire au diamètre
   e) Relier les extrémités du diamètre avec les points d'intersection du cercle avec la perpendiculaire au diamètre
3) À la règle non graduée et au compas
   a) Tracer une corde
   b) Construire sa médiatrice. C'est un diamètre du cercle
   c) Construire la médiatrice de ce diamètre.
   d) Relier les extrémités des deux diamètres pour obtenir un carré
4) Procédures diverses contenant des éléments de ces trois procédures.

Le triangle

1) Par pliage
   a) Procédure 1 : replier trois « bouts » du disque de sorte qu'ils se touchent en un point
   b) Procédure 2 :
      i) Trouver le centre du cercle par pliage
      ii) Ramener le bout d'un des deux plis sur le cercle. Plier.
      iii) Le pli ainsi obtenu est un des côtés du triangle.
2) À la règle graduée et au compas. Cette procédure est essentiellement la même que la deuxième procédure par pliage, en remplaçant le pliage par la construction des axes de symétrie à la règle et au compas.
3) À la règle non graduée et au compas
   a) Trouver le centre du cercle par une des procédures décrites ci-dessus.
   b) Construire la rosace à 6 branches.
   c) Relier un sommet sur deux de la rosace.

ATELIER A23

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES EN CLASSE, DE LA MATERNELLE À LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS : *ENTRE MOTS ET ARTEFACTS*

Frédéric METIN
Formateur à l'ESPÉ de Dijon, animateur IREM
Laboratoire SPHERE, université Paris-Diderot
frederic.metin01@u-bourgogne.fr

Résumé

Cet atelier visait à proposer aux participants plusieurs pistes d'introduction d'une perspective historique dans les activités mathématiques à l'école, particulièrement au cycle 3. Soulignant d'abord les difficultés inhérentes à cette approche, nous avons pu échanger nos points de vue et expériences sur les possibilités de mise en œuvre en classe offertes par diverses ressources historiques, qu'il s'agisse de textes originaux ou d'artefacts décrits dans ces textes. Les artefacts dont il s'agit comprennent les jetons de compte de l'époque médiévale, les carreaux bicolores dont les diverses combinaisons ont été étudiées par Sébastien Truchet en 1704, jusqu'à l'utilisation des textes anciens comme support d'écritures marginales, lorsqu'ils permettent le commentaire et l'appropriation de leurs contenus.

La publication des nouveaux programmes du lycée consacre pour la première fois l'histoire comme composante éclairante de l'enseignement de mathématiques, en particulier comme source féconde de problèmes pour la classe. Notre but dans le texte qui suit est de convaincre les lecteurs de la pertinence et de l'utilité d'une approche historique de notions mathématiques, de la maternelle à l'université, malgré les difficultés qui se présentent aux enseignants qui souhaitent utiliser des ressources originales. Certes, pour donner une perspective historique à notre enseignement des mathématiques, il arrive que nous sacrifiions la rigueur à l'attrait de l'anecdote, mais la coloration agréable ainsi donnée au discours d'ordinaire caractérisé par son aridité ne vaut-elle pas ce léger sacrifice ? Car même du côté des historiens, la vérité n'est pas immuable et certains mythes modernes (au sens de Barthes) comme ceux de la corde à nœuds ou du nombre d'or ont la vie dure (Neveux, 1995). Entre rigueur historique et bénéfices pédagogiques, nous essayons de trouver notre chemin en nous focalisant sur les objets, les *artefacts* qu'il est possible de présenter aux élèves et aux étudiants. Suivant le plan de l'atelier proposé aux participants, nous indiquons d'abord les écueils habituels auxquels est confrontée cette approche, puis nous proposons quelques pistes de travail, navigant entre textes historiques et objets mentionnés par ces textes. Il n'a pas été possible d'aborder en profondeur tous les sujets envisagés dans l'atelier ; les participants ont particulièrement exploré l'utilisation des jetons pour les calculs et les arrangements de carreaux bicolores de Sébastien Truchet, se penchant enfin sur l'utilisation des textes comme support à l'écriture de commentaires. Nous complétons donc notre compte rendu de ces travaux par les témoignages d'expérimentations en classe qui ont été présentés.

I - LES DIFFICULTÉS D'UNE APPROCHE HISTORIQUE

L'approche historique en mathématiques n'est pas une entreprise courante, elle présente même plusieurs difficultés souvent mises en avant par les enseignants qui l'ont pratiquée : le temps nécessaire à la préparation des activités qui doivent être souvent totalement créées, le manque de culture historique au sujet des contenus à enseigner, la crainte d'une difficulté supplémentaire pour les élèves peu intéressés par ces disciplines « qui ne servent à rien » : mathématiques et histoire. Mais ces difficultés sont souvent compensées par un véritable éclairage que l'utilisation de ressources anciennes peut apporter aux élèves, joint à la possibilité d'un changement de regard sur les mathématiques, qu'ils

peuvent découvrir bien plus « humaines » qu'ils ne les avaient pensées. Par exemple, un rappel du contexte historique de l'invention des nombres décimaux contribue à renforcer le lien entre les mathématiques et le monde réel, puisque Stevin adresse sa *Disme* (Stevin, 1585) à tout un éventail de corps de métiers qui seraient susceptible de l'utiliser : astrologues, arpenteurs, mesureurs de tapisserie, jaugeurs, etc. La lecture du texte de la *Disme* soulève donc des questionnements hors champ mathématique comme l'ont montré M.-L. Peltier et J. Briand dans le chapitre du *Concertum* consacré à l'étude du texte de Stevin (Briand & Peltier, 2003). Cependant, les repères historiques qu'ils citent (Ifrah 1994 ; Dedron & Itard, 1972) posent problème puisque le texte de Stevin y est daté de 1582, alors qu'aucune édition n'en existe à cette date. Ce détail, certes minuscule, montre toutefois la difficulté d'être parfaitement rigoureux même lorsqu'on est spécialiste du sujet. Nous soulevons maintenant d'autres difficultés posées par la pratique de l'approche historique.

1 Du danger de l'accroche narrative

L'une des utilisations les plus courantes de l'histoire des mathématiques en classe consiste en l'*humanisation* des notions abordées, à travers des anecdotes de la vie des grands inventeurs ou bien, et de plus en plus souvent, en montrant et reproduisant l'utilisation quotidienne de notions mathématiques à diverses époques par des gens ordinaires, et non les inventeurs. Toutefois, de simples anecdotes hors contexte n'auraient pas grande portée, il est donc souvent indispensable de prendre son temps pour contextualiser la notion abordée et favoriser une activité multidisciplinaire. Cela suppose donc une certaine culture historique, voire épistémologique, chez les enseignants ayant une vocation de conteurs.

C'est en partie pour cette raison que le programme de la licence EFEC[98] de l'université de Bourgogne inclut une UE d'histoire et épistémologie des mathématiques. Dans cette UE, nous avons privilégié une accroche narrative, une forme de *storytelling*, afin d'attirer l'attention de nos étudiants de L2, dont la plupart ont un bagage de culture scientifique réduit[99]. Présenter l'histoire des mathématiques comme un grand récit de l'humanité était dans notre idée le moyen de donner une perspective générale sur les notions de nombre, de grandeurs, de formes géométriques, ainsi que sur le mesurage et la résolution des problèmes.

Mais la réception de ces grands récits par notre public n'a pas forcément été conforme à nos objectifs. La plupart des étudiants n'ont pas un solide socle de connaissances, aussi bien en mathématiques qu'en histoire, et les nombreuses informations données pendant les séances étaient de nature à brouiller le message global. Un révélateur des difficultés liées à cette approche « par grand récit » est évidemment le moment de l'évaluation. Nous en donnerons un exemple caractéristique, qui permet de mesurer à quel point il peut être vain d'imaginer qu'une grande saga à la manière du *Seigneur des anneaux* facilite la maîtrise des notions mathématiques. L'une des questions d'un QCM d'évaluation était la suivante : « Qui a inventé l'algèbre, quand, et dans quelle zone géographique ? ». Nous reconnaissons *a posteriori* les ambiguïtés de cette question, pour laquelle nous pensions recueillir des réponses sans équivoque. Mais le florilège des résultats dépassait les espérances : tant pour les personnes (Archimède, Platon, Aristote, Les Égyptiens, les Babyloniens, Pythagore, Diophante, Fibonacci, etc.) que pour l'époque (de la haute antiquité égyptienne au 17e siècle) ou les lieux (Europe de l'Ouest ou de l'Est, Moyen-Orient, Chine), tout semblait mélangé jusqu'à l'absurde. Il n'est donc pas forcément utile de raconter des histoires de mathématiques à de jeunes adultes manquant de repères historiques.

2 Du danger des baguettes magiques

La baguette magique des enseignants n'a pas les pouvoirs de celle des sorciers de Poudlard. Elle n'est pas rigide, mais souple : elle s'appelle la corde à treize nœuds. D'une manière que nous n'avons pas encore réussi à expliquer, ce mythe moderne a pris racine dans le monde enseignant et celui de la

[98] Licence de sciences de l'éducation « Éducation, Formation, Enseignement, Culture », proposée depuis 2015 à l'ESPÉ de l'université de Bourgogne. http://espe.u-bourgogne.fr/formation-initiale/licence.html

[99] Une UE de la L1 EFEC est consacrée à la culture scientifique.

formation, où il rencontre un certain succès alimenté par des documents en ligne affirmant souvent sans recul de la réalité historique de l'objet.

Expliquons d'abord ce qu'est cet artefact. Il s'agit d'une cordelette subdivisée en douze parties égales par treize nœuds régulièrement espacés (les deux extrémités de la cordelette portant chacune un nœud). En superposant les deux nœuds des extrémités, puis tendant la corde par le 5e et le 8e nœud, on obtient un triangle dont les mesures des côtés sont 4, 3 et 5 intervalles égaux. Le théorème de Pythagore assure que le triangle est rectangle et nous avons ainsi construit un angle droit ! Cette corde à treize nœuds donne corps au théorème, voici ce qui séduit probablement les enseignants (et les autres) qui colportent ce mythe de la corde à nœuds. L'article qui y est consacré dans le Wikipedia francophone (« Corde à nœuds ») est à cet égard édifiant et démontre qu'il reste des notices sans surveillance sur cette encyclopédie non académique. En effet, l'illustration principale provient d'un manuscrit maintenant disparu dans lequel elle était légendée « Arithmetica » (Figure 1, tronquée dans Wikipedia) et qui montre l'utilisation d'un abaque à jetons pour le calcul. Il y est également affirmé, sans aucun document sérieux à l'appui, que la corde à treize nœuds était un outil très utilisé en Égypte sur les chantiers des pyramides et au Moyen Âge par les bâtisseurs de cathédrales. Cette information invérifiable est reprise par des pédagogues (Hubaut, s.d. ; Éveilleau, s.d.), avec néanmoins quelques précautions sur le site de Thérèse Éveilleau.



*Figure 1. Planche 8 de l'*Hortus deliciarum *(Coll. Bibliothèque Alsatique du Crédit Mutuel, Strasbourg)*

Quoi qu'il en soit, l'aspect merveilleux de cet artefact qui matérialise d'une façon minimaliste et élégante un triplet pythagoricien en fait l'attrait pédagogique. Alors pourquoi mettre en doute son existence ? Depuis longtemps, de nombreux groupes d'histoire des mathématiques ont travaillé dans les IREM (Rouen, Grenoble, Dijon) et les ESPÉ (Lille, Limoges, Dijon…) sur la géométrie pratique de la Renaissance et du monde médiéval, jusqu'à l'époque moderne (Besançon). L'inventaire des ouvrages et manuscrits étudiés est très complet, même s'il ne peut prétendre à l'exhaustivité. Il s'avère qu'aucun des ouvrages étudiés par ces groupes depuis des années ne mentionne quelque corde à nœuds que ce soit, tandis que l'usage des autres instruments (fausse équerre, carré géométrique, astrolabe, cordes simples avec piquets, etc.) y est très fréquemment décrit. D'ailleurs pourquoi les bâtisseurs de cathédrales se seraient-ils embêtés à créer treize nœuds dans une corde alors que seuls le cinquième et le huitième sont utilisés ? Ou encore que l'utilisation de fanions amovibles ou tout simplement de marques sur la corde auraient été tout aussi efficaces ? Il existe de très anciens témoignages de l'utilisation de cordes pour la géométrie pratique, en Égypte par les arpédonaptes (litt. « tendeurs de corde », les arpenteurs) ou dans les *Sulbasutras*[100] en Inde (Sen & Bag, 1983). Dans les textes qui nous sont parvenus, on ne trouve aucune trace de nœuds pratiqués sur les cordes, sauf éventuellement à leurs extrémités pour les attacher à des piquets.

[100] Les *Sulbasutras* sont des recueils de pratiques géométriques mises en œuvre dans les rites sacrificiels védiques. Les plus célèbres, les Sulbasutras de Baudhayana et d'Apastamba, dateraient du milieu du premier millénaire avant notre ère.

La corde à nœuds en tant qu'objet mythique du monde éducatif ne suppose aucune philosophie de l'histoire, mais ce n'est pas le cas d'autres théories moins anodines, dont les enseignants se font également l'écho sans précaution.

3 Du danger de quantifier la beauté

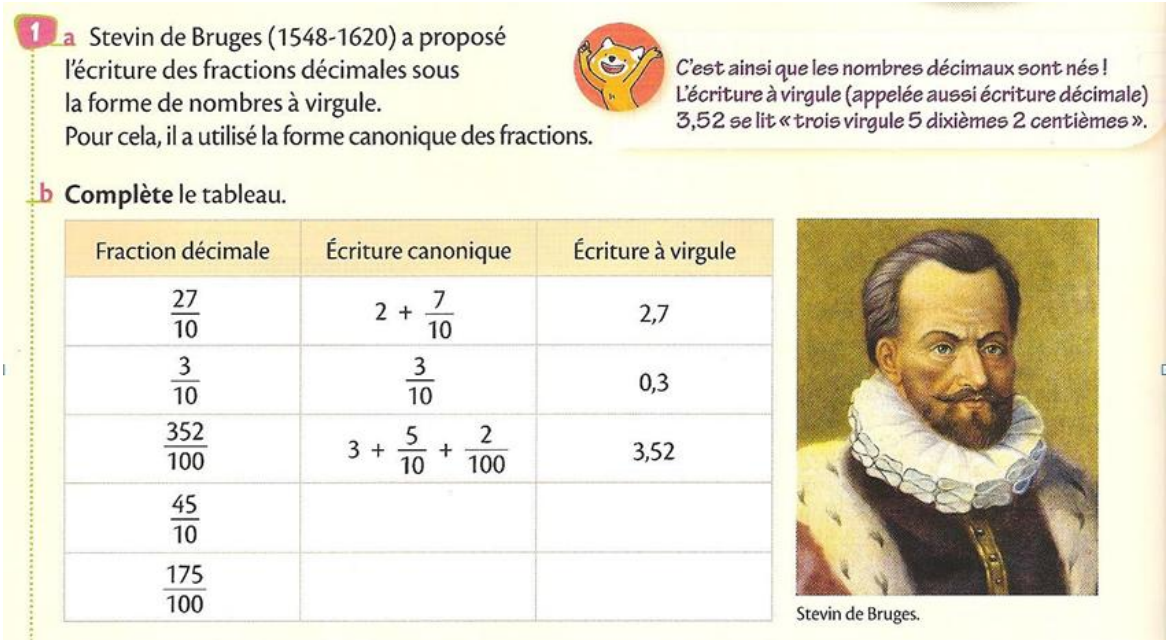
Cette fois encore, l'Égypte est le lieu fantasmatique d'une science mystérieuse des grands anciens, selon l'expression en vogue au début du XIXe siècle. Cette fascination pour les secrets de fabrication des pyramides a débuté avec la publication de l'étude de Charles Piazzi Smyth (1864) qui a fondé la pyramidologie. L'une des grandes trouvailles des pyramidologues est la présence discrète du nombre d'or (Φ) ou de π dans l'architecture même des monuments, valeurs obtenues après triturage des mesures de certaines longueurs en fixant parfois arbitrairement la valeur des unités. De nombreuses publications ont montré l'inanité de telles suppositions (Markowsky, 1992 ; Krivine, 2007), mais le nombre d'or et ses vertus cosmiques conservent une certain crédibilité auprès du public.

À l'école, le nombre d'or surgit en général lorsqu'il est question d'activités croisées entre les mathématiques et les arts. Combien de fois avons-nous entendu affirmer que l'esthétique classique est réglée par la divine proportion inventée par Fibonacci mais utilisée bien avant lui dans l'architecture dès l'Antiquité ? Presque systématiquement, les enseignants du secondaire invoquent une vérité statistique selon laquelle lorsque vous présentez au grand public des rectangles de diverses formes en leur demandant quel est le plus « beau », le rectangle majoritairement choisi est celui dont les dimensions sont en proportion du nombre d'or. Cette assertion sans fondement a été plusieurs fois démentie par de réels sondages (Jacquier & Drapel, 2005), et il ne semble pas que Φ joue un rôle particulier dans la beauté.

Il n'en demeure pas moins qu'en tant qu'alibi, Φ est un formidable pourvoyeur du mystère qui manque si souvent aux activités mathématiques, et les investigations qu'il permet sur les suites de Fibonacci ou l'esthétique de la peinture ne manquent pas. Faut-il pour autant conter des légendes en les faisant passer pour des vérités ? Ici encore, nous naviguons entre le désir d'offrir des activités riches et motivantes et celui de présenter des ressources fiables d'un point de vue historique.

4 Du danger des encarts

Revenons à Stevin et à la *Disme*. La popularité de cet ouvrage ne fait pas de doute, puisqu'un manuel récent de cycle 3 le cite dans l'introduction de son chapitre 82 sur les fractions décimales et les nombres décimaux (*Opération Maths - CM1*, Hatier, 2016, p. 170). L'encart qui y est présenté est de nature à illustrer plaisamment le propos et ancrer le portrait de Stevin dans l'imaginaire des élèves (Figure 2).



1 a Stevin de Bruges (1548-1620) a proposé l'écriture des fractions décimales sous la forme de nombres à virgule. Pour cela, il a utilisé la forme canonique des fractions.

C'est ainsi que les nombres décimaux sont nés ! L'écriture à virgule (appelée aussi écriture décimale) 3,52 se lit « trois virgule 5 dixièmes 2 centièmes ».

b **Complète** le tableau.

Fraction décimale	Écriture canonique	Écriture à virgule
$\frac{27}{10}$	$2 + \frac{7}{10}$	2,7
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0,3
$\frac{352}{100}$	$3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$	3,52
$\frac{45}{10}$		
$\frac{175}{100}$		

Stevin de Bruges.

Figure 2. Extrait du manuel Opération Maths - CM1, *Hatier, 2016, p. 170*

Au-delà de l'esthétique, l'encart se justifie par le lien qu'il donne entre les trois formes juxtaposées des nombres décimaux, très justement trouvé dans le texte original et légitimé par lui. En ce sens, il est l'exemple d'une utilisation très pertinente de la ressource originale. Mais il présente quelques maladresses d'autant plus étonnantes que deux des auteurs du manuel sont également ceux de l'intéressant article cité plus haut (Briand & Peltier, 2003). On peut par exemple être surpris du choix d'un portrait fantaisiste[101] de Simon Stevin pour illustrer l'encart alors qu'il existe un portrait gravé du vivant de l'auteur, qui mentionne correctement son identité (Simon Stevin) tandis qu'il est présenté dans l'encart comme « Stevin de Bruges » ce qui pourrait laisser croire aux élèves qu'il s'agit d'un noble prénommé Stevin. Ce qui est plus embêtant, c'est qu'on peut lire que Stevin « a proposé l'écriture des fractions sous forme de nombres à virgules » et que « c'est ainsi que les nombres décimaux sont nés » ce qui est incorrect et contredit même l'article de 2003, bien plus prudent à cet égard. Finalement l'énonciation recommandée du nombre 3,52 sous la forme « trois virgule 5 dixièmes 2 centièmes » nous paraît inappropriée.

Comme ce type d'encart n'est pas rare dans les manuels du secondaire, gageons que les nouveaux programmes de lycée qui font explicitement référence à l'histoire des mathématiques engendreront de nouvelles productions. Il est à souhaiter que les contenus n'en soient pas seulement choisis de manière illustrative, mais qu'ils soient aussi l'occasion d'activités basées sur des ressources anciennes.

II - QUELQUES PISTES D'ACTIVITÉS

Ces difficultés liées à l'introduction d'une perspective historique en classe pourraient rendre perplexes les enseignants et les détourner de l'utilisation de ressources anciennes, laissée aux spécialistes de l'histoire des mathématiques. Comme nous l'avons vu plus haut, lorsque l'on utilise des textes anciens en classe, il n'y a pas de chemin exempt d'écueils du point de vue de la rigueur historique, mais il serait dommage de se priver de la lumière que jette l'introduction d'une perspective historique sur les notions mathématiques. Une approche pluridisciplinaire, nous dirions « polydisciplinaire » pour nous référer à la polyvalence des maîtres, contribue à faire mieux comprendre des concepts parfois difficiles et favorise chez l'apprenant le tissage de liens entre plusieurs domaines de la connaissance.

Nous avons aujourd'hui peu d'exemples d'utilisation de textes anciens dans les séances de mathématiques à l'école primaire. C'est d'ailleurs une préoccupation récente, mais de plus en plus fréquente chez les formateurs ESPÉ historiens des mathématiques de réfléchir à la mise en œuvre d'activités de cycle 3 basées sur une lecture de textes anciens. Nous en voulons pour preuve la récente publication conjointe par l'ARPEME et la Commission inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques de l'ouvrage *Passerelles* (Moyon & Tournès, 2018), qui expose en neuf chapitres diverses approches de notions mathématiques en référence à leur histoire. Les pistes d'activités que nous présentons ci-après se situent dans la ligne des chapitres de l'ouvrage, même si leur domaine d'application dépasse celui du cycle 3. Ces activités ont été pratiquées ces deux dernières années (2016-2018) dans divers cadres : en ateliers de pratique pédagogique (APP) avec des étudiants de M1 MEEF premier degré ; à l'école primaire et au collège lors de la semaine des mathématiques ou à l'occasion de journées de vulgarisation scientifique ; en licence EFEC dans l'UE de culture scientifique ; en M2 MEEF premier et second degrés, et finalement en formation continue et rencontres professionnelles (y compris le 45e colloque de la COPIRELEM).

1 Des matériaux anciens : Les carreaux de Truchet

Notre premier exemple se situe entre l'école maternelle (MS, GS) et la formation des maîtres (Licence EFEC, master MEEF). Les lecteurs nous accorderont qu'il est délicat d'envisager pour la maternelle des activités reposant sur la lecture de documents originaux. Mais il est possible de prendre le contenu d'un texte ancien à la fois comme ressource pour une activité (en maternelle) ou comme objet de problème en lui-même (à l'université), dans la mesure où ce texte présente lui-même des matériaux qu'il est loisible

[101] Il s'agit de la reproduction d'une carte à collectionner belge des années 30 (chromos des « soies à coudre Gutermann »), en couleur mais assez différente du portrait original.

de manipuler même en dehors de leur contexte original. Nous resituons d'abord le document dans son contexte historique, décrivons son contenu, puis la manière dont nous l'avons exploité.

1.1 Le Mémoire de Sébastien Truchet (1704)

Le père Truchet, prénommé initialement Jean, était né à Lyon en 1657. Naturellement porté sur la mécanique, il fut vite remarqué par l'entourage du roi pour ses talents d'horloger. Il fut nommé membre honoraire de l'Académie des Sciences après avoir probablement participé à de nombreux travaux hydrauliques dans les parcs des châteaux de Versailles et de Marly. Comme il le raconte dans son *Mémoire* présenté à l'Académie des Sciences (Truchet, 1704) c'est à l'occasion d'une visite d'inspection des canaux de la région d'Orléans qu'il fut amené à s'intéresser aux pavages : il avait été logé dans un domaine dont le propriétaire faisait recarreler le sol de la chapelle au moyen de simples carreaux carrés bicolores séparés en deux parties par leur diagonale (« mi-partis »). Dans ce Mémoire, Truchet recherche toutes les combinaisons possibles de deux tels carreaux, puis s'occupe des compositions réalisables par adjonction de telles combinaisons (figure A1.1 de l'Annexe 1).

1.2 Son utilisation à l'université

Nous avons trouvé que ce matériau se prêtait particulièrement bien à des exercices de combinatoire incluant une expérimentation. L'intérêt des carreaux mi-partis de Truchet réside dans leur aspect matériel qui permet de favoriser la manipulation pour « voir ce que ça donne » au lieu de chercher à raisonner d'abord en examinant toutes les possibilités de contact de deux côtés de carreaux, ce que d'ailleurs la plupart des étudiants de L1 auraient été bien en peine d'entreprendre.

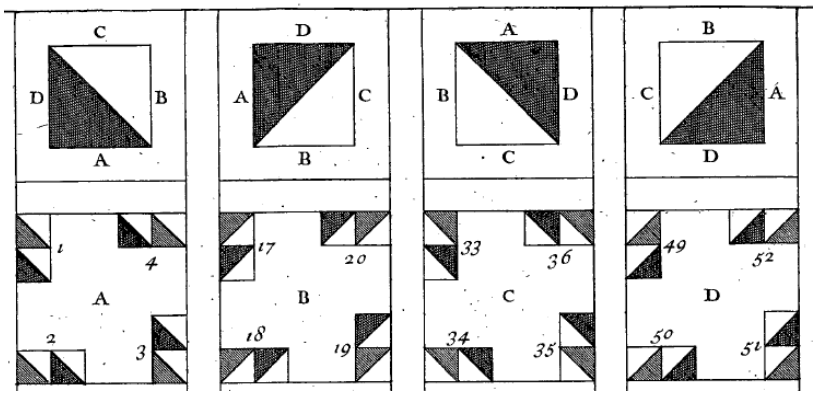


Figure 3. Le document présenté aux étudiants

La classe étant divisée en quatre, les étudiants disposaient d'un grand nombre de carrés bicolores de carton plastifié ; en assemblant ces carrés deux par deux, chaque groupe devait reconstituer l'une des quatre colonnes de la planche originale (cf. Annexe 1, figure A1.1), dont les premières cellules seulement étaient affichées, comme sur la figure 3 ci-dessus.





Figures 4a & 4b. Une production initiale et un essai de réduction des cas.

Ce qui est apparu nettement en conclusion de cette activité, c'est la place prépondérante qu'y occupe l'observation visuelle ainsi que la faculté de manipuler les objets, et que l'usage de la parole est dans un premier temps contre-productif. Par exemple, sur la production de la figure 4a, comment trouver les configurations qui manquent ? Cette question représentait un casse-tête pour les étudiants du groupe, qui durent classer les configurations déjà présentes suivant des critères visuels, et nommer les classes obtenues pour pouvoir communiquer entre eux.

Dans la seconde partie de l'activité, il s'agissait de réduire le nombre de cas au minimum en appariant les configurations semblables (figure 4b). Les étudiants font encore appel à l'évidence visuelle, mais il leur est parfois difficile d'identifier les mêmes configurations lorsqu'elles sont dans des positions différentes. Remarquons cependant que les étudiants ont tendance à assembler des carreaux de la même couleur (Figure 4b). Le fait d'avoir imprimé deux variétés de carreaux de couleurs différentes a-t-il donné un obstacle supplémentaire à la reconnaissance des formes ? Nous n'avons pas étudié l'impact des couleurs sur la réussite des étudiants, n'ayant pas initialement prévu de mélanger le carreaux de diverses couleurs. Ce travail serait sans nul doute à mener dans le cadre d'une classe.

1.3 L'activité de GS

Pas question de combinatoire aussi compliquée en maternelle ! Nous avons néanmoins cherché à utiliser le matériel de carton fabriqué pour l'occasion. L'activité proposée, encadrée par des étudiantes de M1, consistait en la reproduction par binômes de configurations simples inspirées de celles du *Memoire* de Truchet, dans le but de travailler les compétences de repérage dans le plan et de détermination de positions relatives de formes géométriques. Notre second objectif était de faire émerger la nécessité et l'utilité d'un vocabulaire descriptif géométrique approprié.

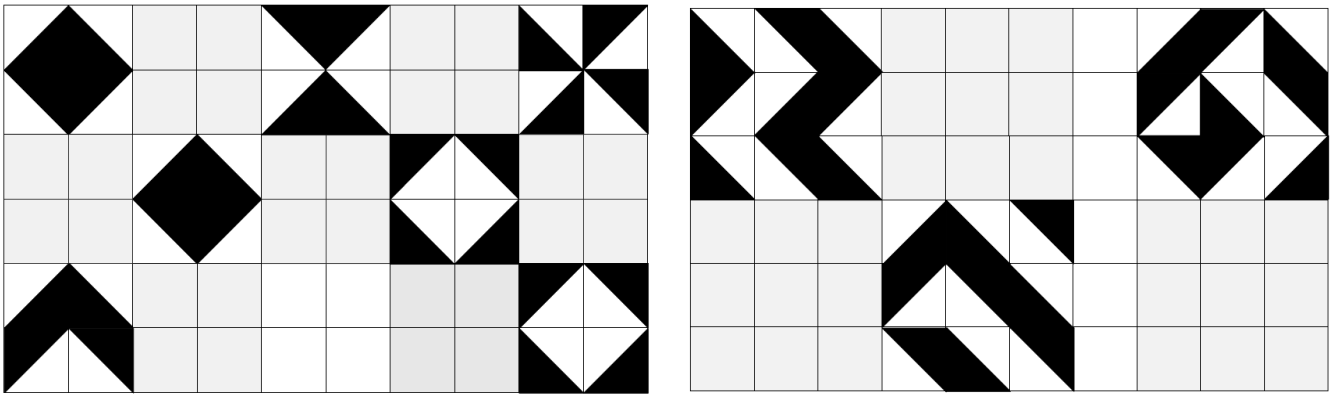


Figure 5. Deux planches de la première activité (deux niveaux de difficulté).

Dans certains binômes, les discussions ont été rudes, car plusieurs élèves n'étaient pas d'accord sur la réussite de leur partenaire mais éprouvaient des difficultés à leur expliquer leurs erreurs. En règle générale, celles-ci étaient liées à l'orientation des figures La médiation des étudiantes a permis de réconcilier les binômes à travers l'analyse des configurations et le choix d'expressions pour désigner les carrés mal placés ou mal orientés.



Figure 6. Productions d'élèves et discussions en classe

Les manipulations nécessaires à la réconciliation reposaient pour l'essentiel sur les transformations simples, rotation et symétrie axiale. Il est à noter que deux assemblages symétriques sont souvent pris pour identiques, ce qui constitue peut-être l'un des principaux inconvénients des carreaux bicolores. Mais nous sommes loin d'avoir exploité tout le potentiel de ces artefacts pour l'étude des configurations géométriques. Les lecteurs trouveront d'autres pistes avec ces mêmes carreaux dans un article déjà ancien mais complémentaire au présent travail (Neyret, 1978).

Nous avions également un projet de suite de cette activité en cycle 2, car les carreaux mi-partis existent encore de nos jours dans la vie réelle ; il est par exemple possible de s'en procurer dans les grandes surfaces de bricolage (collection « Dément », Leroy-Merlin). Le site de la grande enseigne propose même de visualiser quelques arrangements pour salle de bain, dans lesquels nous avons eu la surprise de retrouver les configurations déjà présentes chez Truchet (Annexe 1, figure A1.2). Jusqu'à présent, aucune école n'a voulu accueillir de chantier de réfection des sols d'une de ses classes, mais les images de synthèse du site leroymerlin.fr nous laissent espérer qu'un projet virtuel de rénovation peut être envisagé. Dès lors, il s'agirait pour les élèves de créer leurs propres arrangements, et d'en trouver les motifs fondamentaux reproduits par lignes ou groupes de lignes.

2 « Versailles » au CE2

Est-ce parce que la ville de Dijon fait partie du réseau des Cités de la Gastronomie que les écoles dijonnaises sont sensibilisées aux arts de la table ? Lorsque nous avons proposé à notre collègue Guillaume Grosmaire, PEMF à l'école d'application Chevreul de Dijon, de travailler sur des plans de table du grand siècle, son accord enthousiaste a été immédiat. Nous allions accompagner un groupe d'étudiants de M1 vers la prise en main de sa classe dans le cadre d'un atelier de pratique pédagogique, il ne restait qu'à déterminer comment exploiter le document que nous allons présenter maintenant.

2.1 Le document initial

Un tel plan de table est visible dans les cuisines du château de Chantilly, où a exercé le célèbre Vatel (voir figure A2.1 de l'Annexe 2). Il s'agit du plan de la table de Louis XIV au château de Marly-le-Roi, tel qu'il lui avait été soumis en 1699. À Marly, le roi prenait ses repas avec la famille royale et des courtisans particulièrement distingués. L'unique table rectangulaire avait été remplacée par deux tables ovales et le plan présente la disposition retenue pour l'une d'entre elles. On constate dans cette disposition une recherche de symétrie, pas totale cependant puisqu'il y a dix-sept couverts. Peut-être cette symétrie n'était-elle pas souhaitable : le roi n'ayant pas d'homologue il ne pouvait s'installer qu'à une place unique, distinguable, qui correspond peut-être au couvert isolé au centre de la partie inférieure de l'ellipse.

La disposition des plats sur la table participe de l'esthétique de l'ensemble. Les couverts des convives sont représentés par des disques répartis sur toute la circonférence de l'ovale. Au centre, un hexagone curviligne qui doit correspondre à un surtout de table portant épices et aromates. Entre les deux, les « plats de Rost » matérialisent un axe de quasi-symétrie horizontal tandis que les soupières circulaires et les « Pots à l'oille »[102] sont disposés de manière symétrique par rapport au surtout central. Les assiettes rondes de hors d'œuvre complètent l'ensemble pour laisser un minimum de place vide sur la table.

Ce document fortement lié à l'histoire de France (vue du côté des maîtres d'hôtel) a été un utile point de départ d'activités de découverte et d'approfondissement sur la symétrie dans la classe de CE2.

2.2 L'activité en CE2

Notre collègue est un utilisateur chevronné du tableau interactif et des technologies informatiques en général. Après un temps d'échange sur le contexte historique de Versailles au temps du roi-soleil, le plan de 1699 est décortiqué en insistant sur l'organisation de la réception et du placement des convives et plats sur la table. Lorsqu'une première idée de placement « en miroir » est formulée, les élèves sont

[102] Ces plats fermés en faïence contenaient des viandes en sauce dont Marie-Thérèse était friande et dont elle avait importé la mode d'Espagne.

invités tour à tour à faire apparaître cette propriété de la figure par coloriage : l'un choisit un objet qu'il colorie, son suivant doit peindre de la même couleur un des objets qui lui correspond et le résultat est soumis à l'assemblée. L'introduction de la notion d'axe de symétrie est favorisée par la tâche interactive de coloriage et la demande finale : « À quel endroit pourrait-on découper cette table pour obtenir deux partie exactement identiques ? ».

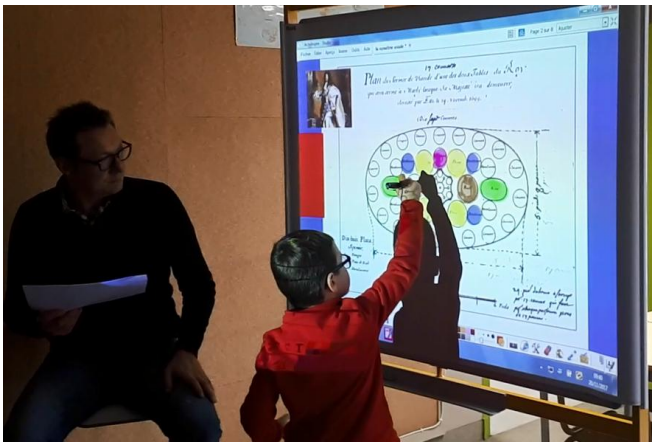
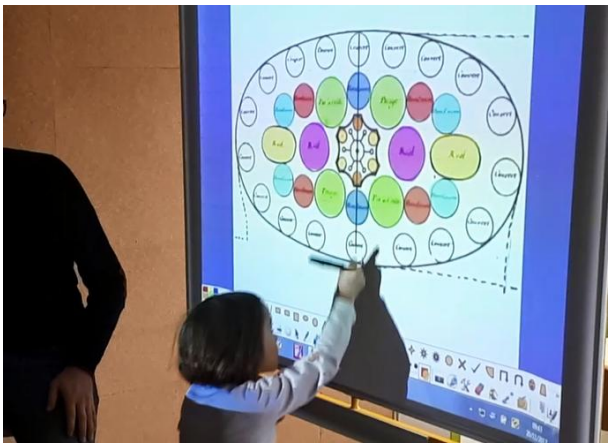



Figure 7. Découverte des axes de symétrie

L'activité plénière engendre peu d'erreurs dans la mesure où les échanges à l'intérieur de la classe sont fructueux et que les propositions incorrectes sont immédiatement corrigées. Il est à noter cependant qu'un second axe de symétrie, horizontal celui-là, a été accepté par tous (y compris les maîtres présent) sur la base d'une évidence visuelle globale, alors que le nombre de convives autour de la table ne le permettait pas. Il aurait alors fallu convenir d'une quasi-symétrie, mais les adultes présents ont préféré ne pas aller trop loin avec cette notion qui pouvait semer le trouble chez les élèves. D'autant que la quasi-symétrie était souvent à l'œuvre dans les ateliers individuels, dans la mesure où, s'agissant de reconstituer des figures incomplètes, les élèves avaient recours à la perception globale de leur production quand il fallait estimer la qualité de leur travail. Un exemple de document créé par Guillaume Gromaire se trouve en figure A2.2 de l'Annexe 2

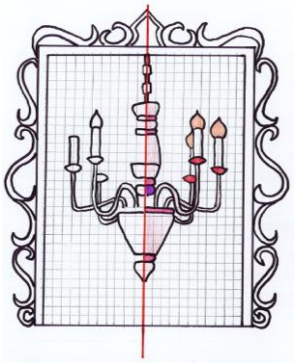
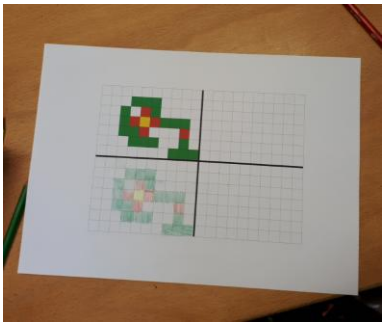
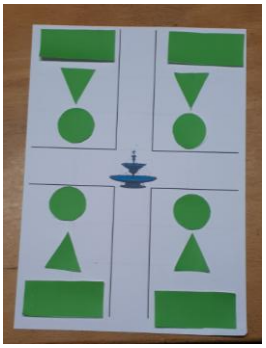





Figure 8 (a, b, c et d). Déclinaisons diverses de la symétrie versaillaise

Comme on pouvait s'y attendre, l'exercice est particulièrement réussi lorsque l'axe de symétrie est « vertical » (chandelier de la figure 8.b ; façades d'édifices -non présentées ici-) mais le recours à la translation intervient dans le cas « horizontal » (jardins pixels de la figure 8.c) qui peut même se résumer à une reproduction décalée. Par exemple, des élèves avaient à reconstituer la table du roi dont ils n'avaient qu'une photo de la moitié et le calque de l'autre moitié à colorier symétriquement. Certains d'entre eux ont adopté une stratégie simplificatrice consistant à retourner leur calque, reproduire à l'identique l'image donnée sur la tablette, et finalement rétablir l'orientation initiale de leur calque (figure 8.a). Cette stratégie était valable dans ce cas, car nous n'avions pas pris la précaution de créer des dispositions de table ne présentant qu'un axe de symétrie. Par ailleurs, la possibilité qu'avaient les élèves d'estimer en un seul coup d'œil la réussite de leur travail rendait inutile tout examen point par point qui aurait pu permettre de les emmener vers des méthodes de construction plus élaborées. Il nous fallait trouver un dispositif les obligeant à analyser leur production.



Figure 9. Le banquet presque en vrai

C'est ainsi que nous avons décidé de créer des brigades de serveurs, maîtres d'hôtels et sommeliers : les élèves allaient dresser la table pour un banquet royal (figure 9). N'ayant pu disposer d'une vaisselle comparable à celle de Louis xiv, les étudiants ont préparé des demi-tables avec assiettes et gobelets en plastique, napperons et serviettes en papier, plats en aluminium et tout ce genre de matériel fréquent dans les écoles. Un tube rouge de la salle de motricité en guise d'axe de symétrie, nos brigades étaient prêtes à dresser la table. Étant donné la longueur de la table (une dizaine de mètres) et la taille des élèves, il ne leur était pas possible de superviser le travail d'en haut, d'autant plus qu'il s'agissait d'une tâche collective devant être finalement évaluée par un seul Intendant des menus plaisirs de la table. Les élèves passaient ainsi tout naturellement du micro-espace au méso-espace (Brousseau, 1983).

D'eux-mêmes, les élèves ont tendance à effectuer la tâche en deux étapes, considérant successivement la position puis l'orientation des objets à placer. Ils assignent d'abord un emplacement aux divers éléments constitutifs dont ils n'ont pas eu besoin de faire une liste (car tout est disponible sur place). Ce n'est qu'en deuxième lieu qu'ils s'intéressent à l'orientation de ces objets, ce qui engendre des discussions et même une contestation de l'autorité de l'Intendant… Certains élèves ont en effet considéré que la première étape était suffisante pour que la tâche soit accomplie, s'attachant ainsi à l'aspect fonctionnel des couverts et des plats, tandis que l'aspect esthétique était mis en avant par les vérificateurs.

Il aurait été possible d'insérer cette activité dans un projet interdisciplinaire plus large autour des Menus Plaisirs de Sa Majesté, mais le temps de notre atelier pédagogique ne le permettait pas. Nous le mentionnons néanmoins afin de rappeler que les mathématiques ont toute leur place dans un projet de ce type, qu'il n'est pas obligatoire de restreindre aux domaines artistiques et littéraire. C'est aussi l'avantage des artefacts et des ressources matérielles que d'être des objets interdisciplinaires par eux-mêmes.

3 Compter et calculer aux jetons

Le second chapitre de la brochure *Passerelles* (Moyon & Tournès, 2018) montre la pertinence de l'utilisation d'abaques à jetons au cycle 3, afin de faire parcourir aux élèves l'histoire des techniques de calcul, depuis sa pratique à l'aide d'artefacts jusqu'à l'utilisation des signes écrits. Les auteurs y indiquent l'histoire et l'usage pédagogique possible de tables à compter à la manière ancienne. Les abaques fabriqués par Dominique Tournès et son groupe de l'IREM de la Réunion sont constitués d'un support papier sur lequel sont tracées des lignes qui porteront les jetons selon l'ordre des unités, dizaines, centaines, etc. Notre pratique du calcul aux jetons est différente de celle-ci, car nous la puisons dans des ouvrages (anonyme, 1509 ; anonyme, 1551) qui présentent les calculs sans les lignes. Par ailleurs, nous ne nous servons pas des jetons avec des débutants en calcul, mais avec des élèves, étudiants et adultes connaissant déjà le système décimal de position et les opérations usuelles. La confrontation de ces publics avec cette technique ancienne leur permet de revisiter leurs représentations de la numération et des calculs, souvent pour le plaisir quand il s'agit d'adultes. Il nous paraît cependant envisageable de proposer le calcul aux jetons comme remédiation en cas de difficultés avec la numération et les opérations. En effet, comme nous allons le voir, si l'on n'impose pas de technique

particulière mais qu'on laisse les personnes s'approprier le dispositif, celui-ci leur permet de remettre en question leurs représentations personnelles du système décimal de position.

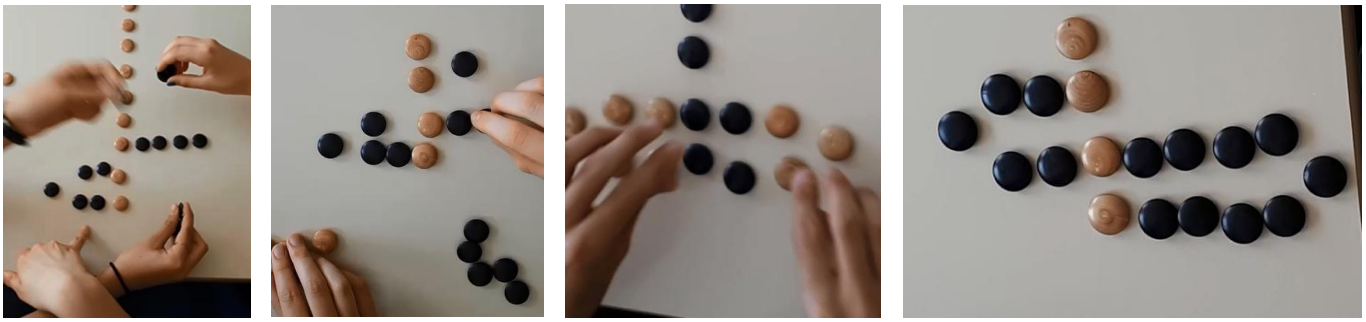
3.1 Les ressources

Il existe de nombreux ouvrages d'arithmétique imprimés au début du XVIe siècle, principalement à Lyon qui est à cette époque un centre majeur, à la fois pour le commerce et pour l'imprimerie. Notre principale référence est un ouvrage rarissime, le *Livre de Chiffres et de Getz*[103] (anonyme, 1509) dont il n'existe à ce jour qu'un exemplaire connu, à la bibliothèque Méjanes d'Aix en Provence. L'auteur n'en est pas identifié et d'ailleurs le contenu n'est pas tout à fait original puisqu'on le retrouve en partie dans des manuscrits du XVe siècle et dans d'autres ouvrages imprimés du XVIe siècle. La page de titre du livre (voir l'Annexe III) n'indique que l'identité des imprimeurs, Pierre Mareschal et Barnabé Chaussard. Leur marque d'imprimeur étant endommagée en bas de son côté droit, nous pouvons estimer que le livre a été imprimé entre 1508 et 1510 (date de fin de l'association de deux libraires), c'est pourquoi nous la datons de 1509.

Comme la plupart des traités d'arithmétique commerciale de cette époque, le *Livre de Chiffres et de Getz* explique, d'une part la manipulation des jetons, tant pour la représentation des nombres (la *Numeration*) que pour les quatre opérations, et d'autre part la résolution de problèmes fondée sur les règles de la proportionnalité. Dans nos activités en classe ou lors de séances grand public, nous n'en présentons que la page de titre et la planche légendée « La figure de numeration, laq[ue]lle monstre pauser les getz et le[ur] valeur » (Annexe III), le premier exercice consistant à comprendre comment sont posés les jetons et à trouver la valeur du nombre donné en exemple. Comme aucune ligne n'est gravée sur la planche, les ordres de grandeurs sont néanmoins indiqués par une colonne de jetons, appelée « l'arbre », à laquelle les imprimeurs ont pris soin d'ajouter une légende indiquant ces ordres de grandeur, mais que les praticiens de l'arithmétique n'avaient évidemment pas avec eux.

3.2 Les manipulations en classe (et ailleurs)

Tout l'intérêt de cet abaque sans ligne est qu'il est très facile à fabriquer et à installer où l'on veut : il suffit d'avoir sur soi une bonne quantité de jetons (dans notre cas, des jetons de go) et une surface plane. Les participants aux activités construisent eux-mêmes leur arbre de calcul, il est à cet égard utile d'avoir des jetons de plusieurs couleurs, comme on le voit sur trois des photographies de la figure 10.



Figures 10a, 10b, 10c & 10d. Diverses techniques de multiplication

Pour commencer, il faut trouver la valeur du nombre donné en exemple dans le livre. Les participants ont peu de difficulté à associer chaque groupe de jetons à l'ordre de grandeur de la « branche » à laquelle il appartient et reconstituer ainsi le nombre 214 112 138. Quelques exercices de numération sont l'occasion d'expliquer le rôle du jeton quinaire, placé en position intermédiaire entre deux branches et représentant cinq jetons de la branche inférieure. Une explication possible vient naturellement : au-delà de cinq, il y a peu de chance de pouvoir percevoir immédiatement les quantités par *subitizing*. Dans le cadre des comptes monétaires, il serait bien facile à un arithméticien virtuose mais malhonnête de prélever un jeton par-ci par-là et ponctionner ses clients. Le jeton quinaire permet à tous les protagonistes un contrôle visuel des opérations.

[103] Ancien mot pour *jeton*.

Les opérations simples, addition et soustraction, ne nécessitent pas d'explication : pour additionner deux nombres dans l'arbre, il suffit de cumuler les jetons de même ordre et, lorsqu'on atteint une dizaine, de placer un unique jeton sur la branche supérieure.

Lorsqu'il s'agit de multiplication, l'habitude est de poser le multiplicande sur les branches gauches de l'arbre et le produit sur les branches droites. Le multiplicateur n'est pas représenté, et c'est justement la raison de la diversité des techniques possibles. Notre premier exemple est celui de la multiplication par 20, souvent utilisé dans les textes anciens pour la conversion de monnaie, car une livre correspond à vingt sols (et un sol à douze deniers). La tâche illustrée par la figure 10a est la conversion de 27 livres (à gauche) en sols. Les participants l'effectuent tout simplement : chaque jeton présent à gauche donne naissance à deux jetons à droite sur la branche immédiatement supérieure. Le jeton quinaire donnera donc deux jetons entre les branches des dizaines et des centaines, remplacé par un jeton sur la branche des centaines. La différence principale entre les manipulateurs est le fait de laisser à gauche le multiplicande intact ou au contraire d'en éliminer chaque jeton au fur et à mesure qu'il est remplacé par les deux autres à droite.

Après ce premier exercice facile, nous demandons aux participants de convertir 27 sols en deniers, c'est-à-dire de multiplier 27 par 12. C'est avec ce multiplicateur que les techniques diffèrent. Les trois méthodes illustrées par les figures 10b, 10c & 10d sont, dans l'ordre :

- 10b : remplacement de chaque jeton de gauche par douze jetons à droite, c'est-à-dire deux jetons dans la branche de même niveau et un jeton dans la branche immédiatement supérieure. Le jeton quinaire ne fait pas exception et ce n'est qu'après avoir posé tous les jetons à droite que les simplifications sont opérées.
- 10c : Le nombre 27 est copié à droite puis tous ses jetons sont surélevés d'une branche (« on fait : fois dix »), enfin chaque jeton de gauche est déplacé, avec doublement, à droite dans la branche de même ordre. Le jeton quinaire est simplement surélevé jusqu'à la branche des dizaines. L'élève de troisième de la photo trouvera 374, car dans sa première surélévation, le jeton quinaire a été placé par erreur sur la branche des centaines au lieu d'être en position intermédiaire.
- 10d : Les jetons de gauche sont reproduits à droite puis doublés (mais l'élève oublie de doubler le jeton quinaire). Ensuite, au lieu de surélever d'une branche le paquet de jetons de droite, les élèves opèrent ce déplacement sur les jetons de gauche. Puis ils s'arrêtent, perplexes (c'est ici que la photo est prise). L'aspect strictement gestuel de la procédure les a menés à une impasse. La reprise de cette procédure, étape par étape, avec discussions et commentaires, leur permet de rectifier la manipulation, en corrigeant au passage l'erreur sur le quinaire.

Ces diverses techniques sont guidées par différentes décompositions du multiplicateur 12, soit comme un bloc (Figure 10b), soit comme 10+2 (Figure 10c), soit comme 2+10 (Figure 10d). Le moment le plus intéressant pour les participants est la vérification de leur résultat et la recherche d'une éventuelle erreur. Pour cela, il est utile de les filmer en leur demandant de recommencer les manipulations pour la caméra en commentant leurs gestes, car il n'est pas naturel pour eux de parler en opérant.

Nous avons maintes fois constaté que cette activité de calcul aux jetons peut être menée sans recours au langage, car l'essentiel de la pratique se situe dans le geste, que chacun peut reproduire devant d'autres personnes sans un mot. S'il n'était pas question de faire verbaliser les participants de l'atelier pour qu'ils donnent l'explication de leurs techniques, cela pourrait presque se produire dans un silence complet. Nous demandons cependant systématiquement l'explication des manipulations, que les opérateurs soient débutants ou experts, car sans la phase de verbalisation, les échanges ne seraient que visuels et en resteraient à un niveau technique. Comme la pratique n'est pas la science, l'abandon des mots condamnerait les participants à n'être que des exécutants. Une autre modalité de l'exercice nous a été suggérée, mais nous ne l'avons pas encore expérimentée : elle peut mettre en scène un manipulateur muet associé à un orateur n'ayant pas la possibilité de toucher les jetons, l'action du premier étant alors commentée par le second.

4 Retour vers les mots

Dans les trois activités présentées plus haut, l'apport des textes est minimal. Ces activités sont centrées sur des ressources anciennes qui ne nécessitent pas la lecture d'un mode d'emploi, ni quelque écriture que ce soit. Il s'agissait d'abord de réaliser une tâche à l'aide d'objets inspirés d'artefacts du passé. Même dans le cas du calcul aux jetons, il n'est pas nécessaire de décrypter le texte ancien associé aux images présentées pour pouvoir s'investir dans la tâche demandée. Il n'est même pas nécessaire à l'enseignant de fournir des explications détaillées, car les objets se laissent apprivoiser facilement. Mais la question langagière n'en est jamais éliminée pour autant et il serait dommage d'abandonner les discours logiques qui nourrissent si souvent la réflexion en mathématiques. Il est même possible de regarder un texte ancien comme un véritable artefact, à plusieurs niveaux. Les idées et les mots des penseurs nous ont été transmis par le livre, l'un des objets les plus fascinants inventés par les humains, même s'il tend à disparaître au profit de supports modernes, eux aussi inventions humaines. Un texte donné à étudier aux élèves est d'abord un objet, la feuille de papier imprimée, manipulable en tant qu'objet. Nous la voyons donc comme un artefact pédagogique, simple dispositif destiné à engendrer l'interaction, la confrontation et le questionnement sur les connaissances. Dans les pratiques que nous présentons, les textes imprimés sont des supports de travail portant déjà les écrits qui engendreront les nôtres. En ce sens, ils sont des objets vraiment interactifs. Nous donnons en résumé trois exemples d'utilisations de textes anciens dans lesquelles les mots et les idées sont les objets de l'étude.

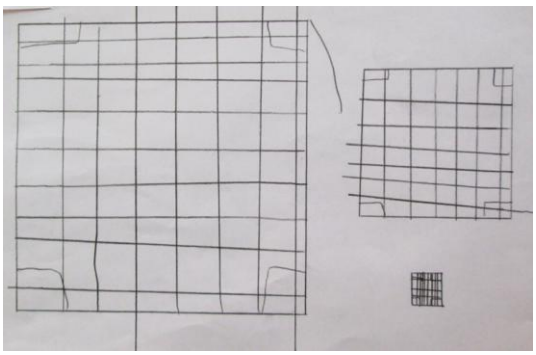
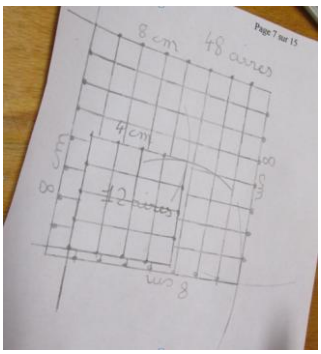
4.1 Doubler le carré, avec ou sans Platon

L'utilisation par Socrate du problème de la duplication du carré pour étayer sa théorie de la réminiscence est un classique de la philosophie de la connaissance, que l'on trouve dans le dialogue *Ménon* de Platon. Le dialogue a fait l'objet d'une recherche interdisciplinaire mathématiques/français menée par une équipe de l'IREM de Paris, et dont la rédaction par Renaud Chorlay constitue le cinquième chapitre de *Passerelles* (Moyon & Tournès, 2018). Le dialogue a ceci de particulier qu'aucune figure datant de l'époque antique ne l'accompagne, il n'est d'ailleurs même pas sûr qu'il en ait existé à cette époque. Les figures ont depuis très longtemps été reconstituées par les lecteurs de Platon, mais c'est un exercice passionnant d'essayer de comprendre le texte sans elles et de les reconstituer au fur et à mesure de la lecture. Malgré les difficultés du texte, le chapitre met en évidence l'intérêt de l'activité en français comme en mathématiques. Dans le projet du groupe de l'IREM de Paris, les mots et le discours sont au centre des objectifs d'apprentissage.

Il s'avère que nous avions également travaillé sur la duplication du carré, mais dans une toute autre perspective. Après les premières séances d'introduction aux fractions, la question de la division d'une quantité se posait à des élèves de CM1 (école Petit Bernard de Dijon). La nature même des fractions n'allait pas de soi. Nous avons donc profité de ce moment de questionnement pour suggérer comme « petit exercice », la construction d'un carré d'aire double de celle d'un carré donné.

Comme dans l'expérimentation citée plus haut et comme chez Platon, la première réaction des élèves est de doubler la valeur du côté du carré, soit numériquement à partir de sa mesure, soit par un report au compas. Comment leur expliquer que l'aire du carré obtenu n'est pas le double de l'aire initiale ? Ils ont eux-mêmes l'idée de subdiviser chacun des carrés obtenus en carreaux d'aires égales, ou presque (voir la figure 11a), procédé qu'ils qualifient de « technique des aires ».

Lorsque la subdivision a été faite dans les règles de l'art, c'est le calcul qui laisse à désirer (Figure 11b) : le jeune homme a considéré qu'un carré de côté 4 avait une aire « 12 aires » et que son double, de côté 8, donc, avait une aire de « 48 aires ». Il n'a pas pu expliquer ses calculs, mais l'activité était quand même sauvée puisque, comme les autres, il avait obtenu un quadruplement de l'aire du carré initial !

Figures 11a & 11b. L'un des carrés est-il le double de l'autre ?

4.2 L'expérience de l'étrangeté

Nous évoquons brièvement des expériences de classe qui n'ont pu être abordées lors de l'atelier, mais qui nous semblent d'intérêt pour notre propos. Ces activités sont basées sur des textes arithmétiques de la fin du Moyen Âge et de la Renaissance, qui ne font pas appel à un formalisme algébrique, mais présentent néanmoins des algorithmes de résolution de problème sans l'usage des lettres. L'un des ouvrages que nous avons le plus utilisés est l'*Œuvre tressubtile et proufitable* de Juan de Ortega, première arithmétique espagnole imprimée (Ortega, 1515).

La façon la plus simple de partager l'expérience de l'étrangeté avec les lecteurs est de leur donner le texte original d'une des activités de lecture / interprétation proposée à des élèves de seconde (Ortega, 1515, fol. XCIXr°-orthographe modernisée-) :

> *Un homme fait son testament & a vaillant 3000 écus et laisse sa femme grosse d'enfant. Et ordonne ainsi que s'il meurt et après sa femme fasse un fils, que ledit fils aura les trois parts de ses biens et la mère l'autre partie. Et [si] elle fait une fille, la mère aura les trois parts de ses biens et la fille l'autre partie. Advient qu'après la mort du père, la femme fit deux enfants tout ensemble, c'est à savoir fils et fille. Demande comment se partiront les biens dudit défunt par ainsi que le testament du père soit observé.*

Ce type de problème est dit « de testament », on le trouve assez fréquemment dans les ouvrages anciens d'arithmétique commerciale. Il est possible que la popularité de ce genre de questions provienne de la nécessité de faire appel à des arithméticiens, voire des algébristes, dans les litiges au sujet des héritages, car les règles du droit en cette matière ont pu être extrêmement compliquées pour le commun des mortels. Dans les classes, c'est la typographie ancienne qui constitue le premier obstacle à la lecture. Étonnamment, aucun élève n'a cependant protesté contre le sort réservé aux filles. Une fois la barrière du langage surmontée, il s'agit de comprendre le sens de la solution donnée par Ortega :

> *Et tu feras ainsi : commence avec la fille car si la fille a une partie la mère doit avoir les trois parts, pour ce pose 1 pour la fille et trois pour la mère et le fils doit avoir trois fois autant que la mère et seront 9. Ores, ajoute ces trois sommes c'est à savoir 1, 3, 9 & sont 13 pour partiteur. Ores, diras par la règle de trois : si 13 me donnent 3000, que me donnera 9 ? Multiplie et partis ainsi que la règle de trois le requiert & trouveras 230 écus &* $\frac{10}{13}$*, qui est la part de la fille. Et a la mère 692 écus et* $\frac{4}{13}$*, vient au fils 2076 écus et* $\frac{12}{13}$ *d'écus.*

Les enseignants de mathématiques saisiront rapidement qu'il s'agit de partages proportionnels, mais nous devons rappeler que ces notions sont bien loin des préoccupations et des compétences des lycéens contemporains. Ceux-ci achoppent particulièrement sur les coefficients 1, 3, 9 et 13, dont ils ont peine à comprendre le rôle dans la résolution du problème. Ici les numérateurs et le dénominateur ne sont pas distingués par leurs positions dans une fraction mais par le mot « partiteur » qualifiant le nombre 13.

Ce n'est certes pas le texte le plus difficile à lire que nous avons proposé à des élèves de lycée. Pour une étude plus détaillée de la question de la compréhension des textes d'Ortega, nous renverrons les lecteurs à un autre article (Métin, 2012). En règle générale, la non-compréhension initiale, toute frustrante qu'elle soit, mène quand même à la satisfaction de percevoir le sens des textes à travers leurs contenus mathématiques avant d'en saisir les mots et les tournures. Nous présentons maintenant un travail de

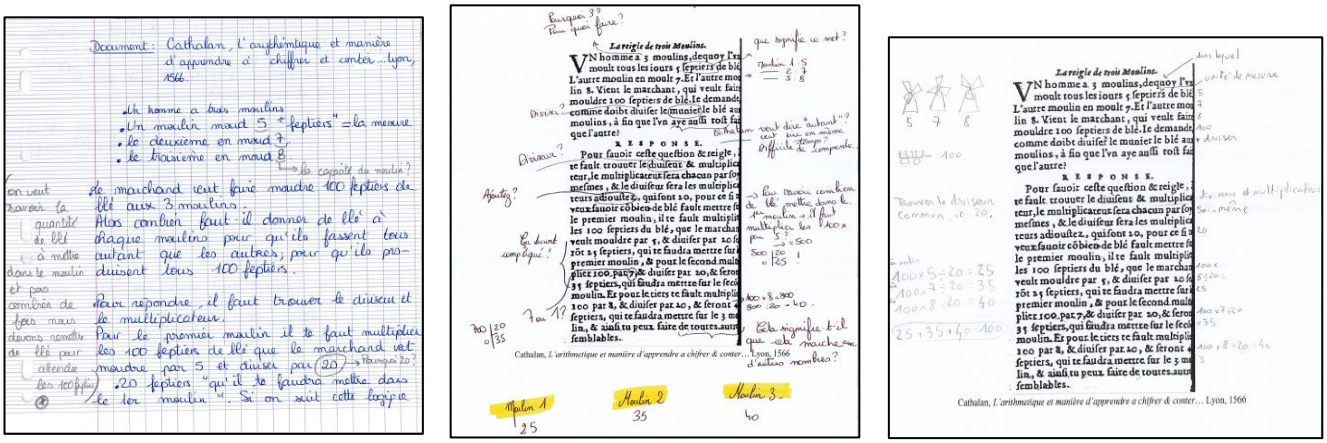
recherche en cours sur les mécanismes de la compréhension de textes mathématiques, manifestés dans des ateliers d'écriture marginales.

4.3 Mathématiques dans les marges

Notre dernière piste à propos de l'utilisation de textes anciens en classe concerne la formation initiale des enseignants, pour laquelle nous avons utilisé les ressources textuelles comme artefacts d'écriture, c'est-à-dire comme des objets choisis/créés par nous et destinés à servir de supports à la trace écrite de l'appropriation des textes qu'ils portent. Il ne s'agit pas pour les étudiants de faire l'exégèse de passages obscurs de textes anciens, mais plutôt de se confronter à ceux-ci et de s'interroger sur les mécanismes qu'ils mettent en œuvre pour les comprendre.

C'est une tradition ancienne en mathématiques que d'écrire dans les marges des livres qu'on étudie. Nous n'en citerons que le plus célèbre exemple, celui de Pierre de Fermat annotant son exemplaire des *Arithmétiques* de Diophante et laissant une mention marginale qui allait devenir sa fameuse conjecture, dont l'exiguïté de la marge l'empêchait de développer l'élégante démonstration. Lors de nos pérégrinations dans les bibliothèques, nous avons pu consulter de nombreux ouvrages portant de telles mentions marginales, d'une portée certes moins grande, mais non moins révélatrices du réel aspect interactif des ouvrages traditionnels. En outre, qu'elles soient de savants connus ou de lecteurs obscurs, les mentions marginales sont autant de manifestations des mathématiques comme activités humaines.

L'un de nos derniers projets de recherches (conjoint entre l'IREM et l'ESPÉ de Dijon) porte sur les traces écrites de l'activité des élèves ou des étudiants. Dans son volet scolaire, ce projet se centre sur le cahier de mathématiques vu comme un journal personnel de l'élève. Dans son volet universitaire, il s'appuie sur l'annotation marginale de photocopies de textes anciens de mathématiques, allant de l'arithmétique commerciale à l'algèbre, la géométrie et les probabilités. Notre travail d'analyse des productions est centré *a priori* sur trois axes : la nécessité ou non de la réécriture, celle de la traduction en termes familiers ou notions usuelles et la place des diagrammes.



Figures 12a ; b & c. Le problème des trois moulins annoté par les étudiants de M2 MEEF

Lors de séances de TD en master 2 MEEF, nous proposons aux étudiants de travailler sur l'un des documents distribués, avec la consigne de noter dans l'espace de leurs marges tout ce qui leur passe par la tête, questions, réflexions, étonnement, qu'ils considèrent comme faisant partie de leur mécanisme d'appropriation des contenus.

Dans l'exemple que nous présentons en figure 12, le texte étudié provient d'un ouvrage d'arithmétique pratique contenant de nombreux problèmes qui sont résolus par diverses variantes de la règle de trois. Le problème traité est le suivant (Cathalan, 1566, fol. 66v) :

> *Un homme a 3 moulins, de quoy l'un moult tous les jours 5 septiers de blé. L'autre moulin en moult 7. Et l'autre moulin 8. Vient le marchant qui veult faire mouldre 100 septiers de blé. Je demande comme doibt diviser le meunier le blé aux moulins, afin que l'un aye aussi tôt fait que l'autre ?*

Difficile pour les étudiants des jeunes générations d'imaginer que le setier est une mesure de capacité (de douze boisseaux), surtout lorsqu'il est écrit « septier ». Difficile également de comprendre tout à fait qu'il s'agit d'un problème de partage proportionnel, comme celui d'Ortega.

C'est sans doute pour cela que les étudiants ont besoin de récrire le texte, comme on le voit dans la production de la figure 12a, dont l'auteure a oublié qu'elle n'avait que l'espace des marges de sa photocopie pour son travail. Sans surprise, les mots sont un premier obstacle, mais nous avons ici une totale reformulation du texte, qui néglige le point crucial de la question, c'est-à-dire le fait que les trois moulins doivent avoir terminé en même temps. La production de la figure 12b montre également un attachement à la signification des mots, mais le texte n'est pas récrit. Les mots sont repris, redéfinis, surlignés. Dans la production de la figure 12c, l'étudiant a eu besoin d'une représentation des moulins, ce qui n'était pas le cas des deux premières.

Ne soyons pas surpris de l'incompréhension manifestée par certains étudiants. Nous leur avions à dessein précisé qu'il ne s'agissait pas de comprendre le texte avec certitude, mais d'écrire tous les éléments de leur démarche de recherche de sens. Cette compréhension n'étant pas le but du travail, elle n'était donc pas un critère de réussite.

III - CONCLUSION : LES BÉNÉFICES D'UNE APPROCHE HISTORIQUE

Nous avons présenté ces diverses activités en lien avec la problématique initiale de l'utilisation de textes originaux en classe évitant les écueils soulevés au départ, c'est-à-dire avec le souci de ne pas sacrifier la rigueur historique à la beauté du récit. Le choix de se centrer sur les artefacts, sans pour autant éviter l'écrit si c'est possible, permet effectivement de gommer la difficulté liée à la maîtrise du contexte historique, des circonstances précises. Cela pourrait se résumer par cette formule : ne pas se laisser enfermer dans un carcan historien quand les ressources sont pertinentes pour les mathématiques, mais s'autoriser à explorer le contexte historique et sociologique de ces ressources.

1 Faire de l'histoire des mathématiques…

Dans notre vision, faire de l'histoire des mathématiques c'est d'abord pratiquer des mathématiques. Avec cette particularité que ces activités mathématiques s'inspirent de sources originales, que celles-ci soient directement exploitées avec les élèves ou non. Il ne s'agit donc pas d'activités historiques à proprement parler, car les méthodes des historiens n'y sont pas de mise. Les questionnements ont essentiellement pour objet la compréhension des notions abordées, même si cette compréhension ne ressort pas uniquement du domaine scientifique. Toutefois, apprendre à calculer aux jetons sans s'interroger sur l'époque médiévale, voire sur le lien entre les objets et les nombres, constituerait une activité aride et dont la légitimité pourrait être mise en cause. Cela dépend des sources originales étudiées. Dans le cas des carrelages, il y a si peu de différence entre les objets représentés au XVIII^{e} siècle et le modèle *Dément* d'aujourd'hui qu'il était tout à fait possible de ne pas faire référence au texte de Truchet pour notre activité. Cependant, la recherche des combinaisons de carreaux est légitimée par l'article de 1704, tandis qu'elle pourrait paraître artificielle ou inutile si elle était simplement posée comme sujet de recherche. Cet exercice de combinatoire sera facilement présenté comme une reconstitution d'un texte ancien, dont l'existence permet d'ailleurs la vérification et la comparaison avec les solutions trouvées par les élèves.

2 Le dépaysement épistémologique

Le concept de dépaysement épistémologique a été remis à l'honneur récemment par David Guillemette dans sa thèse de doctorat en éducation de l'université du Québec à Montréal (Guillemette, 2015). Ce qui est à l'œuvre dans le dépaysement épistémologique, c'est la transformation d'un objet familier (le savoir mathématique) en objet étranger sous le regard de son propriétaire. L'histoire des mathématiques perturbe la vision usuelle que nous avons des mathématiques en nous confrontant à des écrits et des pratiques dans lesquelles nous ne reconnaissons pas nos propres connaissances. « Ce qui va de soi » devient l'objet d'un étonnement, selon la formule de l'historien Paul Veyne.

Dans nos exemples d'activités, c'est l'étude des textes arithmétiques de la Renaissance qui permet le mieux le dépaysement épistémologique des élèves de lycée et des maîtres en formation. L'intérêt de ce dépaysement est la remise en cause des certitudes du type « c'est facile » en replaçant les étudiants professeurs stagiaires dans le contexte de l'obscurité face à un texte dont ils ne comprennent pas les ressorts scientifiques. Il y a alors un triple effet pour les personnes dans cette situation :

1° Comme des élèves obligés de se pencher sur des exercices qu'ils goûtent peu, elles pourront d'abord affirmer « Je n'y comprends rien ! » ;

2° Chercher à décoder les mathématiques qui se trouvent derrière cette langue étrangère les amène à se rassurer sur leur propre capacité de compréhension et à finalement pouvoir interpréter en langue moderne (ici, l'algèbre) les méthodes anciennes ; c'est donc un travail de traduction et de commentaire, car il leur faut insérer des lignes algébriques complémentaires pour profiter à plein des contenus du texte ancien ;

3° Après s'être réassurées, elles devront s'interroger sur les mécanismes qui leur ont permis de se réapproprier les notions mathématiques cachées. De fait, cette compréhension aura été favorisée par les rayons X de leur entendement, qui leur auront donné à voir le squelette mathématique de l'écrit considéré. Les habits anciens qui les en empêchaient sont à comparer avec ceux de leur propre langage d'enseignants, qui dès lors doit être regardé d'un point de vue réflexif critique.

Le dépaysement n'a donc de sens que si l'on rentre de voyage changé par les contrées visitées. Et comme pour les voyages, ce déplacement de point de vue est affaire de rencontre d'autrui. Autrement dit, chercher le contexte initial d'invention d'une notion mathématique ou s'approprier des pratiques d'un autre temps nous ramène à l'expérience de l'autre, géographiquement et temporellement. Dans cet état d'esprit, s'intéresser au contexte historique et social participe du respect dû à l'autre, fût-il un disparu. Il ne s'agit donc pas d'une manie d'historien scrupuleux, mais d'une attitude révérencieuse lors de l'examen de ce que nous ont laissé des ancêtres parfois très différents de nous. Dans ce sens, l'apprentissage des mathématiques revêt aussi un caractère éducatif moral.

3 Un contexte non magistral

Utiliser des documents anciens implique pour les enseignants d'accepter un rôle différent de celui de détenteur unique du savoir. En effet, négliger les références historiques ou la mise en perspective du savoir mathématique conduit à présenter les matières de manière magistrale sans mention de quelque tiers que ce soit, y compris et surtout les inventeurs des notions ou les utilisateurs d'artefacts mathématiques. Sans pour autant se servir de ces derniers comme d'alibis, il est possible d'inscrire les mathématiques dans l'histoire des progrès humains et dans des problématiques qui dépassent donc le strict cadre de la classe et de l'acquisition de connaissances. Prenons le cas des carreaux de Truchet. Il est plaisant de pouvoir offrir aux élèves de réfléchir à un problème déjà étudié au XVIII^{e} siècle mais qui reste pertinent, et dans lequel les concepts mathématiques mis en œuvre sont à leur portée. Accepteraient-ils de se poser la question des arrangements de carreaux sans le défi de résoudre une question posée par un personnage du siècle des Lumières ? Car c'est bien Truchet qui pose la question aux élèves. Nous voyons dans le fait de suivre sa trace une forme d'aventure qui ne serait pas permise avec l'enseignant titulaire, dont les pérégrinations à Orléans n'auraient pas à être révélées. Celui-ci devient même un accompagnateur des progrès des élèves face à une question de recherche posée par un tiers, car ces mathématiques concrètes sont une affaire d'hommes et de (trop rares) femmes. N'étant plus possesseurs exclusifs du savoir, les maîtres deviennent des organisateurs de voyage, facilitateurs de la découverte, comme ils le sont lorsqu'ils emmènent leurs élèves dans les musées.

4 L'expression personnelle

Il nous paraît important de pouvoir instaurer une forme de dialogue à propos des notions mathématiques étudiées. Les apprenants savent bien qu'ils ne réinventent pas les propriétés des objets ni les techniques et méthodes qu'ils découvrent dans les activités. Mais l'une des difficultés majeures des enseignants débutants est d'accepter d'écouter ce que les élèves ont à dire sur ce qu'ils étudient, et même

de favoriser les questionnements. Dans les activités scientifiques, ces enseignants ont tendance à apporter toutes les réponses et ne pas favoriser l'émergence de questions qui pourraient s'écarter du chemin déjà balisé, pour s'assurer de la réussite de l'activité. Dans ce cas, ils favorisent davantage les connaissances que les apprentissages en général, et particulièrement les méthodes.

Notre proposition d'une méthode d'analyse de la compréhension basée sur les annotations marginales des textes étudiés est toute récente et notre groupe de travail de l'IREM n'en est qu'à ses débuts. Nous espérons mettre en évidence chez nos jeunes collègues enseignants la nécessité de favoriser chez leurs élèves une verbalisation (orale ou écrite) personnelle de leur propre cheminement dans l'appropriation des notions, des méthodes ou des pratiques mathématiques. En mettant nos étudiants stagiaires dans la position d'exégètes, nous cherchons à les aider à s'écarter du modèle de détenteurs d'un savoir incontestable et évident, d'une posture de toute-puissance liée au statut que donne la connaissance.

Notre but serait atteint si nous parvenions à retrouver avec eux le plaisir d'un gai savoir et celui de l'aventure de la recherche de la connaissance émancipatrice. L'introduction d'une perspective historique par l'utilisation de ressources anciennes, textes et artefacts, nous paraît un moyen d'atteindre ce but.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Anonyme (1509). *Livre d'chiffres et de getz nouvellement imprime*. Lyon : Pierre Mareschal & Barnabé Chaussard. (Bibliothèque Méjanes, Rés. S. 167, 3)

Anonyme (1551). *L'arithmetique & manière de apprendre a Chiffrer & compter par la Plume et par les getz en nombre entier et rompu, facile a apprendre & tres-utile a toutes gens…* Paris : Jehan Ruelle.

Briand, J., Peltier, M.-L. (2003) Étude de la disme de Stevin de Bruges. Dans COPIRELEM, *Concertum, Carnets de route de la COPIRELEM*. Tome 2, 381-406. Paris : ARPEME.

Briand, J., Peltier, M.-L., N'Gono, B., Vergne, D. (2016). *Opération Maths - CM1 - cycle 3*. Paris : Hatier.

Brousseau G. (1983) Études de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble : Université Joseph Fourier, laboratoire LSD IMAG.

Cathalan, A. (1566). *L'arithmetique et manière d'apprendre a chifrer & conter, par la plume & par les Getz…* Lyon : Thibault Payan.

Eveilleau, T. (s.d.). La corde égyptienne. A quoi peut donc bien servir une corde à treize nœuds ?. En ligne sur le site *Mathématiques magiques* http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/, consulté le 10 juin 2018.

Hubaut, X. (s.d.). La corde à treize nœuds. Comment nos ancêtres bâtissaient-ils des cathédrales ?. En ligne sur *Mathématiques du secondaire* https://xavier.hubaut.info/coursmath/var/13noeuds.htm consulté le 14 mai 2018.

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres*. Collection Bouquins. Paris : Robert Lafont.

Jacquier, C., Drapel, K. (2005). *Le nombre d'or : réalité ou interprétations douteuses ? Projet STS présenté le 25 avril 2005*. Lausanne : École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Krivine, J.-P. (2007). Le Mythe du nombre d'or. *Sciences et Pseudo-sciences, 278*, 32-40.

Markowsky, G. (1992). Misconceptions about the Golden Ratio, *The College Mathematics Journal, 23* (1), 2-19.

Métin, F. (2012). L'arithmétique de Juan de Ortega : des équations sans algèbre dans E. Barbin (dir.), *Des arpenteurs aux ingénieurs. Les mathématiques éclairées par l'histoire* (p. 59-70). Paris : Vuibert-ADAPT.

Moyon, M. & Tournès, D. (Dir.). (2018). *Passerelles. Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*. Paris : ARPEME.

Neveux, M. (1995). *Le nombre d'or. Radiographie d'un mythe*. Paris : Éditions du Seuil.

Neyret, R. (1978). Avec des carrés bicolores. *Grand N*, 14, 40-52.

Ortega, J. (1515). *Oeuvre tressubtille & profitable de lartz science de aristmeticque & geometrie translaté nouvellement despaignol en francoys…* Lyon : Etienne Balland.

Ringot, B. & Sarmant, T. (2012). « Sire, Marly ? » : usages et étiquette de Marly et de Versailles sous le règne de Louis XIV ». *Bulletin du Centre de recherche du château de Versailles*, 2012. Consulté sur le site http://journals.openedition.org/crcv/11920 le 5 octobre 2017.

Smyth, C. P. (1864). *Our Inheritance in the Great Pyramid*. London: A. Strahan.

Sen, S. N. & Bag A. K. (1983). *The Śulbasūtras of Baudhāyana, Āpastamba, Kātyāyana and Mānava, with Text, English Translation and Commentary*. New Delhi: Indian National Science Academy.

Stevin, S. (1585). *L'arithmetique de Simon Stevin de Bruges. Contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires […] Encore un livre particulier de la Pratique d'Arithmetique contenant entre autres les Tables d'interest, la Disme…* Leyde : Christophle Plantin.

Truchet, S. (1704), « Mémoire sur les combinaisons », dans *Histoire de l'Académie royale des sciences. Année MCCIV. Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie*. Paris : Martin, Coignard et Guerin.

V - ANNEXE 1 : LES CARREAUX DE SÉBASTIEN TRUCHET

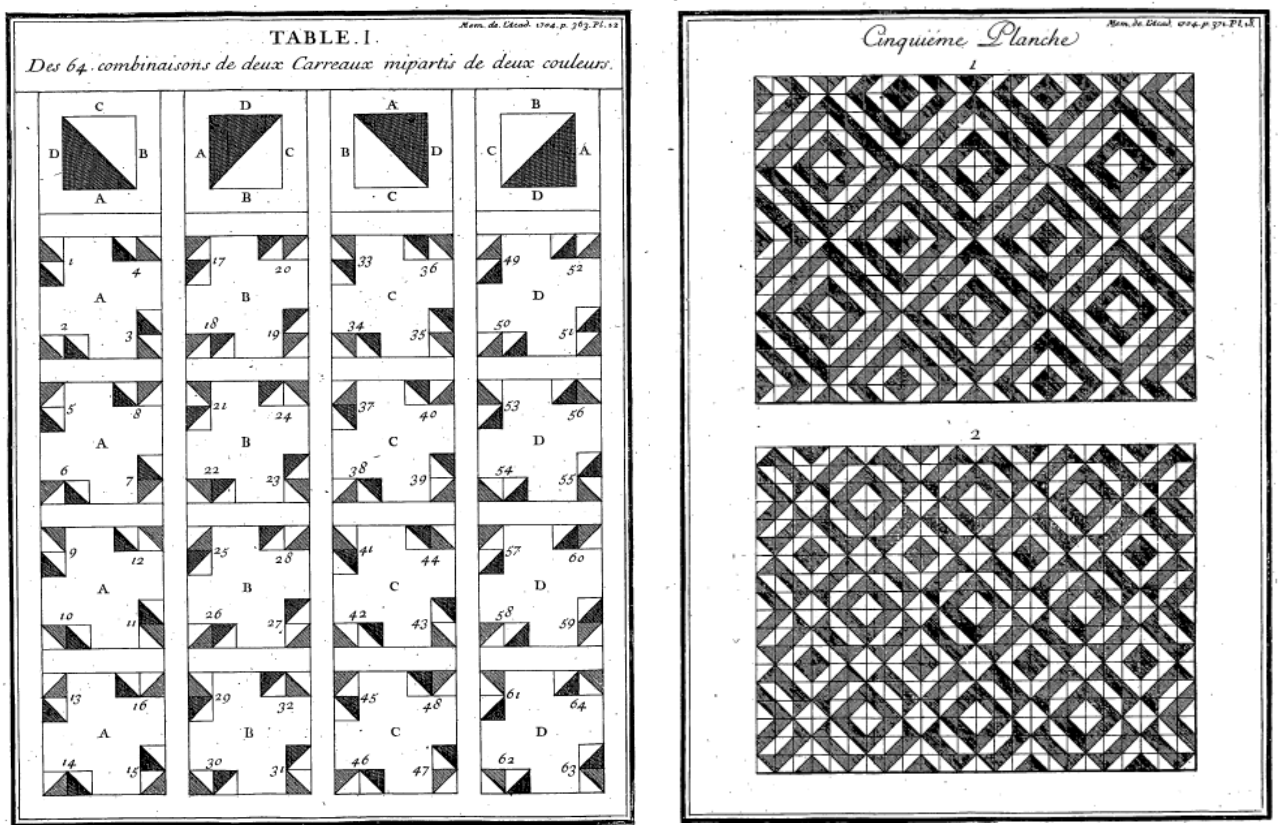


Figure A1.1. Planches n°1 et n°5 du Memoire *de Truchet (1704)*



Figure A1.2. Quelques compositions actuelles

VI - ANNEXE 2 : LA TABLE DE LOUIS

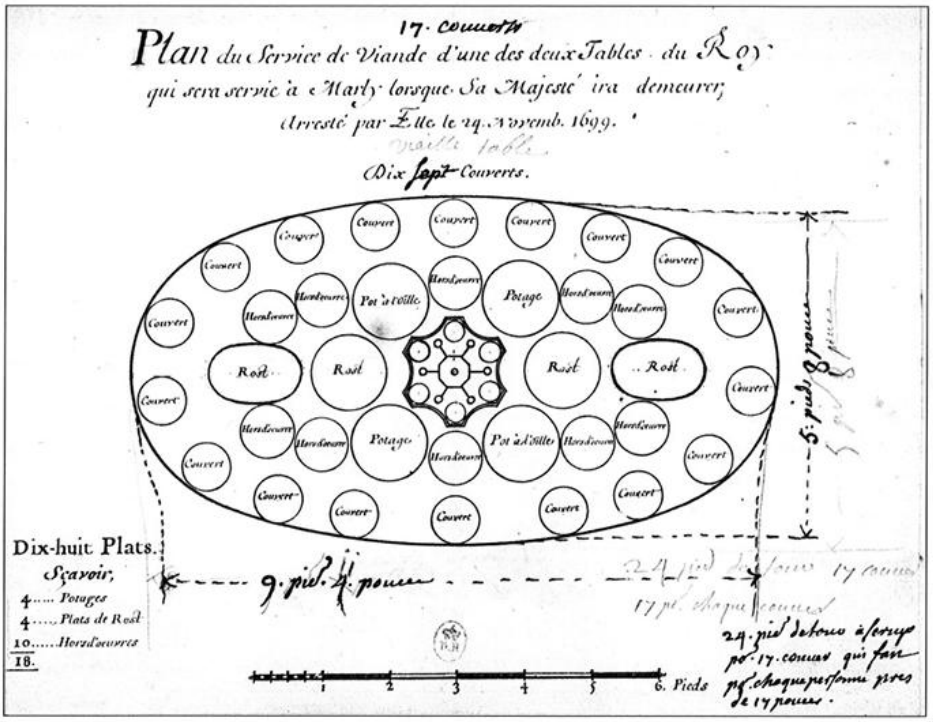


Figure A2.1. Plan de table, 1699. *Paris, Bibliothèque nationale de France, Va 78a t. 3*
(reproduit dans Ringot & Sarmant, 2012)

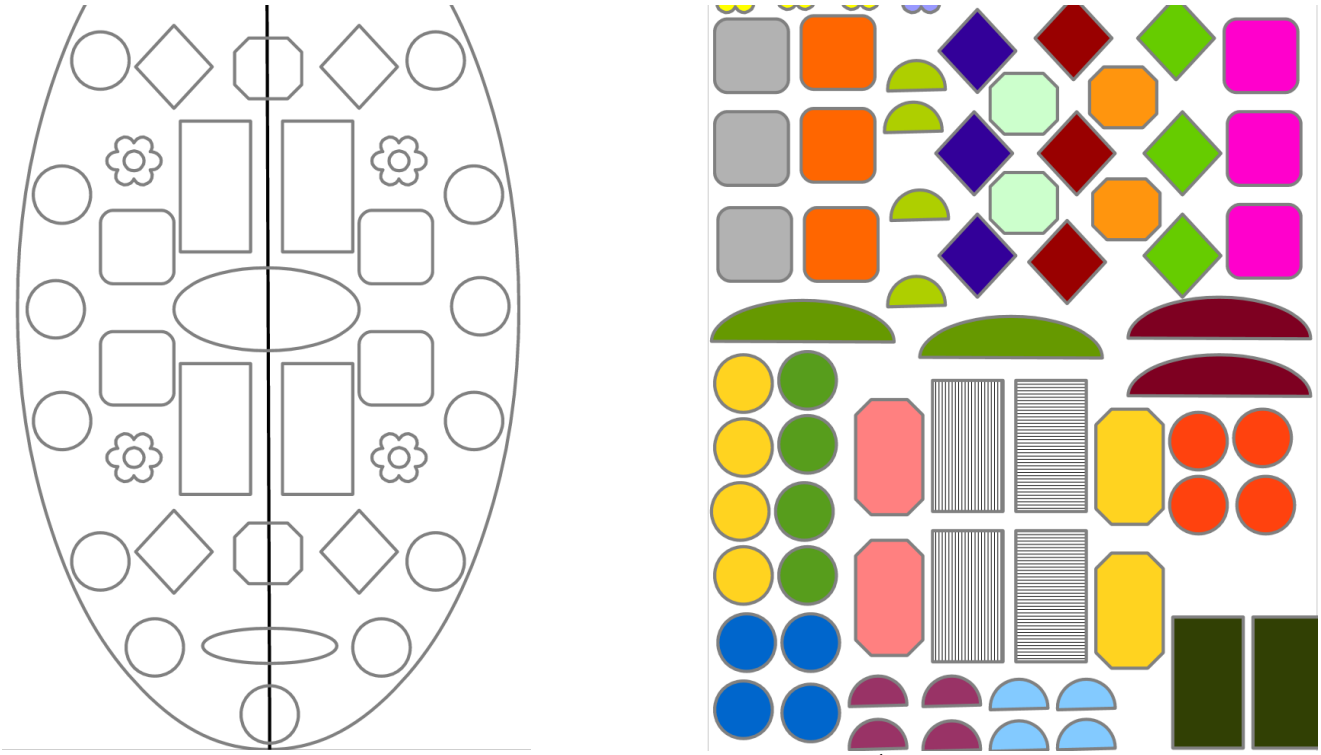


Figure A2.2. Documents de travail de CE2 (Guillaume Grosmaire, École Chevreul, Dijon)

VII - ANNEXE 3 : L'ARBRE AUX JETONS

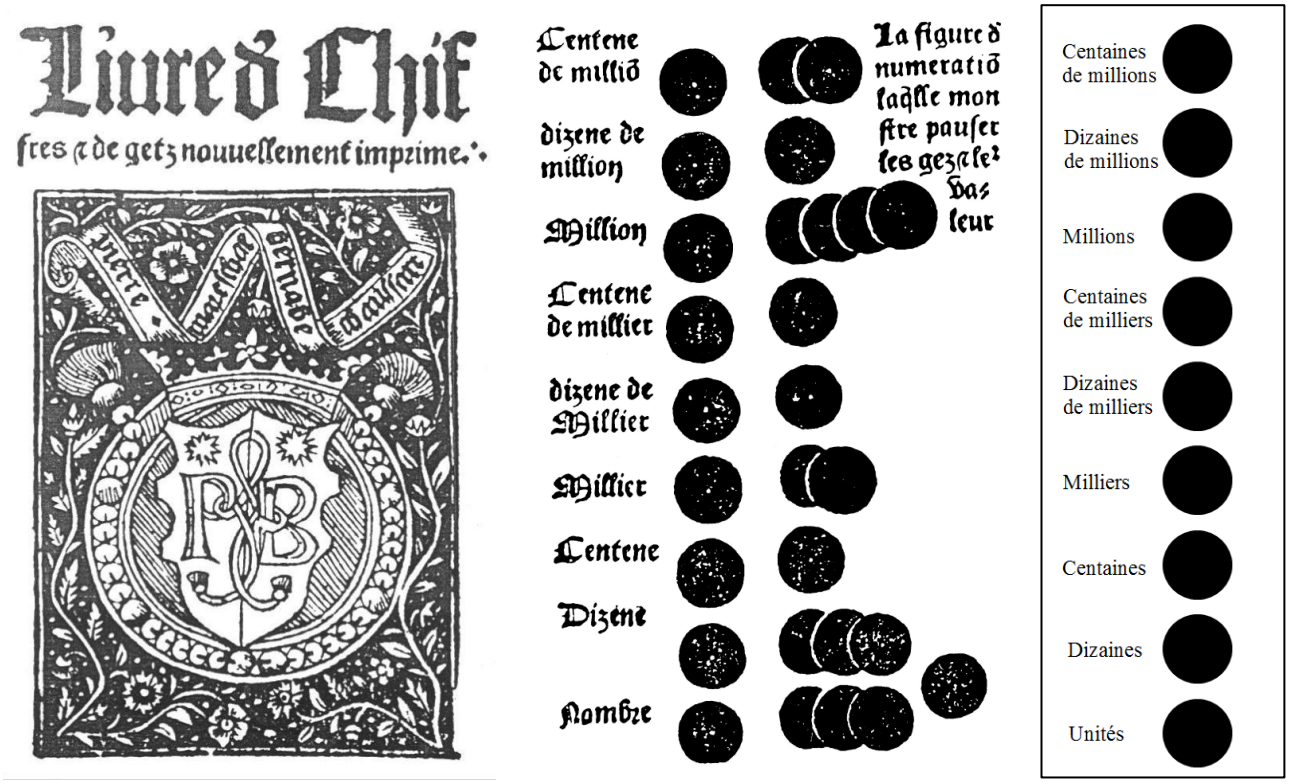


Figure A4. Extraits du Livre d'chiffres et de getz *(Lyon, vers 1509) & notre document.*

ATELIER A27

ANALYSE DE MANUELS DE CYCLE 2, PLACE ET FONCTIONS DE LA MANIPULATION

David BEYLOT
Professeur ESPE, Université Paris Est Créteil
david.beylot@u-pec.fr

Résumé

L'institution préconise aux enseignants de faire manipuler les élèves et parle de la manipulation comme étape vers l'abstraction. Souvent, ce que recouvre le terme *manipulation* n'est pas explicité, de même que les raisons et les conditions pour lesquelles la manipulation favoriserait certains apprentissages et des passages à l'abstraction. Dans ce texte, nous présentons d'abord différents usages du terme *manipulation* dans des textes scientifiques, institutionnels et tirés de guides du maître, ainsi que des fonctions que pourrait avoir la manipulation pour les apprentissages. Puis, en nous appuyant sur certains constats faits pendant l'atelier lorsque les participants ont réalisé une tâche d'analyse des fonctions de la manipulation dans des extraits de manuels (fichiers et guides du maître portant sur des situations d'apprentissage de la technique opératoire de l'addition en CP) ainsi que sur les échanges lors de la mise en commun qui a suivie, nous réfléchissons à la portée de cette tâche pour la formation des enseignants.

La préparation de cet atelier a été le fruit d'échanges dans un groupe de réflexion de l'ESPE de Créteil. Je remercie l'ESPE de Créteil ainsi que les collègues de ce groupe, qui m'ont donné des pistes bibliographiques, qui ont permis de faire avancer ma réflexion sur la manipulation ainsi que sur le contenu et le déroulement de l'atelier, et dont les commentaires avisés m'ont aidé à la rédaction de ce texte.

L'objectif de cet atelier était de mieux comprendre ce que recouvrait la manipulation et quels étaient ses enjeux pour les apprentissages des élèves, ainsi que d'étudier les potentialités et limites d'une tâche d'analyse des fonctions de la manipulation pour la formation des enseignants.

L'atelier a commencé par un exposé sur les questions que nous nous sommes posées en préparant l'atelier au sujet du terme *manipulation*, sur les différents usages de ce terme rencontrés dans certaines lectures scientifiques et sur les différentes fonctions de la manipulation (dans une situation d'enseignement-apprentissage) identifiées grâce à ces lectures.

Ensuite, la présentation du travail en groupes a concerné nos choix d'extraits de fichiers de l'élève et guides du maître à analyser, la grille d'analyse à compléter (cf. annexe 1), les consignes et objectifs de ce travail.

Le choix des manuels s'est porté sur *La méthode de Singapour*[104], *Mon année de maths*[105], *Archimaths*[106] et *Les nouveaux outils pour les maths*[107].

Ces manuels ont été choisis parce que leurs auteurs mettent en avant la manipulation. Les extraits choisis (cf. annexes 2 à 6) concernent l'addition posée car c'est un thème clairement repérable dans ces manuels et à peu près au même moment de la programmation sur l'année (plutôt vers la fin)[108].

---

[104] Neagoy, M. (dir.) (2016). La méthode de Singapour Mathématiques CP. Éditions La Librairie des Écoles.

[105] Mazollier, M.-S., Mounier, E., Pfaff, N. (2016). Mon année de maths CP. Éditions Sed.

[106] Bolsius, C. (dir.) (2016). Archimaths CP. Éditions Magnard.

[107] Gros, P. (dir) (2016). Les nouveaux outils pour les maths CP. Éditions Magnard.

[108] Pour *La méthode de Singapour* : « séances » 114 et 115 sur 135.

Pour *Mon année de maths* : « séquence » 31 sur 33.

Nous avons demandé à chaque groupe :

- D'analyser les extraits de deux manuels sous l'angle de la manipulation en essayant de compléter la grille proposée (cf. annexe 1) et en ajoutant si nécessaire des fonctions dans les lignes vierges.
- De réfléchir au travail mené et prendre des notes sur les échanges au sein du groupe à propos des difficultés rencontrées pour réaliser la tâche, de l'adéquation de la grille à la tâche, de l'intérêt de se centrer sur la manipulation pour analyser les extraits, des potentialités de ce travail pour la formation d'enseignants.

Lors de la mise en commun collective qui a suivi ce travail, la question des difficultés rencontrées pour réaliser la tâche et de la pertinence de l'utiliser en formation a initialisé les échanges.

Nous avons enfin présenté les conclusions que nous pensions, en préparant l'atelier, pouvoir faire après le travail en groupe et la mise en commun, pour prolonger la discussion sur l'intérêt de cette tâche pour la formation.

Dans ce texte, nous reprenons en première partie la synthèse sur les acceptions du terme *manipulation* et sur les fonctions de la manipulation pour les apprentissages, qui avait été préparée pour l'exposé préalable au travail en groupes, enrichie d'éléments issus des discussions lors de l'atelier. Dans la deuxième partie, nous relatons certains constats faits lors de la réalisation de la tâche d'analyse d'extraits de manuels par les participants à l'atelier puis ce qui est ressorti des échanges lors de la mise en commun qui a suivi le travail en groupes. Nous essayons enfin d'en tirer des conclusions sur et pour la formation des enseignants à la manipulation.

I - SYNTHÈSE SUR CE QUE PEUT RECOUVRIR LA « MANIPULATION »

Dans cette partie, nous commençons par lister différents usages du terme *manipulation* dans certains textes scientifiques et institutionnels. Puis, nous évoquons ce que contiennent, au sujet de la manipulation, les introductions/présentations des quatre guides du maître choisis. Enfin, nous explicitons les fonctions de la manipulation (dans un dispositif d'enseignement-apprentissage) repérées, en nous appuyant à la fois sur nos lectures scientifiques lors de la préparation de l'atelier et également sur les échanges durant l'atelier.

1 Différents usages de *manipulation* dans des textes scientifiques et institutionnels

Dans nos lectures scientifiques et institutionnelles, nous avons remarqué que *manipulation* (ou *manipuler*) est utilisé sous plusieurs acceptions, y compris parfois par le même auteur dans un même texte.

Dans certains cas et selon s'il s'agit de manipulation (« tout court ») ou de manipulation d'objets, *manipulation* peut remplacer ou être remplacé par *action* ou *action sur* (ou encore *action sur des objets*, *action sur des objets matériels*).

Par exemple, Tricot (2017, pp. 14-26) nous semble utiliser indifféremment *la manipulation* ou bien *l'action*, et parfois les deux (*la manipulation* et *l'action*) séparés d'une virgule, l'un explicitant l'autre.

Il nous semble également que *manipulation* est utilisé pour signifier *action sur des objets matériels* dans les programmes de mathématiques du Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2015), pour le cycle 2, à la compétence *Raisonner* : « Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure » (p. 74) ; ou, dans la partie *Grandeurs et mesures* : « À vue ou par manipulation, proposer une estimation de la mesure d'une grandeur attachée à un objet, avant confrontation avec d'autres approches » (p. 80).

Inversement, *manipulation* et *action* semblent devoir être distingués lorsque *action* est utilisé en référence à la théorie des situations didactiques (de manière explicite ou non). Par exemple, dans les programmes

---

Pour *Archimaths* : « leçon » 125 sur 194.

Pour *Les nouveaux outils pour les maths* : « leçons » 140 et 143 sur 147.

de mathématiques du Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2015, p.88), pour le cycle 2, on peut lire :

> *En géométrie comme ailleurs, il est particulièrement important que les professeurs utilisent un langage précis et adapté et introduisent le vocabulaire approprié au cours des manipulations et situations d'action où il prend sens pour les élèves, et que ceux-ci soient progressivement encouragés à l'utiliser.*

Cependant, il faut noter que les programmes de mathématiques de cycle 2 ont été partiellement réécrits en juillet 2018 et que, dans la phrase « L'introduction et l'utilisation des symboles mathématiques sont réalisées au fur et à mesure qu'ils prennent sens dans des situations basées sur la manipulation, […] » des programmes du Ministère de l'Éducation nationale[109] (2018, p. 22), « situations basées sur la manipulation » a remplacé « situations d'action » utilisé dans les programmes du Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche[110] (2015, p. 73).

Dias (2008) se place explicitement dans le cadre de la théorie des situations didactiques pour caractériser l'expérimentation au sein de la phase d'action, en essayant de montrer en quoi « la notion d'expérimentation est bien différenciée de celle de manipulation » (p. 212) et que « il ne s'agit en aucun cas d'assimiler l'expérimentation à une démarche qui prône la manipulation en lieu et place de l'observation […] » (p. 27). Mais Dias (*ibid.*) emploie aussi parfois *manipulations* lorsqu'il s'agit d'expérimentation, par exemple quand il explique que « les manipulations peuvent être assimilées à des phases d'expérimentation, puisqu'elles expriment une volonté d'intervention sur les objets du monde » (p. 104).

L'emploi de *manipulation* ne concerne pas toujours ou pas uniquement les objets matériels, sur lesquels on peut agir avec les mains. Par exemple, lors la conférence de consensus de novembre 2015 sur le nombre et les opérations, Fayol (2015) parle de « manipulation de symboles mathématiques », de « manipulation de structures pluri-unitaires », de « manipulation de suites verbales et écrites ».

2 Usages de *manipulation* dans les introductions des guides du maître choisis

Les auteurs des quatre manuels de CP choisis mettent en avant la manipulation dans les pages d'introduction des guides du maître. Nous pensons pouvoir faire le lien avec les nombreuses occurrences de *manipulation*, ainsi que *manipulatoire* et *manipuler* (à l'infinitif ou conjugué), dans les programmes de mathématiques actuellement en vigueur à l'école primaire. L'un des guides (*Archimaths*) fait d'ailleurs explicitement référence aux programmes.

Voici ce qu'on trouve, sur la manipulation, dans ces introductions :

- Dans *La méthode de Singapour*, la manipulation est « nécessaire pour la compréhension, notamment dans les plus petites classes », mais « au service de l'abstraction au lieu d'être une fin en soi », « permet aux élèves de s'approprier ensuite les représentations visuelles », « ne [doit] pas être trop longue, sans quoi les élèves risquent de perdre de vue l'objectif poursuivi ».
- Dans *Mon année de maths*, la manipulation « est essentielle à la construction des concepts », « permet la constitution d'images mentales qui pourront ensuite être mobilisées » et :

  > *[Le] matériel devient aussi, progressivement, un outil de différenciation et de validation. Par exemple, la manipulation des cubes emboîtables, utilisés fréquemment pour la numération décimale, permet tout d'abord de comprendre l'intérêt des groupements, par dix en particulier, pour comparer ou dénombrer des grandes collections. Cette manipulation est ensuite proposée aux élèves qui n'ont pas encore construit les images mentales nécessaires, pour valider ou invalider une réponse à un exercice sans manipulation. La vérification de la réponse avec le matériel permet à l'élève de mieux comprendre les raisons de ses réussites et de ses erreurs.*

- Dans *Archimaths*, le guide indique que la manipulation est au centre de la pratique de classe, « conformément aux programmes », « pour rendre les élèves actifs et donner du sens aux concepts étudiés », « préalable au raisonnement, à la conceptualisation et au travail intellectuel », « essentielle

[109] Sous la présidence d'Emmanuel Macron

[110] Sous la présidence de François Hollande

à la compréhension des concepts mathématiques », « [permettant] aux élèves de donner sens aux représentations abstraites (symboliques ou numériques) par le biais d'objets concrets », et que :

> *Pour toute activité de manipulation, il est important de prévoir un temps préalable à la séance au cours duquel les élèves peuvent manipuler le nouveau matériel proposé afin de favoriser leur concentration durant l'activité mathématique et de toujours faire le lien entre le matériel et les représentations symboliques dont il est question (schéma, écritures symboliques ou numériques).*

- Dans *Les nouveaux outils pour les maths*, « [les] expérimentations et [les] manipulations [sont] essentielles pour la structuration et l'assimilation solide de la notion chez les élèves ».

Dans ces introductions, la place et le rôle de la manipulation sont explicités de manière inégale. Dans certains cas, on voit apparaître certaines fonctions ou certains aspects que nous décrivons au paragraphe suivant. Dans d'autres cas, cela nous semble rester très « flou ».

Nous pouvons alors nous demander ce qu'il en est dans les descriptions des séances ou situations dans les guides du maître. Nous répondrons partiellement à cette question dans le paragraphe II, en nous intéressant uniquement à des extraits et à la technique opératoire de l'addition en CP.

3 Fonctions de la manipulation

Nous avons identifié huit fonctions de la manipulation, dans le sens de « l'action physique sur des objets matériels » :

- Apprendre à manipuler
- Faciliter la dévolution
- Produire des signes liés à l'utilisation de l'artefact
- Accéder à des représentations
- Solliciter des mises en relation entre signes ou entre représentations
- Aider à résoudre un problème
- Favoriser l'évolution des procédures
- Valider une solution

Nous explicitons ci-après chacune de ces fonctions, en intégrant certains éléments issus des échanges lors de l'atelier.

Apprendre à manipuler

Dans certains cas, la manipulation peut avoir comme fonction l'apprentissage d'un usage d'un instrument. Par exemple, on peut faire manipuler les élèves pour apprendre à tracer avec soin des « ronds » sur un support avec le compas. Mais on peut aussi apprendre d'autres usages d'un compas comme le report de longueurs de segments et, en nous référant à l'approche instrumentale développée par Rabardel (1995), nous pourrions dire qu'il existe plusieurs instruments compas car il y a plusieurs finalités possibles[111].

Tricot (2017) explique que des travaux « montrent que l'effet positif [de la manipulation] est plus systématiquement obtenu quand le savoir-faire visé est moteur » (p. 19) et que « quand l'objectif est de comprendre, d'élaborer une connaissance notionnelle, alors ce n'est pas tant le fait de manipuler qui est important : c'est le fait d'être actif cognitivement » (p. 26).

En revanche, d'autres chercheurs n'opposent pas, ou pas systématiquement, apprentissages moteurs et apprentissages conceptuels. Par exemple, lorsqu'il évoque la dimension expérimentale des sciences, Dias (2008, p. 60) ne considère plus l'instrument « comme une prolongation du geste mais comme faisant partie de la théorie ». Il s'appuie sur les travaux de Vergnaud qui « utilise la notion de théorème en acte pour qualifier les connaissances manifestées par les élèves dans leurs activités » et selon lequel « la

[111] Rabardel (1995, p. 49) donne une « première » définition de la notion d'*instrument* à partir de celle d'*artefact* : l'artefact est « la chose susceptible d'un usage, élaborée pour s'inscrire dans des activités finalisées » et l'instrument est « l'artefact en situation, inscrit dans un usage, dans un rapport instrumental à l'action du sujet, en tant que moyen de celle-ci ».

conceptualisation consiste en un passage des concepts-comme-instrument aux concepts-comme-objet ». En donnant l'exemple de la manipulation du matériel de type *Polydrons* dans la recherche de tous les polyèdres réguliers, Dias (2008, p. 92) se réfère également aux travaux de Rabardel pour évoquer le processus d'instrumentation de l'élève lorsqu'il agit sur ou avec du matériel pour tenter de résoudre le problème, en fonction des potentialités et limites de ce matériel : « le matériel proposé fonctionne davantage comme un artefact puisqu'il instrumente l'élève en pré-structurant son activité ». Cependant, Dias (2008, p. 61) précise également que « tout objet n'est pas instrument », et que « sa simple manipulation n'est pas systématiquement source d'apprentissage ».

Faciliter la dévolution

Une « phase de manipulation », où l'élève vit et résout une situation proche de celle qu'il aura ensuite à traiter, peut lui permettre de mieux s'approprier le « vrai » problème (posé dans un second temps). La manipulation pourrait alors être considérée comme une aide à la représentation (mentale), au sens de Julo (2000), du problème. Par exemple, dans le domaine numérique, les élèves peuvent avoir à traiter une situation avec de petites quantités ne nécessitant pas le recours au calcul avant d'avoir à résoudre la « même » situation pour des quantités importantes rendant nécessaire l'utilisation d'opérations arithmétiques.

De plus, la manipulation peut parfois favoriser l'engagement de l'élève dans la tâche (outre l'appropriation du problème et la disponibilité effective de connaissances pour le résoudre efficacement) parce qu'il a la possibilité d'agir sur des objets concrets. Par exemple, dans le cas d'un problème de recherche du nombre d'éléments d'une réunion de deux collections d'objets dont les nombres sont donnés en écritures chiffrées, la présence effective des deux collections d'objets peut permettre aux élèves d'essayer de les compter un à un avant d'agir, ou de prendre conscience qu'il est plus efficace d'agir, sur les écritures chiffrées.

Produire des signes liés à l'utilisation de l'artefact

Maracci et Mariotti (2010) expliquent que lors de l'utilisation d'un artefact pour accomplir une tâche, les élèves produisent des signes qui peuvent être porteurs de significations (a priori non mathématiques) dont certains aspects peuvent être pertinents du point de vue du développement des signes et significations mathématiques (qui constituent l'objectif d'enseignement) et liés à certains aspects spécifiques de l'utilisation de l'artefact ; ce *potentiel sémiotique* de l'artefact nécessite d'être analysé et exploité par les enseignants pour envisager les apprentissages des élèves (cf. paragraphe « Solliciter des mises en relations entre signes ou entre représentations »).

Il ne suffit pas, en effet, de manipuler du matériel pédagogique, même s'il évoque particulièrement bien l'apprentissage visé. Maracci et Mariotti (2010, p. 91) donnent en contre-exemple le boulier romain qui « peut évoquer la notation positionnelle des nombres » mais dont l'utilisation pendant plusieurs siècles pour la pratique du calcul n'a pas été suffisante « pour déclencher le passage à la notation positionnelle des nombres ».

Accéder à des représentations

La manipulation peut permettre de faire évoluer certaines représentations mentales de l'enfant. Fayol (2015) donne l'exemple du travail avec les jeux de pistes pour l'accès à une représentation « linéaire » des quantités (alors que celle-ci serait, premièrement, plutôt de type « logarithmique »).

En outre, on peut utiliser un objet matériel comme représentation physique (donc concrète) d'un objet mathématique (abstrait) :

- Lorsque d'autres représentations (dessins, schémas, symboles) sont ou semblent hors de portée intellectuelle des élèves. Dias (2008) donne l'exemple de l'utilisation des Polydrons, en fin d'école élémentaire, à la place des représentations en perspective.
- En relation avec d'autres représentations du même objet mathématique (cf. paragraphe « Solliciter des mises en relations entre signes ou entre représentations ») ; par exemple, lorsqu'on utilise à la

fois du matériel de numération (comme des barres et des petits cubes) et des écritures chiffrées pour désigner des dizaines et des unités isolées.

Cette utilisation de représentations physiques d'objets mathématiques peut aussi engendrer des difficultés. Duval (2011, pp. 154-155) explique que la compréhension en mathématiques nécessite de ne pas « confondre l'objet et l'une de ses représentations » alors même que « les représentations sémiotiques sont les seuls moyens d'accès possibles aux objets » et qu'on ne peut pas « comparer chaque représentation sémiotique à ce qu'elle représente ». Or, le statut des objets matériels manipulés peut ne pas être clair aux yeux de l'élève et l'objet mathématique peut justement être confondu avec son représentant matériel. Par exemple, un élève peut concevoir une dizaine comme une barre et non plus comme l'équivalent de dix unités.

Solliciter des mises en relation entre signes ou entre représentations

Les manipulations pourraient être (plus ou moins directement) à l'origine de conceptualisations, en permettant des mises en relation :

- Entre les signes produits par les élèves lors d'une manipulation et les signes mathématiques. Maracci et Mariotti (2010, p. 92) expliquent que l'élève qui manipule ne donne pas nécessairement de signification mathématique aux signes qu'il produit lors de l'accomplissement d'une tâche en utilisant un artefact, et que la mise en relation entre signes liés à l'activité avec l'artefact et signes mathématiques « doit être prise en charge, comme un objectif didactique, par l'enseignant » pour « contribuer à faire évoluer les signes produits par les élèves, d'une relation entre artefact et tâches vers une relation entre artefact et savoir ».
- Entre les représentations physiques manipulées et d'autres représentations des objets mathématiques étudiés. Duval (2011, pp. 155-156) explique que « deux représentations d'un même objet n'ont pas du tout le même contenu », ce contenu fusionnant « des unités de sens qui ne relèvent pas toutes du même niveau d'organisation », ce qui nécessite que « les élèves prennent conscience des différentes unités de sens possibles dans le contenu des représentations » et « puissent reconnaître les correspondances et les non correspondances entre deux représentations de registres différents ».

La portée de ces mises en relations pour les apprentissages peut notamment dépendre du fait qu'elles sont :

- Plus ou moins explicites pour les élèves.
- Plus ou moins consciemment instiguées par l'enseignant.
- Produites par l'enseignant ou par l'élève.
- À l'initiative de l'enseignant ou de l'élève.
- Réalisées lors de telle ou telle phase de la séance (lancement, recherche, mise en commun, institutionnalisation), de tel ou tel type de situation (action, formulation, preuve).
- Nécessaires ou non pour résoudre un problème, pour justifier une procédure.

Aider à résoudre un problème

La possibilité de manipuler peut parfois faciliter la résolution d'un problème (outre l'aide à la représentation de la situation). En rendant possible l'utilisation de connaissances anciennes de l'élève ou en guidant l'élève vers une certaine procédure, une aide « matérielle » à la résolution, fournie aux élèves, peut alors modifier l'activité de l'élève donc les potentialités d'apprentissage de la situation. Par exemple, pour un problème de transformation avec recherche de l'état final et concernant de petites quantités, la présence du nombre d'objets correspondant à l'état initial puis l'ajout effectif du nombre d'objets correspondant à la transformation peut conduire un élève à la réussite en comptant tous les objets (et en s'aidant des mains pour les énumérer), ce qui ne favorise pas l'utilisation de l'addition.

Favoriser l'évolution des procédures

Dans certains problèmes, la manipulation ne permet pas une résolution efficace, ce qui peut contribuer à donner du sens à d'autres procédures. Par exemple, la difficulté à agir physiquement sur une grande quantité d'objets peut rendre nécessaire le calcul.

Dans d'autres problèmes, les contraintes matérielles peuvent favoriser la construction de nouvelles techniques. Par exemple, l'utilisation d'étiquettes marquées 1, 10 et 100, pour désigner une quantité, ainsi que la possibilité d'échanges dix contre un (dix étiquettes 1 contre une étiquette 10 et dix étiquettes 10 contre une étiquette 100), peuvent inciter les élèves à traiter un problème de partage de cette quantité autrement que si celle-ci avait été désignée à l'aide d'une écriture chiffrée.

Dias (2008, pp. 52-53), en référence aux travaux de Brousseau et Salin, évoque la notion de *milieu de type antagoniste*, « porteur de déséquilibres dans les rétro-actions qu'il fournit à l'activité de l'élève », pouvant provoquer « l'adaptation de l'élève et par la même, la construction (appropriation) d'une connaissance ».

Tricot (2017) explique cependant que la manipulation peut entrainer un coût cognitif important qui, pour les élèves les moins avancés dans les apprentissages, conduit généralement à laisser trop peu de ressources attentionnelles pour les apprentissages.

Valider une solution

La manipulation peut permettre d'avoir un retour sur la validité (ou l'invalidité) d'une procédure utilisée. Une validation « matérielle » peut notamment intervenir pendant une phase de recherche (volontairement ou non) ou après une phase d'argumentation qui n'a pas permis de convaincre.

Notons que la manipulation ne permet pas toujours de s'assurer de la validité d'une solution. Par exemple, on peut calculer correctement et ne pas obtenir le même résultat par comptage si les quantités en jeu sont grandes.

Ces huit fonctions sont celles qui apparaissent dans la grille proposée lors de l'atelier (cf. paragraphe II). Sans compter celles que nous n'aurions pas identifiées, une liste beaucoup plus longue pourrait être envisagée. En effet, pour certaines de ces huit fonctions, nous pouvons considérer plusieurs cas comme nous venons de le montrer. En outre, il nous semblerait nécessaire de croiser ces fonctions avec d'autres paramètres comme :

- Les personnes qui manipulent : élève(s), enseignant.
- Ce qui est demandé à l'élève : observer, imiter, chercher, …
- Le guidage de l'enseignant pendant la manipulation
- Le type de connaissance visée : motrice, procédurale, notionnelle, …
- La phase de la séance au cours de laquelle intervient la manipulation : présentation de la situation, recherche, mise en commun, …
- La place de cette séance dans la séquence sur une notion : introduction, réinvestissement, …

II - TACHE D'ANALYSE DES FONCTIONS DE LA MANIPULATION DANS DES MANUELS DE CP

Lors de l'atelier, nous avons mis les participants en situation en leur demandant d'analyser les usages de la manipulation dans des propositions de séances extraites de deux[112] manuels de CP sur la technique opératoire de l'addition (cf. annexes 2 à 5), en complétant une grille où figurent uniquement les fonctions de la manipulation préalablement exposées (cf. annexe 1). La mise en commun qui a suivi le travail en groupes a été centrée sur les difficultés de réalisation de cette tâche ainsi que sur ses potentialités pour la formation d'enseignants.

[112] Dans le temps imparti, à savoir un peu plus de quarante minutes, certains groupes ont pu commencer l'étude des extraits d'un troisième manuel tandis que d'autres ont travaillé presque exclusivement sur les extraits d'un seul manuel.

À titre d'exemple, nous avons mis en annexes les grilles complétées que nous avons produites[113] en réalisant la tâche lors de la préparation de l'atelier (cf. annexes 6 à 9).

Dans cette partie, nous présentons d'abord certains constats que nous avons pu faire lors du travail en groupes puis certaines réflexions tirées des échanges lors de la mise en commun.

1 Constats lors de la réalisation de la tâche pendant l'atelier

Concernant les fonctions de la manipulation, certains groupes ont pensé que des auteurs semblaient utiliser davantage la manipulation pour certains rôles. Selon les groupes, les analyses n'ont pas débouché sur la même chose : par exemple, pour l'un des guides (*Mon année de maths*, cf. annexes 3 et 7), un groupe a principalement repéré la fonction « valider une solution » alors que d'autres ont repéré plusieurs fonctions (« solliciter des mises en relation », « faire évoluer les procédures », « valider une solution »).

Nous avons vu certains groupes hésiter à inscrire dans la grille un élément qu'ils avaient repéré, ou hésiter entre plusieurs fonctions. Par exemple, pour l'étape 1 de la séance 114 dans *La méthode de Singapour* (cf. annexes 2 et 6), le guide indique de commencer par montrer aux élèves, tout en leur posant des questions, comment procéder pour résoudre un calcul (27 + 5) avec le matériel de base 10, puis de donner un autre calcul du même type que les élèves doivent résoudre à l'aide du même matériel ; des participants ont hésité à noter ce passage dans « apprendre à manipuler », « aider à résoudre un problème » et « favoriser l'évolution des procédures ».

La plupart des groupes a expliqué avoir souvent eu besoin, pour compléter la grille, d'inférer les intentions des auteurs lorsqu'ils évoquent du matériel pédagogique ou la manipulation. Par exemple, l'étape 3 de la séance 114 dans *La méthode de Singapour* (cf. annexes 2 et 6), où le guide indique de dire aux élèves qu'il s'agit de faire le même calcul (27 + 5) avec le boulier puis de laisser les élèves proposer différentes représentations de l'addition avec le boulier, est restée assez énigmatique aux yeux de plusieurs participants. Certains groupes, ne se basant que sur ce qui leur semblait clairement explicité dans les extraits d'un guide qu'ils étudiaient, se sont retrouvé avec une grille vide ou presque vide à la fin du travail.

Les cases qui correspondent aux fonctions « faciliter la dévolution » et « produire des signes liés à l'utilisation de l'artefact », sont restées vides pour la totalité des groupes et pour tous les extraits étudiés.

2 Réflexions sur la tâche réalisée pendant l'atelier

Lors de la mise en commun a été évoquée l'étude de Mounier et Priolet (2018) qui peut questionner quant à l'intérêt d'analyser des manuels tellement leurs usages par les enseignants semblent variés, et souvent différents de ceux envisagés par les auteurs de ces ouvrages. En effet, seulement la moitié des enseignants (au nombre de dix), suivis par ces chercheurs, utilise un guide du maître pour préparer la classe ; plusieurs enseignants n'ont pas choisi le manuel qu'ils utilisent en classe ; certains enseignants n'utilisent que le fichier de l'élève, d'autres que le guide du maître et parfois avec un fichier d'un autre manuel. De plus, Mounier et Priolet (*ibid.*) expliquent que les scénarios d'apprentissages pensés par des enseignants qui utilisent plusieurs manuels peuvent présenter des incohérences. Mais s'interroger sur les artefacts que sont les manuels ne remet pas en cause les différents usages qui peuvent en être faits, et s'intéresser seulement à un extrait pour former de manière croisée à la manipulation et à l'analyse de situations ne remet pas en cause la nécessité de former à l'analyse de scénarios d'apprentissage.

La réalisation de la tâche par les participants à l'atelier (principalement des formateurs ESPE et maîtres-formateurs) montre qu'il est difficile, à partir des extraits étudiés, de comprendre les intentions des auteurs de certains manuels concernant l'usage de la manipulation pour les apprentissages des élèves. Certains guides du maître sont prescriptifs (mais pas nécessairement clairs) au sujet de l'action que doit mener l'enseignant et il n'y a pas d'explication sur le rôle de la manipulation dans les situations décrites ni d'élément permettant de repérer les fonctions de la manipulation. Au regard de l'étude de quelques extraits, les enseignants qui utilisent ces manuels et guides du maître ne semblent donc pas

[113] En temps non limité, contrairement aux participants à l'atelier.

accompagnés pour analyser a priori les situations à faire vivre aux élèves, du point de vue de la manipulation.

Le travail pendant l'atelier montre également qu'on ne retrouve pas certaines fonctions de la manipulation pour chaque situation étudiée. Il est possible que la présence ou l'absence de telle(s) fonction(s) puisse être caractéristique de tel manuel, mais l'étude de quelques pages seulement ne permet certainement pas de conclure.

De manière plus générale, une étude relativement locale comme celle réalisée lors de l'atelier ne permet pas de tirer des conclusions à propos d'un manuel. En revanche, il semble ressortir d'une telle étude :

- La nécessité de prendre en compte la dimension instrumentale et sémiotique du matériel utilisé en relation avec l'activité possible de l'élève et les connaissances en jeu.
- La nécessité d'une étude plus globale sur l'ensemble d'un scénario d'apprentissage d'une notion et sur l'ensemble des séances où le même matériel est utilisé.

Dans un dispositif de formation, une tâche d'analyse des fonctions de la manipulation à partir d'extraits de manuels pourrait en particulier :

- Contribuer à l'outillage théorique des enseignants en permettant de réinvestir ou en motivant l'introduction de certaines notions (cf. §I-3), ce qui dépend des fonctions prises en compte dans l'analyse, en tant qu'outil pour l'analyse de situations.
- Favoriser la prise de conscience de l'importance d'analyser a priori les situations et/ou de s'appuyer sur des ressources qui accompagnent véritablement l'enseignant dans son travail de préparation de séance.
- Motiver des tâches d'analyses plus globales de scénarios ou d'usages d'un matériel.

III - CONCLUSION

La manipulation est mise en avant par l'institution, en témoignent les nombreuses occurrences de *manipulation* (et autres mots de la même racine) dans les programmes du Ministère de l'Éducation Nationale (2018) ainsi que dans le rapport de Torossian et Villani (2018) (dont les mesures préconisées doivent être mises en œuvre selon le souhait du Ministre de l'Éducation Nationale) où *manipuler* est souvent corrélé à *verbaliser* et *abstraire*.

Mais, paradoxalement, les enseignants semblent peu accompagnés pour comprendre certains enjeux de la manipulation et pour apprendre à analyser des situations et des scénarios d'apprentissage s'appuyant sur la manipulation ainsi que l'activité des élèves lorsqu'ils manipulent. Par exemple, il n'y a pas sur Éduscol, à notre connaissance, de « document ressource » qui traite de la manipulation dans les apprentissages et/ou du passage de la manipulation à l'abstraction via la verbalisation (si on excepte les textes qui ne font que prescrire la manipulation et le passage de la manipulation à l'abstraction).

Or, nous avons montré que le sujet était complexe, d'où la nécessité de former les enseignants, et sans doute aussi les formateurs. D'une part car il existe différents usages du terme *manipulation* dans les textes institutionnels, scientifiques ou tirés de guides du maître, ce qui implique de préciser l'acception que l'on utilise en formation. D'autre part car il existe de nombreux usages de la manipulation dans un dispositif d'enseignement-apprentissage, avec des potentialités et limites à mesurer du point de vue des apprentissages des élèves.

La question de la manière dont les éditeurs et/ou auteurs de manuels se sont emparés de ce sujet nous parait importante et à traiter en formation d'enseignants parce que les enseignants se tournent entre autres vers ce type de ressource pour être accompagnés dans la préparation de séances où ils vont faire manipuler leurs élèves.

Nous nous interrogeons sur la possibilité d'utiliser en formation d'enseignants la tâche réalisée par les participants, principalement formateurs d'enseignants, lors de l'atelier. Nous pensons que des enseignants, y compris débutants, pourraient s'engager dans une telle tâche. En effet, il est facile de repérer ce qui concerne l'utilisation de matériels dans des extraits de manuels, même si on ne sait pas

toujours ce qui est fait avec ce matériel et pour quelles raisons (et donc si tel élément doit être relevé ou non). En outre, selon les extraits choisis et selon les manuels choisis, certaines fonctions sont assez aisément identifiables, parfois même clairement décrites dans le texte. En revanche, nous avons constaté qu'il était difficile pour des formateurs, donc « experts » dans l'analyse de manuels, d'associer certains éléments relevés dans des extraits avec certaines fonctions apparaissant dans la grille, ce qui nous fait dire que la tâche réalisée pendant l'atelier n'est sans doute pas envisageable telle quelle en formation d'enseignants.

Nous concluons en faisant plusieurs hypothèses, non exclusives, qui pourraient expliquer ces difficultés et sur lesquelles nous avons à réfléchir pour penser un dispositif de formation adapté à des enseignants :

- Le choix des concepts théoriques à mobiliser. Le travail nécessite un certain recul sur les cadres théoriques qui soutiennent les fonctions envisagées. D'un autre côté, il pourrait permettre de montrer la pertinence de certains concepts (et de les introduire) ou un réinvestissement de certains outils d'analyse.
- Le choix des manuels et des extraits retenus. Il doit notamment permettre de relever, dans chaque extrait, un nombre d'éléments suffisamment important et, sur l'ensemble des extraits, des éléments pouvant être associés aux différentes fonctions.
- Le choix de conception de la grille et des critères à observer. Certaines fonctions qui n'apparaissent pas, ou bien qui sont trop générales, ou bien qui ne le sont pas assez, peuvent rendre difficile le remplissage de la grille.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. *Thèse de doctorat*. Université Lyon 1.

Duval, R. (2011). Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques. *XIIIème CIAEM-IACME à Recife*.

Fayol, M. (2015). Nombres et opérations : premiers apprentissages. Un bilan scientifique. *Rapport Cnesco*.

Julo, J. (2000). Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? *XXVIIème colloque Inter-IREM à Chamonix*.

Maracci, M. et Mariotti, M. A. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique : une ressource pour le professeur. In G. Gueudet et L. Trouche. Ressources vives. *Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2015). Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015.

Ministère de l'Éducation nationale (2018). Bulletin officiel n° 30 du 26 juillet 2018.

Mounier, E. et Priolet, M. (2018). Le manuel scolaire : une ressource au « statut paradoxal ». Rapport de l'enseignant au manuel scolaire de mathématiques à l'école élémentaire. *Éducation et Didactique*.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies ; une approche cognitive des instruments contemporains. Éditions Armand Colin.

Torossian, C. et Villani, C. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.

Tricot, A. (2017). L'innovation pédagogique. Éditions Retz.

V - ANNEXES

Annexe 1 : Grille d'analyse utilisée lors du travail en groupes

Séances / Fonctions	
Apprendre à manipuler	
Faciliter la dévolution	
Produire des signes liés à l'utilisation de l'artefact	
Accéder à des représentations	
Solliciter la mise en relation entre signes ou entre représentations	
Aider à résoudre un problème	
Favoriser l'évolution des procédures	
Valider une solution	

Annexe 2 : Extraits de *La méthode de Singapour* utilisés lors du travail en groupes

UNITÉ 14 : L'addition et la soustraction jusqu'à 100

Consolider les stratégies additives et soustractives en les appliquant aux dizaines, découvrir l'algorithme d'addition et de soustraction posées sans et avec retenue, résoudre des additions à trois termes a + b + c, résoudre et modéliser des problèmes impliquant l'addition et la soustraction

Il existe plusieurs stratégies pour additionner et soustraire, en particulier 1) une stratégie faisant appel à la suite numérique, horizontale et mentale, 2) une stratégie faisant appel au matériel de base 10, verticale et posée. Chacune de ces stratégies aboutit au même résultat, mais suppose un ordre différent des calculs. La résolution de problèmes impliquant l'addition ou la soustraction se fait en 4 étapes : 1) lire et comprendre, 2) planifier et modéliser, 3) calculer, 4) vérifier.

Contexte

Au cours de l'unité 8, les élèves ont appris de nouvelles stratégies pour additionner et soustraire : 1) « compter à partir du nombre le plus grand », en visualisant la bande numérique et 2) décomposer le nombre en dizaines et en unités, en modélisant les dizaines et les unités à l'aide de « boîtes de dix ». Ils ont en outre appris à résoudre des problèmes reposant sur l'observation d'illustrations.

Objectifs

Les élèves vont maintenant appliquer ces mêmes stratégies aux nombres de 20 à 100 en utilisant les tableaux de numération et le matériel de base 10 vus à l'unité 10. Ils vont en outre apprendre à se servir du boulier, afin d'ajouter une nouvelle représentation des nombres, r epresentation à la fois verticale et horizontale.

Dans cette unité, les élèves vont également être confrontés pour la première fois à l'algorithme d'addition et de soustraction posées avec retenue, ou, comme nous préférons l'appeler : la stratégie pour additionner et soustraire en « groupant différemment ». Cet algorithme est introduit de manière efficace par l'approche concrète-imagée-abstraite, qui fait toujours correspondre au calcul posé une phase de manipulation et une phase de modélisation.

Les élèves vont ensuite apprendre à appliquer les stratégies de calcul aux additions à trois termes (a + b + c). Enfin, ils s'entraîneront à la résolution de problèmes selon la classification de Polya, en modélisant eux-mêmes les situations à l'aide de cubes ou de jetons, l'accent étant surtout mis à ce stade sur la compréhension de l'énoncé et sur la planification (addition ou soustraction ?).

Progression de l'unité

Afin de faire percevoir aux élèves la relation inverse entre l'addition et la soustraction, les deux opérations sont abordées parallèlement tout au long de l'unité.

La séance 109 aborde l'addition d'une petite quantité d'unités, la séance 110 aborde la soustraction d'une petite quantité d'unités.

La séance 111 aborde l'addition de dizaines, la séance 112 la soustraction de dizaines.

La séance 113 aborde l'addition simultanée de dizaines et d'unités sans retenue, les séances 116 et 117 la soustraction simultanée de dizaines et d'unités sans retenue.

Les séances 114 et 115 abordent l'addition avec retenue, les séances 118 et 119 la soustraction avec retenue.

Note : nous n'utilisons pas, dans le descriptif des séances, le terme de retenue, mais celui de « groupement » de dizaines ou d'unités.

La séance 120 aborde les additions à trois termes (a + b + c).

Les séances 121 et 122 sont dédiées à la résolution de problèmes.

Quelques points de vigilance

De manière générale, les difficultés rencontrées par les élèves pour les additions et les soustractions des nombres inférieurs à 20 vont resurgir lors de cette unité. En outre, en additionnant et en soustrayant les dizaines et les unités, les élèves auront tendance à oublier de comptabiliser la dizaine ajoutée (addition) ou remplacée (soustraction). Dans le cas des soustractions, certains élèves auront du mal à interpréter les chiffres en tant que dizaines ou unités. En conséquence, quand il n'y aura pas assez d'unités pour soustraire le nombre demandé, ils se contenteront d'inverser la soustraction et de soustraire le plus petit nombre d'unités du plus grand.

En ce qui concerne la gestion de classe, l'un des buts de cette unité, en cette fin d'année de CP, est d'affranchir progressivement les élèves de la phase de manipulation, en ne la destinant qu'à la vérification des résultats, et non à leur élaboration. En conséquence, nous vous encourageons, si vous devez « sacrifier » telle ou telle partie de la séance faute de temps, à privilégier l'usage du fichier.

©La Librairie des Écoles 2016

Séance 114

Additionnons en groupant différemment

Objectifs **Additionner deux nombres à deux chiffres avec « retenue ».**

Utiliser une stratégie de calcul pour additionner un nombre à deux chiffres à un autre nombre à deux chiffres avec ajout d'une nouvelle dizaine à partir de différents supports (matériel de base dix, suite numérique, boulier…).

Compétence du programme 2016 : Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit. Calculer en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives.

DÉMARCHE PÉDAGOGIQUE

Étapes de la séance	Durée	Modalité
1 « Grouper différemment » avec le matériel de base 10	20 min	Collectif puis en binôme
2 « Grouper différemment » avec la bande numérique	20 min	
3 « Grouper différemment » avec le boulier	20 min	
Matériel pédagogique : matériel de base 10, bande numérique, boulier		

1 « Grouper différemment » avec le matériel de base 10

Note : Nous abordons maintenant l'addition dite communément « avec retenue » ; cependant, nous n'utiliserons pas le terme « retenue » qui fait référence à l'algorithme de l'addition posée en colonnes. Par cohérence avec l'approche concrète-imagée-abstraite, nous utiliserons l'expression « grouper différemment » pour expliciter l'action de grouper les unités en une dizaine.

Écrivez au tableau : 27 + 5

Dites aux élèves que vous allez chercher combien font 27 + 5 à l'aide du **matériel de base 10**.

« Combien y a-t-il de dizaines dans 27 ? » (2 dizaines) « Combien y a-t-il d'unités ? » (7 unités)

« Mêmes questions pour 5 ? » (0 dizaine et 5 unités)

Tout en posant les questions, affichez le **matériel de base 10** au tableau (ou dessinez-le), en disposant au fur et à mesure les dizaines et les unités. (Vous pouvez vous inspirer de la présentation **page 68 du fichier B.**)

Une fois toutes les unités disposées, demandez : « Combien d'unités avons-nous en tout ? » Les élèves comptent 7 + 5 = 12. Or, dans 12, il y a plus que 10 unités. Rappelez-leur que 10 unités, c'est 1 dizaine, donc qu'il est possible de grouper les unités pour former une dizaine : 12, c'est 1 dizaine et 2 unités.

Illustrez cette opération en prenant dix cubes isolés, et en les remplaçant explicitement par une barre des dizaines, que vous placez dans la colonne des dizaines. « Combien de dizaines avons-nous maintenant en tout ? » (3), « Et combien d'unités ? » (2), « Le résultat est donc 32. »

Demandez aux élèves de se répartir en binômes avec du **matériel de base 10**, en distribuant à chaque binôme une addition différente : 31 + 9 ; 26 + 7 ; 18 + 4 ; etc. Mettez en commun les réponses obtenues et discutez collectivement leur validité.

©La Librairie des Écoles 2016

2 « Grouper différemment » avec la bande numérique

Reprenez le calcul du début de la séance : 27 + 5.
Distribuez – ou faites faire – à chaque binôme une **bande numérique** allant de 20 à 40.
Laissez chaque binôme chercher la réponse (5 minutes) puis mettez en commun les réponses. Explicitez les réponses de chaque binôme en les illustrant au tableau.
Décomposez : 27 + 5 = 27 + 3 + 2 = 30 + 2 = 32.
Faites remarquer aux élèves que l'on obtient le même résultat qu'avec la stratégie précédente. « Laquelle préférez-vous ? », « Pourquoi ? »
Laissez les élèves réfléchir aux points communs entre les deux stratégies : dans les deux cas, on prend des unités pour « faire 10 ».
Distribuez à chaque binôme des additions différentes. Laissez-leur dix minutes de réflexion puis mettez en commun les réponses obtenues et discutez collectivement leur validité.

3 « Grouper différemment » avec le boulier

Reprenez le calcul du début de la séance : 27 + 5. « Nous allons faire le même calcul mais avec le **boulier**. Connaissez-vous le résultat ? » La classe peut se souvenir qu'il s'agit de 32. Dans ce cas, dites : « Nous connaissons la réponse, mais ce qui nous intéresse, c'est d'apprendre une nouvelle stratégie pour la trouver. » Le but ici est de donner aux élèves le goût de la méthode, plutôt que celui d'avoir la bonne réponse.
Ces derniers doivent s'habituer progressivement à utiliser les représentations concrètes et imagées pour vérifier leur réponse, et non plus pour la trouver. Laissez-les proposer différentes représentations de l'addition 27 + 5 avec le boulier.
Note : D'autres représentations sont possibles, notamment en utilisant les cubes multidirectionnels, qui permettent de fixer la dizaine formée aux deux autres. L'objectif de toutes ces manipulations est de rendre concrète la formation de la dizaine aussi longtemps que nécessaire.

Différenciation

Soutien : Pour les élèves qui en ont besoin, reprenez le **matériel de base 10**, en procédant pas à pas : 18 + 1 = 19 ; 18 + 2 = 20 ; 18 + 3 = 21 ; etc. de manière à matérialiser plus facilement le passage à la dizaine.
Approfondissement : Habituez les élèves avancés à poser les additions en colonnes sans nommer les colonnes « dizaines » et « unités ».

Évaluation continue

Vérifiez que les élèves se sont familiarisés avec le comptage de dix en dix, et qu'ils disent indistinctement : 10, 20, 30 ou 1, 2, 3 dizaines.

Activité optionnelle	Synthèse de la séance
Calculs sur boulier (2) Proposez aux élèves d'effectuer des additions sur le **boulier**, qui offre une représentation complémentaire (à la fois horizontale et verticale).	J'ai appris à additionner des dizaines et des unités, en groupant des unités pour former des dizaines : • avec la bande numérique ; • avec le tableau des dizaines et des unités ; • avec le boulier.

©La Librairie des Écoles 2016

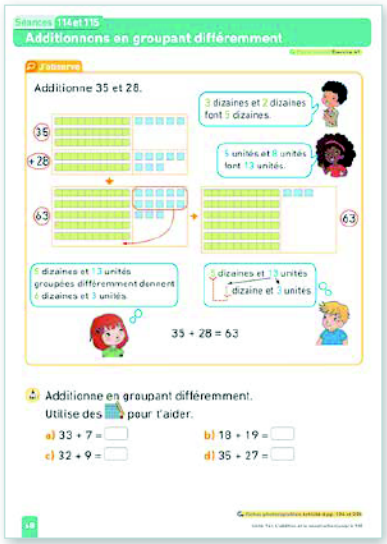
Séance 115
Additionnons en groupant différemment

Objectifs **Additionnons deux nombres à deux chiffres avec « retenue ».**

Utiliser une stratégie de calcul pour additionner un nombre à deux chiffres à un autre nombre à deux chiffres avec ajout d'une nouvelle dizaine à partir de différents supports (matériel concret, suite numérique, boulier...).

Compétence du programme 2016 : Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit. Calculer en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives.

Fichier B p. 68



DÉMARCHE PÉDAGOGIQUE

Étapes de la séance	Durée	Modalité
1 **De l'étape concrète à l'étape imagée**	30 min	Collectif puis en binôme
2 **Pratique guidée et travail en binôme**	30 min	En binôme
3 **Pratique autonome et automatisation**	30 min	Individuel
Fichier B : p. 68 Fiches photocop. : Act. 6 pp. 224-225	Matériel pédagogique : bande numérique, matériel de base 10	

1 De l'étape concrète à l'étape imagée

Note : À la séance précédente, les élèves ont additionné des unités (27 + 5) pour avoir une première expérience du passage à la dizaine. Nous allons maintenant additionner en même temps dizaines et unités.

Écrivez au tableau : 35 + 28.

Dites aux élèves que vous allez calculer 35 et 28 à l'aide du **matériel de base 10**. Distribuez le matériel aux élèves répartis en binômes.

« Combien de dizaines y a-t-il dans 35 ? », « Et combien d'unités ? », « Combien de dizaines y a-t-il dans 28 ? », « Et combien d'unités ? », « Comme lors de la dernière séance, nous allons d'abord additionner les unités : combien avons-nous d'unités ? 5 + 8 = 13. 13, c'est plus grand que 10. Rappelez-vous que 10 unités forment une dizaine, donc 13 unités peuvent être "groupées différemment" en 1 dizaine et 3 unités. »

« Maintenant, nous allons additionner les dizaines, sans oublier celle que nous venons de former. Cela donne 3 + 2 + 1 = 6. Nous avons donc en tout 6 dizaines et 3 unités. Donc 35 + 28 = 63. »

Demandez aux élèves d'ouvrir leur **fichier B à la page 68**. Laissez-les étudier l'encadré « J'observe » et demandez : « Quel est le lien avec ce que nous venons de faire ? » Demandez aux élèves de lire les phylactères. Ils doivent restituer la première étape, dans laquelle les dizaines et les unités sont regroupées séparément, et la deuxième étape, dans laquelle les unités sont regroupées en une sixième dizaine. Faites remarquer que les dizaines sont en vert et les unités en bleu. En comparant avec la page précédente, faites remarquer que les colonnes des dizaines et des unités ne sont pas nommées, qu'elles n'ont pas de « titre ».

Note : La lecture du fichier est une étape importante car elle permet de passer de la manipulation des cubes – « étape concrète » – à la représentation sur papier – « étape imagée » – dans laquelle l'algorithme de l'addition posée est formalisé.

©La Librairie des Écoles 2016

2 Pratique guidée et travail en binôme

Les élèves gardent le **matériel de base 10**. Proposez-leur de se répartir en binômes pour résoudre les additions de l'**exercice page 68 du fichier B** puis d'écrire leurs réponses sur leur fichier.
Vérifiez que les élèves forment bien une dizaine avec les unités.
Note : Les exercices a) et c) proposent d'ajouter des unités, tandis que les exercices b) et d), plus « difficiles », proposent d'additionner simultanément dizaines et unités.
Demandez aux élèves de suivre la démarche concrète-imagée-abstraite : 1) **matériel de base 10**, 2) représentation sur le cahier des barres de dizaines et des unités, 3) écriture des additions correspondantes à l'aide de chiffres.
Avec de l'entraînement, les élèves sauront vite anticiper que le nombre d'unités dépasse l'unique dizaine. Anticiper cet ajout de dizaine (avec reste d'unités) est signe que l'apprentissage du calcul est sur une voie assurée car il s'agit là des gestes mentaux qui seront transférés dès l'année de CE1 en calcul mental.
Procédez à la mise en commun des réponses et relevez d'emblée les éventuelles erreurs de raisonnement.

3 Pratique autonome et automatisation

Distribuez les **pages 224 et 225 de l'activité 6 des fiches photocopiables**.
Demandez aux élèves, avant de procéder à la résolution des calculs, de prendre le temps de regarder tous les exercices. Qu'observent-ils ?
Les calculs sont rangés d'une certaine façon :
- ajouter des unités en page de gauche ;
- calculs avec des dizaines supplémentaires en page de droite.

Les élèves peuvent au choix utiliser le **matériel de base 10**, la **bande numérique** ou une feuille de papier vierge.
Note : Cette activité encourage les élèves à automatiser l'algorithme d'addition et à faire de moins en moins appel au matériel de base 10. Prévoyez donc une plage de temps assez longue pour leur laisser le temps de s'approprier l'exercice.

Différenciation

Soutien : Pour les élèves qui en ont besoin, reprenez le **matériel de base 10**, en procédant pas à pas et en suivant la leçon en trois temps d'Édouard Seguin (je montre, je fais avec, je fais seul).
Approfondissement : Habituez les élèves avancés à modéliser leurs calculs en se servant du tableau de numération sans nommer les colonnes « dizaines » et « unités ».

Évaluation continue

Vérifiez que les élèves se sont familiarisés avec le comptage de dix en dix et qu'ils disent indistinctement : 10, 20, 30 ou 1, 2, 3 dizaines.

Activité optionnelle	Synthèse de la séance
Calculs sur boulier (3) Proposez aux élèves d'effectuer des additions sur le **boulier**, qui offre une représentation complémentaire (à la fois horizontale et verticale).	J'ai appris à additionner des dizaines et des unités, en groupant des unités pour former des dizaines : • avec le matériel de base 10 ; • en dessinant dans un tableau.

Calcul mental **Exercice 47**

Mathématiques et dominos

Montrez un domino et demandez aux élèves de trouver le nombre total de points.

Variante 1 : Montrez un domino en cachant une des parties. Dites le nombre total de points et demandez aux élèves de trouver la partie cachée.

Variante 2 : Reprenez en montrant deux dominos, chacun représentant un nombre, et demandez aux élèves de trouver le nombre total de points.

©La Librairie des Écoles 2016

Annexe 3 : Extraits de *Mon année de maths* utilisés lors du travail en groupes

31

Nombres et calculs

Addition posée en colonnes

pp. 130-133

Calcul mental 5 x

- **Objectif 1** : Dire la suite orale des nombres en avant de 5 en 5, à partir de 0, jusqu'à 95.
- **Objectif 2** : Lire et écrire des nombres jusqu'à 79.
- **Objectif 3** : Connaître ou reconstruire très rapidement les résultats des tables d'addition de 6 à 8.

Activité pour l'objectif 3 : L'enseignant dit 5 calculs d'addition avec 6, 7 ou 8. Les élèves écrivent les résultats au fur et à mesure sur leur feuille.

Lors de la correction, l'enseignant explicite des décompositions permettant de trouver le résultat si on ne l'a pas mémorisé.

Séquence d'apprentissage

Objectif de la séquence

Effectuer des additions en colonnes et en comprendre le sens.

Compétences, connaissances et savoirs du BO

• Mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition.

L'apprentissage des techniques opératoires posées se fait en lien avec la numération et les propriétés des opérations.

Pourquoi lier les écritures chiffrées et les calculs ?

Quels avantages à additionner en colonnes ?

Après les séquences 26 et 29, cette séquence 31 est la dernière des trois menant à l'addition posée en colonnes.

Il va s'agir de montrer que les actions matérielles peuvent être remplacées par des calculs sur les chiffres en posant l'addition en colonnes. Cette addition est pratique, car elle ne va pas nécessiter de disposer d'un matériel pour effectuer les opérations. En donnant une marche à suivre via un algorithme, la technique de l'addition posée en colonnes prend en charge l'ordre des actions permettant ainsi de se concentrer sur les calculs mentaux encore difficiles pour les élèves de CP. Un autre intérêt de la standardisation du calcul est le repérage plus facile des erreurs éventuelles, ce qui facilite la vérification. Le fait qu'elle soit employée par tous donne en outre l'occasion de discuter aussi plus aisément des productions des autres.

Remarque importante

Contrairement à certaines procédures personnelles, il s'agit de commencer systématiquement par additionner les unités entre elles. Cette particularité pourra être justifiée aux élèves en montrant que la somme des dizaines ne peut être effectuée que si on n'en oublie pas, ce qui nécessite de savoir si la somme des unités est supérieure à dix ou non.

Séance 1

Objectif de la séance

Mettre en œuvre des procédures personnelles sans matériel manipulable pour trouver le résultat d'un problème de transformation positive.

Matériel pour l'enseignant

- Les carrés aimantés pour le tableau.
- La calculatrice.

Matériel par élève et par binôme

- *Par binôme* : une réserve d'environ 100 cubes emboîtables, sous formes de cubes isolés et de dizaines pour la vérification du résultat.
- L'ardoise et son feutre pour indiquer la réponse.
- Des demi-feuilles à grands carreaux pour faire des essais (ou le cahier de recherche).
- Un crayon et une gomme.
- Le fichier de l'élève p. 130.
- Les tables d'addition p. 143 du fichier et la frise numérique jusqu'à 20 (151) en aide pour les additions des dizaines et unités.
- Une calculatrice (tout à la fin de la séance, une fois tous les calculs effectués à la main).

Activité de découverte

• Étape 1

Tâche

Effectuer une addition à l'aide de procédures personnelles mobilisant la signification des chiffres.

Lancement

34 + 28 est écrit au tableau. Demander aux élèves de faire le calcul.

Ils disposent d'un cahier de recherche ou d'une demi-feuille pour faire des essais.

Ils peuvent vérifier par eux-mêmes avec le matériel de numération qui n'est donc pas donné initialement.

Les réponses sont écrites sur l'ardoise.

Recherche

Le travail réalisé dans les semaines 26 et 29 a amené les élèves à utiliser la signification des chiffres pour calculer une somme. Si certains élèves continuent à vouloir dessiner des objets pour en compter le nombre total un à un, l'enseignant pourra limiter le temps pour réaliser la tâche, par exemple le temps d'écoulement d'un sablier.

Procédures visées :

▸ utiliser un arbre de calcul ;

▸ faire des sommes sur les chiffres des dizaines et des unités séparément, en considérant la nouvelle dizaine obtenue avec 8 + 4, sans nécessairement mobiliser un arbre de calcul.

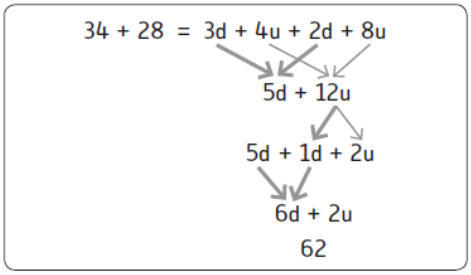
Erreurs possibles :

▸ tenter de représenter toute la collection, puis compter un à un (manque de temps) ;

▸ erreurs dans le calcul de la somme des unités et des dizaines (tables) ;

▸ ne pas associer les unités entre elles et les dizaines entre elles.

Mise en commun et validation



Faire la validation avec l'arbre de calcul en même temps que les actions sont réalisées avec les carrés aimantés au tableau.

• Étape 2

Tâche

Comprendre l'algorithme de l'addition posée.

Remarque importante

> Il ne s'agit pas de demander aux élèves de trouver comment on pose une addition en colonnes (il s'agit de conventions qui ne peuvent être trouvées *a priori*), mais de leur montrer la technique. L'objectif est qu'ils relient les actions sur les chiffres qu'on leur montre (calculs et positionnement) à leurs procédures personnelles et aux actions matérielles sur les collections.

Recherche

L'enseignant indique qu'il va poser l'opération comme en CE1 (et comme dans toutes les autres classes de l'école ou d'ailleurs). Il pose en colonnes et effectue l'addition 34 + 28 en disant, au fur et à mesure et à haute voix, ce qu'il fait mais sans donner d'explication : « Je pose 34 + 28. "8 plus 4" égale 12 ; je pose 2 et je retiens 1 ; "3 plus 2 plus 1", égale 6. »

Il demande alors aux élèves d'essayer de comprendre ce qu'il a fait, d'expliquer la présence des nombres, leur position, le trait horizontal, le 1 au-dessus du trois.

Cette phase de réflexion doit amener l'élève à s'interroger sur cette nouvelle technique et donc à mieux en comprendre les différents éléments à la suite de la structuration de l'apprentissage.

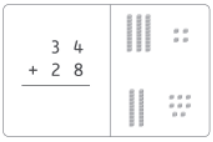
Remarque importante

> Les réponses sont apportées de manière précise dans la mise en commun qui suit en reprenant les détails des actions à faire.

Mise en commun et validation

Après avoir recueilli quelques réponses, l'enseignant reprend toutes les étapes de l'algorithme en faisant le lien avec la manipulation des carrés aimantés pour le tableau et des cubes pour les élèves (comme décrit page suivante). Ils posent les questions qui permettent de comprendre toutes les étapes.

1. Constituer les deux collections et écrire les deux nombres l'un sous l'autre, avec le signe « + » et le trait qui va séparer ces nombres du résultat.



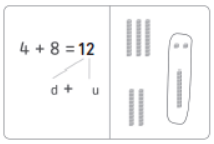
Faire identifier la relation entre les nombres écrits avec des chiffres (34 et 28) et les 2 collections organisées (3 dizaines et 4 unités restantes ; 2 dizaines et 8 unités restantes).

Question : Pourquoi écrit-on le 4 en dessous du 8 et le 2 en dessous du 3 ?

Réponse attendue : Car cela permet de séparer en 2 colonnes les unités restantes qu'il faudra additionner entre elles et les dizaines qu'il faudra additionner entre elles (on peut montrer l'arbre de calcul).

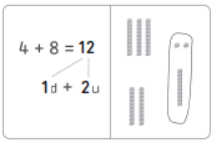
Indiquer que le trait remplace le signe « = » : il sépare le calcul à faire de la réponse. La réponse va donc être à écrire sous le trait.

2. Dire oralement 4 + 8 = 12 et l'écrire à part sur le côté.



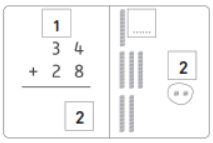
Question : Voyez-vous ce calcul dans l'arbre de calcul ? Et avec le matériel ?

3. Décomposer 12 en une dizaine et 2 unités restantes.



Question : Voyez-vous cette dizaine apparaître dans l'arbre de calcul ? Et avec le matériel ? (Assembler alors les dix carrés.)

4. Placer les chiffres dans l'opération posée.



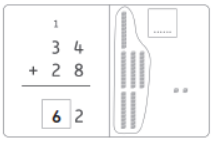
Question : Pourquoi a-t-on placé ces chiffres à cet endroit ?

Réponse attendue : « 2 » indique les unités restantes dans le résultat, on place donc 2 à l'endroit où on va obtenir les résultats, sous la barre.

« 1 » indique qu'on a une nouvelle dizaine (la dizaine est entourée). On doit l'additionner avec celles qui sont déjà constituées, on la met donc dans la colonne des dizaines.

Introduire le mot « retenue » qui signifie « je n'oublie pas » et l'expression « je retiens »

5. Additionner les dizaines oralement 1 + 3 + 2 = 6 et placer le nombre de dizaines dans le résultat.



Question : Pourquoi a-t-on placé ces chiffres à cet endroit ?

Réponse attendue : C'est le deuxième chiffre du résultat de l'addition de 34 + 28, c'est le nombre de dizaines, il se place à côté du nombre d'unités restantes, là où on va lire la réponse donc sous la barre.

6. Lecture du résultat.

Demander d'écrire en ligne l'opération et son résultat.

Réponse attendue : 34 + 28 = 62

• **Étape 3**

Tâche

Comprendre l'algorithme de l'addition posée.

Déroulement

Identique au précédent avec cette fois-ci l'addition 36 + 23.

Mise en commun et validation

Identique à la précédente, mais cette-fois-ci la somme des unités est inférieure à 10, il n'y a donc pas de retenue.

Réponse

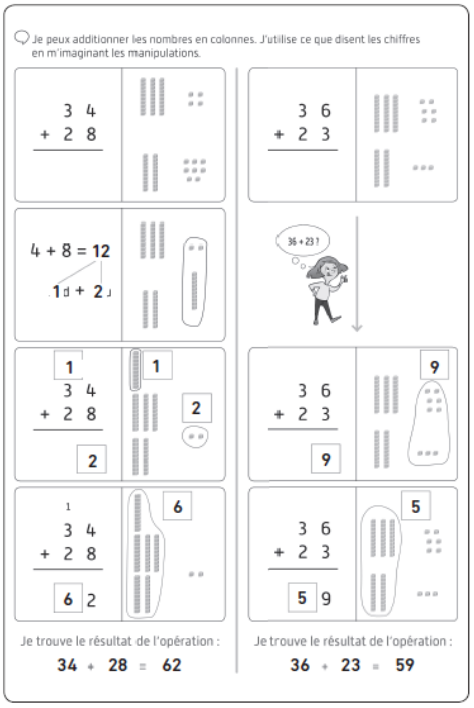
36 + 23 = 59.

Bilan

L'encadré **Ce que j'ai découvert** est complété au fur et à mesure que les actions sont faites par les élèves avec les cubes emboîtables (et représentées sur le fichier).

Suivant le temps, d'autres additions peuvent être proposées, sachant que ce travail d'entraînement est proposé durant tout le reste de la semaine.

À la fin de la séquence, l'enseignant peut demander aux élèves de prendre leur calculatrice pour vérifier s'ils savent l'utiliser pour trouver le résultat.



Le poster ***L'addition posée en colonnes*** est affiché et commenté avec les élèves. Il reprend exactement l'encadré **Ce que j'ai découvert**.

Séance 2

Objectif de la séance

S'entraîner à effectuer des additions en colonnes : cas des additions de deux nombres.

Matériel pour l'enseignant

- Les carrés aimantés pour le tableau.
- La calculatrice.

Matériel par élève

- Identique à celui utilisé à la séance 1.
- Le fichier de l'élève p. 131.
- Le poster ***L'addition posée en colonnes***.

Activité de réinvestissement 1 p. 131

Tâche

Effectuer des additions de deux nombres en colonnes.

Lancement

L'enseignant lit ou fait lire la consigne. Il fait remarquer que ce qui est demandé se trouve sur la page précédente dans l'encadré **Ce que j'ai découvert**. À nouveau le matériel ne sera utilisé que pour vérifier. Une feuille ou le cahier de recherche peuvent être donnés pour faire des essais.

Recherche

Procédure visée :

▸ la technique de l'addition posée.

Erreurs possibles :

▸ résultats erronés dans la somme des unités et des dizaines (erreur de calcul) ;

▸ ne pas considérer les chiffres par colonne pour effectuer les additions ;

▸ ne pas envisager de retenue, réponses du type :

$$\begin{array}{r} 5\ 5 \\ +2\ 7 \\ \hline 7\ 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\ 5 \\ +2\ 7 \\ \hline 7\ 2 \end{array}$$

▸ envisager toujours une retenue, réponse du type :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ } \\ 3\ 6 \\ +\ 4\ 2 \\ \hline 8\ 8 \end{array}$$

Différenciation

Pour les élèves en difficulté

Après plusieurs essais infructueux, faire référence explicitement aux posters ***Les écritures chiffrées*** et ***L'addition posée en colonnes*** (ou à l'encadré *Ce que j'ai découvert* p. 130). Le matériel de numération n'est pas donné tant que l'élève n'a pas tenté de répondre autrement. Il peut être utilisé à nouveau pour faire comprendre l'utilisation des chiffres pour additionner. La frise numérique individuelle jusqu'à 20 et les tables peuvent être fournies pour effectuer la somme des unités et celle des dizaines.

Pour les élèves plus rapides

Ils peuvent aider les élèves en difficulté en manipulant le matériel pendant que ces derniers transcrivent les actions sur les chiffres dans l'addition posée.

Exercice supplémentaire 1 fiche 31 (p. 320) du fichier ressources à photocopier.

Mise en commun et validation

Le cas de l'addition 43 + 37 peut être traité collectivement, car une nouvelle dizaine est constituée et il faut indiquer qu'il ne reste pas d'unité seule par l'écriture d'un zéro. Faire référence au poster ***L'addition posée en colonnes*** et à l'encadré *Ce que j'ai découvert* p. 130, en donnant du sens aux actions faites sur le papier via les carrés aimantés au tableau.

Les difficultés spécifiques de certains élèves peuvent être traitées de manière individuelle dans la séance suivante.

Bilan

Pour trouver le résultat d'opérations que l'on ne sait pas faire mentalement, on peut utiliser ce que disent les chiffres en s'imaginant manipuler des collections avec des dizaines et des unités. L'addition en colonnes permet de réaliser cette manipulation en faisant des calculs directement avec les chiffres, sans être obligé d'avoir du matériel ni de faire des dessins.

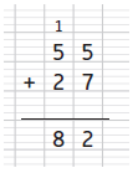
Parfois, il peut y avoir une retenue, c'est-à-dire qu'on a en tout plus de 10 unités restantes. Parfois il n'y en a pas.

Réponses

↳ ***Remarque***

On propose ici de faire l'addition des unités à part pour aider les élèves. Ceux qui n'ont pas besoin d'écrire cette addition peuvent s'en passer.

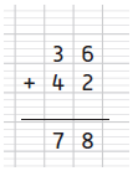
Cas 1



5 + 7 = 12
1d + 2u

55 + 27 = 82

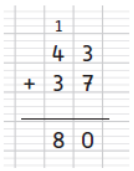
Cas 2



6 + 2 = 8

36 + 42 = 78

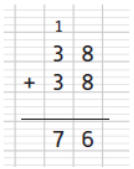
Cas 3



3 + 7 = 10
1d + 0u

43 + 37 = 80

Cas 4



8 + 8 = 16
1d + 6u

38 + 38 = 76

Annexe 4 : Extraits de *Archimaths* utilisés lors du travail en groupes

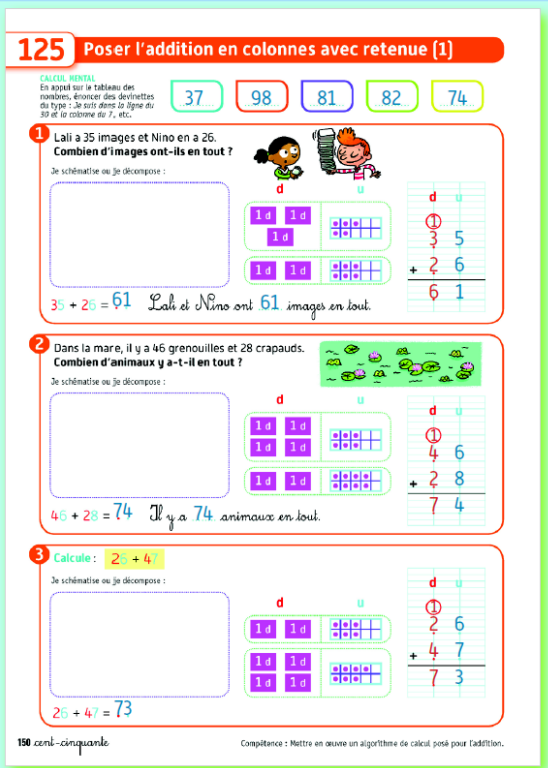
Fichier ▸ page 150

125 Poser l'addition en colonnes avec retenue (1)

Rituels
- Le nombre du jour
- Conversions de calculs

▸ **Compétence :**
- **Mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition.**

▸ **Objectifs :**
- Découvrir la technique opératoire de l'addition posée avec retenue.
- Utiliser la valeur des chiffres dans les nombres pour poser une addition.
- Utiliser ses connaissances en calcul mental.


125 Poser l'addition en colonnes avec retenue (1)

CALCUL MENTAL
En appui sur le tableau des nombres, énoncer des devinettes du type : *Je suis dans la ligne du 30 et la colonne du 7*, etc.
37 98 81 82 74

1 Lali a 35 images et Nino en a 26. **Combien d'images ont-ils en tout ?**
Je schématise ou je décompose :
35 + 26 = 61 Lali et Nino ont 61 images en tout.

2 Dans la mare, il y a 46 grenouilles et 28 crapauds. **Combien d'animaux y a-t-il en tout ?**
Je schématise ou je décompose :
46 + 28 = 74 Il y a 74 animaux en tout.

3 Calcule : 26 + 47
Je schématise ou je décompose :
26 + 47 = 73

150 cent-cinquante
Compétence : Mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition.

CALCUL MENTAL

Interpréter les noms des nombres à l'aide des unités de numération

- Afficher le tableau des nombres jusqu'à 99 et faire prendre le tableau individuel. Énoncer des descriptions de nombres, les élèves écrivent les nombres sur l'ardoise :
  – *Je suis juste au-dessus de 91 ;*
  – *Je suis le dernier de la ligne qui commence par 90 ;*
  – *Je suis à droite de 63 ;*
  – *Je suis le chef de famille des nombres qui commencent par un 7 ;*
  – *Je suis sur le 72 et je descends de deux lignes ;*
  – *Je suis sur le 87 et je recule de 5 cases…*
- Cacher un bloc de cases (environ 6 sur 4). Montrer une case cachée : les élèves écrivent le résultat sur l'ardoise. Faire de même pour toutes les cases cachées. Faire justifier oralement.
- **Faire écrire le nombre qui se trouve dans la ligne du 30 et dans la colonne du 7, celui qui se trouve dans la colonne du 8 et dans la ligne du 90, celui qui se trouve dans la ligne du 80 et dans la colonne du 1, le nombre qui est juste au-dessus de 92, celui qui est juste à droite de 73.**

ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1 Résoudre un problème additif

- Présenter la situation suivante :
  Lali a 19 feutres et Nino en a 28. Ils mettent tous ces feutres dans la même boite. Combien y a-t-il de feutres dans la boite maintenant ?
- Écrire 19 et 28 au tableau et dessiner une boite. Laisser un temps de recherche sur l'ardoise.

L'affichage collectif élaboré à la leçon 111 va aider les élèves à résoudre le problème et à utiliser la stratégie de leur choix : schématisation (feutres ou cartes à points), décomposition des termes ou pose de l'opération en colonnes (leçon 112). Des erreurs peuvent se trouver dans la formation de la nouvelle dizaine. Lors de la mise en commun, mettre en évidence, à l'aide d'une couleur, cette nouvelle dizaine formée.

- Mettre en commun et montrer, à partir de productions d'élèves, que 9 unités et 8 unités donnent 17 unités : 1 nouveau paquet de 10 est formé et il reste 7 unités (ou une carte à points est remplie et il reste aussi 7 unités).
- Afficher au tableau :

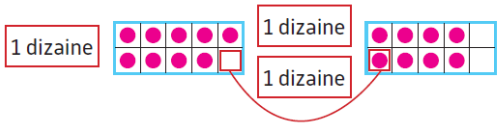
– le schéma :



19 + 28 = 40 + 7 = 47

244

ou



– la décomposition :

10 + 9 + 10 + 10 + 8

30 + 17 = 3d + 1d + 7u = 47

- Mettre en évidence que, quelle que soit la stratégie utilisée, on obtient le même résultat : 19 + 28 = 47. Signaler que passer par la schématisation peut être une stratégie fastidieuse quand les nombres seront plus grands.

2 Découvrir l'addition posée avec retenue

Matériel individuel
- Doc. 1 : Calcul de Nino et Lali

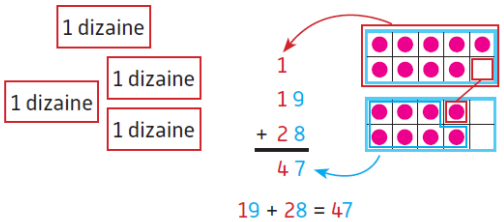
- S'appuyer sur des productions erronées des élèves ayant utilisé l'addition posée lors de l'activité 1 pour observer les erreurs : certains auront oublié l'ajout de la dizaine, d'autres l'auront ajoutée mais placée au mauvais endroit et auront obtenu :

$$\begin{array}{r} 19 \\ +\ 28 \\ \hline 317 \end{array}$$

Montrer que, dans ce cas, la dizaine n'est ni sur le fil des dizaines ni sur le fil des unités.

Où peut-on placer cette nouvelle dizaine ?

- S'il y en a, s'appuyer sur des productions justes, sinon afficher le calcul de Nino et Lali (doc. 1). Le faire observer et recenser les remarques.
- Faire remarquer que Nino et Lali ont utilisé leur canne à pêche pour placer les nombres. Sur le fil des dizaines, Nino a placé 1 et 2 et Lali a placé 9 et 8 sur le fil des unités. En calculant les unités (9 u et 8 u), Lali a obtenu 1 dizaine et 7 unités. Ne pouvant mettre que des unités sur son fil, Lali a noté les 7 unités restantes et a donné cette nouvelle dizaine à Nino pour qu'il l'accroche sur son fil des dizaines. Nino a ensuite ajouté toutes les dizaines et en a obtenu 4.
Pour obtenir ceci :
L'addition posée :



19 + 28 = 47

- Mettre en évidence que la technique opératoire de l'addition est une stratégie à utiliser lorsque l'on ne peut pas calculer mentalement ou en ligne.

3 S'entrainer

Matériel individuel
- Doc. 2 : Addition posée incomplète

- Présenter aux élèves la situation suivante :

Lali a 26 € et Nino a 38 €. Ils mettent tous ces euros dans la même tirelire. Combien ont-ils d'euros dans la tirelire maintenant ?

- Écrire 26 et 38 au tableau et dessiner une tirelire.
- Demander aux élèves de résoudre ce problème en utilisant le schéma ou la décomposition. Puis, à l'aide de ce schéma ou de cette décomposition, demander aux élèves de compléter l'addition posée (doc. 2).

Cette étape permet aux élèves de faire le lien entre la technique opératoire et les stratégies utilisées pour calculer des sommes.

- Mettre en commun et valider les réponses.

Qu'avons-nous appris ?
- À calculer des additions posées en colonnes avec retenue.

À quoi ça sert ?
- À calculer plus rapidement une addition quand les nombres le nécessitent.

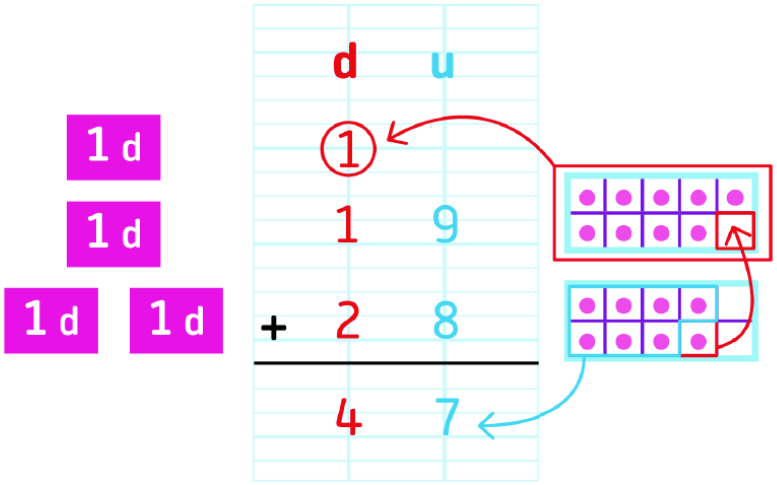
REMÉDIATION

Matériel individuel
- 52 buchettes
- 4 billets de 10 €, 12 pièces de 1 € et une boite « réserve » de billets
- 1 élastique

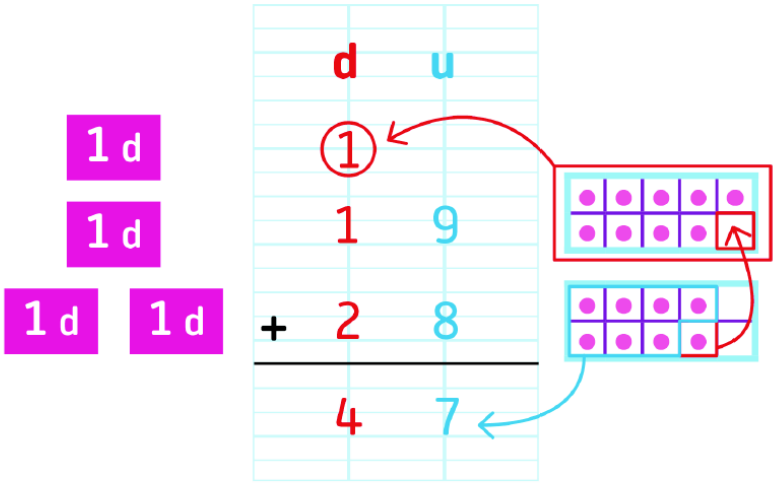
- Certains élèves ont encore besoin d'utiliser le matériel (buchettes ou monnaie) pour manipuler et réaliser ce calcul : donner 1 paquet de 10 buchettes et 9 buchettes d'une part et leur demander d'ajouter 2 paquets de 10 buchettes et 8 buchettes. Faire observer aux élèves ce qu'ils ont sur la table et faire constater qu'une nouvelle dizaine peut être formée : mettre un élastique autour de cette nouvelle dizaine et faire oraliser ce qu'ils ont sur la table.
- Reprendre cette même procédure avec la monnaie pour l'activité 3.

Doc. 1 : Calcul de Nino et Lali

1 doc. par élève



19 + 28 = 47



19 + 28 = 47

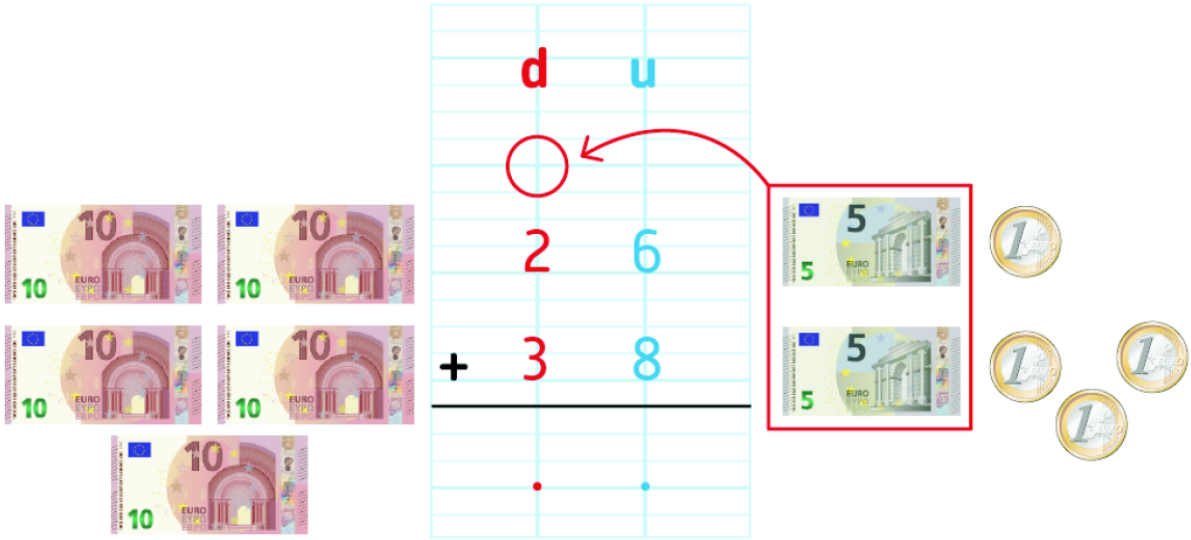
Doc. 2 : Addition posée incomplète

1 doc. par élève

Lali a 26 € et Nino a 38 €. Ils mettent tous ces euros dans la même tirelire. **Combien ont-ils d'euros dans la tirelire maintenant ?**

Je fais un schéma ou un arbre à calcul :

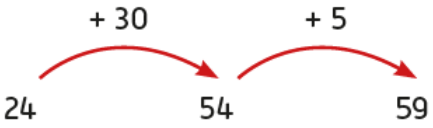
Je complète l'addition de Nino et Lali :



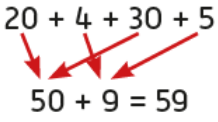
111 Calculer mentalement des sommes

[…]

Dessiner sur l'affiche, en lien avec la décomposition d'un seul terme, le schéma suivant :

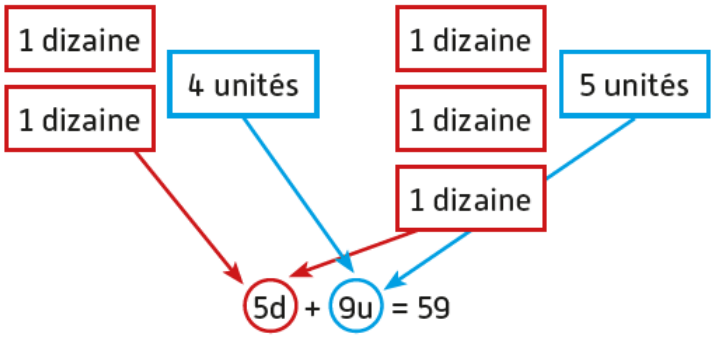


– d'autres vont utiliser la décomposition des deux termes et obtenir 20 + 4 + 30 + 5 ou 10 + 10 + 4 + 10 + 10 + 10 + 5. Ils associent les dizaines 20 + 30 = 50 puis les unités 5 + 4 = 9 pour obtenir 50 + 9 = 59. Compléter l'affiche en présentant cette décomposition sous forme d'arbre à calculs ;



– d'autres, enfin, vont décomposer les nombres en unités de numération pour obtenir 2 dizaines et 3 dizaines qui donneront 5 dizaines puis associer 5 unités et 4 unités qui donneront 9 unités pour obtenir au total 59.

Mettre, sur l'affiche, en lien avec la décomposition des deux termes, l'arbre à calculs ci-dessous.



Annexe 5 : Extraits de *Les nouveaux outils pour les maths* utilisés lors du travail en groupes

Calculs

140 L'addition posée avec retenue (1)

PÉRIODE 5

p. 140 du fichier

CALCUL MENTAL

Écrire le nombre précédent de 60 à 79

■ **Objectif :** faire identifier et écrire le nombre qui précède un autre nombre dans la suite numérique de 60 à 79.

On attirera l'attention des élèves sur le passage de 70 à 69, en rappelant le mode de repérage des 6 ou 7 dizaines dans un nombre.

■ **Consigne :** chaque élève écrit dans les cases le nombre situé juste avant : 64 ; 73 ; 68 ; 77 ; 70.

■ **Prolongements possibles**

• Faire écrire sur ardoise le nombre situé juste avant :
62 ; 72 ; 79 ; 75 ; 67 • 61 ; 66 ; 78 ; 69 ; 65 • 76 ; 70 ; 63 ; 74 ; 71.

• Proposer aux élèves d'inventer des devinettes sur le format : *Je suis le nombre juste avant … . Qui suis-je ?* Faire répondre les autres élèves.

• Faire piocher aux élèves une carte nombre de 61 à 79, au hasard, et leur faire dire le nombre qui précède.

• **Exercice chrono** : faire écrire le nombre situé juste avant celui cité rapidement par l'enseignant. Par exemple, citer : 66 ; 71 ; 68 ; 74 ; 79 ; 63 ; 73 ; 65 ; 67 ; 70 ; 62 ; 77 ; 75 ; 69 ; 72.

PROGRAMME 2016

Calculer avec des nombres entiers.

▶▶▶ Connaissances pour le maitre

Cette leçon repose sur le principe des échanges 10 contre 1. Il s'agit de convaincre les élèves que dès que nous avons 10 unités, elles peuvent se transformer en une dizaine. C'est le sens de la retenue (que l'on verra explicitement dans les leçons suivantes).
Cette première leçon est fondée sur la manipulation à partir d'une situation de vie courante.

Découverte collective de la notion

• Prévoir l'affiche de la situation de recherche agrandie (prévoir un agrandissement ou utiliser la projection du manuel numérique), le matériel de manipulation (3 billets de 10 € et 15 pièces de 1 €, cf. Planche 3 à découper du matériel à la fin du fichier élève) et une affiche présentant le tableau de l'addition en colonnes (cf. CD-Rom).

• Faire observer la situation et lire la bulle de Jade.

▸ *45 €.*

• Lire la bulle de Nabil et la question, puis répondre collectivement :

▸ *Si les élèves font l'échange, ils obtiennent 5 pièces et 4 billets. S'ils ne le font pas, ils obtiennent 15 pièces et 3 billets.*

• Au tableau, afficher les pièces et billets qui correspondent aux propositions des élèves.

▸ *15 pièces de 1 €, 3 billets de 10 €, cela fait 45 €. Dans ce cas, relire la bulle de Nabil : Pour avoir le moins de pièces possible… Proposer de faire un échange.*

▸ *5 pièces de 1 €, 4 billets de 10 €, cela fait 45 €. Matérialiser l'échange effectué.*

• Poser la question : *Est-ce que Jade et Nabil ont pu avoir un autre billet ?*

▸ *Oui, ils l'ont obtenu en échangeant 10 pièces contre 1 billet.*

• Lors de la mise en commun, schématiser au tableau les échanges réalisés : 7 pièces + 8 pièces = 15 pièces donc un billet de 10 € et 5 pièces de 1 €. Entourer en rouge les 10 pièces de 1 € qui vont donner la nouvelle dizaine (la retenue) après l'échange. Dessiner le billet obtenu par l'échange en rouge. Annoncer que l'on va poser en colonnes l'opération qui raconte cette histoire.

• Remplir collectivement le tableau de l'opération.

• Structurer les étapes de la technique opératoire de l'addition en colonnes en utilisant l'affiche. Expliquer chaque étape en même temps que l'on remplit ce tableau. Utiliser les couleurs conventionnelles : rouge pour les dizaines et bleu pour les unités.

• Pour additionner deux nombres en colonnes, on commence par calculer les unités. Si l'on obtient 10 unités ou plus, il faut transformer ces 10 unités en 1 dizaine et la placer dans le rond au-dessus de la colonne des dizaines. C'est la retenue. Ce qu'il reste des unités après l'échange s'écrit sous le « égal », dans la colonne des unités. Ensuite, calculer le nombre total de dizaines sans oublier la retenue. Compléter le reste de l'opération. Il n'y a qu'un seul chiffre par colonne.

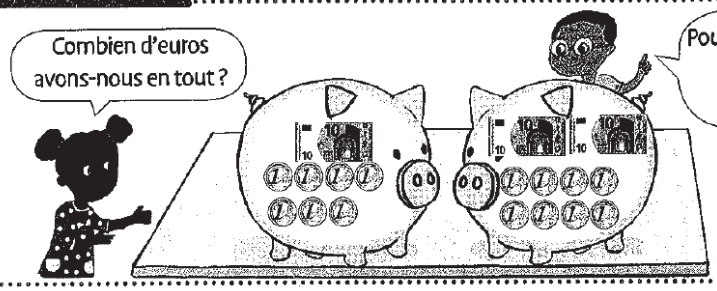
• Collectivement, procéder de même avec d'autres sommes comme 45 + 29 et 17 + 36.

• Prévoir de réaliser en collectif l'exercice 1 du fichier.

150

140 L'addition posée avec retenue (1)

Cherchons



→ **Combien auront-ils de pièces et de billets après l'échange ?**

1 **Dessine les pièces et les billets après l'échange, puis complète l'opération.**



On met ici le billet de 10 € obtenu après l'échange de 10 pièces de 1 €.



d	u
..1..	..6..
.....	..8..
.....	14.

Il y a ..... billets de 10 €
et ..... pièces de 1 €.
Il y a ..... € en tout.

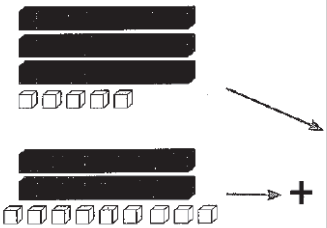
2 **Complète le tableau, puis calcule.**



d	u
.....	.....
.....	.....

Il y a ..... € en tout.

3 **Complète le tableau, puis calcule.**



d	u
.....	.....
.....	.....

Il y a ..... cubes en tout.

Je révise

Entoure tous les nombres situés entre 70 et 90.

45 78 64 82 96 37 54 72 89 91

Calcul mental : Écrire le nombre précédent de 60 à 79.

Annexe 6 : Grille complétée lors de la préparation de l'atelier pour un extrait de *La méthode de Singapour*

En noir, des éléments repérés dans l'extrait. En rouge, des commentaires que nous faisons en lien avec ces éléments.

Séances / Fonctions	***La méthode de Singapour*** **Unité 14 : Additionner et soustraire des nombres entre 0 et 100** **Séance 114 : Additionnons en groupant différemment (1)** **Guide du maître pp. 234-235**
Apprendre à manipuler	Activité optionnelle : Calcul sur boulier. C'est loin d'être explicite. L'introduction de l'unité 14 précise qu'il s'agit d'apprendre à utiliser le boulier (et il n'y a pas d'utilisation du boulier dans les autres unités). Ce manque d'explicitation est peut-être lié au fait que les bouliers sont très couramment utilisés à Singapour (à l'école ou en dehors).
Faciliter la dévolution	
Produire des signes liés à l'utilisation de l'artefact	
Accéder à des représentations	Étape 1 : Affichez le matériel de base 10 au tableau (ou dessinez-le), en disposant au fur et à mesure les dizaines et les unités […] Illustrez cette opération en prenant dix cubes isolés, et en les remplaçant explicitement par une barre des dizaines […] « Combien de dizaines avons-nous maintenant en tout ? » (3), « Et combien d'unités ? » (2). Même si le guide indique (une fois) de rappeler que « 10 unités c'est 1 dizaine », le mot *dizaine* ne semble pas pouvoir être associé à dix cubes isolés et le mot *unités* est associé uniquement aux cubes isolés (idem dans la séance 115), ce qui peut constituer un obstacle. Étape 3 : Rendre concrète la formation de la dizaine aussi longtemps que nécessaire. Activité optionnelle : Le boulier offre une représentation complémentaire.
Solliciter la mise en relation entre signes ou entre représentations	Étape 1 : Écrivez au tableau : 27 + 5. Dites aux élèves que vous allez chercher combien font 27 + 5 à l'aide du matériel de base 10. « Combien y a-t-il de dizaines dans 27 ? » (2 dizaines) « Combien y a-t-il d'unités ? » (7 unités) […] Tout en posant les questions, affichez le matériel de base 10 au tableau (ou dessinez-le), en disposant au fur et à mesure les dizaines et les unités. (Vous pouvez vous inspirer de la présentation page 68 du fichier B.) […] Illustrez cette opération en prenant dix cubes isolés, et en les remplaçant explicitement par une barre des dizaines, que vous placez dans la colonne des dizaines. On « jongle » avec le langage oral, les écritures symboliques et le matériel de base 10. Les mises en relation ne nous semblent pas très claires ni explicites dans le texte et il faut effectivement se référer à la présentation page 68 du fichier B (cf. p.236). Étape 2 : Reprenez le calcul du début de la séance : 27 + 5. Distribuez – ou faites faire – à chaque binôme une bande numérique allant de 20 à 40. Laissez chaque binôme chercher la réponse […] Explicitez les réponses de chaque binôme en les illustrant au tableau. Décomposez : 27 + 5 = 27 + 3 + 2 = 30 + 2 = 32 […] Laissez les élèves réfléchir aux points communs entre les deux stratégies : dans les deux cas, on prend des unités pour « faire 10 ». Cette dernière proposition nous parait un peu succincte. De plus, il nous semble qu'on ne fait pas réellement 10, ni pour le calcul en ligne indiqué, ni pour les procédures envisageables avec la bande numérique. Étape 3 : Rendre concrète la formation de la dizaine aussi longtemps que nécessaire. Activité optionnelle : Le boulier offre une représentation complémentaire. Il n'y a pas d'autre explication. On peut se demander en quoi c'est complémentaire des autres représentations et comment permettre la mise en relation avec d'autres représentations.
Aider à résoudre un problème	Étape 1 : Demandez aux élèves de se répartir en binômes avec du matériel de base 10, en distribuant à chaque binôme une addition différente. Il n'y a pas de contraintes mentionnées. Les élèves peuvent procéder efficacement sans nécessairement grouper par 10. Étape 2 : Reprenez le calcul du début de la séance : 27 + 5. Distribuez – ou faites faire – à chaque binôme une bande numérique allant de 20 à 40. Laissez chaque binôme chercher la réponse. Le guide suppose que les élèves ne se souviennent pas nécessairement du résultat. Les élèves peuvent utiliser la bande numérique en partant de la case 27 puis en avançant d'un en un.
Favoriser l'évolution des procédures	Étape 1 : Une procédure avec le matériel est montrée par l'enseignant puis les élèves ont un calcul du même type à résoudre à l'aide du même matériel. On s'attend sans doute à ce que les élèves exécutent la procédure. Le guide propose de discuter la validité des procédures mais il ne dit pas lesquelles, ni comment les discuter, ni de les hiérarchiser. Étape 2 : Laissez chaque binôme chercher la réponse […] Distribuez à chaque binôme des additions différentes. Les élèves peuvent faire avancer leur doigt de case en case sur la bande numérique en partant de la case 27 ; pour le calcul proposé, cela reste une procédure efficace. Le guide ne propose pas de hiérarchiser les procédures envisageables. Étape 3 : Nous connaissons la réponse, mais ce qui nous intéresse, c'est de trouver une autre stratégie pour la trouver. Étape 3 : S'habituer progressivement à utiliser les représentations concrètes et imagées pour vérifier la réponse, et non plus pour la trouver. […] L'objectif de toutes ces manipulations est de rendre concrète la formation de la dizaine aussi longtemps que possible. Cela peut paraître incohérent mais on peut apprendre à se passer du matériel tout en continuant d'évoquer le matériel pour mettre en relation les représentations physiques (et/ou schématiques) et les représentations symboliques.
Valider une solution	Étapes 1 et 2 : Le guide ne parle pas de validation matérielle qui pourrait être faite à la suite de la discussion sur la validité des réponses (et il ne dit pas comment cette validité est discutée). Étape 3 : Utiliser les représentations concrètes et imagées pour vérifier la réponse. Le guide ne dit pas comment. La réponse est déjà connue depuis l'étape 1 et répétée à l'étape 2 puis au début de l'étape 3 ; on vérifie plutôt que les procédures proposées avec le boulier aboutissent à la même réponse.

Annexe 7 : Grille complétée lors de la préparation de l'atelier pour un extrait de *Mon année de maths*

En noir, des éléments repérés dans l'extrait. En rouge, des commentaires que nous faisons en lien avec ces éléments.

Séances / Fonctions	*Mon année de maths* **Séquence 31 : Addition posée en colonne – Séance 1 – Étapes 1 et 2** **Guide du maître pp. 230-232**
Apprendre à manipuler	
Faciliter la dévolution	Étape 1 / lancement et recherche : Les élèves ont un calcul (34 + 28) écrit au tableau. Le matériel n'est pas montré par l'enseignant ni utilisable par les élèves dans un premier temps.
Produire des signes liés à l'utilisation de l'artefact	
Accéder à des représentations	Étape 1 / validation : Faire la validation avec l'arbre de calcul en même temps que les actions avec carrés aimantés. Étape 2 / tâche / remarque : Relier actions sur les chiffres montrées par l'enseignant à leurs procédures personnelles et aux actions matérielles.
Solliciter la mise en relation entre signes ou entre représentations	Étape 1 / validation : Faire la validation avec l'arbre de calcul en même temps que les actions avec carrés aimantés. La procédure avec l'arbre est décrite mais pas celle avec les carrés aimantés et on ne dit pas comment les mettre en relation. Étape 2 / tâche / remarque : Relier actions sur les chiffres montrées par l'enseignant à leurs procédures personnelles et aux actions matérielles. Étape 2 / mise en commun et validation : Reprendre toutes les étapes de l'algorithme en faisant le lien avec la manipulation des carrés aimantés pour le tableau et des cubes pour les élèves. Le guide explicite le travail de mise en relation et comment le mettre en œuvre.
Aider à résoudre un problème	Frise numérique jusqu'à 20 en aide. On ne dit pas quelle utilisation de ce matériel. Étape 1 : Matériel donné dans un second temps. Le matériel est donné avant d'écrire la réponse sur l'ardoise donc avant la phase de validation. Les élèves peuvent procéder par comptage (ou commencer un comptage) dans un second temps.
Favoriser l'évolution des procédures	Séance 1 / objectif : Mettre en œuvre des procédures personnelles sans matériel manipulable pour trouver le résultat d'un problème de transformation positive. Progressivité envisagée : d'abord manipuler, puis imaginer la manipulation (puis se passer de l'évocation de la manipulation dans les étapes suivantes) ; dans la séance 1, le matériel n'est donné que dans un second temps (puis, dans la séance 2, le matériel n'est utilisé que lors de la validation). Étape 1 / lancement : Ils peuvent vérifier par eux-mêmes avec le matériel de numération qui n'est donc pas donné initialement. Étape 1 / recherche : Si certains élèves continuent à vouloir dessiner des objets pour en compter le nombre total un à un, l'enseignant pourra limiter le temps pour réaliser la tâche, par exemple le temps d'écoulement d'un sablier. Étape 2 / tâche : L'objectif est qu'ils relient les actions sur les chiffres qu'on leur montre (calculs et positionnement) à leurs procédures personnelles et aux actions matérielles sur les collections. Il s'agit de faire le lien avec la manipulation mais sans manipuler et en utilisant les dessins du matériel.
Valider une solution	Étape 1 / lancement : Ils peuvent vérifier par eux-mêmes avec le matériel de numération qui n'est donc pas donné initialement. Étape 1 / mise en commun : Faire la validation avec l'arbre de calcul en même temps que les actions sont réalisées avec les carrés aimantés au tableau.

Annexe 8 : Grille complétée lors de la préparation de l'atelier pour un extrait de *Archimaths*

En noir, des éléments repérés dans l'extrait. En rouge, des commentaires que nous faisons en lien avec ces éléments.

Séances / Fonctions	*Archimaths* **Séance 125 : Poser l'addition en colonnes avec retenue (1) – Activité 1** **Guide du maître pp. 244-245**
Apprendre à manipuler	
Faciliter la dévolution	
Produire des signes liés à l'utilisation de l'artefact	
Accéder à des représentations	Remédiation : L'addition est « confondue » avec l'ajout (conception naïve) et la dizaine avec le paquet de 10 bûchettes entourées d'un élastique, ce qui pourrait constituer des obstacles par la suite.
Solliciter la mise en relation entre signes ou entre représentations	Remédiation : Ce n'est pas explicite mais on peut penser qu'on attend des élèves qu'ils disent le nombre de bûchettes qu'il y a sur la table à la fin et doivent passer de la représentation physique à une désignation orale.
Aider à résoudre un problème	Remédiation : Certains élèves ont encore besoin d'utiliser le matériel (buchettes ou monnaie) pour manipuler et réaliser ce calcul : donner 1 paquet de 10 buchettes et 9 buchettes d'une part et leur demander d'ajouter 2 paquets de 10 buchettes et 8 buchettes. Faire observer aux élèves ce qu'ils ont sur la table et faire constater qu'une nouvelle dizaine peut être formée : mettre un élastique autour de cette nouvelle dizaine et faire oraliser ce qu'ils ont sur la table. Il n'y a pas d'indication sur le moment pour faire cette remédiation. Mis à part l'ajout effectif sur la table de deux paquets de 10 bûchettes et 8 bûchettes, les tâches ne nous semblent pas explicites. En particulier, il n'est pas dit si les élèves doivent trouver le nombre total de bûchettes sur la table et à quel moment. Les élèves pourraient, avant de mettre l'élastique autour de 10 bûchettes, compter d'un en un les bûchettes.
Favoriser l'évolution des procédures	Remédiation : Certains élèves ont encore besoin d'utiliser le matériel (buchettes ou monnaie) pour manipuler et réaliser ce calcul : donner 1 paquet de 10 buchettes et 9 buchettes d'une part et leur demander d'ajouter 2 paquets de 10 buchettes et 8 buchettes. Faire observer aux élèves ce qu'ils ont sur la table et faire constater qu'une nouvelle dizaine peut être formée : mettre un élastique autour de cette nouvelle dizaine et faire oraliser ce qu'ils ont sur la table. L'objectif de cette séance semble d'amener les élèves à se passer de la schématisation, en montrant l'efficacité de stratégies s'appuyant sur des représentations symboliques. Dans la partie « remédiation », il nous semble qu'il ne s'agit pas de faire évoluer les procédures des élèves : la manipulation est imposée et, si l'enseignant demande quel est le nombre de bûchettes sur la table après avoir mis l'élastique autour de dix bûchettes, les élèves pourraient constater le nombre de groupes de dix et le nombre de bûchettes isolées et obtenir une désignation orale sans utiliser les écritures chiffrées. Dans le texte, aucun lien n'est explicitement fait avec l'utilisation des écritures chiffrées pour arriver au résultat en écriture chiffrée.
Valider une solution	Remédiation : Il s'agit peut-être que les élèves soient convaincus matériellement du résultat obtenu précédemment avant la remédiation. Dans ce cas, on peut se demander en quoi il s'agit d'une remédiation.

Annexe 9 : Grille complétée lors de la préparation de l'atelier pour un extrait de *Les nouveaux outils pour les maths*

En noir, des éléments repérés dans l'extrait. En rouge, des commentaires que nous faisons en lien avec ces éléments.

Séances / Fonctions	*Les nouveaux outils pour les maths* **Séance 140 : L'addition posée avec retenue (1) – Découverte collective de la notion** **Guide du maître p. 150**
Apprendre à manipuler	
Faciliter la dévolution	
Produire des signes liés à l'utilisation de l'artefact	
Accéder à des représentations	Entourer en rouge les 10 pièces de 1 € qui vont donner la nouvelle dizaine (la retenue) après l'échange. Dessiner le billet obtenu par l'échange en rouge. Il semble que la dizaine soit le résultat obtenu après l'échange, ce qui peut ensuite constituer un obstacle.
Solliciter la mise en relation entre signes ou entre représentations	Lors de la mise en commun, schématiser au tableau les échanges réalisés : 7 pièces + 8 pièces = 15 pièces donc un billet de 10 € et 5 pièces de 1 €. Entourer en rouge les 10 pièces de 1 € qui vont donner la nouvelle dizaine (la retenue) après l'échange. Dessiner le billet obtenu par l'échange en rouge. Annoncer que l'on va poser en colonnes l'opération qui raconte cette histoire. Remplir collectivement le tableau de l'opération. Structurer les étapes de la technique opératoire de l'addition en colonnes en utilisant l'affiche. Expliquer chaque étape en même temps que l'on remplit ce tableau. Utiliser les couleurs conventionnelles : rouge pour les dizaines et bleu pour les unités. L'opération posée est réalisée dans une première phase avec les représentations schématiques des pièces et billets puis dans une deuxième phase avec les écritures chiffrées. Il semble que la mise en relation entre monnaie et écritures chiffrées soit faîte par la même couleur rouge utilisée dans les deux phases ainsi que par l'annonce de la deuxième phase comme une manière de raconter « l'histoire » précédemment vécue. Cette mise en relation semble ne concerner que la retenue.
Aider à résoudre un problème	Faire observer la situation et lire la bulle de Jade. Si on attend que les élèves répondent à la question posée par Jade, la présence des dessins facilite le comptage, par exemple de 10 en 10 jusqu'à 30 puis de 1 en 1 jusqu'à 45.
Favoriser l'évolution des procédures	Lire la bulle de Nabil et la question, puis répondre collectivement […] Matérialiser l'échange effectué. Poser la question : Est-ce que Jade et Nabil ont pu avoir un autre billet ? Oui, ils l'ont obtenu en échangeant 10 pièces contre 1 billet. Il s'agit de constater qu'on peut faire un échange (dix pièces contre un billet). Il semble qu'on effectue l'échange après avoir obtenu le résultat, ce qui permet ensuite de vérifier ce résultat. Le fait qu'il puisse y avoir des procédures plus efficaces que d'autres n'est pas explicité. L'absence d'écritures chiffrées ne favorise pas leurs utilisations pour obtenir le nombre total d'euros.
Valider une solution	

ATELIER A28

DES ENTIERS AUX DÉCIMAUX : MANIPULER POUR COMPRENDRE LES OPÉRATIONS AU CYCLE 3 ?

CAS DE LA MULTIPLICATION

Bernard ANSELMO
Formateur Maths, ESPE DE LYON
bernard.anselmo@univ-lyon1.fr

Sébastien DESSERTINE
Conseiller Pédagogique Départemental en Mathématiques, DSDEN DU RHONE
sebastien.dessertine@ac-lyon.fr

Hélène ZUCCHETTA
Formatrice Maths, ESPE DE LYON
helene.zucchetta@univ-lyon1.fr

Résumé

Le groupe Collège de l'IREM de Lyon a proposé une progression sur la construction des fractions et décimaux avec des situations tout au long du cycle 3 (Anselmo et al., 1999 ; Anselmo & Zucchetta, 2018), conforme aux programmes (MEN 2015).
Les situations reposent sur l'activité de l'élève et laissent une large place à la manipulation de bandes, de surfaces, de graduations avec l'utilisation de règles graduées en fractions… pour donner du sens et aider à la représentation.
Lors de l'atelier, les participants ont eu l'occasion de découvrir certaines des situations et d'interroger les dispositifs proposés. La place de la manipulation dans l'enseignement des opérations a été questionnée : peut-elle donner du sens à l'évolution des significations des opérations au moment du passage des entiers aux nouveaux nombres que sont les fractions et décimaux ? (Brousseau, 1987 ; Roditi, 2001).

I - INTRODUCTION

1 Une nouvelle publication de l'IREM de Lyon sur les fractions et nombres décimaux au cycle 3

A l'annonce de la création du nouveau cycle 3, une équipe de l'IREM de Lyon a repris la réflexion qui avait été menée pour la brochure « *La sixième entre fractions et décimaux* » (IREM de Lyon 1999), et l'a étendue à tout le cycle 3, du CM1 jusqu'à la 6ème. Les situations ont été revisitées et déclinées à différents niveaux de classe, d'autres ont été créées, expérimentées et filmées. Ce travail a abouti à une nouvelle publication à l'intention des équipes d'enseignants inter-degrés qui est parue chez CANOPé (2018). Elle se veut être un support d'échanges pour ces équipes, pour les aider à envisager et conduire des progressions communes à l'articulation école-collège.

Le travail engagé par ce groupe IREM se prolonge dans des actions de Formation Continue dans l'académie de Lyon : stages ou animations à destination des enseignants, création d'un parcours M@gistère[114] (F01-Fractions et décimaux au cycle 3 par Bernard Anselmo).

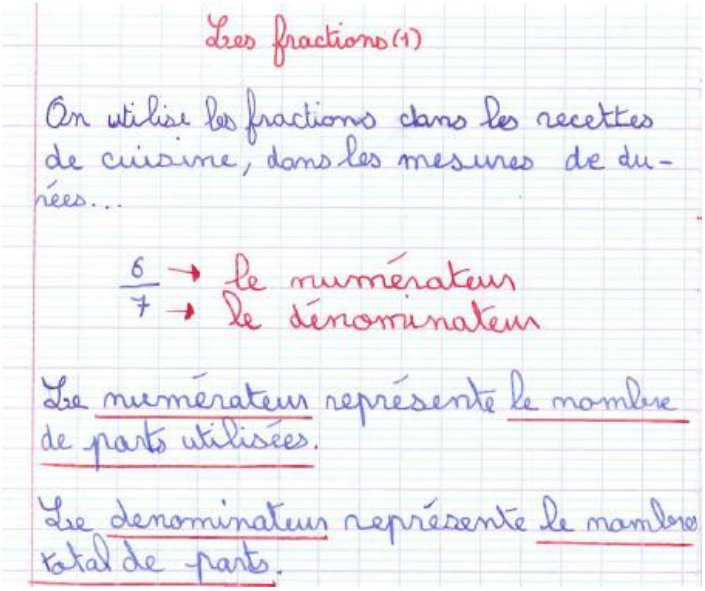
[114] Voir en ligne : https://magistere.education.fr/ac-lyon/course/view.php?id=2161&pageid=22918).

2 Un besoin de formation

Les difficultés rencontrées par nos élèves sont connues et ont fait l'objet de nombreuses études (Brousseau, 1980, 1981; Grisvard et Léonard, 1981, 1983 ; Perrin-Glorian, 1986 ; Bolon, 1992, 1996 ; Roditi, 2001, 2007 ; Chesné, 2014). Elles montrent que les questions posées par l'enseignement des fractions et décimaux sont nombreuses et complexes. Nos expériences en formation initiale ou continue, aussi bien auprès d'étudiants professeurs que de professeurs de collège et d'école en poste, nous amènent à constater que leur compréhension des différents aspects et significations des fractions ou des nombres décimaux n'est pas toujours bien assurée et que, de ce fait, les pratiques d'enseignement ne sont pas toujours à la hauteur des enjeux. Les réponses spontanées d'enseignants à la demande de définition d'un nombre décimal font, par exemple, encore très souvent intervenir l'écriture à virgule et non pas la fraction décimale. L'étude des traces à retenir sur certains cahiers d'élèves montre aussi que le lien entre fraction décimale et nombre décimal n'est pas toujours établi. Malheureusement, même si des documents ressources[115] sont disponibles sur Eduscol, ils ne sont pas toujours lus et assimilés par les enseignants et le temps de formation des enseignants est souvent trop restreint pour leur permettre de remettre complètement en cause leurs conceptions (parfois fausses) ou d'appréhender les savoirs en jeu dans leur totalité.

Ainsi, une mémorisation succincte de règles apprises, comme celles de la multiplication par 10, 100, …, empêche une compréhension plus profonde du fonctionnement global du système de numération décimal. Cette compréhension permet d'expliquer que ce n'est pas un décalage de la virgule qui est en jeu dans ces opérations mais un changement de valeur des chiffres dans l'écriture du nombre multiplié.

Dans les cahiers des élèves, la première leçon sur les fractions définit souvent du vocabulaire comme « numérateur » et « dénominateur », sans qu'aucune référence à une unité pour le partage ne soit clairement faite, et induit souvent l'idée qu'une fraction renvoie à un nombre nécessairement inférieur à 1. Nous retrouvons ces deux aspects à travers l'illustration suivante issue d'un cahier d'élève de CM2 :



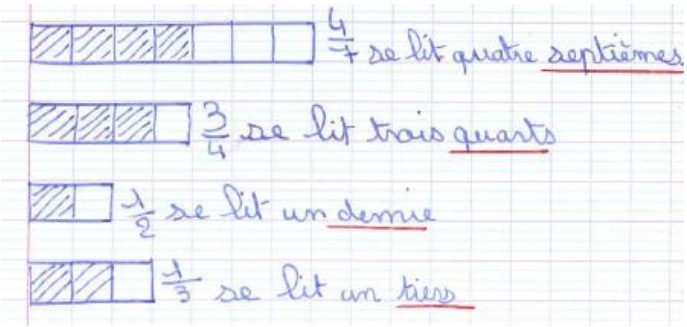
Remarque :

D'une part, on remarque qu'aucune fraction supérieure à 1 n'est proposée et d'autre part, on peut se demander comment, dans ces conditions, la représentation suivante sera ensuite interprétée :



Est-ce $\frac{5}{4}$ *ou* $\frac{5}{8}$ qui est représenté ? Et de quelle unité ?

[115] Ressource d'accompagnement des programmes « fractions et nombres décimaux au cycle 3 »



Que dire de l'illustration qui suit la définition précédente ?

$\frac{1}{n}$ est-il toujours représenté par un carreau, quel que soit n ?

Figure 1 : extrait d'un cahier outil d'une classe de CM2

Le programme de novembre 2015[116], confirmé par les ajustements de juillet 2018, précise :

> *Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de* ***nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers****, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée.*
>
> ***Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel****. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes, …L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison (qui se différencient de celles mises en œuvre pour les entiers) et de calcul.*

Ainsi le programme propose d'inscrire les justifications des règles de comparaison et de calcul sur les nombres décimaux dans le prolongement de celles utilisées pour les entiers mais est–il possible de le faire pour toutes les opérations et en particulier pour la multiplication ?

Les projets de progression renvoient toujours la multiplication de deux nombres décimaux (sous forme d'écriture à virgule) à la classe de 6ème, en ne mettant en avant que l'aspect « technique opératoire : *« Au plus tard en période 3, ils apprennent l'algorithme de la multiplication de deux nombres décimaux. ».* Cet accent mis sur la technique au détriment du sens montre-t-il que le sens à acquérir n'est pas aussi simple ou est-il simplement sous-estimé ?

II - QUELS ARTEFACTS POUR INSTRUMENTALISER L'ILLUSTRATION DE LA MULTIPLICATION

Dans la théorie de la genèse instrumentale, Rabardel (1995) distingue l'artefact (tout objet matériel et symbolique) et l'instrument : fruit d'une construction par l'individu, composé de l'artefact lui-même et des schèmes des situations qui lui sont associés. Pour lui ce processus de construction et l'instrument lui-même vont avoir un impact sur la construction des savoirs.

Dans cette logique, l'objectif de l'atelier était de se questionner sur la place de la manipulation d'artefacts matériels dans la construction du concept de multiplication et d'étudier des supports susceptibles d'aider à comprendre les significations de la multiplication, en particulier celle de deux décimaux, mais aussi d'aider à illustrer les techniques opératoires.

[116]Programme pour le cycle 3, « Cycle 3. Mathématiques », *Bulletin officiel* spécial n° 11 du 26 novembre 2015, consultable sur eduscol.education.fr http://eduscol.education.fr/pid23199/ecole-elementaire-et-college.html

Différents types de matériels ont été prévus pour permettre aux participants de manipuler et d'illustrer des multiplications : matériel de numération comme le matériel multi-base (petits cubes, barres, plaques…) ou comme des abaques ou des bouliers, des réglettes Cuisenaire, des bandes unités (de 21 cm de couleurs différentes), des droites graduées en dixièmes et centièmes, des surfaces rectangulaires ou carrées de couleurs différentes (unités, dixièmes, centièmes), des guides-ânes….

Nous avons fait le choix de centrer cet atelier autour de l'étude du passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux. C'est en effet un point clé où la multiplication cesse d'être une simple répétition d'additions d'un même nombre ou une opération qui « agrandit toujours ».

Un premier temps a été dédié à la manipulation avec différents matériels pour illustrer des multiplications, chaque groupe ayant un matériel différent. Un second temps a été réservé à du calcul en ligne et du calcul posé.

Nous espérons ainsi alimenter une réflexion commune et offrir quelques pistes d'enseignement ou de formation pour le cycle 3.

1 Description du déroulement de l'atelier

1.1Descriptif et analyse a priori

Temps 1 :

A la suite d'une brève introduction sur le travail du groupe IREM de Lyon, du matériel est mis à disposition des groupes avec les consignes suivantes, données en même temps :

Activité 1 Consigne 1 :

Vous avez à votre disposition différents matériels.
Avec le matériel de votre choix, proposez une ou des manipulation(s) permettant d'illustrer chacune des multiplications suivantes (sans nécessairement en donner le résultat).

3×2	$\frac{5}{7} \times 2$	$2 \times 1{,}6$	$2{,}3 \times 1{,}7$

La règle graduée est interdite *en groupe 30 min*

Consigne 2 :

A partir des difficultés rencontrées lors de l'activité, listez les questions que vous vous êtes posées :

- *Sur le choix du matériel et des manipulations à effectuer,*
- *Sur la(les) signification(s) de l'opération multiplication,*

Les manipulations seront présentées et les questions listées

Le choix des nombres a été prévu pour faire apparaître différentes représentations et différents sens de la multiplication. L'ordre d'écriture des nombres dans l'énoncé des multiplications a été choisi aussi pour interroger les lectures significatives du symbole « × ».

Que ce symbole soit lu « fois » ou « multiplié par », le calcul 3 × 2 peut être interprété comme une addition itérée. On pourra procéder trois fois à l'ajout de 2 unités ou 2 fois à l'ajout de 3 unités, quel que soit le matériel utilisé.

De même si le symbole « × » est lu « fois », 2 × 1,6 pourra être traduit comme deux fois l'ajout d'une unité et 6 dixièmes de cette même unité, avec l'unité imposée par la bande unité ou la droite graduée ou l'unité à choisir dans un autre matériel.

Le calcul $\frac{5}{7} \times 2$ pourra aussi être vu comme une addition itérée à condition de le lire $\frac{5}{7}$ multiplié par 2, ou d'utiliser la commutativité de la multiplication pour le lire 2 fois $\frac{5}{7}$. La fraction $\frac{5}{7}$ ne peut pas être facilement représentée à l'aide du matériel de numération ou la droite graduée en dixièmes et centièmes.

Mais on pourra assez aisément en construire une représentation en utilisant la bande unité et le guide-âne pour la partager en 7 puis prendre 5 parts.

Cependant, le calcul de 2,3 × 1,7 nécessite forcément un traitement particulier comme, par exemple, de faire opérer la fraction $\frac{23}{10}$ sur 1,7 pour en prendre les vingt-trois dixièmes ou de situer l'opération dans un autre contexte où elle a du sens comme celui par exemple d'un calcul d'aire.

Temps 2 :

Consigne 1

Calcul en ligne de différentes multiplications.

Effectuer les opérations suivantes sans les poser :

- *23 × 13*
- *6 × 4,3*
- *4,2 × 4,5*

Consigne 2

Calcul posé, chaque groupe en faisant une différente.

Posez les multiplications suivantes et dites comment vous les expliqueriez à des élèves :

- *523 × 305*
- *349 × 24,5*
- *63,4 × 2,12*

Pour les calculs en ligne, les procédures s'appuieront certainement sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction ou l'associativité de la multiplication :

Pour 23 × 13 = 299 on peut faire :

- 23 × 3 puis 23 × 10
- 23 × 10 et 23 × 3
- (20 + 3) × 13

Pour 6 × 4,3 = 25,8 on peut faire :

- 6 ×4 = 24 et 6 × 0,3 = 1,8
- 3 × 0,3 = 0,9 puis multiplier par 2 ce qui donne 1,8
- 3 × 4,3=12,9 et le tout multiplié par 2
- 6 × 43 : 10

Pour 4,2 × 4,5 = 18,9 on peut faire :

- 4,2 × 9 : 2 = (4,2 × 10 – 4,2) : 2 = 37,8 :2 = 18,9
- 4,2 × 4 = 16,8 puis 4,2 × 0,5
- La moitié de 4,2 soit 2,1 et 16,8 + 2,1
- Eventuellement 4 × 4,5 puis 0,2 × 4,5
- *A priori*, le calcul42 × 45 : 100, proche de la technique posée usuelle, semble plus difficile à mettre en œuvre.

Pour les multiplications posées de la seconde consigne, les participants de l'atelier devraient présenter la technique de la multiplication de deux entiers avec une explication s'appuyant sur la décomposition canonique du deuxième nombre, l'utilisation de la distributivité de la multiplication sur l'addition et de l'associativité de la multiplication pour effectuer le produit par les multiples des puissances de 10.

Dans la multiplication *349 × 24,5,* la position du plus petit nombre 24,5 pourra être interrogée car dans un cas, il faudra effectuer le produit de 349 parle décimal 0,5 alors que si on inverse les facteurs, on sera conduit à effectuer le produit de 24,5 par l'entier 349.

Pour justifier la technique de cette multiplication nous nous nous attendons à des explications basées sur les différentes lecture ou décompositions possibles qui peuvent être faites de l'un ou l'autre des facteurs en jeu :

- 349 × 245/10
- 349× (2d + 4u + 5/10)
- 24,5 × (3c + 4d + 9u)

Pour 63,4 × 2,12, on s'attend à ce que les participants fassent :

- 634 × 212 /1000
- En utilisant la décomposition canonique d'un des facteurs 2,12 par exemple, ils pourraient aussi calculer le produit en calculant 2/100 fois 63,4 + 1/10 fois 63,4 + 2 fois 63,4 ce qui aurait pour conséquence de faire apparaitre la virgule dans les résultats intermédiaires (mais ils devraient alors expliquer comment traiter les opérations 2/100 fois 63,4 et 1/10 fois 63,4).

Dans le cas de la technique posée de la multiplication de deux nombres décimaux (non entiers) il y a une rupture de sens. Il convient donc de donner une autre signification à cette opération que simplement celle prenant appui sur l'addition itérée. En revanche, les explications données pour justifier l'algorithme de la multiplication de deux entiers s'appuient sur les propriétés du système de numération décimale et sur celles de l'opération multiplication. Ces propriétés s'étendent aux nombres décimaux et on peut légitimement penser qu'il est possible de construire un algorithme de multiplication des décimaux et de le justifier en s'inscrivant dans cette continuité.

Questions à mettre en débat : Discussion

Les questions suivantes pourront être abordées durant l'atelier :

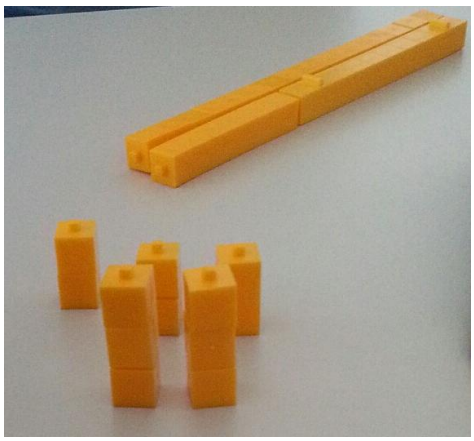
Quels liens, continuités, ruptures entre des techniques opératoires (en ligne ou posée) ?
Toutes ces techniques peuvent-elles être illustrées par la manipulation d'un matériel ?
Inversement, l'utilisation de matériels pourrait-elle induire d'autres explications des techniques ?

1.2Les productions du temps 1 de l'atelier

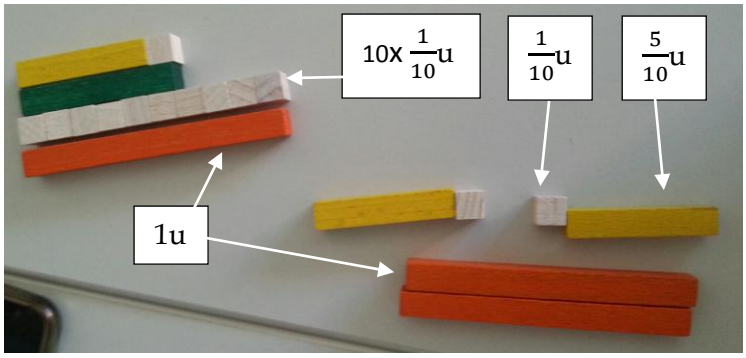
3×2	$\frac{5}{7} \times 2$	$2 \times 1{,}6$	$2{,}3 \times 1{,}7$

Les participants à l'atelier se sont emparés de différents matériels mis à leur disposition et ont facilement représenté le premier et le troisième calcul.

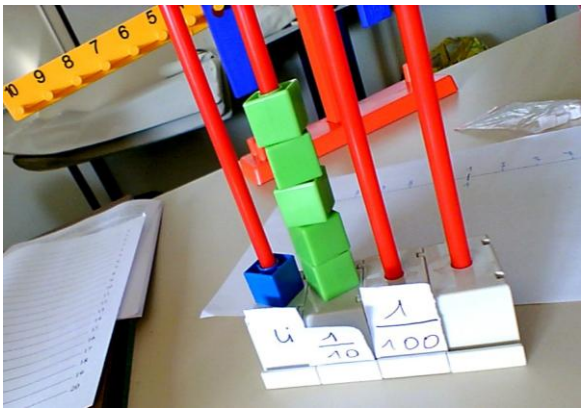
Les représentations des résultats de 3×2 et de 2 × 1,6 font apparaitre souvent le double d'une quantité matérialisée (3u +3u ou 1,6u +1,6u) mais aussi 2u+2u+2u et fonctionnent en montrant la multiplication comme addition réitérée. L'unité change suivant les besoins comme le montre l'exemple ci-dessous où le petit cube vaut une unité dans les représentations de 3×2 et un dixième dans la représentation de 2 × 1,6. Voir aussi l'illustration de cette opération sur le boulier où la colonne des boules unités devient de fait celle des dixièmes d'unité.



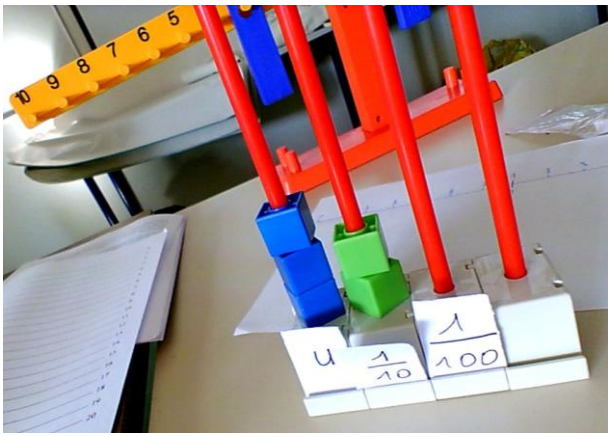
Au premier plan deux manières de représenter 3×2 et en arrière-plan 2 × 1,6 avec le matériel de numération (cubes et barres)



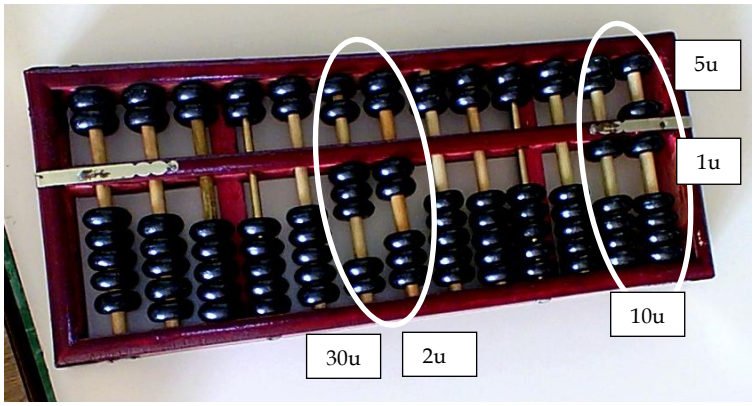
2 × 1,6avec les réglettes Cuisenaire
La réglette rouge représentant l'unité, le cube blanc représente alors $\frac{1}{10}$ de l'unité et la réglette jaune $\frac{5}{10}$ de l'unité.



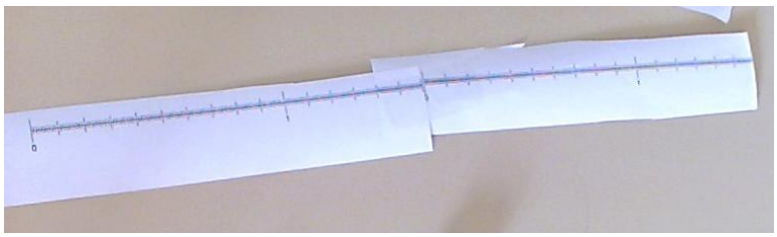
en cours de manipulation pour représentation de 1,6u (ici on voit à ce moment 1u et 5 dixièmes de l'unité)



puis le résultat de 2 × 1,6u suite à un échange de 10 dixièmes contre 1 unité



2 × 1,6 avec le boulier chinois : à droite le nombre 16 et au centre le nombre 32 obtenu en ajoutant 16 deux fois. L'existence de la virgule est donnée oralement.



2 × 1,6 avec la droite graduée en centièmes où après avoir représenté 1,6 deux fois les deux morceaux ont été collés bout à bout. La lecture du résultat se faisant en comptant les unités et les dixièmes par exemple.

Figure 2 : Différentes représentations des résultats de 3×2et de 2 × 1,6

On peut remarquer que la multiplication de 3 par 2 a été illustrée de deux manières 3u + 3u et 2u+2u+2u, mais celle de 2 × 1,6, d'une seule. Si la commutativité est facilement mobilisée pour proposer deux représentations dans le cas de la multiplication de deux entiers, dans le deuxième cas, elle n'est pas utilisée par les participants de l'atelier qui évitent ainsi le problème du sens à donner à l'opération 1,6 fois 2. (à moins que certains d'entre eux n'aient lu l'opération 1,6 multiplié par 2).

Cette question du sens de la multiplication lorsque le multiplicateur est un décimal non entier interroge la commutativité de cette opération et peut remettre en cause l'évidence de cette propriété surtout chez des élèves qui en débutent la construction. La généralisation de la commutativité de la multiplication avec des nombres non entiers est difficile à concevoir si la multiplication est considérée uniquement comme une addition itérée.

Pour représenter le résultat de $\frac{5}{7}\times 2$, deux méthodes apparaissent en utilisant les bandes unités :

- interpréter l'opération comme « deux fois 5 septièmes », puis partager une bande unité en septièmes, prendre $\frac{5}{7}$ de la bande deux fois et accoler les deux morceaux (ou prolonger le comptage des septièmes une deuxième fois), ou
- interpréter l'opération comme cinq septièmes de deux unités, puis construire une nouvelle unité correspondant à deux bandes unités accolées et partager celle-ci en septièmes pour prendre ensuite 5 de ces parts.

La première méthode donne au nombre 2 le statut de scalaire qui opère sur la quantité $\frac{5}{7}$ d'unité. Cette considération permet alors d'envisager la multiplication des deux nombres comme une addition de deux termes identiques.

La seconde méthode repose sur la considération inverse et amène à envisager la multiplication comme l'opération qui consiste « à prendre une fraction d'une quantité ».

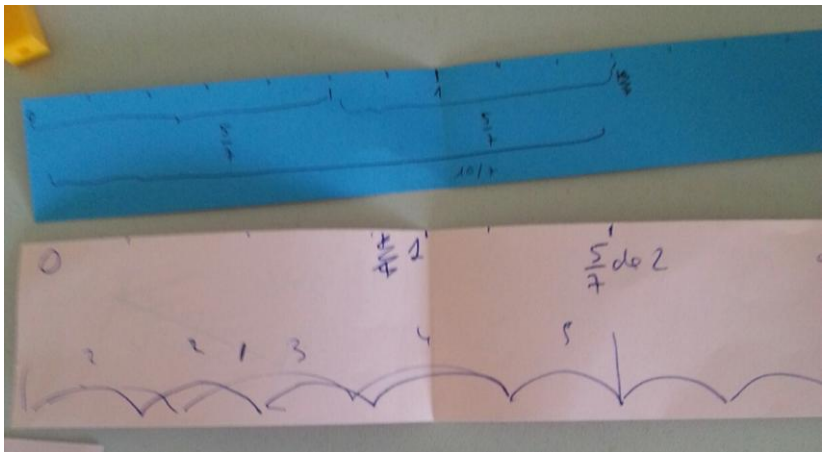


Figure 3 : Différentes représentations des résultats de $\frac{5}{7}\times 2$

La figure 3 révèle les deux façons de voir $\frac{5}{7} \times 2$ mais avec une utilisation de la bande donnée comme valant deux unités ; les participants ont positionné le repère « 1 » au milieu d'un côté de la bande.

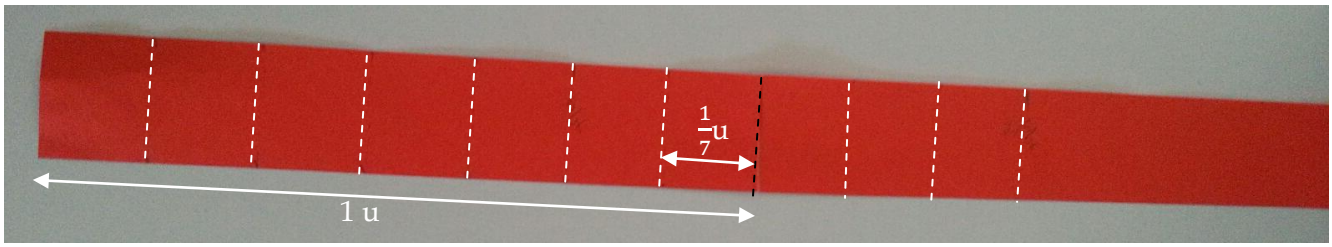


Figure 3 bis : Différentes représentations des résultats de $\frac{5}{7} \times 2$

La figure 3 bis révèle $\frac{5}{7} \times 2$ simplement vu comme $\frac{5}{7}$u + $\frac{5}{7}$u. Les auteurs de cette représentation ont effectué un partage de la bande unité en septièmes et ont repéré $\frac{5}{7}$u puis ils ont sur-compté 5 autres septièmes depuis ce repère. Comme il manquait 3 septièmes en atteignant l'extrémité de la bande unité pour avoir le bon compte, ils ont alors reporté 3 fois 1 septième de la bande unité sur une nouvelle bande unité.

Le matériel de numération et tout matériel s'appuyant sur le système décimal ne peut pas être utilisé pour illustrer cette opération, ils ne permettent pas de représenter facilement des septièmes pour une unité donnée.

Pour le dernier calcul 2,3 × 1,7, certains participants n'ont pas terminé et d'autres se sont appuyés sur une représentation rectangulaire de la multiplication (fig.5).

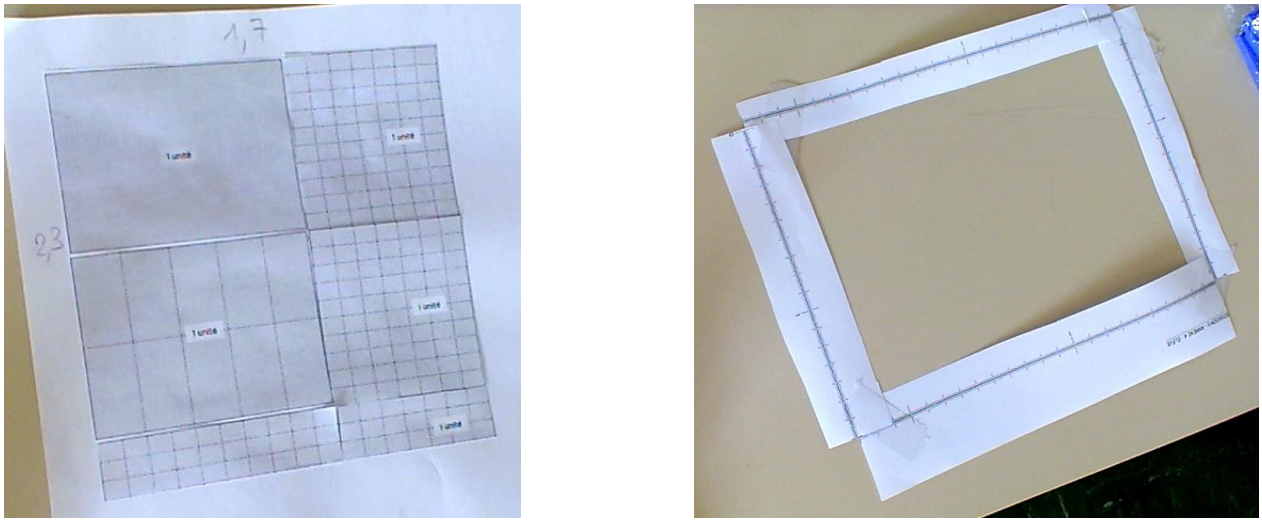
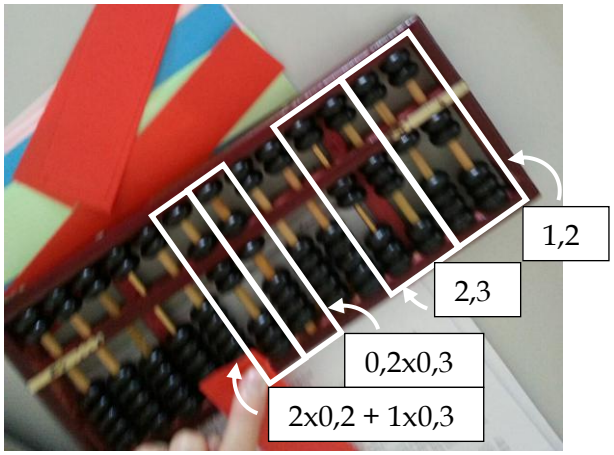


Figure 5 : Différentes représentations des résultats de 2,3× 1,7 sous forme rectangulaire

D'autres encore ont utilisé le boulier chinois et se sont appuyés sur la distributivité de multiplication sur l'addition (fig.5 bis).



Boulier en cours d'utilisation avec placement de la virgule pour le calcul de 2,3 × 1,2 (au lieu de 1,7 : erreur dans la multiplication proposée).

On voit les deux facteurs à droite sur le boulier et la multiplication en train d'être réalisée à gauche en s'appuyant sur les propriétés de double distributivité.

Le groupe a annoncé avoir voulu faire

1× 2,3u + 0,5 × 2,3u + 0,2 × 2,3u

Le doigt et le papier rouge indiquent la place de la virgule.

Figure 5 bis : Illustration sur un boulier du résultat de 2,3 × 1,2

Tous les participants ont exprimé que, pour eux, ce calcul montrait les limites de la manipulation.

Aucun d'eux n'a spontanément songé à illustrer l'opération en accolant à la suite des bandes unités, et prendre par exemple les $\frac{23}{10}$ de 1,7 unité, en constituant d'abord un segment de 1,7u pour le partager ensuite 10 parts identiques et reporter côte à côte 23 de ces parts.

1.3Les productions du temps 2 de l'atelier

Les participants de l'atelier ont effectué les calculs en ligne individuellement, et ont dû s'accorder en équipe sur une présentation de chaque calcul posé.

Calcul en ligne

Pour 23 × 13, les deux décompositions utilisant la distributivité sont apparues :

- 23 × 10 + 23 × 3
- 20 × 13 + 3 × 13

Une autre solution, à laquelle nous n'avions pas pensé dans notre analyse a priori, a été proposée :

$23 \times 13 = (18 + 5) \times (18 - 5) = 18^2 - 5^2 = 324 - 25 = 299$

Pour 6 × 4,3, certains posent l'opération dans leur tête tandis que d'autres ont des solutions plus originales :

- (43 × (5+1)) :10
- $6 \times 4 + 6 \times \frac{3}{10}$
- (4,3 × 3)× 2ou (4,3 × 2) × 3
- (6 × 40 + 6 × 3) :10

Pour 4,2 × 4,5 encore plus de propositions ont été faites :

- 4,2 × 4 + 2,1 (avec 2,1 comme la moitié de 4,2)
- (4d × 45 + 2u × 45) :100
- (42 × 45) :100 ; sans autre précision
- (21 × 2 × 9 × 5) :100 = 21 × 9 : 10
- 4,2 × 5 −4,2 × 0,5
- 4 × 4,5 + 4,5 : 5 (avec « multiplié par 0,2 »vu comme « multiplié par 1/5 » donc « divisé par 5 »)

Dans les calculs mettant en jeu les écritures décimales, on voit se dégager deux stratégies. Nous trouvons d'une part, celles qui s'appuient sur une décomposition additive du nombre décimal en une somme d'unités et de dixièmes ($4{,}3 = 4 + \frac{3}{10}$; $4{,}5 = 4 + \frac{5}{10} = 4 + \frac{1}{2}$; $4{,}2 = 4 + \frac{2}{10} = 4 + \frac{1}{5}$) et qui utilisent la distributivité de la multiplication sur l'addition et d'autre part, celles qui s'appuient sur une décomposition multiplicative du décimal vu comme une fraction décimale ($4{,}3 = \frac{43}{10} = 43 \times \frac{1}{10}$; $4{,}2 = \frac{42}{10} = 42 \times \frac{1}{10}$; $4{,}5 = \frac{45}{10} = 45 \times \frac{1}{10}$) et qui utilisent l'associativité de la multiplication.

A noter que la première stratégie rejoint celle largement adoptée par les participants dans le premier calcul effectué sur des entiers, et que la seconde nécessite de considérer le nombre décimal, soit comme un produit d'un entier par une fraction décimale, soit comme un quotient d'un entier par une puissance de 10.

Calcul posé

Le calcul portant sur les entiers a été présenté de façon classique en multipliant le plus grand nombre par le plus petit.

Cependant certains ont tenu à faire apparaître les « zéros » sur la seconde ligne intermédiaire et à expliciter les résultats trouvés à chaque ligne : 523 × 305 = 523 × (300 +5) = 523 × 300 + 523 × 5

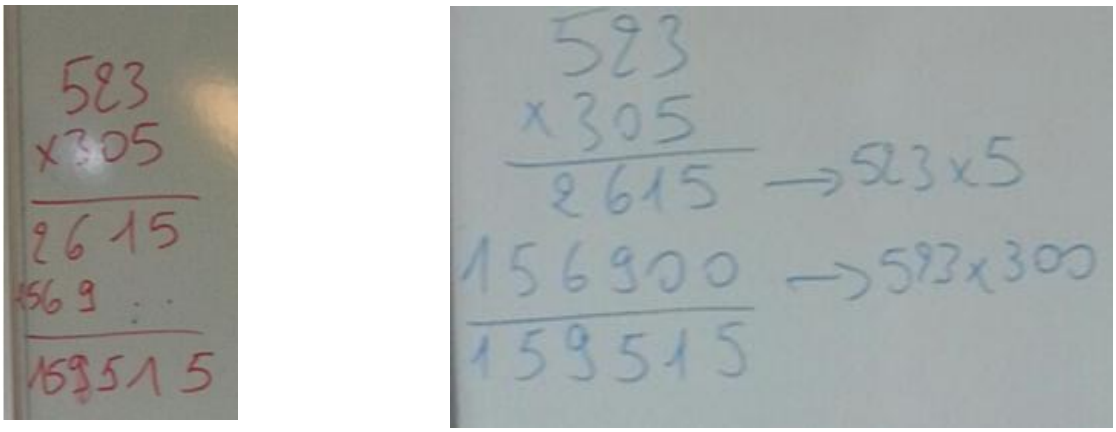
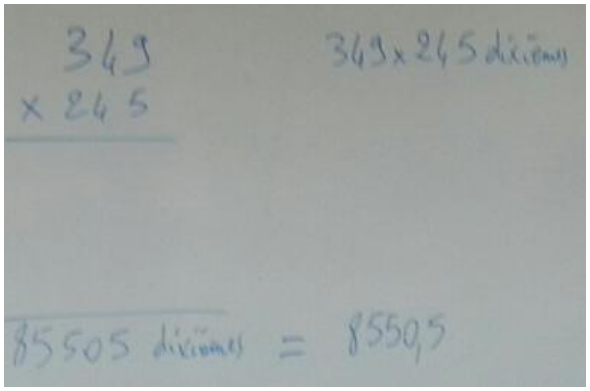


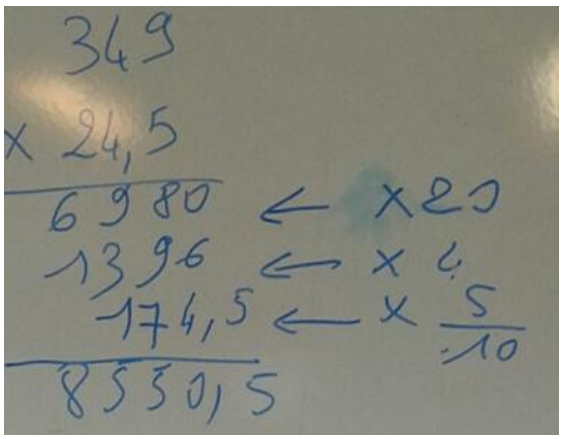
Figure 6 : Multiplications posées 523 × 305

Le calcul mettant en jeu un entier et un décimal non entier a été présenté de deux manières.



Dans cette proposition, l'opération 349 × 24,5 est considérée comme une multiplication de deux entiers où 349 joue le rôle de scalaire et où 245 désigne un nombre de dixièmes. Le résultat est d'abord exprimé sous la forme d'un nombre entier de dixièmes avant d'être traduit en écriture décimale.

Cependant comme 349 est en haut et 245 en bas, on pourrait penser au contraire que 245 joue le rôle de scalaire. En effet, dans la manière de calculer la multiplication posée on a l'habitude de faire opérer le nombre du bas sur celui du haut (5 fois 9 unités puis 5 fois 4 dizaines puis …)



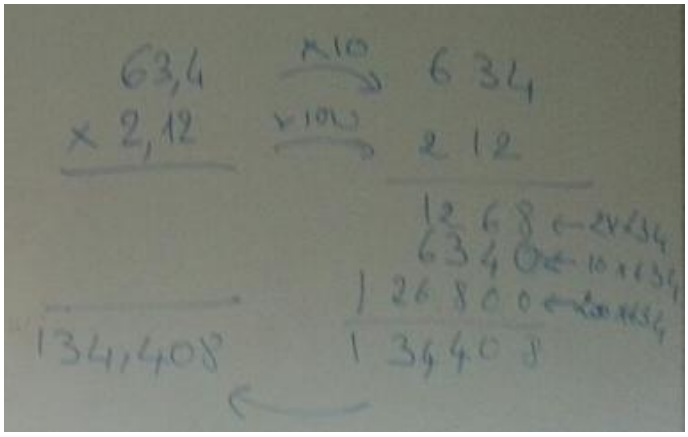
Dans cette seconde proposition, c'est 24,5 qui opère sur 349.

L'opération est vue comme étant le produit de 349 par $(20 + 4 + \frac{5}{10})$ et les résultats des lignes intermédiaires correspondent respectivement aux calculs $349 \times 20 ; 349 \times 4 ; 349 \times \frac{5}{10}$.

Figure 7 : Multiplications posées : 349 × 24,5

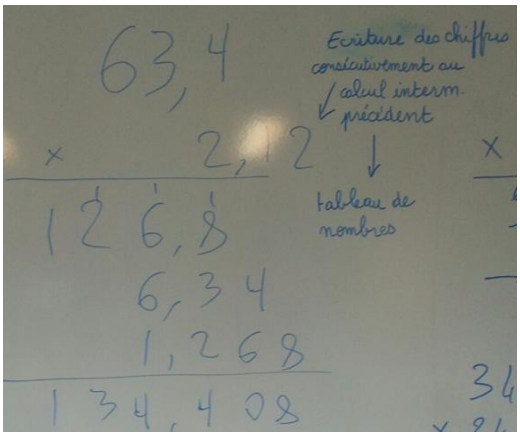
On peut remarquer que la seconde présentation reprend et prolonge la méthode utilisée avec les entiers. Elle demande cependant, pour effectuer le calcul de la troisième ligne de calculs intermédiaires, de savoir multiplier par $\frac{5}{10}$ et peut-être de donner un sens à cette multiplication qui a pour effet de réduire de moitié le nombre sur lequel elle opère.

La multiplication des deux nombres décimaux donnés en écriture décimale a été présentée de trois manières différentes.



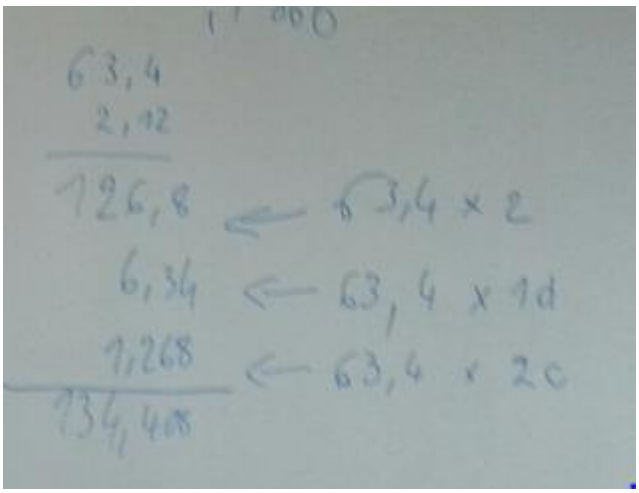
Cette présentation classique de la multiplication[117] conduit à substituer à la multiplication à 63,4 par 2,12, celle de 634 par 312, pour mobiliser la technique apprise sur les entiers.

On explique ensuite que, comme la transformation des deux facteurs décimaux en nombres entiers, nécessite de multiplier le premier par 10 et le second par 100, le produit des entiers obtenus est mille fois plus grand que celui des décimaux initiaux et que de ce fait le produit de ces décimaux est mille fois plus petit que celui trouvé avec les entiers.



Cette présentation propose de considérer la décomposition de 2,12 en $2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$ et d'effectuer la multiplication en calculant d'abord 2 fois 63,4 et d'écrire ce résultat sur la première ligne intermédiaire comme dans un tableau de numération, puis d'écrire le résultat de 63,4 multiplié par le deuxième « chiffre » de 2,12 en décalant d'un rang vers la droite son placement dans le tableau de numération, puis de faire de même sur la troisième ligne en décalant de deux rangs vers la droite le résultat. trouvé en effectuant le produit de 63,4 par le troisième « chiffre » de 2,12

[117] On retrouve cette présentation dans le document : Ressource pour le collège : Le calcul numérique au collège (pages 16 et 17)



Dans cette disposition, 2,12 est le scalaire qui opère sur 63,4. Il est décomposé en :2 +$\frac{1}{10}$ + $\frac{2}{100}$;sur les lignes intermédiaires apparaissent des nombres « à virgule » qui correspondent respectivement aux calculs 63,4 ×2 ; 63,4 ×$\frac{1}{10}$; 63,4 × $\frac{2}{100}$.

Figure 8 : Multiplications posées : 63,4× 2,12

On peut remarquer que la justification de la première technique repose sur l'application des techniques de multiplication et de division d'un décimal par une puissance de 10 et mobilise des propriétés telles que :(a × b) : c = a × (b : c) ou (a : b) : c = a : (b × c).

Comme dans la seconde présentation du calcul de 349 × 24,5, la troisième proposition de présentation du 63,4 × 2,12 reprend et prolonge la méthode utilisée avec les entiers. La question du sens à donner à la multiplication par un dixième ou par deux centièmes reste posée. La justification de la deuxième proposition de présentation du 63,4 × 2,12 repose sur les mêmes propriétés et soulève les mêmes questions.

1.4Le débat qui a suivi

La discussion a porté sur les continuités et ruptures engendrés par le passage à la multiplication par un décimal. La difficulté de donner sens à cette nouvelle multiplication et de justifier les techniques associées a été soulignée. La nécessité d'un travail autour de la distributivité et de l'associativité a été pointé au moment où la recherche de l'efficacité dans l'utilisation des techniques est rendue obsolète par les outils technologiques.

Les animateurs ont posé la question de savoir si les techniques proposées pouvaient être toutes illustrées sur du matériel ou si inversement des manipulations pouvaient induire d'autres techniques. Ils ont ensuite présenté rapidement quelques propositions du groupe *école-collège* de l'IREM de Lyon.

III DIFFÉRENTES SIGNIFICATIONS DE LA MULTIPLICATION : QUELLES RUPTURES ET QUELLES CONTINUITÉS AU NIVEAU DES DÉCIMAUX

Comme les participants de l'atelier ont pu le constater, les significations attachées à l'opération sont diverses et la définition même de cette opération est sujette à discussion.

Il est dès lors utile, aussi bien pour analyser des ressources existantes que pour concevoir de nouvelles situations de classe, de chercher à recenser les différentes définitions que peut prendre la multiplication. Ceci afin d'envisager des approches possibles de cette opération et d'étudier les avantages ou limites qu'elles peuvent présenter dans la construction de son sens et des techniques de calculs qui lui sont associées (en particulier au moment du passage des entiers aux décimaux).

1 Différentes définitions de la multiplication

Les travaux de Gérard Vergnaud sur le champ conceptuel ont déjà permis d'étudier largement le concept de multiplication, ils ont été souvent utilisés dans d'autres publications. Nous ferons ici à référence à ces travaux en nous intéressant plus particulièrement ce qui relève de la multiplication par une fraction ou un nombre décimal.

1.1Le produit cartésien

Cette conception correspond par exemple au cas où on cherche à déterminer combien de figures différentes il est possible de composer à partir de 5 couleurs et de 3 formes toutes différentes. La solution peut être trouvée par dénombrement de tous les cas possibles mais plus directement en effectuant le produit 5 × 3. La multiplication peut être alors définie de la manière suivante : « Le produit de deux entiers a et b est le cardinal du produit cartésien d'un ensemble de cardinal a par un ensemble de cardinal b. Autrement dit : Card(A) ×Card(B) = Card (A×B) ». Cette définition offre l'avantage d'illustrer les propriétés de commutativité et de distributivité de la multiplication. Elle peut s'étendre facilement aux nombres décimaux et être utilisée par exemple dans des problèmes de calcul d'aire (Clivaz et Deruaz, 2013, p.25).

1.2L'addition réitérée

Lorsqu'on cherche à déterminer la longueur d'un ruban constitué de 4 morceaux de 9 cm chacun, on peut effectuer l'addition 9 cm + 9 cm + 9 cm + 9 cm, ou directement le produit résultant de 9 cm multipliés par 4. La multiplication apparait alors comme étant une représentation simplifiée d'additions répétées d'un même terme et on a alors :

$$\text{n} \times x = \underbrace{x + x + x + x + \ldots\ldots\ldots + x}_{\text{n fois}}$$

Il est à noter que dans le produit $n \times x$, les deux facteurs n'ont pas le même statut, le x est vu comme un nombre concret, c'est souvent l'expression d'une mesure dans une unité donnée, alors que n est un nombre abstrait dépourvu d'unité, c'est un scalaire qui opère sur l'autre nombre[118] (Vergnaud, 1994, p. 167). Dans l'expression $n \times x$ écrite dans cet ordre, le symbole « × » renvoie au mot « fois » plutôt qu'à l'expression « multiplié par ».

Si cette définition permet d'illustrer aisément la distributivité de l'opération sur l'addition, les différences de statut des deux facteurs rend difficile l'illustration de sa commutativité.

La rupture de sens, qu'occasionnerait l'utilisation d'un scalaire non entier, rend impossible l'extension de cette définition à tous les réels. Il parait cependant intéressant d'essayer d'envisager son prolongement aux rationnels.

1.3La fraction d'une quantité

Lorsque, comme dans l'exemple précédent on cherche à déterminer la longueur d'un ruban, mais cette fois ci la longueur est $\frac{2}{3}$ de 9 cm. On peut pendre 2 fois le tiers de 9 cm ou le tiers du double de 9 cm et effectuer ainsi le produit de 9 cm par $\frac{2}{3}$.

Cette multiplication, étendue aux rationnels, peut ainsi être définie de deux manières :

- $\frac{a}{b} \times x = \underbrace{\frac{x}{b} + \frac{x}{b} + \frac{x}{b} + \cdots + \frac{x}{b}}_{a \text{ fois}}$ avec $b \neq 0$
- $\frac{a}{b} \times x = (x + x + x + \cdots + x) : b$ avec $b \neq 0$,

[118] On trouve dans de vieux manuels la distinction entre multiplicateur et multiplicande

Cette définition permet d'envisager la multiplication par un nombre décimal comme une multiplication par une fraction décimale où la fraction décimale opère sur l'autre facteur (entier ou décimal) de la multiplication.

2 Différentes situations multiplicatives

Comme on vient de le voir les définitions de la multiplication mobilisées dépendent de la situation dans laquelle le problème est posé. On distingue généralement trois types de situations multiplicatives (Roditi, 2001,p 77).

2.1Les situations mettant en jeu une seule grandeur

Comme dans l'exemple du calcul de la longueur du ruban, certains problèmes s'intéressent à une seule grandeur. On les qualifie parfois de problèmes de comparaison de type « n fois plus » ou « n fois moins » qui amènent à effectuer une multiplication d'une mesure d'une grandeur par un scalaire *n*.

Ces situations s'illustrent assez facilement sur du matériel lorsque *n* est entier, leur illustration est plus problématique lorsque *n* ne l'est plus, mais reste possible lorsque *n* est un rationnel non entier en mobilisant la définition « fraction d'une quantité » qui se traduit par une multiplication. On peut en effet illustrer $\frac{a}{b}$×c en prenant $\frac{a}{b}$ de c, comme illustrer $\frac{2}{3}$ ×9 cm en prenant $\frac{2}{3}$ de 9 cm.

2.2Des situations où deux grandeurs sont proportionnelles

Dans ces situations le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de l'une à l'autre des grandeurs proportionnelles est lui-même une grandeur quotient des deux autres. Ainsi le coefficient de proportionnalité qui permet de calculer le prix d'achat en euros d'un certain nombre de litres d'essence se calcule en divisant le prix payé par le nombre de litres obtenus correspondant. Il s'exprime en €/L.

Les illustrations des situations de proportionnalité mettent en correspondance plusieurs mesures des deux grandeurs concernées (des œufs et des prix pour l'exemple illustré en fig. 9).

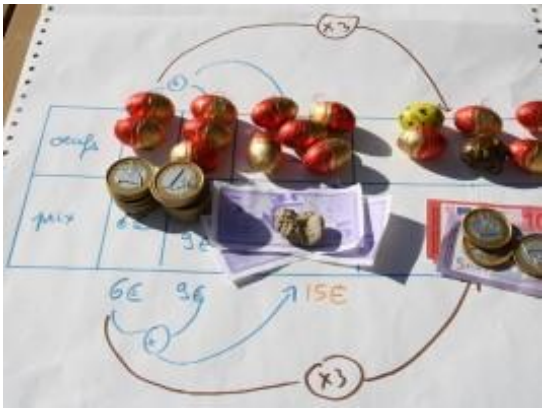


Figure 9: exemple d'illustration d'une situation de proportionnalité[119]

Elles rendent ainsi possible l'utilisation des propriétés de linéarité de la proportionnalité et en particulier la mise en œuvre de raisonnements utilisant les expressions du type « *n* fois plus » ou « *n* fois moins » où *n* est un scalaire, qui sont mobilisés dans des situations d'agrandissement ou de réduction rencontrées dans le paragraphe précédent.

Ils consistent à remarquer une relation sur une grandeur (9 œufs c'est 3 fois 3 œufs) puis l'appliquer sur l'autre (15 € c'est 3 fois 5 €) ou être utilisés en faisant référence seulement aux nombres, en omettant le fait qu'ils n'expriment pas nécessairement des mesures d'une même grandeur (6 c'est 3 fois 2, autrement dit, la mesure du prix des œufs en euro est égale à 3 fois la taille de collection d'œufs). Les mêmes raisonnements peuvent être étendus aux nombres non entiers mais leur illustration ne peut être effectuée que sur une seule grandeur à la fois, ce qui ramène à la problématique du paragraphe

[119]Source : http://troublesneurovisuels.unblog.fr/category/mathematiques/proportionnalite-mathematiques/

précédent et conduit à considérer la multiplication par un nombre en écriture fractionnaire comme l'opération consistant à « prendre une fraction de ».

2.3Les situations mettant en jeu deux grandeurs pour en constituer une troisième

Comme dans l'exemple du problème de recherche du nombre de figures différentes que l'on peut composer avec différentes formes et différentes couleurs, certains problèmes demandent de combiner deux grandeurs pour en obtenir une troisième, produit des deux premières. C'est le cas dans les problèmes d'aire où l'on multiplie entre elles des longueurs, pour obtenir une aire.

Ces situations sont souvent illustrées par une représentation rectangulaire : tableaux à double entrée ou rectangle, qui permet de matérialiser la nouvelle grandeur obtenue. On peut remarquer que même si ces situations relèvent du produit cartésien, sur leurs représentations en rectangle, le dénombrement des unités de mesure de la grandeur produit renvoie à une addition réitérée d'un nombre entier de lignes ou de colonnes. Celui-ci est plus difficile à effectuer lorsque les deux mesures à composer sont des rationnels non entiers, il nécessite de considérer des fractions de l'unité de la grandeur produit qui résultent d'un produit de fractions d'unités des grandeurs à multiplier.

Le passage des entiers aux décimaux rend donc l'illustration des situations multiplicatives plus difficiles mais celle-ci demeure possible à condition de considérer le nombre décimal en tant que fraction décimale, et de mobiliser, dans certaines situations, la signification « fraction d'une quantité » de la multiplication.

3 Les techniques de multiplication de deux nombres en écriture décimale

Comme nous l'avons évoqué en décrivant l'atelier, la technique de multiplication des décimaux consiste souvent à poser la multiplication « comme s'il n'y avait pas de virgule » puis à placer la virgule dans le produit de telle sorte qu'il y ait autant de chiffres après la virgule que la somme des nombres de chiffres après la virgule dans les deux facteurs réunis. Cette technique est valide dans un calcul posé. Mais elle ne permet pas de comprendre le sens du placement de la virgule dans le résultat affiché par une calculatrice quand elle effectue par exemple : 2,4 × 1,5 = 3,6. Il est donc nécessaire de s'intéresser aussi aux discours susceptibles de justifier de cette technique ou d'en soutenir d'autres.

3.1Le produit de fractions quotient

Dans le produit 5,7 × 2,75, on peut considérer que 5,7 est le nombre qui multiplié par 10, donne 57 et 2,75 le nombre qui multiplié par 100, donne 275. Le produit 57 × 275 est alors le produit (5,7 × 10) × (2,75 × 100) qui, par commutativité et associativité de la multiplication, est égal à (5,7 × 2,75) × 1 000.

Alors le nombre 5,7 × 2,75 est le nombre qui, multiplié par 1000, donne 57 × 275 : c'est donc $\frac{57 \times 275}{1000}$. Cette écriture fractionnaire du résultat permet, comme mentionné dans le paragraphe précédent, de justifier la technique usuelle de calcul du produit de deux décimaux.

On retrouve un raisonnement similaire mais qui n'utilise pas d'écriture fractionnaire dans la justification suivante :

5,7 × 2,75 = (5,7 × 1) × (2,75 × 1) = (5,7 × (10 : 10)) × (2,75 × (100 : 100) = (5,7 × 10) : 10 × (2,75 × 100) : 100 = ((57 × 275) : 10) : 100 = (57×275) : (10 × 100) = (57 × 275) : 1000.

Il mobilise également les propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication mais aussi d'autres telles que telles que:

$(a \times b) : c = a \times (b : c)$ ou $(a : b) : c = a : (b \times c)$ quels que soient les décimaux a ; b ; c (b et $c \neq 0$) .

La succession d'opérations nécessaires pour justifier la technique parait dans les deux cas, difficile à illustrer avec du matériel.

3.2Le produit de fractions décimales

Le produit de deux décimaux, par exemple 5,7 × 2,75, peut être considéré en tant que produit de deux fractions décimale : $\frac{57}{10} \times \frac{275}{100}$.

L'application de la règle de multiplication des fractions permet d'affirmer que le produit est égal à $\frac{57 \times 275}{10 \times 100}$ donc à $\frac{57 \times 275}{1000}$, autrement dit au quotient du produit de deux entiers par 1000.

On peut justifier ainsi la technique usuelle évoquée plus haut : effectuer le produit des deux entiers 57 par 75, puis diviser le résultat par 1000 (ou décomposer la fraction décimale sous la forme d'un entier et d'une partie décimale inférieure à 1). Cette dernière opération détermine la place de la virgule dans l'écriture décimale du résultat.

Cette première justification peut être illustrée par une configuration rectangulaire dans un problème d'aire mais pour être bien comprise, elle demande de concevoir que le produit de deux mesures exprimées chacune par une fraction décimale d'une unité de grandeur (ici la longueur) puisse donner une mesure d'une autre grandeur produit des premières (ici l'aire). En effet ceci n'est pas compatible avec la définition « fraction d'une quantité » de la multiplication, qui en illustrant la multiplication de deux fractions par une fraction d'une fraction d'une mesure de grandeur, ne mettrait en jeu qu'une seule grandeur.

3.3Le produit d'une fraction décimale par un décimal

Le produit 5,7 × 2,75 peut être vu comme le produit de $\frac{57}{10}$× 2,75 (ou5,7 × $\frac{275}{100}$) dans lequel la fraction opère sur le nombre en écriture décimale. Cela conduit à effectuer :

– soit le calcul du produit d'un entier par une fraction (57 par 2,75) et de le diviser par 10 ;

– soit le calcul du quotient d'un décimal par 10 (2,75 sur 10) puis de le multiplier par 57. Cette vision du produit conduit à mettre en place une technique de calcul un peu différente de la technique habituelle qui consiste à placer la virgule en deux temps, dans la multiplication d'un décimal par un entier et dans la division d'un décimal par une puissance de 10.

Cette technique nécessite de connaitre une technique de multiplication d'un nombre en écriture décimale par un entier et de savoir diviser un nombre décimal par une puissance de 10.

Elle peut être illustrée assez facilement en matérialisant par exemple les 57 dixièmes d'une bande de papier de 2,75 dm de long.

3.4Le produit d'un décimal par une somme de fractions décimales

Si, comme dans le paragraphe précédent, on connaît une technique de multiplication d'un nombre par une fraction et celle d'un décimal par un entier, alors le produit 5,7 × 2,75 peut être aussi considéré comme le produit de 5 +$\frac{7}{10}$ par 2,75 (ou de 5,7 par 2 + $\frac{5}{10}$+$\frac{7}{100}$).

L'application en acte de la distributivité conduit à calculer la somme de deux produits : celui d'un entier par un décimal (5 par 2,75 qui peut être assimilé à une addition réitérée) et celui d'une fraction décimale par un décimal ($\frac{7}{10}$ par 2,75 qui peut-être vu soit comme le produit de deux fractions, soit comme l'opération consistant à prendre la fraction d'un nombre). Cette vision du produit amène une technique opératoire dans laquelle la virgule apparaît dans les calculs intermédiaires de la multiplication posée.

Elle peut être illustrée sur un matériel identique à la précédente.

En conclusion, la justification de techniques opératoires de la multiplication des décimaux reste difficile mais l'étude précédente montre que certaines présentations peuvent être plus porteuses de sens parce qu'elles offrent la possibilité d'être mises en lien avec des manipulations concrètes ou évoquées. Elles offrent aussi l'avantage de s'inscrire dans la continuité des techniques mises en place pour multiplier un entier ou un nombre en écriture décimale par un entier, en mobilisant de façon similaire la distributivité de la multiplication sur l'addition et les propriétés de système de numération de position décimale.

IV ÉTUDE DE MANUELS

On peut s'interroger sur la manière dont les enseignants abordent ce passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux et se demander comment il leur est possible de prendre en compte les ruptures de sens de l'opération et les continuités liées à l'écriture décimale. L'étude des manuels peut nous fournir quelques indications.

1 Présentation de la signification de la multiplication des décimaux

1.1Dans un problème de proportionnalité

Sur les huit manuels[120]de 6ème (nouvelles collections) que nous avons étudiés, sept présentent la multiplication dans des problèmes de proportionnalité mettant en jeu deux grandeurs avec une référence à l'unité.

Quand il n'est pas présenté comme relevant directement de la multiplication, le problème est donné en deux fois : il est d'abord proposé avec une donnée entière et une autre décimale et non entière, comme par exemple dans la collection *Phare* (Hachette 2016) :« A la boulangerie, Marc achète 6 pains au chocolat à 1,15€ l'unité », pour être repris ensuite avec deux décimaux non entiers : « Sofia achète 3,4 kg de pommes. Un kilogramme de ces pommes coute 2,80 € ». Les manuels notent ensuite que dans les deux cas la multiplication des deux nombres conduit à la solution.

Intéressons-nous aux rôles donnés aux différents nombres dans les multiplications qui permettent de résoudre ces problèmes. Considérons le tableau de proportionnalité suivant :

Nombre de pains au chocolat	1	6
Prix en €	1,15	

La multiplication 6 × 1,15 qui permet de calculer la quatrième proportionnelle peut renvoyer à deux procédures différentes :

- celle mobilisant les propriétés de linéarité de la proportionnalité :
  p(6 pains) = p(6 ×1 pain) = 6 × p(1pain).
  Dans ce cas, le nombre 6 joue le rôle d'opérateur scalaire et la multiplication est alors une écriture simplifiée d'une addition réitérée.
  C'est ainsi qu'elle est présentée dans le manuel *Phare* (Hachette 2016) : « Pour calculer le prix payé, Marc calcule : 1,15€ + 1,15€ + 1,15€ + 1,15€ + 1,15€ + 1,15€ » ;
- celle utilisant le coefficient de proportionnalité : p(6 pains) = 6 pains ×prix/pain.
  Dans ce cas le 6 est une mesure de grandeur (celle de la taille de la collection de pains) et 1,15 correspond àune grandeur quotient.
  C'est cette approche qui semble être privilégiée dans le manuel *Dimensions Maths* (Hatier 2016), où il est indiqué en encart : « Souviens-toi que le prix à payer = masse en kg × prix au kg. »

Lorsque le problème est présenté avec deux décimaux non entiers :

- dans le premier cas, on retrouve un opérateur scalaire qui n'est plus entier. De ce fait, la multiplication ne peut plus être vue comme une addition réitérée : il y a rupture de sens, là où les manuels cherchent à inscrire une continuité dans la procédure de résolution ;
- dans le second cas, on peut d'abord rappeler que « si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son

[120]Phare 2016 (Hachette) ; Delta 2016 (Magnard) ; Maths Monde 2016(Didier) ; Transmath 2016 (Nathan) ; Delta mathématiques 2016 (Belin) ; Kwyk Maths 2016 (Hachette éducation) ; Myriade 2016 (Bordas) ; Dimensions Maths 2016 (Hatier)

institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3 »[121]. La procédure n'est donc pas encore accessible à la majorité des élèves. On peut interroger ensuite la signification que les élèves peuvent donner à ce coefficient de proportionnalité : la relation qui existe entre les deux grandeurs est, en effet, souvent d'abord perçue comme une relation d'agrandissement où le nombre qui permet de passer de l'une à l'autre s'exprime sans unité. Il garde un statut de scalaire. Là aussi le saut conceptuel à effectuer au passage de l'entier au décimal est important. Les manuels ne semblent pas vraiment le prendre en considération.

1.2Dans un de calcul d'aire

Le manuel *Delta* de la collection Magnard propose d'approcher la multiplication de deux décimaux par un problème de calcul d'aire : il demande aux élèves de reproduire un rectangle donné sur du papier millimétré, de déterminer son aire en dénombrant les mm², d'effectuer la conversion en cm², avant de questionner le calcul qu'on aurait pu effectuer pour déterminer directement l'aire en cm².

Dans ce contexte de produit de mesures, l'aire est calculée en effectuant un produit de deux nombres dans lequel les deux facteurs ont le même statut. Il n'y a apparemment pas de rupture de signification au passage des entiers au décimaux… On doit cependant remarquer que, dans cette configuration rectangulaire (fig. 5), la multiplication est d'abord présentée à partir d'une organisation qui regroupe les unités d'aire, les dixièmes d'unité d'aire puis les centièmes d'unité d'aire, … en des nombres entiers de lignes et de colonnes, pour les dénombrer ensuite facilement par addition réitérée. C'est à cette première signification qu'il est fait appel pour construire l'opération. Le passage d'une organisation de nombres entiers à des nombres décimaux de lignes ou colonnes, qui pourrait lui en conférer une autre, n'est pas explicitement évoqué dans le manuel.

2 Présentation d'une technique posée de la multiplication des décimaux

Les manuels étudiés proposent tous d'effectuer la multiplication à la manière de celle des entiers, sans tenir compte dans un premier temps des virgules, et de les considérer dans un deuxième temps pour effectuer le placement de la virgule. Selon les collections, ce placement découle soit de l'application d'une règle, soit d'un raisonnement mené sur les ordres de grandeur, soit éventuellement des deux.

2.1Une règle donnée sans justification explicite.

C'est par exemple le cas du manuel **Delta mathématiques** (Belin 2016) qui présente, sous l'intitulé « J'apprends à », la multiplication posée en colonnes de 2,78 par 6,4 et indique dans des bulles : « 1°) on multiplie sans tenir compte, des virgules ; 2°) on place la virgule dans le résultat. Attention ! Il faut additionner les nombres de chiffres après la virgule de chaque facteur. »

Il est à noter que, juste au-dessus, sous le même intitulé, une multiplication posée de deux entiers, 83 × 64, est également affichée, avec des indications données dans des bulles qui explicitent les calculs effectués à chaque ligne, en faisant référence à la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture du nombre : « On multiplie 83 par les unités, 4 × 3 = 12, on pose 2 unités et on retient 1 dizaine.4 × 8 = 32, plus 1 de retenue, donc 33 dizaines … ». Ce type d'explication n'est pas repris dans la présentation de la multiplication de deux décimaux.

[121]Ressource d'accompagnement des programmes « Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3 »

2.2Une règle donnée avec des éléments de justification

Deux propositions de ce type apparaissent dans les manuels :

- Dans la collection *Phare* (Hachette 2016), un produit de deux entiers donné (856 × 273) est décomposé en un produit de deux produits de deux décimaux par une puissance de 10 d'exposant positif ((8,56 × 100) × (27,3 × 10)). Il devient ensuite (par associativité) un produit d'un produit deux décimaux par une seule puissance de 10 (8,56 × 27,3 × 1000). « Ainsi le résultat de 856 × 273 est 1000 fois plus grand que le résultat de 8,56 × 27,3 ... »
- La collection *Kwyk Maths* (Hachette éducation, 2016) propose, au contraire, de partir d'un produit de deux décimaux non entiers (4,2 × 4,3), de le décomposer en un produit de deux entiers par une puissance de dix d'exposant négatif ((42 × 0,1) × (43 × 0,1). Il devient ensuite (par associativité) un produit d'un produit de deux entiers par une seule puissance de 10 (42 × 43 × 0,01). Il s'agit ensuite, sachant que 42 × 43 = 546, d'en déduire le résultat de 4,2 × 4,3.

Outre le caractère abstrait de ces raisonnements déductifs, qui portent sur des nombres et des propriétés d'opérations pas toujours encore bien maitrisés par la plupart des élèves de sixième, on peut remarquer que ces justifications occultent les nombres inscrits sur les lignes intermédiaires dans les multiplications posées. Quelle est alors leur utilité ? Leur signification ?

2.3 Un raisonnement prenant appui sur les ordres de grandeur

C'est le choix fait par le manuel *Transmath* (Nathan 2016) pour présenter une technique de multiplication de deux nombres décimaux. Il donne, dans une bulle qui jouxte la présentation du calcul posé de la multiplication de 476 par 305, un « conseil » pour effectuer la multiplication de 4,76 × 30,5 : « On commence par calculer un ordre de grandeur de produit. On effectue la multiplication sans tenir compte des virgules. [….] On sait que le résultat doit être proche de 150, on peut donc placer correctement la virgule : le produit vaut le 145,18. »

Cette méthode est reprise dans d'autres manuels, où elle est souvent présentée comme un moyen de contrôle du résultat.

Elle peut effectivement permettre à l'élève de placer correctement la virgule dans l'écriture du résultat, à condition toutefois que l'ordre de grandeur du produit ne soit pas trop difficile à déterminer[122]. Toutefois il semble difficile de l'ériger en tant que technique mathématique, dans le sens où les justifications théoriques s'appuyant sur les propriétés des inégalités qui permettraient de l'étayer paraissent difficilement accessibles à un élève de fin de cycle 3. On peut également remarquer que comme dans les autres présentations, le raisonnement sur les ordres de grandeur occulte la signification des nombres inscrits sur les lignes intermédiaires dans les multiplications posées.

L'étude de ces manuels tend à démontrer que la rupture de signification de la multiplication qu'engendre le passage des entiers aux nombres décimaux est généralement cachée par une présentation de la multiplication des décimaux dans des problèmes où elle prolonge celle des entiers. Ces manuels semblent tenter de convaincre les élèves qu'il y a continuité des règles et du sens tout en proposant de nouvelles règles pour trouver le résultat d'une multiplication posée de deux décimaux non entiers. De plus, leurs justifications, quand elles sont données, s'appuient sur d'autres propriétés que celles, faisant référence à la valeur positionnelles des chiffres, utilisées pour expliquer le produit final et les produits partiels qui apparaissent dans la multiplication posée de deux entiers.

On peut alors se demander à quelles autres propositions d'enseignement le professeur pourrait se référer pour construire son enseignement de la multiplication de deux décimaux.

Dans sa thèse (2001), E.Roditi reprend, en en montrant les limites, trois autres propositions de situations dans laquelle la multiplication des décimaux apparait comme un outil pour résoudre un problème : celle

[122]Il n'est pas toujours facile pour une élève de déterminer l'ordre de grandeur d'un produit, en particulier quand l'un ou l'autre des facteurs est plus petit que 1. Par exemple dans le calcul de 0,35 par 12,4

de G. Brousseau dans un contexte de l'agrandissement de figure ; celle de Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin dans un contexte de calcul d'aire de rectangle ; celle de Milena Basso et Cinzia Bonotto, dans un contexte de calcul de prix.

De son côté, le groupe *É cole-Collège* de l'IREM de Lyon (2018) propose un ensemble de situations, couvrant différents contextes, dans lesquelles la multiplication par une fraction puis par un décimal apparaît nécessaire pour résoudre et illustrer des problèmes. Dans ces propositions, la technique de la multiplication posée de deux décimaux s'inscrit dans la continuité de celle des entiers.

V LES PROPOSITIONS DE SITUATIONS DE L'IREM DE LYON

Dans cette partie, nous décrirons succinctement plusieurs situations pour la classe[123] tirées de l'ouvrage *Construire les nouveaux nombres au cycle 3 : fractions et décimaux* qui ont été (trop rapidement) présentées en fin d'atelier.

Le groupe *École-Collège* de l'IREM, auteur de l'ouvrage, a cherché en élaborant ces activités :

- à prendre en compte à la fois les ruptures et les continuités engendrées au passage de la multiplication par un entier à la multiplication par un décimal (ou une fraction),

- à construire les nouvelles significations de l'opération en s'appuyant sur la manipulation d'artefacts, permettant de construire l'opération symbolique à partir d'opérations réalisées d'abord physiquement,

- à construire et justifier les techniques opératoires en se référant à ces opérations physiques,

- à présenter l'opération multiplication dans différents contextes où elle prend sens en tant qu'outil pour résoudre un problème.

Pour ce faire, la brochure propose une progression en trois temps :

- étude de la multiplication d'un décimal par un entier ;
- étude de la multiplication d'un entier par une fraction ;
- étude de la multiplication d'un décimal par une fraction ou un décimal dans des contextes différents où elle montre son utilité.

1. Multiplication d'un décimal par un entier : « Des rectangles à foison »

Les techniques opératoires sur les nombres en écriture décimale sont en grande partie similaires à celles mises en œuvre sur les entiers. Cette situation propose de fonder ou de redécouvrir les techniques dans le cas de la multiplication d'un décimal par un entier, puis par 10, 100 ou 1000, en référence à la signification des écritures, à partir de manipulations sur des axes gradués ou sur des surfaces.

Les techniques opératoires présentées le sont en prenant appui sur un matériel multi-base similaire à celui utilisé pour les entiers. Dans la situation « des rectangles à foison », ces illustrations visent à installer l'idée que les écritures décimales des nombres entiers ou décimaux relèvent d'un même système décimal de numération et que les relations installées entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) peuvent être prolongées aux décimaux (dixièmes, centièmes…)

2. Vers la fraction quotient : « Les Bonbons rubans »

La situation a pour but d'enrichir la notion de fraction avant de l'envisager en tant que quotient de deux entiers. Elle amène à la découvrir, dans un contexte de longueur, en tant que valeur d'une part dans un partage de plusieurs unités, puis de nombre, coefficient scalaire, par lequel on peut multiplier une longueur pour en obtenir une autre.

[123]Voir en annexe pour avoir une idée des situations ; celles-ci sont décrites bien plus précisément dans l'ouvrage.

3. Enrichir la multiplication

Ces situations visent à donner un nouveau sens à la multiplication autre que celui de l'addition réitérée. Elles sont proposées dans des contextes de grandeurs différentes et sont conçues pour la fin du cycle.

i. Multiplication et longueur

Cette situation amène les élèves à calculer des fractions de longueurs pour construire des segments. Elle vise à mettre en lien la notion de fraction opérateur, coefficient scalaire permettant de passer d'une fraction à une autre, avec l'opération multiplication et le symbole « × », puis à l'étendre au cas des fractions décimales. C'est l'occasion de comprendre comment des expressions différentes telles que : « prendre une fraction d'un nombre », « prendre une fraction de fois un nombre », « multiplier un nombre par une fraction » ou « calculer une fraction fois un nombre », renvoient à en seule et même opération mathématique symbolisée par le signe « × ».

ii. Multiplication et proportionnalité

Après avoir défini ou revu, dans un contexte de proportionnalité, la multiplication d'un décimal par une fraction, on présente le cas particulier du produit d'un décimal par une fraction décimale, autrement dit de deux décimaux. On se demande ensuite comment poser la multiplication pour effectuer de tels produits en écriture décimale.

iii. Multiplication et aire

Il s'agit d'étendre la formule de calcul de l'aire d'un rectangle au cas des dimensions décimales et de donner ainsi un autre sens à la multiplication de deux décimaux.

VI CONCLUSION

La communauté de formateurs qui constituait l'assemblée de l'atelier a tenté de cerner la place de la manipulation dans les apprentissages et de déterminer des supports susceptibles d'aider les élèves à comprendre les significations de la multiplication par un décimal.

Un travail autour de dispositifs d'enseignement susceptibles de donner du sens à cette opération a conduit le groupe à distinguer des contextes pour lesquels ont émergé des points de ruptures vis-à-vis de ce qui a pu être construit avec des entiers. La multiplication peut prendre des sens différents selon les problèmes ou situations dans lesquels elle est mobilisée. Elle peut prendre tour à tour un sens d'écriture simplifiée d'une addition itérée dans le cas d'un calcul d'une grandeur par un scalaire entier mais également le statut d'opération privilégié dans le calcul du cardinal d'un produit cartésien ou encore l'aspect « rectangulaire », celle résultant de la multiplication de deux grandeurs. Ces situations, qui ne sont pas sans influence sur la construction du concept (Vergnaud, 1991), nécessitent d'être réinterrogés au passage de l'entier au décimal. Ainsi, si nous savons tous que la multiplication est une opération commutative d'un point de vue purement mathématique, il n'est pas si évident que cette propriété soit facilement perceptible voire effective dans le cas de la multiplication d'un entier par un décimal non entier. Un élève qui associe cette opération à une addition itérée aura plus d'aisance à calculer le produit de 3 fois 4,2 que celui de 4,2 fois 3.

Ces premières variations sur le sens se répercutent sur les procédures mises en place pour calculer le produit de deux nombres mais également sur la disponibilité ou non de certaines propriétés en fonction de la signification que l'on peut donner aux facteurs traités.

Ces effets sur la représentation de cette opération ne facilitent donc pas la tâche de l'enseignant pour donner du sens aux différentes étapes de la multiplication posée. Par rapport au sens de la technique

opératoire dans le cas d'un entier par un décimal non-entier pour lequel il peut encore s'appuyer sur les connaissances acquises par les élèves sur la technique opératoire entre deux entiers, dans le contexte du produit résultant de la multiplication de deux décimaux non-entiers, l'enseignant se trouve confronté à devoir donner du sens au placement de la virgule ou plutôt à la multiplication de fractions décimales. Cet aspect de la multiplication n'est pas si évident à signifier. Les participants ont fait des propositions qui ne sont pas dénuées de tout intérêt mais qui se confrontent et butent malgré tout à ce nœud de sens. Aucune de leurs propositions matérielles, de leurs modélisations, ni même de leurs présentations n'a pu lever totalement l'obstacle vers une illustration ou une justification de la technique accessible à un élève de début de collège.

Face à la difficulté d'assurer une continuité de la technique apprise avec deux entiers, les auteurs de manuels de 6ème que nous avons présentés proposent des alternatives afin de permettre aux élèves de placer la virgule dans le produit. De la technique par dénombrement des chiffres « à droite » de la virgule dans chaque facteur à la division par une puissance de 10 du produit en passant par un raisonnement basé sur l'ordre de grandeur du produit estimé à partir de l'arrondi des facteurs au nombre entier le plus proche, les choix pédagogiques ne montrent pas clairement comment la technique, en s'appuyant sur les propriétés de la numération décimale, s'inscrit dans un prolongement de celle mise en œuvre pour les entiers. Dans leur approche, les manuels ne donnent pas tous la même importance au sens à donner à cette opération et ne semblent pas prendre en compte les ruptures engendrées par le passage aux nombres non entiers.

L'ouvrage de l'IREM de Lyon sur la construction des nouveaux nombres au cycle 3 propose, dans différents contextes influençant la construction du concept, des situations qui tentent de prendre en compte les continuités et les ruptures dans le passage de la multiplication de deux nombres entiers à celle entre deux nombres décimaux non-entiers. Le collectif d'auteurs a notamment fait le choix d'enrichir les significations attribuées à cette opération en travaillant le lien entre « prendre une fraction d'une quantité » et « multiplier par un nombre en écriture fractionnaire ou décimale » et d'appuyer la construction de techniques opératoires sur cette définition.

Finalement, à l'issue de cet atelier nous avons pu mettre en évidence que les artefacts, s'ils paraissent incontournables pour mettre du sens sur le concept de la multiplication tant du point de vue de la représentation que du point de vue de la théorie mathématique, ont du mal à être inventés dans le cas de la multiplication de deux décimaux non-entiers en fin de cycle 3. Dans notre cas l'accès à la compréhension du sens par la manipulation nécessite de construire l'équivalence entre la multiplication (2 dixièmes multipliés par 3 dixièmes) et la fraction d'un nombre (3 dixièmes de 2 dixièmes).

Plus généralement, cet atelier a montré qu'une utilisation pédagogique d'artefacts en classe nécessite, pour être porteuse de sens, d'avoir fait l'objet d'une attention didactique parfois pointue. Inversement les questions posées par l'éventuelle utilisation d'artefacts dans la construction de connaissances ont été source d'une riche réflexion didactique. La question de l'utilisation d'artefacts en classe offre donc une intéressante entrée pour la formation.

BIBLIOGRAPHIE

Livres et articles :

Anselmo B. (dir.) et Zucchetta H. (dir.)(2018). *Construire les nouveaux nombres au cycle 3 : fractions et décimaux. Lyon :* CANOPé.

Anselmo B. et al (1999). *La sixième entre fractions et décimaux. Lyon :* IREM de Lyon

Bolon J. (1992). L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire, *Grand N*,52, 49-79.

Bolon J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège.* (Thèse de doctorat, Université Paris 5).
Brousseau G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1(1), 11-59.
Brousseau G. (1981).Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 2(1), 37-127.
Brousseau G. et Brousseau N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* (thèse de doctorat, IREM Bordeau). En ligne :https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/file/Rationnels_et_dA_cimaux_1987.pdf
Chesné J-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. (thèse de doctorat, Université Paris Diderot - Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) Paris). En ligne : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01081505/
Clivaz S. et Deruaz M. (2013). Des mathématiques à leur enseignement,l'algorithme de la multiplication.*GrandN*, 92, 15-23. En ligne :http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/revue_n/fic/92/92n2.pdf
Grisvard C. et Léonard F. (1981). Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. *Bulletin vert*, 327. APMEP.
Grisvard C. et Léonard F. (1983). Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux. *Bulletin vert*, 340. APMEP.
Perrin-Glorian, M.-J.(1986). Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège. *Petit x*, 10, 5-29.
Roditi E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième étude de pratiques ordinaires* (thèse de doctorat, université Denis Diderot, Paris 7). En ligne : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00364726/file/2001_Roditi_these.pdf
Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique.* Paris : L'Harmattan,
Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*,12, 55-81
Vergnaud, G. (1994). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple*Grand N*.56, 55-66.

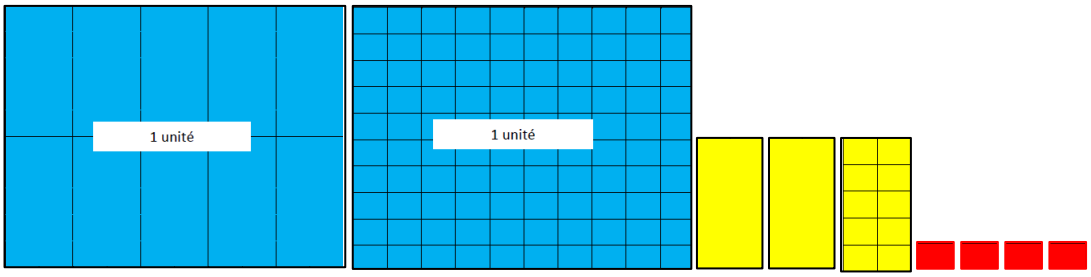
Références institutionnelles

- Programme pour le cycle 3, « Cycle 3. Mathématiques », *Bulletin officiel* spécial n° 11 du 26 novembre 2015
consultable sur eduscol.education.fr http://eduscol.education.fr/pid23199/ecole-elementaire-et-college.html
- *Le nombre au cycle 3. Apprentissages numériques*, coll. « Ressources pour faire la classe », Chasseneuil-du-Poitou, Scérén/CNDP-CRDP, 2012.
Document Ressources programmes 2015 :
- *Fractions et nombres décimaux au cycle 3*
consultables sur eduscol.education.fr http://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html
- *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3* :
consultable sur eduscol.education.frhttp://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html
- *Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes: les nombres décimaux* :
consultable sur eduscol.education.fr http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle-4.html
- Ressource pour le collège (2007 et repris en 2016) : *Le calcul numérique au collège* (p.16&17) http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/1/doc_acc_clg_calcul_numerique_109171.pdf

DES RECTANGLES À FOISON [124]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves manipulent des rectangles unités concrètement ou mentalement, pour déterminer l'aire d'une surface obtenue en les dupliquant un certain nombre de fois.

MATERIEL : Pour l'enseignant

- Des « rectangles », comme ceux-ci-dessous projetés au tableau
- 

- Ces mêmes rectangles en grand modèle découpés (ou représentés sur TBI pour pouvoir être dupliqués) qui pourront être manipulés et échangés lors des mises en commun (au moins 23 bleus, 40 jaunes, et 10 rouges)
- Un tableau de numération « dynamique » dans lequel on peut faire coulisser (et grouper) des étiquettes chiffres, comme dans le tableau ci-dessous.

0	0	0	0	0	0	2	3	4	0	0
millions	cent mille	dix mille	Mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	dix millièmes

CONSIGNES

1) Déterminer la mesure en unités *u* de l'aire totale de la surface obtenue en prenant 10 fois chacune des surfaces colorées en bleu, jaune et rouge.
2) Déterminer la mesure en unités *u* de l'aire totale de la surface obtenue en prenant 100 fois chacune des surfaces colorées en bleu, jaune et rouge.

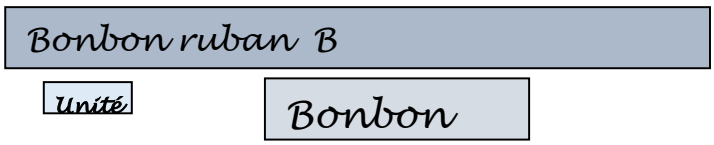
[124] Adapté de« Construire les nouveaux nombres au cycle 3»- Canopé

LES BONBONS RUBANS [125]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves disposent de deux « bonbons » rubans : un ruban A qui mesure 3 unités, un ruban B qui en mesure 8. Ils doivent trouver combien de fois la longueur du ruban A est contenue dans celle du ruban B.



MATÉRIEL :



Pour le professeur :

- une bande unité ;
- quelques exemplaires du ruban A de longueur 3 unités et du ruban B de longueur 8 unités.

Pour chaque élève :

- des bandes longues comme le ruban A ;
- une feuille A4 sur laquelle construire le ruban B.

CONSIGNES

1) Le ruban A mesure 3 unités, le ruban B mesure 8 unités A votre avis, le ruban B est long comme combien de fois le ruban A ?
2) Comment construire un segment de longueur 8 unités à partir du ruban A sans utiliser de règle graduée ?
3) Avez-vous changé d'avis ?

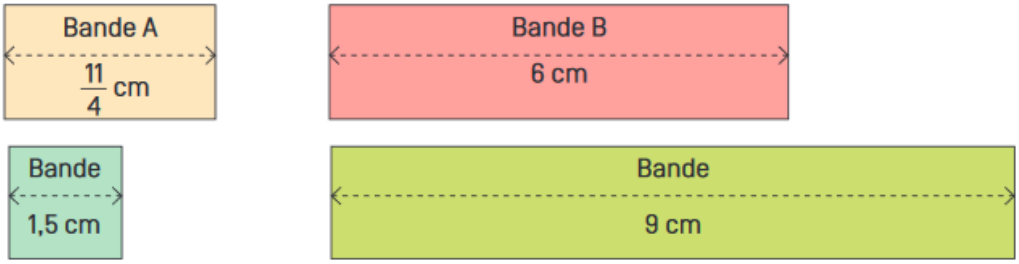
[125] Adapté de « Construire les nouveaux nombres au cycle 3» - Canopé

QUEL EST LE PLUS LONG ?[126]

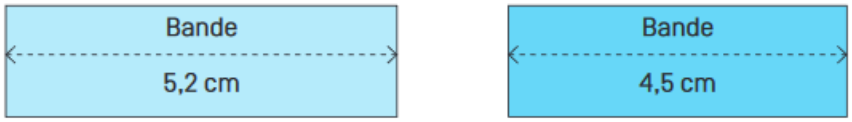
DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves doivent déterminer les mesures de segments longs comme un nombre de fois des bandes de longueurs données. La classe institutionnalise le fait que prendre un nombre de fois une fraction d'une unité revient à prendre la même fraction du nombre donné d'unités et que cela conduit à une multiplication (il existe différentes façons de conduire ce calcul qui amènent toutes à un même résultat). Ensuite, les élèves doivent choisir, parmi des bandes, celle qu'ils préfèrent utiliser pour construire des segments dont les longueurs sont données sous la forme du produit d'un entier puis d'un décimal.

C'est une nouvelle signification de la multiplication qui associe le signe × à l'opération « prendre une fraction d'une quantité » qui est à construire.

MATERIELS : la règle graduée et la calculatrice sont interdites.
Des bandes de différentes longueurs pour répondre aux différentes consignes de comparaison ou de construction.



Utilise la bande de ton choix pour construire un segment de longueur 9 × 1,5 cm.



Utilise la bande de ton choix pour construire un segment de longueur 5,2 × 4,5 cm, sur une feuille A4.

Pour chaque élève :

- Des bandes A de longueur 2,75 cm et des bandes B de longueur 6 cm, puis de longueurs 1,5cm ; 9cm ; 5,2cm et 4,5cm.
- Un guide-âne, des ciseaux et colle

CONSIGNES

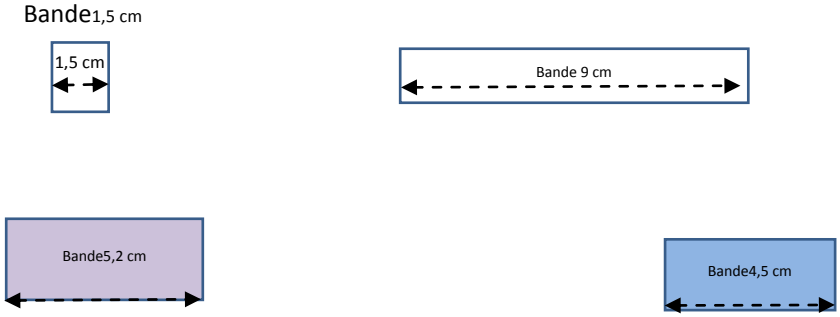
1) Qui a construit le segment le plus long ? Combien mesure-t-il ?
   Ali a construit un segment long comme 6 fois la bande A, Bérangère a construit un segment long comme $\frac{11}{4}$ fois la bande B, Clara a construit un segment dont la longueur est 2,75cm multipliés par 6.
2) Utilise la bande de ton choix pour construire un segment de longueur 9 × 1,5 cm. Quelle est sa longueur ? Comment as-tu fait pour construire le segment ? Comment as-tu fait pour calculer sa longueur ?
3) Utilise la bande de ton choix pour construire un segment de longueur 5,2 × 4,5 cm. Explique comment tu fais ;trouve différentes façons de calculer sa longueur.

[126] Adapté de « Construire les nouveaux nombres du Cm1 à la sixième» -Canopé

LA BONNE BANDE[127]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves doivent construire, à l'aide de bandes qui leur sont fournies, des segmentsde longueurs données en cm sous la forme du produit d'un nombre entier par un décimal, puis d'un décimal par un décimal. La règle graduée est interdite.

MATERIEL :



Pour chaque élève :

- deux bandes respectivement de longueurs 1,5 cm et 9 cm,
- dans un deuxième temps, une bande de longueur 5,2cm ou une bande de 4,5cm ;
- une feuille A4 sur laquelle construire lessegments.

Pour le professeur :

- des bandes en réserve ;
- des bandes agrandies pour illustrer les manipulations au tableau ;
- éventuellement, si les élèves ont déjà appris à s'en servir, quelques guide-ânes à réseau suffisamment serré pour pouvoir effectuer les partages des bandes en dix.

CONSIGNES

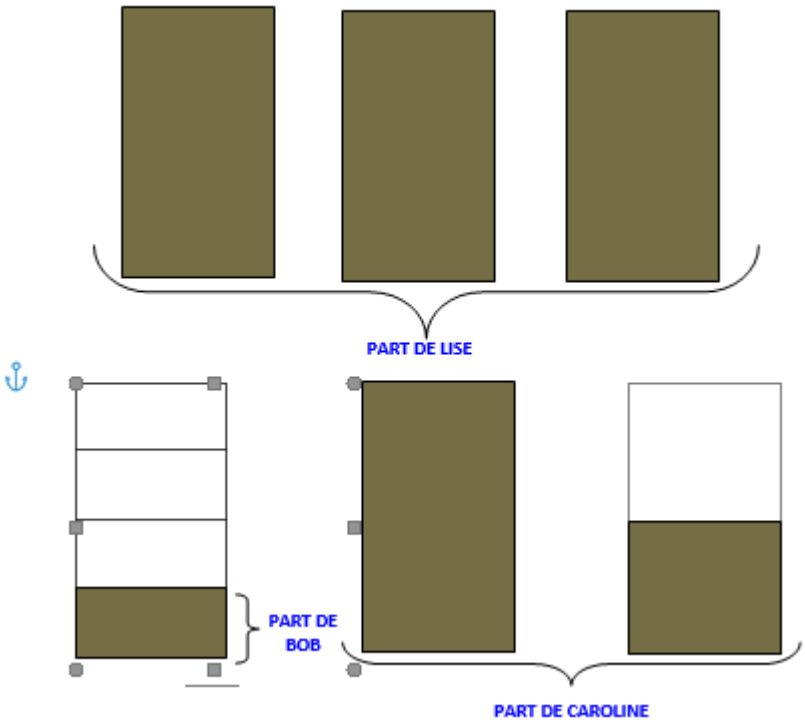
1) Sans te servir d'une règle graduée, construis un segment de longueur «9 × 1,5 cm », en utilisant la bande qui te convient le mieux.
2) Sans te servir d'une règle graduée, construis un segment de longueur «5,2 × 4,5 cm », en utilisant la bande qui te convient le mieux.
3) Sans te servir d'une règle graduée, explique comment faire pour construire un segment de longueur «5,2 × 4,5 cm », en utilisant uniquement la bande qui mesure 4,5 cm.

[127] Adapté de « Construire les nouveaux nombres du Cm1 à la sixième» -Canopé

MULTIPLICATION ET PROPORTIONNALITÉ[128]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves disposent de rectangles tous identiques, figurant des tablettes de chocolat. Ils recherchent la masse de différentes parts, exprimées sous forme fractionnaire ou décimale.On établit, en s'appuyant sur le dessin, comment multiplier un nombre décimal par une fraction (prendre une fraction d'un nombre décimal), ce qui permet de faire apparaître la multiplication par un nombre décimal comme économique. On justifiera aussi le placement de la virgule dans l'écriture.

MATERIEL : des rectangles représentant des tablettes de chocolat.



Des enfants ont pris des tablettes de chocolat qui pèsent 2,52 hg chacune. Lise a pris 3 tablettes ; Bob a pris $\frac{1}{4}$ de tablette, et Caroline a pris une tablette et demie.
Calcule combien pèse la part de chacun.

Tablette à découper
Masse nette :
2,52 hg

Pour chaque élève :

- Un certain nombre de tablettes à découper pour représenter la part prise par chaque enfant.
- Un guide-âne

CONSIGNES

1) Denis a pris 4/7 de tablette et Emilie 0,7 tablette. Dessinez leur part, collez-la sur le cahier ; indiquez combien pèse la part de chacun ; indiquez comment vous avez fait.
2) Farid a pris 2,36 tablettes. Dessinez sa part. Calculez combien pèse sa part ; indiquez comment vous faites. Trouvez 2 méthodes au moins.
3) Vous savez poser des multiplications avec des nombres entiers. Comment poseriez-vous et effectueriez-vous la multiplication suivante sans utiliser la calculatrice : 5,36 × 1,4 ?

[128]Adapté de « Construire les nouveaux nombres du Cm1 à la sixième » -Canopé

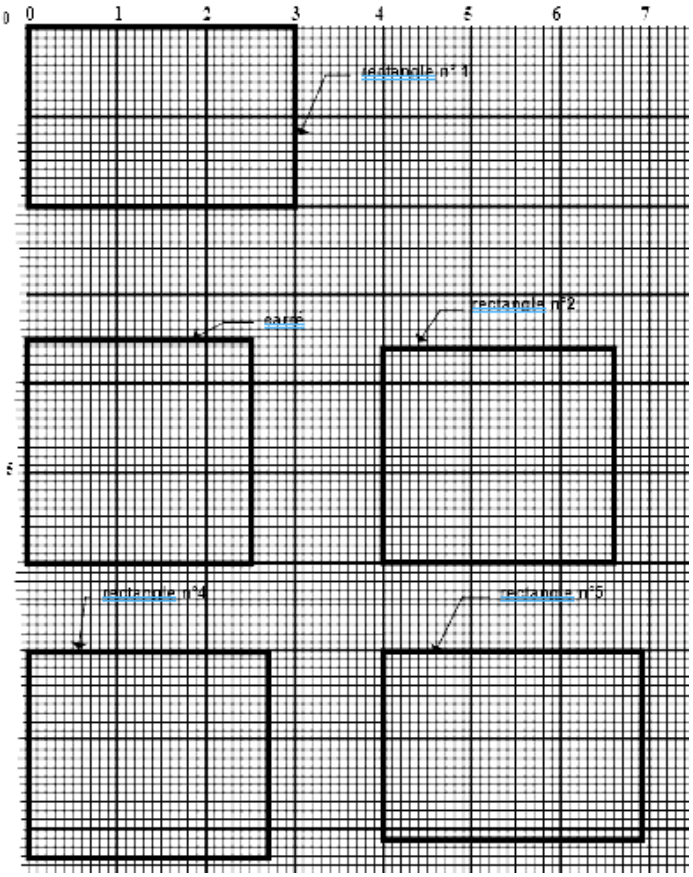
MULTIPLICATION ET AIRE[129]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves doivent construire, sur papier millimétré, une série de rectangles de périmètre donné. Les différentes propositions sont recensées et validées, ensuite les élèves doivent déterminer l'aire de 5 des rectangles tracés dont nécessairement l'aire de rectangles dont les dimensions sont non entières.

La multiplication par un nombre décimal acquiert,ainsi, une signification dans des problèmes de produits de mesures où l'on cherche à déterminer la mesure d'une grandeur produit d'autres grandeurs.

MATERIEL : cinq figures sur papier millimétré dont le périmètre est 10 cm :

- rectangle n°1 : de 3 cm par 2 cm
- un carré de 2,5 cm de côté
- rectangle n°2 : de 2,4 cm par 2,6 cm
- rectangle n°3 : de 2,3 cm par 2,7 cm
- rectangle n°4 : de 2,9 cm par 2,1 cm



Pour chaque élève :

- feuille de papier millimétré sur laquelle il a tracé les 5 rectangles

CONSIGNES

1) Par groupe de deux, vous devez sur une feuille de papier millimétré dessiner six rectangles dont le périmètre est 10 cm. Vous pouvez vous aider des lignes du quadrillage. Tous les rectangles doivent être différents (donc non superposables).
2) Déterminer l'aire de chaque figure en cm^2 (la calculatrice n'est pas autorisée). Les classer par aire de la plus petite à la plus grande.

[129] Adapté de « Construire les nouveaux nombres du Cm1 à la sixième » -Canopé

ATELIER A29

MANIPULER EN MATERNELLE : POUR QUOI FAIRE ?

DE L'ANALYSE DE RESSOURCES AUX PRATIQUES DES ENSEIGNANTS : PLACE ET FONCTIONS DE LA MANIPULATION EN CYCLE 1

Cécile Allard
Espe de Créteil
UPEC, UCP, U.Artois, P7, U. Rouen, LDAR
cecile.allard@u-pec.fr

Pascale Masselot
Espe de Versailles
UCP, UPEC, U.Artois, P7, U. Rouen, LDAR
pascale.masselot@u-cergy.fr

Résumé :

Nous proposons un atelier sur l'étude, sous un certain angle, de quelques ressources à destination des professeurs des écoles enseignant en cycle 1 et sur l'analyse de leur usage. Nous amenons les participants à interroger la place et le rôle attribués à la manipulation dans l'activité mathématique au cycle 1 : aide à la conceptualisation, à la représentation, à la validation, à la verbalisation et frein possible à la décontextualisation et à la montée en généralité. En nous appuyant sur des modalités de formation développées dans Butlen et al. (2017), nous montrerons en quoi organiser l'étude de telles ressources en formation constitue une entrée pour, en particulier, aider à comprendre les spécificités de la manipulation dans l'activité mathématique.

I - INTRODUCTION

Cet atelier s'inscrit d'une part, dans des préoccupations sur les usages des ressources et d'autre part, dans des préoccupations sur la formation des professeurs des écoles (formation initiale et formation continue).

1 Usage des ressources : dans la continuité des ateliers précédents

Cet atelier s'inscrit dans la suite des ateliers « De la ressource à la séance de classe », (Allard & Ginouillac, 2014) et « De la ressource à la séance de classe : institutionnaliser la tâche impossible » (Allard & Masselot, 2016). En 2014, nous avons interrogé le contenu des guides du maître dans le cas de la mise en œuvre d'une situation de proportionnalité. Nous y avions pointé des « points aveugles » liés à l'utilisation du matériel pendant la séance de classe. Nous appelons « points aveugles » des points qui ne sont pas pris en charge par la ressource. Ces points sont de différentes natures : absence de textes du savoir, indications floues comme « le maître relancera alors la discussion » sans préciser sur quel objet, ni ce qu'il est possible de formuler à la suite de celle-ci. En 2016, à partir de la comparaison de mises en œuvre d'une même situation par des maitres formateurs, situation traitant du passage des fractions décimales aux écritures décimales, nous avions identifié des « points aveugles » comme des absences de textes de savoirs ou intermédiaires mais aussi d'indications précises et opérationnelles sur la gestion de certaines phases et du matériel (les bandes unités, dans ce cas particulier). Les enseignantes étudiées avaient repéré l'importance de l'instrumentation (Rabardel, 1995) de la bande et du sens à donner au report, instrumentation qui semblait « naturelle » pour les auteurs.

Dans les deux situations (proportionnalité et fractions décimales), ce qui semblait plaire, aux professeurs des écoles et aux formateurs, était en lien avec la « manipulation ». Nous commencions à penser que ce terme n'avait pas, pour eux, la même signification.

2 Inscription dans une réflexion sur les dispositifs de formation

En termes de formation, cet atelier s'inscrit dans une démarche d'élucidation des enjeux de formation et de recherche de modalités ciblant le niveau des routines professionnelles (Allard, Butlen, Masselot, 2018 ; Butlen, Mangiante-Orsola, Masselot, 2017).

Nous retenons de nos travaux autour de l'accompagnement des professeurs débutants nommés en ZEP (Charles-Pézard, Butlen, Masselot, 2012) la nécessité de prendre en compte à la fois l'amélioration des apprentissages des élèves et le confort de l'enseignant, ainsi que les besoins du public, quant à la forme et aux choix des contenus de travail privilégiés. Le dispositif d'accompagnement dont les effets ont été analysés se construit autour de plusieurs dialectiques dont deux notamment nous semblent incontournables. La première consiste à installer une alternance entre apports d'informations, élaboration de supports pour les enseignements (tests et activités possibles), témoignages de mise en œuvre, analyse de productions d'élèves et élaboration de pistes pour dépasser certaines difficultés repérées. La seconde dialectique porte sur les liens entre besoins ressentis par les enseignants et besoins identifiés par les chercheurs.

Cela renvoie à une manière de penser les problèmes d'une profession :
- Il existe des problèmes et il existe des experts (enseignants) de la profession et des chercheurs. Dans certains cas, les experts de la profession ne peuvent seuls trouver des solutions aux problèmes.
- Résoudre ces problèmes de la profession nécessite une reformulation de ceux-ci par les chercheurs en problèmes pour la recherche.

Nous pouvons illustrer ainsi ce dernier point :

Pour cet atelier, nous considérons que la manipulation et son rôle dans l'apprentissage est une question que se posent les enseignants. La manipulation serait un moyen de « donner du sens aux situations », serait une aide précieuse pour « trouver une bonne réponse » à un problème donné, ce serait aussi un moyen pour « motiver, enrôler les élèves » et finalement, ce serait une bonne réponse à la question du sens des mathématiques. C'est sur ce dernier point que nous souhaitons agir, les mathématiques n'ont pas de sens grâce à la manipulation, la manipulation n'est pas toujours un moyen de donner du sens aux mathématiques. En effet, si un élève de CP continue au jeu du type « Greli Grelo » à dénombrer les jetons en « recomptant le tout » (par exemple pour 7 jetons dans la main droite et 10 jetons dans la main gauche), cet élève continue de s'appuyer sur une procédure de bas niveau qui n'est plus attendue d'un élève de CP. Il est raisonnable de penser que le problème n'est pas lié à la représentation du jeu mais plutôt à une difficulté de l'élève à accepter d'envisager une nouvelle procédure. D'autres activités, régulièrement proposées, comme modeler avec de la pâte à modeler les chiffres, ne contribuent pas à donner du sens aux écritures chiffrées des nombres, ici la manipulation n'est pas au service des mathématiques.

Pour autant, nous partageons leurs interrogations sur la place et les fonctions de la manipulation en les reformulant un peu différemment. Les questions auxquelles nous cherchons à répondre sont les suivantes : en mathématiques, avec quelles intentions propose-t-on des activités s'appuyant sur du matériel ? Est-ce pour se représenter la situation ? Un moyen d'élaborer une stratégie gagnante ? Ou une aide lors de la validation ? Autrement dit, la manipulation amorce-t-elle la dévolution du problème ? À quel moment doit-on s'en passer afin de favoriser l'utilisation des nombres comme outil pour prévoir le résultat d'une action sur du matériel et le recours à des traces graphiques (en GS) ? Les ressources disponibles apportent-elles des réponses à ces questions autour de la manipulation, de son statut et de son rôle à travers les situations et analyses proposées par les auteurs ?

II - MANIPULER : RECOMMANDATIONS INSTITUTIONNELLES ET EXEMPLES

Dans l'introduction, nous avons évoqué trois grandes fonctions possibles de la manipulation en mathématiques en cycle 1. La manipulation serait une aide à la représentation de l'activité en jeu et de ses enjeux, le matériel favoriserait les procédures par tâtonnement (essai/erreurs) et serait une aide pour valider une réponse. Avant de développer ces points, un bref retour étymologique nous permet de préciser le terme « manipulation » tout d'abord dans son usage courant puis dans celui plus spécifique dans l'enseignement des mathématiques.

Par rapport au sens à donner aux termes « manipuler » et « manipulation », si l'on se réfère à l'étymologie du mot « manipuler » et à sa première apparition dans un dictionnaire (http://www.cnrtl.fr/definition/manipuler), nous trouvons que ce mot est connu depuis le 11e siècle dans le contexte particulier des travaux de laboratoire. Il est à rapprocher de ce que nous nommons « expérimentation » et est constitutif des sciences expérimentales. Depuis le 18e siècle, « manipuler » se rapporte à tout ce qui est peut-être touché, tenu ou transporté avec les mains ou bien encore utilisé avec les mains. Il y a déjà dans cette définition une nuance à saisir, il est possible de manipuler un objet fragile pour le déplacer et ce n'est pas analogue à manipuler un outil avec une intention, par exemple l'intention de s'en servir.

Le sens donné à ce terme dans l'activité mathématique va dépasser la définition du dictionnaire et des usages courants (hors enseignement). Que signifie « manipuler » à l'école ? Ce mot est utilisé aussi bien dans les champs de la maitrise de la langue (« manipuler des sons »), qu'en arts ou encore en sciences.

Pour les mathématiques de l'école, ces définitions ne sont pas suffisantes. Une définition pertinente en ce qui concerne l'enseignement est plus large que celle des dictionnaires ou des usages courants.

1 Ce que disent les BO et les rapports IGEN[130] sur la maternelle à propos des manipulations

Depuis 1886, des instructions sont données aux enseignantes[131] de maternelle pour cibler ce qui doit être fait en classe ou avec les élèves. Nous y avons cherché plus spécifiquement la place de la manipulation et des mathématiques. L'apparition des mathématiques date du deuxième programme (1908). Il y était préconisé dès la petite section des groupements d'objets semblables jusqu'à 10 puis en grande section d'effectuer des groupements de 20 à 50 objets.

Les activités non intellectuelles étaient préconisées au profit d'activités manuelles (tissage, exercice au crochet, canevas, enfilage de perles, déchiquetage…). D'une part, les élèves étaient conduits à manipuler divers objets (cailloux, plumes…) pour réaliser des groupements et d'autre part, ils exerçaient leurs habilités motrices et sensorielles par des activités dites manuelles.

Ces deux places de la manipulation (d'objets) demeurent dans les programmes qui suivront : objets médiateurs de l'apprentissage ou usage d'objets pour travailler la motricité fine.

Dans un rapport de 2011 (rapport IG 2011-108 d'octobre 2011) sur l'enseignement de la maternelle était dénoncé des travaux très formels au détriment des jeux et de la manipulation. Nous trouvons dix occurrences du terme « manipulation » dans ce rapport de 200 pages. On peut y lire « Les observations conduisent à un bilan assez homogène. Les temps de manipulation ou d'exploration orientés vers la résolution de problèmes (de toute nature : moteurs, scientifiques, linguistiques, etc.), l'approche sensible et perceptive des objets et phénomènes du monde, les démarches de création et d'investigation sont souvent absents des intentions et des réalisations pédagogiques. » (IG. 2011 p. 116). Cet extrait montre alors que la manipulation ne dévoile son intérêt que lorsqu'il y a une intentionnalité. Dans ce rapport, on trouve aussi le mot associé à « la manipulation de marionnettes, de syllabes, de livres, de matières ».

Dans le rapport de 2017 (rapport IG 2017-032 mai 2017), nous pouvons lire des passages de recommandations :

[130] Inspection générale de l'Éducation Nationale

[131] Seules les femmes avaient le droit d'exercer en maternelle.

« Veiller à ne pas donner trop de fiches aux TPS et PS, privilégier l'action et la manipulation ; trouver des situations permettant de travailler l'aisance de l'épaule, du coude, du poignet puis des doigts avant d'envisager le travail sur fiche ; le travail sur le format A3 est adapté dans la mesure où les enfants de 3 ans n'ont pas encore acquis la motricité fine qui leur permet de travailler sur petit format. » (Rapport 2017, p. 17)

Prendre en compte ces différents éléments permet de comprendre que les enseignants polyvalents de maternelle utilisent ce même mot avec des sens différents selon le domaine investi, selon les objets mis à disposition et selon l'usage qui en est fait. Manipuler couvre de nombreuses fonctions auxquelles les professeurs des écoles sont acculturés même si ces fonctions ne sont ni explicites, ni différenciées dans leur pratique.

Dans les programmes de 2015, ces différents usages du mot (5 occurrences) apparaissent également : *« Apprendre en jouant avec des jeux de société et de manipulation ; Manipulation de sonorités ; Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; Les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales ; Manipulations et coordination d'actions sur des objets (en grandeurs et mesures). »*. Il est rappelé qu'il n'est pas attendu des élèves de maternelle en géométrie une expertise quant à *« la manipulation du vocabulaire mathématique qui n'est pas un objectif de l'école maternelle. »*.

Ainsi, il semble bien que le mot manipulation ait un sens plurivoque dans la profession. Il serait un moyen de rendre les élèves actifs, autonomes dans une activité même si les mains ne sont pas sollicitées (manipuler les sons). Qu'en est-il plus spécifiquement en mathématiques ? Retrouvons-nous aussi cette variété de sens ? Pour répondre à ces questions, nous questionnons les fonctions de la manipulation de matériel pédagogique ou d'objets détournés à des fins didactiques dans l'activité mathématique. En quoi le matériel utilisé permet-il d'assurer la dévolution, des rétroactions du milieu et des validations. Cet usage du matériel est-il si explicitement envisagé dans les ressources actuelles ? Il semblerait à la lecture des programmes et des rapports IGEN que ce n'est pas de cela que traitent explicitement ces documents officiels.

2 Exemples

Nous prolongeons cette réflexion autour du caractère polysémique du verbe « manipuler » et du nom « manipulation » en nous appuyant sur quelques exemples. Ainsi manipuler des étiquettes qui seraient au même format, de la même couleur, avec sur chacune une écriture chiffrée des nombres jusque 10 pour « reconstituer la liste ordonnée des nombres », est-ce comme manipuler des allumettes et des boîtes lorsque la consigne est de « mettre une allumette et une seule dans chaque boite » ? (Briand, 1999).

Dans l'exemple des étiquettes-nombres, les écritures chiffrées des nombres sont toutes présentes et correctement tracées, la manipulation est un moyen pour soulager les élèves du tracé des chiffres, le déplacement d'étiquettes permet des essais erreurs : notons que ce type de raisonnement (par essais/erreurs) est identifié souvent par les professeurs des écoles comme emblématique du raisonnement scientifique. La validation par l'élève n'est pas immédiate : la comparaison avec une bande numérique constitue à ce niveau une nouvelle tâche. Cela sous-entend que les élèves savent énumérer ce qui est loin d'être assuré.

Dans le cas des allumettes, le fait de manipuler les boites d'allumettes permet d'organiser la collection, de réaliser une partition de celle-ci : sous-collection des boites déjà complétées avec une allumette et sous-collection des boites vides (à traiter). Puis, ouvrir les boites permet de valider s'il y a bien une allumette et une seule dans chaque boite et favorise alors des rétroactions du milieu. L'élève pourra alors refaire des essais jusqu'à ce qu'il trouve une solution qui lui permet de gagner à tous les coups. Dans un premier temps, c'est l'enseignant qui supervise les ouvertures des boites et encourage les élèves à formuler qu'ils ont « perdu ». Les élèves sont conduits également à un raisonnement du type essai/erreur mais ils sont responsables de la validation de leur résultat. Cette autonomie (encadrée) de la tâche, de l'activité à la validation contribuera au développement de l'autonomie intellectuelle.

Dans ces exemples, la question se pose aussi de la nature des objets : étiquettes, boites d'allumettes et allumettes. Les étiquettes réfèrent aux mathématiques du fait des écritures inscrites (codage, désignation du nombre par une écriture chiffrée) sur une de leurs faces, les boites et les allumettes (ou tirelire et jeton) sont des objets de la vie quotidienne, détournés et utilisés à des fins didactiques. D'autres objets,

comme les cubes (barres, plaques) emboitables, qualifiés de matériel pédagogique sont utilisés à des fins didactiques (en donnant certaines contraintes comme la constitution de groupes de dix).

De ces deux exemples se dessinent alors deux classes de fonctions : l'une pédagogique et l'autre didactique, c'est-à-dire au service (voire inhérente) à la construction d'une nouvelle connaissance. Ces deux classes, sont difficiles parfois à distinguer et constituent une source de malentendus entre formateurs et professeurs.

Enfin une autre fonction de la manipulation est précisée dans les programmes de l'école maternelle : elle est liée aux activités visant à améliorer les habilités motrices (jeu de piquage, transport de marrons à l'aide d'une pince…) ou à vivre des expériences sensorielles (toucher des tissus ou des papiers de textures différentes dans des déclinaisons du jeu de kim).

Pour conclure, les objets à manipuler permettent d'une part de se représenter la situation, de délimiter des contraintes de la situation, voire constituent des variables didactiques, puis sont utiles au moment de valider. Enfin, les objets à manipuler parfois supposés renforcer la motivation et participer à l'enrôlement des élèves peuvent même devenir des distracteurs (gommettes à coller, les pics (batônnets en bois) sur le hérisson, les points (gommettes) sur la coccinelle en relation avec les pucerons à manger (des jetons colorés)…

En maternelle, les contenus paraissent plus simples, les enjeux d'enrôlement, de socialisation des élèves peuvent l'emporter, et il est parfois plus difficile d'amener les enseignants à questionner l'enjeu de la situation.

III - MANIPULER : PRATIQUES ET QUESTIONNEMENTS DES ENSEIGNANTS

La multiplicité des sens donnés à « manipulation » entraîne des confusions. Nous proposons quelques éléments de formation pour expliciter ces différents sens auprès de professeurs des écoles. Pour initialiser le questionnement des enseignants, il est possible de proposer d'analyser des vidéos en focalisant l'observation sur les élèves et leurs actions sur le matériel.

Nous avons utilisé deux vidéos : l'une extraite d'une ressource en ligne hébergée par Canopé et l'autre réalisée dans une classe maternelle (dans laquelle nous sommes intervenues par la suite). Nous appellerons cette classe, la classe de Mme B. Cette séance de classe filmée montre une adaptation d'un problème proposé initialement dans une ressource sur les « rallyes » mathématiques en maternelle (Emprin et Emprin-Charotte, 2009). Nous avons complété ces données par la lecture et l'analyse d'échanges entre enseignants (ou supposés) recueillis dans des extraits de forum en ligne. Ce corpus nous permet d'identifier leurs préoccupations, la manière dont ils formulent les problèmes qu'ils rencontrent et d'ainsi mieux cerner les besoins ressentis des professeurs (Robert et Blanchard, 2014).

1 Manipuler dans la classe

Les deux vidéos mettent en scène un scénario basé sur la répartition d'objets (des œufs ou des pièces d'or) dans des paniers. Les objectifs en termes de connaissances à mobiliser ne sont pas les mêmes. Le problème des œufs consiste, dans la vidéo extraite de Canopé, à repartir des œufs jaunes et verts de manière à obtenir un panier contenant 8 œufs. Le problème des pièces d'or (vidéo classe de Mme B) est un problème de partage équitable : à partir d'une collection de pièces d'or, il s'agit de les répartir de manière équitable dans chaque panier.

La vidéo de Canopé est une adaptation de la situation du « bon panier » (Briand et al, 2004) : un des objectifs des auteurs de la ressource diffusée par Canopé est de reprendre des situations développées au Corem (1973-1999) et de proposer à des enseignants de l'académie de Créteil de les mettre en œuvre. Chaque vidéo est accompagnée de plusieurs écrits qui présentent la vidéo et analysent les pratiques enseignantes ou les stratégies des élèves. Ces vidéos ont clairement une visée formative à condition de lire les documents écrits qui les accompagnent. La situation retenue ici est celle du « bon panier ». Avant de confronter les élèves à la situation proposée, une phase d'introduction a semblé nécessaire aux enseignants filmés. Cette introduction consiste à déposer des œufs verts et des œufs jaunes dans un

panier de manière à constituer une collection de 8 œufs. Les œufs sont représentés par des étiquettes soigneusement découpées, colorées et plastifiées. Cette introduction semble viser à amener les élèves à s'approprier le contexte (des paniers, des œufs de deux couleurs qui sont ici à disposer dans les paniers), à préciser le vocabulaire associé et à mettre en évidence différentes décompositions additives du nombre 8 à partir des collections proposées (ce qui n'est pas l'enjeu de la situation initiale proposée).

La situation de référence, par rapport aux travaux de l'équipe de Bordeaux, ayant été rapidement rappelée, nous nous interrogeons avec les participants sur le statut de cette phase et sur ce qui se passe ici au niveau de la manipulation, sur le rôle qu'elle peut jouer.

Différentes hypothèses[132] sur les choix de cette enseignante ont été évoquées : la nécessité d'enrôler les élèves, de les amener à s'approprier le matériel avant d'agir, de s'approprier le codage qui sera associé à la forme du message (une tache jaune surmontée d'un 6 signifiera qu'il y a 6 œufs jaunes). La situation peut sembler complexe à l'enseignante et le matériel à gérer peut ajouter de la complexité à ses yeux. D'autres choix de tâches, à proposer avant de confronter les élèves à la situation proposée, ont été évoqués : par exemple demander d'associer le « bon message » (à choisir parmi plusieurs) à un panier où les œufs sont déjà coloriés sans nécessairement demander aux élèves d'être concepteurs du message.

Les participants étaient d'accord pour identifier dans cette première vidéo, les éléments d'un schème d'ordre professionnel relevant de l'enrôlement dans la tâche ; schème qui semble incontournable pour une activité de cette nature : il faut que les élèves puissent s'approprier le matériel, le nommer, … avant de les placer face au problème. La reconnaissance des décompositions du nombre choisi (ici 8) par les élèves peut également correspondre à des pratiques familières mais elle n'a pas de lien avec l'enjeu de la situation.

La deuxième vidéo, montre l'adaptation d'une ressource dans la classe de Mme B. Dans cette classe, les élèves travaillent essentiellement sur la base du fichier « la classe maternelle ». Nous avions confié à Mme B. la ressource « Rallye mathématique en maternelle » (Emprin et Emprin-Charotte, 2009) pour l'amener à choisir les problèmes qui lui convenaient. Au cours de cette matinée, plusieurs ateliers tournants ont été proposés. L'atelier des pièces d'or s'appuie sur une proposition de la circonscription de Lens. Le rallye mathématique de Lens (annexe 2) reprenait des activités proposées dans la ressource d'Emprin. Il s'agit d'un problème de partage équitable : répartir 77 pièces équitablement dans 4 paniers ; à la fin du partage, il ne doit pas rester plus de 3 pièces dans la poubelle. La bandelette de pièces à découper n'a pas été distribuée aux élèves ; les pièces d'or étaient déjà toutes dans une grande barquette à disposition des quatre élèves. Chaque élève a un panier plastifié, les pièces à se partager sont dans la barquette commune. L'exploration du matériel a probablement contribué à oublier les contraintes de la consigne et ainsi à détourner l'activité. Finalement le partage réalisé dans le groupe observé, n'a pas été équitable. Le problème des élèves devenait : « remplir l'espace de son panier et y placer le plus possible de pièces ».

Ces deux moments de classe suggèrent que les activités reposant sur la manipulation d'objets ou de représentation de ces objets (dessin de paniers, d'œufs colorés, de pièces d'or plastifiés) séduisent les enseignants. Elles répondent à des croyances, plus ou moins fondées, sur la nécessité de trouver un habillage concret, de rendre ludiques les activités mathématiques, au besoin d'enrôlement des élèves par d'autres biais que le plaisir de chercher. Ces enseignants consacrent beaucoup de temps à fabriquer des supports ; ils dépensent beaucoup d'énergie, voire ils s'épuisent, à multiplier les supports attrayants pour les élèves, perdant parfois l'objectif principal de l'acquisition de connaissances.

Le formateur doit avoir conscience de ces dérives, et disposer d'arguments recevables pour le public afin de montrer les limites d'un tel investissement. Ces questions matérielles ne peuvent être balayées en formation car ce sont des questions souvent centrales pour les enseignants.

[132] Nous ne connaissons pas, ni n'avons interrogé l'enseignante filmée ou les auteurs de la ressource.

2 Préoccupations des enseignants relatives aux ressources et à la manipulation : extraits de forums

2.1Par rapport au choix des situations et à la manipulation dans certaines ressources

Dans la compilation d'extraits issus d'un forum en ligne (annexe 7), nous retenons la manière dont les enseignants désignent les situations et partagent des réflexions autour de l'intérêt qu'elles peuvent présenter.

Nous avons listé les arguments (de différentes natures) évoqués pour retenir ou non cette ressource par rapport à d'autres, nous proposons quelques extraits des forums en réorganisant les arguments selon différents axes (les passages écrits en italique sont des extraits des forums recopiés en prenant soin de ne pas trop les sortir de leur contexte).

- **Des questions relatives à l'organisation des situations sur l'année, l'ordre à retenir** *« par quelle activité commencer ? quelle progression avez-vous suivi ? »*
- **Des interrogations relatives à la manipulation,** centrées sur la plus ou moins grande facilité à trouver le matériel évoqué, son coût : pour "découvrir le monde avec les mathématiques" chez Hatier *« Un tas de manips proposées à partir d'un matériel très accessible pour les enfants (situations problèmes), et de récup. (ex : boîtes d'œufs). »* ; pour le CD Hatier *« il va falloir encore dépenser… on peut fabriquer les voitures en carton aussi ? »* mais aussi en lien avec l'identification de l'enjeu de certaines situations *« l'idée est de permettre aux enfants de dénombrer une quantité de voitures, de garder la quantité en tête pour aller chercher les garages : en cherchant un peu, j'imagine qu'on peut faire le même exercice de rapprochement de quantités avec d'autres supports. » « Bien sûr tu peux utiliser des cartons avec les voitures imprimées dessus : c'est ce que je fais depuis des années... D'ailleurs cela a l'avantage de moins distraire les enfants... de l'objectif car avec de vraies petites voitures, ils ont souvent tendance à jouer avec ... ou à se disputer pour avoir leur voiture préférée... C'est une situation très facile à mettre en œuvre et que les enfants apprécient beaucoup bien qu'artificielle... »* Ainsi se questionner sur le choix du matériel peut induire une réflexion sur l'appropriation de l'enjeu de la situation.
- **Une volonté de faire des liens : avec d'autres ressources reconnues, par exemple ERMEL qui constitue encore une référence (évoquée) avec des formations (plus ou moins récentes**) *« je m'en suis servi pour mon mémoire sur les situations problèmes en maternelle. très bon outil ! » ; « « il nous a été fortement conseillé par notre formateur IUFM ! » « Moi, ça me parle car sur Bordeaux on nous parle de ces situations à longueur de conférence. »*
- **Des arguments évoquant les contenus de manière un peu générale, les caractéristiques des situations et de la manière dont elles sont présentées** *: « tout est clair (objectifs, déroulement...) » ; « propose des situations concrètes et ludiques, avec du matériel à manipuler, tout en étant très clair avec les objectifs pédagogiques et les compétences à travailler. » ; « Ce sont des situations intéressantes, mais qui demandent du temps afin que l'enfant construise lui-même les notions en jeu et où les phases de bilans sont essentielles. »* et aussi *« En plus, plusieurs situations sont déclinées sur une période assez longue, avec des variantes très intéressantes à mettre en place ! »* mais *« moi je n'y vois pas de progressions mais des idées de mises en situation en situations problèmes pour des objectifs choisis. » ; « je ne vois pas par quoi commencer, on peut commencer n'importe comment ? déjà, je n'ai pas de coin garage dans ma classe ! »* alors que *« tu verras qu'ils te font des propositions de "progressions", en précisant "cette situation doit venir avant ou après celle-ci...", mais sinon c'est vrai qu'il n'y a pas de progression précise. » « Les activités sont triées par domaines et chacune d'entre elles est progressive. »*
- **Certains retours d'expérience en lien avec des indicateurs de différentes natures pour retenir ou non la ressource :** *« J'ai testé deux activités en classe : le tri de graines en PS et les allumettes en MS, je peux te dire que ça a très bien marché et que les enfants ont adoré ! Seul point "noir" : il y a pas mal de matériel à préparer, mais ça vaut le coup. »*
- **Des réticences** *« Il doit falloir du temps pour comprendre le contenu avant de pouvoir l'appliquer... Ou j'expérimente, et j'essaie de tout améliorer pour la prochaine année ? »*

Ces extraits de forums montrent de nouveau la grande préoccupation des enseignants pour trouver le matériel, rendre « concrètes », « ludiques » les activités mathématiques sans pour autant trop distraire les élèves. Par ailleurs, il est évoqué le temps long nécessaire à l'enseignant pour entrer dans les

situations proposées par le dvd (Briand et al, 2004) et le temps long pour les élèves qui vont devoir faire beaucoup d'essais avant d'y arriver.

Les enseignants se posent des questions relatives à des éléments de progression, au matériel, au plaisir des élèves (enrôlement, situation artificielle ou pas…), aux ressources (respectant plus ou moins l'esprit de la situation initiale) et à la manière dont les ressources peuvent aider le professeur à s'approprier la situation, à en comprendre les enjeux, à la mettre en œuvre…

Cela nous conforte dans la nécessité de faire connaitre les enjeux de ces situations de référence pour échanger, prendre du recul. Dans les ressources en maternelle, les activités sont désignées par le matériel utilisé (les bons paniers, voitures et garages, les pièces d'or, les mathœufs…) ; cela facilite l'enrôlement et la mémorisation de l'activité mais en masque les enjeux.

Pour la formation, l'utilisation de ces extraits de forums sont une piste possible pour engager la discussion. Ils peuvent aussi sensibiliser à certaines spécificités de la maternelle et amènent à développer des arguments et à les hiérarchiser en prévenant d'éventuelles réticences.

IV - CONCEVOIR UNE FORMATION : UNE ENTRÉE PAR LA PLACE DE LA MANIPULATION POUR QUESTIONNER LES POTENTIALITÉS D'UNE RESSOURCE

Dans ce contexte, nous faisons l'hypothèse qu'en formation, entrer dans les ressources en se posant des questions relatives à la manipulation amènera à questionner les choix des auteurs (soumis aux contraintes éditoriales) et les enjeux des situations.

1 Les ressources en maternelle

Nous appelons ressources (Gueudet, Trouche, 2010) tout support permettant à un enseignant de penser et d'organiser sa classe. Cela peut être une revue pédagogique ou d'interface, des vidéos, des collègues ou des ouvrages qui proposent une organisation des savoirs à enseigner et un accompagnement dans la mise en œuvre.

Depuis les années 2000, l'édition scolaire s'est emparée du marché des ressources en maternelle.

Un retour en arrière nous permet de constater que la première revue consacrée à la petite enfance « éducation enfantine » apparait en 1905. Puis en 1920, l'AGEEM est créée et se fait connaitre à travers une revue. Cette association et cette revue seront pendant longtemps les seules ressources à grande diffusion. Elles promeuvent la fabrication de jeux, de matériels adaptés à la petite enfance.

Notre étude étant loin d'être exhaustive et finalisée, il nous est difficile de déterminer de quelle période date la première ressource qui aurait pour ambition de prendre à sa charge l'organisation et les déroulements des séances consacrées à la maternelle. Toutefois, nous pouvons rappeler que des recherches ont été menées de la fin des années 70 à 1999 de la GS au CM2 par l'INRP dans le but de repenser l'enseignement des nombres et du calcul. Ces recherches sont la base des ressources de la collection ERMEL dont un des ouvrages est consacré à la grande section.

Une spécificité des ressources pour la maternelle concerne leurs auteurs qui, pour la plupart, sont des enseignants-chercheurs ou des formateurs ÉSPÉ, ce qui est moins marquant pour les ressources de l'élémentaire.

Une autre spécificité de la majorité des ressources en maternelle est de ne pas distinguer des supports maitres et des supports élèves et de regrouper dans un même document les indications pour le maitre et d'éventuels supports à proposer aux élèves. Les formats et les contenus de ces ressources présentent des diversités incluant parfois l'utilisant de supports numériques, de fiches élèves ou de vidéos de classes.

Ces ressources (annexe 1) peuvent être éditées sous format papier sans autre ajout (comme « Découvrir le monde »[133] (2004), Ermel GS, (1990)). D'autres ressources (comme « Vers les maths » (2005, 2015) ou « Cap Maths » (2015)) sont éditées sous format papier avec des ajouts, notamment de Cdrom pouvant

[133] Découvrir le monde deviendra en 2015 découvrir les maths

comporter des fiches élèves (comme « Enseigner le nombre à l'école maternelle » (2017)), des vidéos de classe (comme « le nombre à l'école maternelle » (2016)) ou des comptines (comme « Maths à grand Pas » (2016, 2018), Vers les maths (2005, 2015), Cap Maths (2015)). Certaines proposent l'ensemble du matériel nécessaire aux situations proposées (comme « Mon année de Maths » (2014)).

D'autres ressources sont uniquement éditées en format numérique (en ligne ou sur CD) comme le CD-ROM Hatier (2004), en ligne comme la mallette maternelle (Copirelem) sur le site de l'ARPEME, ou hébergé sur le site de Canopé (2015).

Cette diversité peut complexifier leur choix et leur appropriation par les enseignants en fonction des attentes de ces derniers.

2 Comparer la place de la manipulation dans des ressources pour comprendre les intentions des auteurs.

Nous avons pensé un dispositif basé sur l'appropriation des ressources en pointant en particulier l'identification des enjeux des situations, des intentions, des priorités des auteurs et en pointant la spécificité de la manipulation proposée en cycle 1.

Dans le cadre de l'atelier, nous avons proposé quatre extraits de ressources et une série de questions organisées en deux parties. Les premières questions sont celles que pourrait se poser un formateur pour décider ou non de choisir d'exploiter cette ressource dans le cadre de la formation. Les autres questions sont celles que pourrait se poser un enseignant pour explorer la ressource afin de choisir les situations à proposer à ses élèves.

Entrée du point de vue du formateur : apports didactiques et mathématiques

Potentiel de la ressource à analyser comme aide à la construction de connaissances didactiques et mathématiques

- Quels sont les éléments qui permettent au PE de situer la situation en référence aux situations listées ?
- Comment la notion de variable didactique peut-elle être mise en évidence à partir de la situation proposée ?
- À la lecture de cet extrait, comment identifier la(les) fonction(s) de la manipulation privilégiée par les concepteurs ?

Entrée du point de vue de l'enseignant :

Usage possible des ressources avant et pendant la mise en œuvre de la situation

Pour préparer la classe, reconnaît-on une préoccupation des auteurs relative :

- à la formulation de la (des) consigne(s) ? L'attention du PE est-elle attirée sur les choix effectués ? Sont-ils justifiés (contraintes, reformulations éventuelles…) ?
- aux choix effectués pour le(les) support(s)matériel(s) ? Sont-ils justifiés (ce que l'on peut changer ou non…) ?

Pour limiter les improvisations et aider à l'analyse pendant la classe, dans la présentation de cette situation, les auteurs insistent-ils (et comment) :

- sur les observables pendant la réalisation de la tâche par les élèves ;
- sur l'usage du matériel ;
- sur les moyens de validation (dévolue aux élèves, rétroactions rendues possibles…) ? Quels sont leurs choix ? Sont-ils explicités ?
- sur les éventuelles institutionnalisations ? Sur le lien à établir entre les actions et les connaissances décontextualisées ? Sur la manière de les réaliser ?

3. Présentation des quatre extraits retenus

Nous avons sélectionné des tâches amenant à la construction d'une collection équipotente (ou double) à une collection de référence.

Ce sont :

- « Les boites d'œufs » (PS) Découvrir les mathématiques (Valentin, 2015, p. 26-31)
- « Juste assez » (PS/MS) Maths à grands pas (Thomas et Hersant, 2016, p. 63-66)
- « Galettes » (MS) Vers les maths (Duprey et Duprey, 2010, p. 86-87)
- « Les perles rouges » (GS) Mon année de maths, (Fénichel et Mazollier 2012, p. 54-56)

Nous pensons que la comparaison sur un même enjeu d'apprentissage permet davantage de se centrer sur l'accompagnement proposé par les auteurs. Ainsi dans les quatre ressources sélectionnées (annexes 3, 4, 5 et 6), les accompagnements pour opérationnaliser la séance en termes de compréhension des enjeux de la situation, de jeu sur les valeurs des variables didactiques et d'aides à la mise en œuvre varient. Nous avons également sélectionné les niveaux de classe de la PS à la GS afin d'identifier comment une même situation peut évoluer sur un cycle.

4. Des compléments proposés par les auteurs

Dans trois de ces ressources, les auteurs explicitent et justifient leurs choix en s'appuyant sur des résultats de recherche.

- Pour « Découvrir les maths » PS (les boites d'œufs, PS, Période 2, Situation 3, pp. 26 à 31 Dominique Valentin, édition actualisée et enrichie - Hatier, 2015)

Dans la préface de cette ressource, Marie-Hélène Salin souligne : « Je voudrais insister sur l'aspect formateur de ce document dont la lecture nécessite un véritable travail et doit s'effectuer en boucle : à un premier niveau, le lecteur peut s'intéresser à la situation décrite avec l'intention de la reproduire dans sa classe, en se centrant sur sa propre activité. À un deuxième niveau, c'est en confrontant les observations qu'il aura menées auprès de ces propres élèves (…) qu'il pourra mieux réaliser l'enjeu de la situation, affiner ses consignes, préparer les phases collectives, etc. Enfin, à un troisième niveau, l'enseignant qui s'est approprié les situations, peut entrer dans le jeu des variables (…) et enfin, élaborer d'autres situations lui-même. » rappelant ainsi que l'appropriation d'une ressource prend du temps et nécessite des expérimentations et des retours au document. Toutes les situations nécessitent d'utiliser du matériel « à acheter ou fabriquer », « fourni » ou « présent dans les classes ou à récupérer auprès des familles » donc la manipulation d'objets est interne à une situation (p. 10). Une programmation est proposée (p. 11).

- Pour « Maths à grands pas » PS-MS, (« juste assez » ; période 5 en PS et à partir de la période 2 en MS, Situation 11, pp. 63 à 66 - Yves Thomas – Magali Hersant (Retz 2015))

Les auteurs de cette ressource précisent dans la présentation (p. 8) : « Ces situations sont faciles à mettre en œuvre et sans usage de matériel coûteux. » et justifient explicitement leurs choix relatifs aux situations retenues : « des situations peu nombreuses mais reprises plusieurs fois » et au fait de ne pas faire figurer une rubrique « objectifs » en tête de chaque situation. Certaines caractéristiques des situations proposées sont développées : « des situations laissant une part de choix aux élèves » ; « des situations « autovalidantes ». (pp. 11 et 12).

- Pour « Mon année de Maths » GS (« les perles rouges » Période 5, pp. 54 à 56 – Marie-Sophie Mazollier – Muriel Fénichel – Claire Tritsch (Sed 2012))

Les auteures précisent leurs choix didactiques et pédagogiques et consacrent un paragraphe au rôle de la manipulation (p. 5) : « Pour nous la manipulation a deux rôles principaux : **un rôle de déclencheur de réflexions** et un **rôle de validation**. (…) La manipulation et la verbalisation des actions qu'elle suscite ont un rôle essentiel dans la construction des connaissances. ».

Ces explicitations des auteurs relatives à leurs grands choix peuvent contribuer à l'appropriation des situations et limiter les risques de dérives.

5. Synthèse des réponses des participants pour chacune des ressources

Toutes les questions n'ont pu être abordées au cours de l'atelier et nous proposons ici des éléments de réponses.

5.1. Boîtes d'œufs (PS) Découvrir les mathématiques (Valentin, 2015)

Du côté apports didactiques et mathématiques :

Pour cette ressource du côté des apports didactiques et mathématiques et de la justification des choix des auteurs, les participants s'accordent à dire que :

- la relation avec la situation de référence (« aller chercher juste ce qu'il faut ») est explicite : « évaluer une quantité dans une tâche de construction progressive d'une collection équipotente à une collection de référence »
- les variables didactiques ne sont pas clairement énoncées
- les points de vigilance sont signalés mais utiliser cette ressource suppose un travail de préparation conséquent.

Des éléments sont précisés relatifs au choix du matériel à proposer (boîtes de douze œufs, châtaignes, un petit plateau) : « il est possible d'utiliser un autre matériel (…) car **la taille des objets a une grande influence sur la façon dont les enfants se servent.** (…) De plus, un matériel « trop affectif » (bonbons, jouets très convoités) n'est pas toujours le plus appropriés, la motivation externe pouvant parasiter les apprentissages visés. »

Du côté enseignant :

Pour un enseignant-utilisateur, toutes les informations semblent au même niveau : les mathématiques en jeu, l'organisation, le support, le choix du vocabulaire mais la volonté de donner toutes les clés pour préparer les séances est là. Le découpage en séances n'est pas visible mais les potentialités de la situation existent. L'activité est concrète, semble facile à mettre en œuvre du point de vue du matériel.

Des précisions relatives à la cohérence des activités sont données : « La situation est organisée en trois activités. Les deux premières sont à espacer dans le temps – de quatre à six semaines selon les enfants -, la troisième activité est une activité de prolongement. En période 3, le goûter des poupées vise les mêmes objectifs que cette situation. ». La lecture peut rebuter des enseignants (« il est nécessaire de travailler sur le support pour en dégager les éléments utiles à la mise en œuvre en envisager un découpage en séances « . Cependant la description de ce qui se passe dans la classe (Encadrés « en classe » et « Sur le vif ») peut contribuer à l'appropriation de la situation et des « clés de modifications » sont données. Certains participants estiment que la liste des erreurs possibles et des pistes sur leur traitement manquent si bien que les participants se demandent si ce n'est pas une volonté de l'auteur de cacher que la densité du travail va conduire les élèves à commettre de nombreuses erreurs et petit à petit à les corriger.

Dans la situation de cet extrait, des élèves seraient observateurs. Dans les déroulements effectifs, cela ne semble pas toujours fonctionner d'après des témoignages de participants à l'atelier.

5.2. Juste assez : maths à Grands pas (Thomas, Hersant, 2016)

Du côté apports didactiques et mathématiques :

Les participants regrettent que les variables ne soient pas davantage mises en évidence. Le nombre de points, le fait que les collections soient déplaçables/fixes, la taille des collections, la disposition des points, l'importance de pouvoir cacher les points sont autant de variables didactiques suggérées mais pas explicitées.

L'objectif n'est pas rappelé dans l'extrait, il faut retourner au sommaire. Du côté de la formation, cela questionne les choix d'éléments à apporter accompagnant l'extrait retenu. Cette ressource semble avoir mis l'accent sur l'accompagnement des enseignants dans la mise en œuvre notamment sur dévolution/institutionnalisation et sur les modes de validation (notons que la phase de validation est précédée d'une discussion).

L'élève est amené à manipuler le couvercle de la boîte « qui peut se fermer des deux côtés » et des petits cubes. Les auteurs insistent : « le rôle du couvercle servant de cache est essentiel » et le justifient en s'appuyant sur les procédures induites par sa présence ou son absence. Les deux pinces à linge (verte et rouge) citées dans le matériel fourni à chaque élève sont utilisées pour distinguer les « cartes réussies » et « celles qui ne le sont pas » pour « revenir avec un élève sur ce qu'il a fait ».

Du côté enseignant :

La présence de photographies successives accompagne le verbal (la consigne) et le non verbal (manipulation du matériel). Des participants signalent un manque d'accompagnement pour découper cette activité en séances d'une même séquence, qui peut nuire à la compréhension de cette situation. Il est possible de mal interpréter les choix et de penser par exemple que la double page représente une activité à ne proposer qu'une seule fois et de réduire ainsi le nombre d'essais nécessaires pour élaborer des stratégies. Les auteurs apportent des éléments précis sur la formulation des savoirs par l'enseignant, « nous savons en effet par expérience de formateur que le passage des objectifs des programmes à des formulations pour les enfants qui tissent un lien entre la situation et le savoir visé n'est pas évident. (…) Or ces formulations sont indispensables pour ancrer les apprentissages des élèves, leurs actions ne suffisent pas. » (p. 13). Ils proposent également des « traces écrites » du travail effectué « Ce que nous avons appris en maths » destinées aux élèves et à leurs parents.

5.3. Galettes. MS ; Vers les maths (Duprey et Duprey, 2010)

Du côté apports didactiques et mathématiques :

Il n'y a pas de relation établie par les auteurs avec cette variante et la situation de référence. Les variables didactiques sont suggérées à travers le découpage en trois étapes (collection proche/collection éloignée et au plus trois voyages/un seul voyage) sans explication sur ce que cela va induire en termes de modifications de procédures. Les trois étapes sont à réaliser dans la même séance, la question de la temporalité des apprentissages se pose alors. Sous la rubrique « différenciation », une autre variable est évoquée « adapter le nombre de galettes aux compétences numériques des élèves » de manière très générale. Le terme « manipulation » est très présent et renvoie également au découpage en étapes qui est commun à toutes les situations proposées.

Du côté enseignant :

Cette séance entre dans la catégorie « résoudre des problèmes de quantités » et non dans un travail qui viserait la construction du nombre et notamment le nombre comme mémoire de la quantité « réaliser une collection ayant le même nombre d'objets qu'une autre ». Le matériel est détourné : « des blocs logiques ronds et jaunes pour les galettes (ce qui ne correspond pas aux photos de la page suivante) ; des pions pour les fèves, des jetons pour les sous. ». La consigne n'est absolument pas formulée ce qui peut laisser craindre que l'activité soit mal accompagnée. Des illustrations et des photos sont supposées évoquer des procédures susceptibles d'être observées.

Ce qui est mis en avant est nettement la « manipulation », ce mot apparait trois fois dans les commentaires en marge du descriptif de l'activité : « appropriation du matériel : manipulation, recherche individuelle : manipulation, consolidation : manipulation ». Il est possible d'établir un lien entre dévolution/appropriation du matériel mais cette relation semble surtout permettre de découvrir du matériel plutôt qu'être au service des enjeux mathématiques. Les liens entre recherche individuelle et manipulation ne sont pas explicités de même pour consolidation/manipulation.

Dans cette ressource, la phase « amener juste ce qu'il faut en un seul voyage » est qualifiée de « consolidation » alors qu'elle constitue la phase essentielle de cette activité pour comprendre ce que Charnay appelle la « puissance » du nombre (garder en mémoire un nombre qui désigne le cardinal d'une collection sans voir la collection). Une certaine insistance sur le langage à utiliser peut avoir un effet négatif.

5.4. Les perles GS : mon année de maths (Fénichel, Mazollier, 2012)

Du côté apports didactiques et mathématiques :

Les enjeux mathématiques et les prérequis sont clairement annoncés ainsi que les variables didactiques comme de possibles aides à la différenciation. La tâche consiste à construire une collection de perles rouges pour fabriquer un nombre donné de bracelets comportant chacun deux perles rouges puis trois perles rouges. Les différentes étapes du déroulement sont décrites ; le matériel (les perles et les fils) et des fiches sont fournis dans la ressource.

Du côté enseignant :

L'accompagnement est très dense au regard de la longueur du texte. C'est la seule des quatre ressources à ne pas être illustrée (matériel et/ou images de classe) ce qui rend moins attractif le support. Le découpage en séances n'est pas apparent, ici la ressource propose un découpage en étapes (présentation (observation de bracelets), appropriation (réserve contenant les perles rouges sur la table), recherche (réserve éloignée), entraînement sur fiche). Il est signalé la nécessité de revenir plusieurs fois sur le même atelier. Les actions de l'enseignant sont précisément décrites et des observables sont proposés (« Pour réussir, l'élève peut… »). Des élèves ont un rôle d'observateur. D'autres activités sont suggérées.

5.5. Synthèse

Ces analyses faites par les formateurs se focalisent davantage sur la qualité des apports mathématiques et didactiques. Elles seraient à compléter par des analyses faites par des professeurs des écoles qui ne s'appuieraient pas nécessairement sur les mêmes indicateurs. En formation, ces analyses ne suffisent pas pour hiérarchiser ces ressources, il est nécessaire de les croiser avec la mise en œuvre effective de situations dans les classes pour prendre conscience des apports et des manques.

V - CONCLUSION

Nous retenons des travaux de Butlen et Masselot (à paraître) l'un des principes pour qu'une formation soit susceptible d'avoir des effets sur les pratiques des enseignants est d'entrer en résonnance avec les pratiques des enseignants. Pour cela il est nécessaire de se saisir de leurs questions et donc de penser des formations qui permettent d'engager les échanges. Le travail du formateur consiste également à traduire ces questionnements en question pour la formation ou la recherche.

S'appuyer sur les préoccupations des enseignants de maternelle relatives au choix du matériel et à l'incontournable que constitue « la manipulation » devrait permettre également de les accompagner dans l'appropriation des ressources mises à leur disposition. La conception d'un dispositif de formation basé sur l'analyse des ressources en privilégiant une entrée, ici la place et le rôle de la manipulation, permettra alors d'interroger plus largement les caractéristiques des situations proposées. Cela permet de faire connaitre d'autres ressources, pour la plupart élaborées par des didacticiens ou des formateurs ESPE et de mettre à l'épreuve certains indicateurs pour en analyser le potentiel. Cela peut permettre d'engager la discussion sur les gestes professionnels des enseignants et de compléter par des apports sur des connaissances mathématiques et didactiques. La seule analyse des ressources ne suffit évidemment pas à leur appropriation, elle doit être renforcée par des mises en œuvre effectives.

Il était difficile de faire un choix parmi les ressources que nous avons consultées. Toutes les activités proposées amènent à utiliser du matériel, donc à « manipuler », mais les enjeux de cette manipulation sont à identifier plus précisément en lien avec les apprentissages à provoquer. Il ne s'agit pas d'écarter *a priori* certaines ressources mais d'amener à identifier ce que chacune apporte à l'enseignant. Ainsi le succès de certaines ressources peut s'expliquer en partie par le fait qu'elles répondent directement à des préoccupations de « prise en main facilitante » (peu de texte à lire), de proposition de matériel peu coûteux et facile à trouver. Cependant, il est utile de dénoncer le côté « marketing » : ici écrire trois fois le mot manipulation pour rendre attractive la situation aux enseignants est un argument de vente, car dans cet exemple la « manipulation » n'était pas interrogée par rapport à son rôle au service des apprentissages mathématiques.

Du côté du formateur, en nous référant aux trois « questions de la profession » identifiées par Butlen et al (2012), les éléments apportés par certaines ressources présentées peuvent contribuer à enrichir les réponses en termes de routines et gestes professionnels pour assurer la dévolution et l'institutionnalisation, garantir la paix scolaire tout en exerçant une vigilance didactique qui assure un pilotage de la classe par les contenus.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Abboud-Blanchard, M., & Robert, A. (2014). Former des formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire : un besoin, une expérience et une question d'actualité, *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 20,181-206.

Allard, C., & Ginouillac, S. (2014). De la ressource à la séance en classe : le cas de la proportionnalité en cycle 3. *Actes du 41e colloque de la COPIRELEM, quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire, Mont de Marsan 18-19-20 juin 2014. 32 pages.*

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas des fractions*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, 298 pages.

Allard, C., & Masselot, P. (2016). De la ressource à la séance de classe. Institutionnaliser : tâche impossible ? *Actes du 43e colloque de la COPIRELEM, enseignement des mathématiques et formation des maitres aujourd'hui : quelles orientations ? quels enjeux ?, Le Puy en Velay juin 2016.*

Allard, C., Butlen, D., & Masselot, P. (2018). Dispositif d'accompagnement en mathématiques des enseignants d'un réseau en Rep Plus : présentation et première analyse *Actes du 44e colloque de la COPIRELEM, Manipuler, représenter, communiquer : quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?, Epinal juin 2017.*

Briand, J. (1999). Trier en petite section : activité rituelle ou solution d'un problème ? Construire une situation fondamentale du tri. *Grand N 65, 7-14*

Butlen, D., & Masselot, P. (à paraitre) De la recherche à la formation : comment enrichir les pratiques des enseignants afin de favoriser les apprentissages des élèves en mathématiques, *Recherches et formation*

Butlen, D., Charles-Pézard, M., Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble France : La pensée Sauvage.

Butlen, D., Mangiante-Orsola, C., & Masselot, P. (2017) Routines et gestes professionnels, un outil pour l'analyse des pratiques effectives et pour la formation des pratiques des Professeurs des Écoles en mathématiques, *Recherches en Didactiques*, numéro 24

Charles-Pézard, M., Butlen, D., & Masselot, P. (2012). Professeurs des écoles débutants en ZEP : Quelles pratiques ? Quelle formation ? Grenoble : la Pensée sauvage, 277 pages.

Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 30 (2),* 197-261

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques,* PUR, 371 pages

Rapports Inspection Générale

2011 : http://media.education.gouv.fr/file/2011/54/5/2011-108-IGEN-IGAENR_215545.pdf
2017 : http://cache.media.education.gouv.fr/file/2017/81/5/2017-032-Rapport-IGEN-Scolarisation-petite-section-maternelle_800815.pdf

ANNEXE 1 : RESSOURCES CONSULTÉES

Les ressources consultées. Ces ressources prennent en charge les progressions et les programmations et proposent des découpages en période des apprentissages. Cette partie n'est pas dans la bibliographie : toutes les ressources consultées n'ont pas été analysées pour autant il nous semble important de les citer au moins pour les faire connaitre.

Ressources papier à destination unique des enseignants rédigés par des formateurs et des didacticiens.

Apprentissages numériques (1990) Ermel GS

Découvrir le monde (2004) : Dominique Valentin MS/GS, deux tomes

Ressources mixtes à destination des enseignants et compléments papier ou autre à destination des élèves.

Guide du maitre, cahier de l'élève et CD Rom

Découvrir les mathématiques (2015) : Dominique Valentin, PS/MS/GS

Capmaths (2015) : (Hatier) Roland Charnay, Marie Paule Dussuc, Raymonde Challéat GS

Guide du maitre, CD rom et fiches élèves dans le même support

Rédigé par des enseignants et formateurs terrains

Vers les maths (2009) : Acces Gaetan et Sophie Duprey PS/MS/GS

Vers les maths (2015) : Acces Gaetan et Sophie Duprey PS/MS/GS

Maths à grands Pas (2016) : Retz, Yves Thomas et Magali Hersant PS/MS

Maths à grands pas (2018) : Retz Yves Thomas et Magali Hersant GS

Enseigner le nombre à l'école maternelle : Retz (2018) Nathalie Pfaff

Ressources à destination des élèves uniquement Fichier élèves

La classe maternelle (collection la classe) : outil personnel d'appropriation des notions mathématiques cahier PS/MS/GS

Ressources proposant le matériel, l'accompagnement des enseignants et les fiches à destination des élèves.

Guide du maitre, fiches élève et le matériel pédagogique

Mon année de maths : sed (2014) Muriel Fénichel et Marie Sophie Mazollier.

Ressources numériques

DVD : plutôt à destination des enseignants

Apprentissages mathématiques en maternelle (2004), Joel Briand, Martine Loubet, Marie Helene Salin

Chacun son chemin un problème de partage cycle2 (2005) Jeanne Bollon.

En ligne : accompagnement des enseignants,

http://www.arpeme.fr/m2ep/ : mallette maternelle la construction du nombre, Copirelem

Accompagnement des enseignants, notamment par le biais de vidéos de fiches d'analyse

Le nombre à l'école maternelle, site Canopé : Fénichel Muriel et Marie Sophie Mazollier.

ANNEXE 2 : EXTRAIT D'UN RALLYE MATH DE LENS

Les pièces d'or

Matériel :
- la fiche A4 de travail avec les 4 paniers (pages 19 et 20)
- la fiche A4 avec la poubelle (page 21)
- une bandelette de pièces par élève (nombre de pièces différent selon l'enfant :7 pièces, 8 pièces, 7 pièces, 9 pièces)
- une boîte par enfant pour mettre les pièces découpées
- matériel plastifié pour la manipulation collective (retour réflexif)
- des ciseaux
- une spatule
- un tapis de colle
- de la colle

Organisation :
groupes de 3 ou 4 enfants placés côte à côte

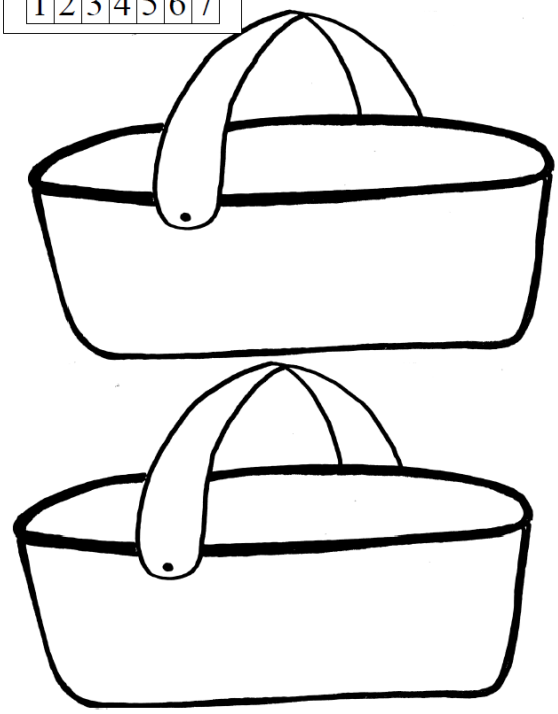
Déroulement :
Donner le matériel aux enfants.
Leur donner la consigne. :
Répartissez les pièces dans chaque panier de façon à ce qu'il y ait autant de pièces dans chaque panier.
Préciser qu'il y a une poubelle pour mettre les pièces en trop s'il y en a.
Quand ils ont terminé, ils accrochent leur production au tableau, face cachée. Puis validation collective des résultats.

Notation :
- bon résultat : 1 point
- mauvais résultat : 0 point

Retour réflexif :
Observation collective des résultats :
Présentation des différentes démarches utilisées avec matériel de manipulation :
- nombre identique de pièces dans chaque panier
- il ne peut y avoir plus de 3 pièces dans la poubelle (sinon possibilité de refaire une ou plusieurs distributions)

numéro du groupe :

1	2	3	4	5	6	7



11

Juste assez

Niveau de classe PS ou MS.

Période Période 5 en PS ; à partir de la période 2 en MS.

Organisation Travail individuel en atelier de 4 élèves.

Matériel

Pour le groupe :

- 30 cartes de 2 à 10 points (mêmes cartes à points que pour la situation 14 « Les deux cartes »).

Pour chaque élève :

- 1 boîte à deux compartiments avec un couvercle articulé (voir modèle ci-dessous).
- 1 pince à linge verte.
- 1 pince à linge rouge.
- Une vingtaine de cubes de même couleur.

Présentation de l'activité aux élèves

1



Aujourd'hui, nous allons utiliser des cartes avec des ronds comme celles-ci…

2



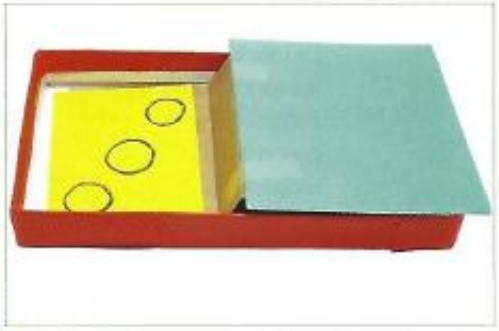
… et ces petits cubes, qu'on peut poser sur les ronds des cartes.

3



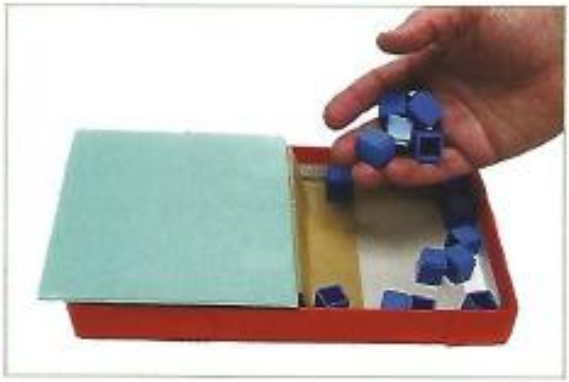
Chacun de vous aura aussi une boîte comme celle-ci, avec un couvercle qui peut se fermer des deux côtés.

4



Pour jouer, je mets tous les cubes d'un côté de la boîte, et une carte de l'autre côté.

63



5

Ensuite je cache la carte avec le couvercle et je prends des cubes.



6

Je pose les cubes que j'ai choisis sur les ronds de la carte, mais il y en a trop, il y a des cubes qui n'ont pas de place. Alors j'ai perdu.



7

L'enseignant remet ses cubes dans la boîte et recommence avec une autre carte :

Cette fois j'ai gagné, il y a juste un cube sur chaque rond, pas un de plus, pas un de moins.



8

L'enseignant recommence avec une troisième carte :

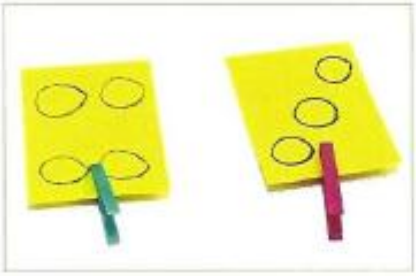
J'ai perdu, parce que sur ce rond il n'y a pas de cube.

Précisions sur le matériel

Le rôle du couvercle servant de cache est essentiel : c'est parce que les élèves ne voient pas les ronds au moment de choisir les cubes qu'ils sont obligés d'élaborer des procédures pour mémoriser la quantité. Sans le cache, ils peuvent par exemple montrer les ronds un à un et prendre au fur et à mesure un cube pour chaque rond. La tâche est alors réussie sans avoir utilisé la connaissance visée.

Précisions sur le déroulement

- Les élèves choisissent librement les cartes à points qu'ils utilisent. Si on veut faire travailler plus de quatre élèves simultanément, il est préférable d'organiser deux tables afin que chacun puisse accéder facilement aux cartes.



- Réunir dans une pince verte les cartes réussies et dans une pince rouge celles qui ne le sont pas permet de revenir avec un élève sur ce qu'il a fait. Thibault n'a pas réussi beaucoup de cartes, mais c'est peut-être parce qu'il a toujours choisi des cartes avec beaucoup de ronds. Lui suggérer alors de choisir des cartes un peu plus faciles, sur lesquelles il n'y a pas beaucoup de ronds. Au contraire, Cécile réussit toutes les fiches qu'elle essaie, mais elle ne prend que les cartes avec trois ronds. On peut l'encourager à prendre d'autres cartes, par exemple des cartes avec trois ronds et encore un rond ou avec trois ronds et encore trois ronds.

- La plus grande partie du temps de l'atelier est consacrée au travail individuel, mais il est utile de revenir avec le groupe sur les façons de réussir. Pour cela, en fin d'atelier, demander à quelques élèves de reprendre une carte qu'ils ont réussie et de montrer comment ils font. Quand les cubes sont choisis et le compartiment des cubes refermé, l'élève pose ses cubes sur le couvercle et pas directement sur les ronds de la carte. L'enseignant invite alors les autres membres du groupe à prévoir si l'élève qui joue a gagné ou non et à expliquer pourquoi. C'est seulement après cet effort d'anticipation que les cubes sont posés sur la carte pour vérifier.

Exemples de formulation des savoirs par l'enseignant

- Pour réussir, je peux montrer un doigt pour chaque rond de la fiche et puis prendre un cube pour chaque doigt levé.
- Paul a compté 5 ronds, il a pris 5 cubes, il a gagné.
- Liam a vu qu'il y avait deux ronds ici et trois là. Il a pris deux cubes et encore trois cubes, il a gagné.
- Trois cubes et encore deux cubes, c'est cinq cubes.
- Quand on gagne, il y a un cube sur chaque rond, il y a autant de cubes que de ronds.

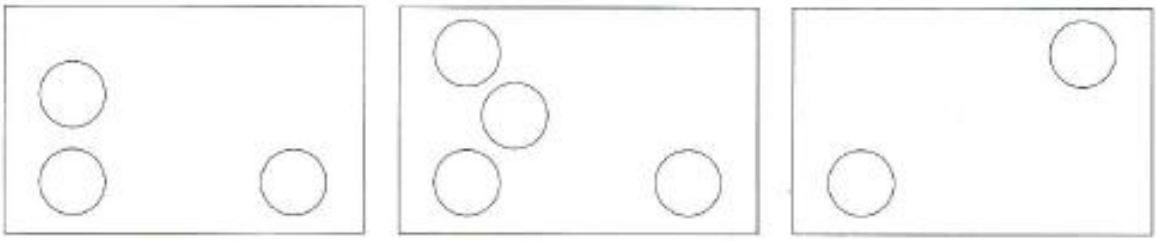
Prolongements et variantes

Quand les élèves ont joué pendant plusieurs séances en choisissant librement leurs cartes, le maître peut imposer l'ordre des cartes en les plaçant dans la boîte avant que le travail commence : l'élève doit alors prendre les cartes dans l'ordre où elles se présentent.

Juste assez

Ce que nous avons appris en maths

- Les enfants ont des cartes comme celles-ci (il y en a beaucoup d'autres).



- Chaque enfant choisit une carte, puis il la cache.
- Pour gagner, il faut prendre juste assez de cubes pour mettre un cube sur chaque rond de la carte, pas un de plus, pas un de moins.



Votre enfant .....

a dessiné des cartes qu'il a réussies :

ANNEXE 4 : LES GALETTES (VERS LES MATHS (MS))

Approcher les quantités et les nombres

RÉSOUDRE DES PROBLÈMES DE QUANTITÉS

Les galettes

MATÉRIEL

- Des blocs logiques ronds et jaunes pour les galettes et des pions pour les fèves.
- 3 jetons par élève pour les sous.
- Une barquette pour chaque élève.

ORGANISATION

Atelier dirigé de 6 à 8 élèves.

BUT

Chaque galette doit avoir une fève.

DÉROULEMENT

APPROPRIATION DU PROBLÈME
Manipulation

● **Étape 1 Réaliser une collection équipotente à une collection proche**

L'enseignant distribue un lot de galettes (entre 6 et 9 blocs logiques) à chaque élève.
3 boîtes de fèves (les pions) sont posées sur la table.
- Prendre des fèves dans la boîte, « juste ce qu'il faut », pour avoir une fève sur chaque galette.
- Vérifier que chaque camarade a respecté la consigne.

L'enseignant place 7 galettes au centre de la table. Pendant que les élèves ferment les yeux, il place des fèves sur les galettes en se trompant volontairement. L'enseignant ne met pas de fève, il en met 2 ou 3 sur une galette. Il faut ensuite chercher les erreurs commises.

RECHERCHE INDIVIDUELLE
Manipulation

● **Étape 2 Réaliser une collection équipotente à une collection éloignée**

Les boîtes de fèves sont placées sur une table voisine appelée le magasin. L'enseignant tient le magasin
Les élèves reçoivent une barquette pour aller chercher des fèves au magasin. Ils ont droit à trois essais (trois sous) chacun. L'enseignant donne un sou à chaque fois qu'un élève vient au magasin.
- Aller chercher « juste ce qu'il faut » de fèves pour qu'il y ait une fève sur chaque galette, « pas une de plus, pas une de moins ». Valider en posant une fève sur chaque galette.

MISE EN COMMUN ET STRUCTURATION
Échange oral collectif

Faire le point pour chaque élève sur le respect de la consigne et le nombre d'essais.
- Recommencer avec un nombre différent de galettes.
- Expliquer et montrer comment on a procédé.

L'enseignant place 9 galettes au centre de la table. Un élève va chercher des fèves au magasin. Avant de les poser sur les galettes, le groupe débat pour anticiper si chaque galette aura une fève.

CONSOLIDATION
Manipulation

● **Étape 3 Réaliser une collection équipotente en un seul voyage**

La consigne est identique, mais les élèves n'ont plus droit qu'à un seul voyage.
- Résoudre ce type de problème plusieurs fois.
- Expliquer et montrer comment on a procédé.

DIFFÉRENCIATION

- Adapter le nombre de galettes aux compétences numériques des élèves.
- Donner 3 jetons, 1 par essai, à chaque élève.

S'APPROPRIER LE LANGAGE

- **Expliquer** ce que l'on fait, ce que l'on a fait.
- **Lexique** Comprendre l'expression « juste assez ». Utiliser à bon escient : plus que, moins que, autant que.
- **Syntaxe** Utiliser des formules de politesse et le conditionnel « je voudrais ».

RÉALISER UNE COLLECTION AYANT LE MÊME NOMBRE D'OBJETS QU'UNE AUTRE







Les élèves dénombrent les galettes en organisant leur comptage.

PROCÉDURES OBSERVÉES

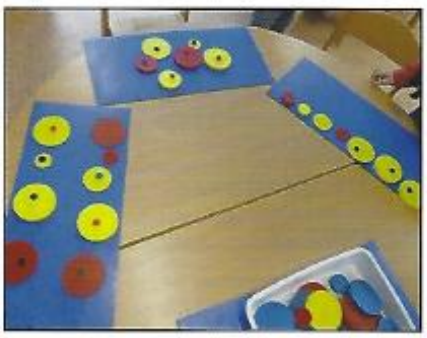
- Estime la quantité de fèves nécessaires en regardant les galettes.
- Prend une fève à chaque voyage.
- Prend de petites quantités de fèves et constate qu'il y a trop ou pas assez de fèves au dernier essai.
- Prend de petites quantités de fèves et complète, si besoin, au dernier essai.
- Dénombre les galettes et réalise une collection de fèves de même quantité.





Les élèves commandent oralement des fèves au marchand ou en montrant une quantité avec leurs doigts.





La validation s'effectue en posant les fèves sur les galettes.

e. Construire une collection dont le nombre d'éléments est multiple de celui d'une autre

Les situations proposées ci-dessous permettent aux élèves de recourir à des procédures de comptage dans un champ numérique plus étendu et donc de les améliorer, de se construire des images mentales sur lesquelles ils pourront s'appuyer plus tard pour donner du sens à la multiplication et à la division, de commencer à construire des résultats mémorisés concernant les doubles et les moitiés et de les utiliser, d'approcher la parité. Ces situations sont aussi l'occasion pour les élèves d'utiliser les nombres pour anticiper.

Les perles rouges

Matériel fourni



- Les perles.
- Les fils.
- **Annexe 11, fiches matériel 1 et 2, pp. 89-90.** L'enseignant peut faire varier le nombre de fils en en effaçant ou utiliser les fiches du CD-Rom. Il notera leur nombre en chiffres.

***Nombres et quantités*, annexe 11, fiches 1 à 5** : différents modèles.

Matériel à se procurer

- Une barquette par élève.

Objectifs

- Mettre en œuvre des procédures pour construire une collection dont le nombre d'éléments est le double puis le multiple de celui d'une collection de référence.
- Utiliser les désignations orales ou écrites des nombres pour mémoriser une quantité.

Prérequis

- Réciter la comptine numérique au moins jusqu'à 25.
- Utiliser la procédure de comptage pour dénombrer une collection comportant au moins 25 éléments et pour construire une collection ayant autant d'éléments qu'une autre.
- Énumérer une collection.

Variables et différenciation

- Le nombre de perles rouges pour chaque bracelet.
- Le nombre de bracelets à fabriquer.
- La proximité ou l'éloignement de la réserve de perles.
- Le nombre de déplacements autorisés pour aller chercher les perles dans la réserve.

Activité 1

But de la tâche

Aller chercher juste ce qu'il faut de perles rouges pour fabriquer un nombre donné de bracelets avec chacun deux perles rouges.

Déroulement

Étape 1 ***Présentation***



L'enseignant montre plusieurs bracelets colorés comportant chacun deux perles rouges, des fils matérialisant les bracelets à fabriquer et présente collectivement le

Mon année de maths GS © Éditions Sed, 2012

matériel, le but de la tâche en donnant la consigne : « Il va falloir prendre dans la réserve juste ce qu'il faut de perles rouges pour fabriquer des bracelets ayant chacun deux perles rouges. »

Étape 2 Appropriation



La réserve contenant les perles rouges est posée sur la table à proximité des élèves.

L'enseignant pose devant un des élèves du groupe un certain nombre de fils matérialisant les bracelets à fabriquer ainsi qu'une barquette pour mettre les perles rouges. Consigne : « Mets dans ta barquette juste ce qu'il faut de perles rouges pour que chaque bracelet en ait deux. »

Pour réussir, l'élève peut prendre deux perles rouges et les placer devant un fil et recommencer autant de fois qu'il y a de fils. Il peut utiliser une procédure de comptage pour dénombrer les fils puis constituer deux collections de perles ayant le même nombre d'éléments que la collection de fils. Il peut utiliser une procédure de comptage pour dénombrer les fils et ensuite prendre dans la réserve autant de fois deux perles que de fils. Il peut aussi compter deux perles pour chaque fil : « un-deux, trois-quatre... » jusqu'à épuiser le nombre de fils. Il peut aussi s'appuyer sur des résultats mémorisés (connaissance de certains doubles).

Les autres élèves observent leur camarade travailler. L'enseignant leur demande s'ils sont d'accord avec ce qui a été fait et pourquoi.

On vérifie en enfilant deux perles rouges par fil ou en les plaçant sous chaque fil.

L'activité est renouvelée avec chacun des élèves du groupe en modifiant le nombre de fils à chaque fois. Ce nombre est choisi en fonction des capacités de chacun.

Étape 3 Recherche



La réserve de perles rouges est maintenant éloignée de la table de travail et les élèves doivent aller chercher les perles en une seule fois.

La consigne est la même, seul le début change : « Va chercher, en une seule fois, juste ce qu'il faut... »

Le déroulement est semblable au précédent. Les procédures utilisées pour réussir sont les procédures de comptage énoncées précédemment.

Bilan : l'enseignant prendra soin de verbaliser ou faire verbaliser les procédures qui permettent de réussir.

Étape 4 Entraînement



Chaque élève dispose d'une fiche sur laquelle sont dessinés plusieurs fils (entre 3 et 10 – annexe 11, p.89 et CD-Rom). La désignation écrite chiffrée du nombre de fils est à indiquer sur chacune des fiches. Des fiches sur chacune desquelles sont dessinées des perles (entre 6 et 20) et la désignation écrite chiffrée de leur nombre sont placées dans des barquettes éloignées des tables de travail des élèves (annexe 11, fiche matériel 2, p.90). Dans une même barquette sont placées toutes les fiches correspondant au même nombre de perles.

Chaque élève doit aller chercher la fiche de perles correspondant à sa fiche de fils : celle qui permet de placer deux perles sur chaque fil. Lorsqu'il a trouvé la fiche de perles, il l'agrafe à la fiche de fils. S'il s'est trompé, il la garde et va chercher une autre fiche. Lorsqu'il a trouvé celle qui convient, il agrafe la fiche de fils avec toutes les fiches de perles essayées. Ainsi l'enseignant et l'élève pourront voir le nombre d'essais pour chaque exercice.

Il est également possible d'utiliser des perles à la place des fiches de perles ou pour valider le choix de la fiche. L'élève doit réaliser la collection de perles qui lui permet de répondre à la consigne. Ces perles sont placées sur les fils pour validation.

Autres activités

- Il est possible de faire construire un jeu de **Memory** : on donne un nombre d'images différentes et il faut anticiper le nombre de cartes pour construire le jeu. La construction du jeu permettra la validation.
- Il est également possible de faire construire un jeu de **Mistigri** : le jeu consiste à former des paires, le Mistigri étant la seule carte n'ayant pas de carte associée. L'enseignant donne un nombre de cartes différentes qui auront chacune leur associée (identique ou avec un lien logique) et il faut anticiper le nombre de cartes pour construire le jeu sachant qu'il ne faut pas oublier le Mistigri.

Mon année de maths GS © Éditions Sed, 2012

Activité 2

But de la tâche

Aller chercher juste ce qu'il faut de perles rouges pour fabriquer un nombre donné de bracelets comportant chacun trois perles rouges.

Déroulement

Le déroulement est le même que pour l'activité 1 mais, maintenant, chaque bracelet doit avoir 3 perles rouges.

Les fiches avec les fils pourront aller de 2 à 6 et donc les fiches avec les perles de 6 à 18. L'enseignant peut fabriquer des fiches de perles avec des gommettes en les groupant par trois de façon à faire apparaître les triples des nombres de bracelets.

Il est également possible d'utiliser les perles à la place des fiches ou pour valider le choix de la fiche. L'élève doit réaliser la collection de perles qui lui permet de répondre à la consigne. Ces perles sont placées sur les fils pour validation.

Évaluation

En observant ses élèves travailler, l'enseignant peut évaluer l'acquisition des compétences suivantes :

- savoir dénombrer une collection de *n* objets déplaçables ou non déplaçables en utilisant la procédure de comptage ;
- savoir créer une collection ayant 2 ou 3 fois plus d'éléments qu'une collection donnée en utilisant une procédure de comptage ;
- savoir lire et écrire les nombres jusqu'à *n* écrits en chiffres ;
- avoir compris que les désignations écrites chiffrées et orales indiquent une quantité.

Autre activité

Il est possible de faire construire un **jeu de *x* familles** : l'enseignant indique le nombre de familles et le nombre d'éléments de chacune de ces familles (3 ou 4). Les élèves doivent anticiper le nombre de cartes à fabriquer pour construire le jeu. Le nombre de familles est choisi en fonction des capacités des élèves. La réalisation effective du jeu permettra la validation.

Situation 3

Les boites d'œufs

Découvrir les nombres et leurs utilisations

Il s'agit de mettre un objet dans chacune des douze alvéoles d'une boite d'œufs, la quantité d'objets pris à chaque «tour» du jeu étant laissée à l'initiative de l'enfant. Si trop d'objets ont été pris, la boite est vidée et il faut recommencer.

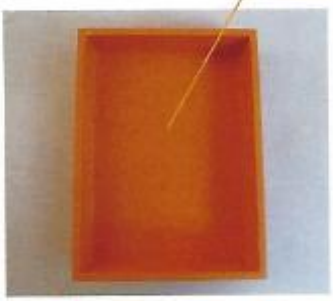
Objectif

- **Évaluer une quantité dans une tâche de construction progressive d'une collection équipotente[1] à une collection de référence.**
  Voir aussi le Point-clé **«Évaluation, différenciation» p. 111.**

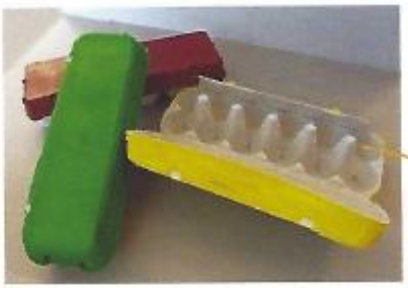
Matériel



Une centaine de châtaignes placées dans une grande corbeille.



Un petit plateau par enfant.



Une douzaine de boites de 12 œufs vides, peintes grossièrement de couleurs différentes ou portant un repère bien visible, pour pouvoir être facilement identifiées et nommées.

Mots et expressions utilisés

Un dans chaque, il en reste, il y en a trop, il en manque, juste ce qu'il faut, pas un de plus, boite remplie, boite pleine, boite complète, trop, assez, juste assez, beaucoup, peu, un peu de châtaignes

1. Nous dirons que deux collections sont «équipotentes», s'il est possible d'établir une correspondance terme à terme entre les objets de l'une et ceux de l'autre, quelle que soit cette correspondance, si elles contiennent la même quantité d'objets. Les deux collections ont donc le «même nombre» d'éléments.

PÉRIODE 2 •

Il est possible d'utiliser un autre matériel que les boites d'œufs et les châtaignes : par exemple, des carottes en pâte à sel à distribuer à des lapins fixes ou des personnages déplaçables à coucher dans des lits fixes... Ce matériel doit être choisi avec précaution car **la taille des objets a une grande influence sur la façon dont les enfants se servent**. Avec des objets plus petits que les châtaignes (par exemple des noisettes), les enfants ont tendance à prendre beaucoup trop d'éléments sans même pouvoir prendre conscience de la nature de leurs erreurs. De plus, un matériel trop « affectif », (bonbons, jouets très convoités) n'est pas toujours le plus approprié, la motivation externe pouvant parasiter les apprentissages visés.



Une grande vigilance doit être par ailleurs accordée au vocabulaire utilisé tant par l'enseignant que par les enfants, tout au long de l'activité. Par exemple, **l'expression « il en manque » est difficile à bien utiliser, certains enfants confondant « il y en a trop » et « il en manque »**.

La situation n'est pas destinée à l'acquisition de ce vocabulaire, mais l'élève doit cependant le maitriser pour que le but à atteindre soit clairement identifié et que les stratégies puissent se dégager. **Il faut distinguer les mots et les concepts : les mots ci-contre sont des désignations du concept de quantité, mais ne sont pas des concepts en tant que tels.**

La situation est organisée en trois activités séparées. Les deux premières sont à espacer dans le temps – de 4 à 6 semaines selon les enfants -, la troisième activité est une activité de prolongement. En période 3, **Le gouter des poupées** vise les mêmes objectifs que cette situation. Le changement de matériel de la situation **Le gouter des poupées** réactive très nettement l'intérêt des élèves qui reconnaissent la similitude (Cédric : « Ah il faut faire pareil qu'avec les châtaignes .... »), mais sont attirés par l'apparente nouveauté ; la mise en mots et l'institutionnalisation seront réservés à cette seconde situation. **Nous avons parfois sauté l'activité 1 pour des enfants qui avaient eu l'occasion d'observer plusieurs parties et semblaient avoir bien compris le but du jeu** : l'appropriation s'est faite pour eux par la seule observation.

Activité 1 S'approprier les règles d'action et le but

BUT À ATTEINDRE
Mettre une châtaigne dans chaque alvéole d'une boite de 12 œufs.

ORGANISATION
Atelier dirigé de 2 joueurs et 2 observateurs.

Cette phase permet à chaque enfant d'accepter et de comprendre les règles d'action, le rôle du petit plateau, le déroulement d'une partie avec plusieurs coups. De plus, après une ou deux parties, l'enfant doit pouvoir dire, de lui-même, s'il peut ou non fermer sa boite (parce qu'elle est remplie).

L'enseignant s'adresse au premier joueur : « *Anaïs*, tu prends des châtaignes et tu les mets sur ton plateau ; maintenant tu en mets une dans chaque trou (montrer). Est-ce qu'il y a une châtaigne dans tous les trous ? » Si l'enfant ne peut répondre, on ajoute : « Tu vois, il y a encore des trous qui n'ont pas de châtaigne. Au prochain coup, tu pourras encore prendre des châtaignes. Maintenant, c'est *Benjamin* qui va prendre des châtaignes pour remplir sa boite. »

Au second coup : « Attention, tu vas encore prendre des châtaignes et les mettre d'abord sur ton plateau, mais essaie de ne pas en prendre trop. **Si tu en as mis une dans chaque trou et que tous les trous sont pleins, tu peux fermer la boite et tu as réussi.** » C'est l'enfant qui décide de fermer la boite, ce qui signifie qu'il a atteint le but fixé.

Lorsque l'enfant ferme une boite, **l'enseignant le félicite et verbalise les actions:** « Oui, tu as bien mis une châtaigne dans chaque trou » et l'interroge sur ce qui reste sur son plateau : « Est-ce qu'il te reste des châtaignes dans ton plateau ? Est-ce que tu en as pris juste ce qu'il fallait ? »

En classe

Pendant cette phase d'appropriation, il s'agit de **faire prendre conscience de la tâche: mettre une châtaigne dans chaque alvéole de la boite d'œufs**. Le problème du non-dépassement (ne plus avoir de châtaignes sur son plateau une fois la boite remplie) qui sera posé à l'activité suivante, n'est pas abordé ici. Le petit plateau individuel permet à l'enfant de bien voir l'ensemble des châtaignes qu'il a prises avant que celles-ci soient déposées une à une dans les alvéoles et d'évaluer ainsi grossièrement cette quantité : un, deux, beaucoup...



En début de Petite Section, les enfants répondent peu et se contentent souvent de hocher la tête, de regarder, de manipuler les châtaignes. Ils ne verbalisent que très progressivement et les paroles de l'adulte sont alors très importantes pour les aider à construire leurs propres réponses.

Le fait de devoir remplir une boite de 12 laisse le temps aux enfants de prendre plaisir à la seule action de remplissage avant d'avoir à se poser le problème de savoir si le but (la boite est pleine) est atteint.

Activité 2 Construire des stratégies

BUT À ATTEINDRE

Remplir successivement et exactement trois boites de 12 œufs (distinguées par des couleurs, par exemple), sans prendre plus de châtaignes qu'il n'en faut. On peut prendre les châtaignes en plusieurs fois pour chaque boite, comme dans l'activité précédente.

ORGANISATION

Atelier dirigé de 2 joueurs et 2 observateurs.

L'enseignant précise pour cette activité : « Aujourd'hui, il va falloir faire très attention. Tu dois placer juste ce qu'il faut de châtaignes, pas trop. Il ne faut pas qu'il reste de châtaignes sur ton plateau quand la boite est remplie. **Tu peux prendre les châtaignes en plusieurs fois, mais tu ne peux pas en remettre dans le panier.** S'il reste des châtaignes sur ton plateau, la boite est vidée et tu n'as pas réussi[2] pour cette boite.

Pour les enfants qui ne comprendraient pas, l'adulte effectue lui-même la tâche et se trompe au dernier coup. Il peut alors faire le constat pour lui-même et vider la boite en montrant à la fois que :

1. Le but n'est pas atteint : « Il reste des châtaignes sur le plateau, j'en ai pris trop. »

2. Ce n'est pas grave : « Cette fois-ci je n'ai pas réussi et je vide la boite, mais la prochaine fois je vais faire plus attention. »

Si l'enseignant ne souhaite pas se montrer en échec fictif, il peut utiliser la simulation d'une marionnette qui se trompe et qu'il s'agit de remettre dans le droit chemin.

2. Nous préférons dire à un enfant « tu n'as pas réussi » plutôt que « tu n'as pas gagné » car le terme « gagner » peut être ambigu. À cet âge, « gagner » c'est avoir pris plaisir à jouer et non avoir atteint un but. Nous préférons donc le terme « réussir », d'abord inconnu des enfants, mais qui prend sens dans la situation.

Quand une boite a été vidée, elle reste vide; elle est «perdue[3]» et on passe à la suivante. Si les boites sont de couleurs différentes, chaque enfant peut visualiser où il en est: « Tu as gagné la jaune, mais tu as perdu la rouge. Tu peux encore essayer de gagner la verte. » De cette manière, l'activité n'est pas trop longue puisqu'un enfant ne remplit pas plus de trois boites.

REMARQUE

Le fait d'avoir trois boites à remplir permet à l'enfant de:

- **Bien visualiser ce qui est déjà fait et ce qui reste à faire**: si sa boite a été vidée, il n'aura pas rempli trois boites au bout des trois remplissages;
- **Avoir le temps d'améliorer sa stratégie**, de faire plusieurs essais, de matérialiser les progrès réalisés à chaque partie de trois boites;
- **Prendre plaisir à réussir** ce qu'il vient d'apprendre.

Il est important qu'à la fin d'une partie (trois boites remplies, puis vidées ou non), **l'enseignant effectue un bilan ou une synthèse des acquis:** « La première fois, nous avons vidé la boite: tu te souviens pourquoi? Après tu en prenais toujours un seul parce que tu avais peur d'en prendre trop... »

Bien sûr, **si l'enfant peut «raconter» la partie lui-même, l'enseignant l'aide au maximum à verbaliser**, mais c'est au-dessus des possibilités de la plus grande partie des enfants de PS.

Pour aller plus loin

Dans cette situation, il est difficile de faire comprendre à l'enfant qu'il peut prendre la quantité de châtaignes qu'il souhaite. Sa tendance «naturelle» est d'en prendre «beaucoup». Dans les premières expérimentations, nous parlions de «poignée» et ce terme s'est avéré malheureux. D'une part, les enfants remplissaient leur main (voire leurs mains) et, d'autre part, cela ne les amenait pas à évaluer ce qu'ils avaient pris. Ce que l'on cherche est que l'enfant prenne «ce qu'il veut», ce qu'il juge nécessaire, à chaque coup, en déposant cette prise dans son plateau de manière à évaluer grossièrement si cette prise permet ou non de remplir la boite, avant de déposer les objets dans chaque alvéole. De nombreux enfants n'évaluent pas du tout ce qu'il leur faut et cherchent seulement à en prendre «beaucoup», à chaque coup. Ils n'ont pas compris qu'en prendre trop mène à l'échec de la tâche de remplissage. Il est vrai qu'en prendre trop permet de remplir la boite. Il y a grande difficulté à accepter la contrainte, parfaitement gratuite, de ne pas en avoir «en trop».

Une bonne stratégie: douze est un «grand» nombre et les enfants ne peuvent l'évaluer même si la collection est organisée en deux rangées de six. Réussir à remplir des boites de 12 œufs avec des châtaignes consiste à d'abord prendre de grosses poignées jusqu'à ce que le nombre d'alvéoles vides devienne repérable (deux ou trois pour des enfants de 3 ans) et à adapter son dernier coup. L'enfant peut ainsi passer d'une évaluation globale, lorsqu'il se trouve devant des quantités importantes (au-delà de 4 ou 5), à une «aperception globale» ou «subitizing» lorsqu'il reste très peu d'alvéoles vides.

Pas de gagnant: dans cette situation, même si les enfants jouent à deux chacun à leur tour (pour observer, verbaliser, commenter...), il n'y a pas de «gagnant». Chacun a un but à atteindre: remplir ses trois boites sans prendre plus de châtaignes qu'il n'en faut. Le fait que l'un finisse avant l'autre peut cependant donner matière à réflexion, mais c'est surtout le fait que les boites sont vidées, quand le but n'est pas atteint, qui permet aux enfants d'améliorer

3. Oui, c'est une dure sanction mais qui fait la différence entre réussir et échouer. Comme l'écrit Joël Briand dans le n° 66 de la revue «Grand N» de l'IREM de Grenoble, à propos d'une toute autre situation: « La situation permet à l'enfant de savoir s'il a échoué ou s'il a réussi. À l'ouverture d'une boite (dans la situation étudiée par J. Briand), quelle attitude l'enseignant doit-il avoir? Il faut que celui-ci montre que réussir ou échouer ne sont pas deux issues auxquelles il faut attribuer la même valeur. Or les enseignants de maternelle rechignent à tenir ce contrat, pensant décourager l'élève. »

leurs stratégies et donc d'évaluer la quantité juste nécessaire pour finir de remplir la boite.

Importance du plateau individuel: il est là pour amener l'enfant à comparer de façon implicite et personnelle ce qu'il vient de prendre et ce qu'il fallait prendre. Il sert surtout dans les fins de partie, mais il est indispensable: sans lui, les enfants posent les châtaignes dans les alvéoles et ne font que constater. En plaçant directement les châtaignes dans les alvéoles ou les pions dans les assiettes, ils seraient dans la recherche d'une solution uniquement «empirique» ou pragmatique alors que l'on veut leur donner la possibilité de construire une solution «mathématique», à leur niveau bien sûr. Lorsque les châtaignes sont sur le plateau, l'enseignant peut amener le joueur à s'interroger sur le bien-fondé de son action: « Est-ce que tu crois que ça va aller?... »

Rôle des observateurs: leur rôle n'est pas toujours facile à déterminer, mais nous avons constaté, comme dans bien d'autres situations, que certains enfants anticipaient mieux dans cette position que lorsqu'ils étaient eux-mêmes joueurs.



En décembre

Deux enfants ont construit chacun une stratégie stable

Lucia, qui prend trop de châtaignes pour remplir sa 1re boite, ne prend plus qu'une châtaigne à chaque coup, douze fois. Une semaine plus tard, elle garde cette procédure pour remplir sa 1re boite. Pour la seconde, elle prend 2 châtaignes à chaque coup. À la 3e boite, elle prend 2, 5, 3 et 2. Il nous semble qu'elle a bien intégré les consignes et commence à chercher une procédure plus efficace.

Lucas, lui aussi, prend trop de châtaignes pour la 1re boite. Pour la 2e et la 3e boite, il prend les châtaignes trois par trois. Il a entièrement automatisé sa procédure qui est efficace et plus rapide que celle de Lucia qui joue en face de lui. Nous sentons qu'il n'en changera pas, au moins dans cette partie. Il réclame une nouvelle boite et la remplit mécaniquement de 3 en 3, mais se trompe au troisième coup en n'en prenant que 2. Que va-t-il se passer à la fin? Il continue avec des prises de 3 mais, au dernier coup, réajuste en prenant une seule châtaigne!

La possibilité offerte à un enfant de prendre une nouvelle boite permet de maintenir en activité un enfant qui va plus vite.

CODAGE DES ACTIONS

Pendant l'activité, l'enseignant peut noter combien l'enfant prend de châtaignes [ou de pions] à chaque coup, pour chaque boite à remplir. Il peut, pour cela, utiliser un tableau montrant l'évolution de la tâche:

Léa 7-12-14	1e coup	2e coup	3e coup	4e coup	5e coup	6e coup	7e coup	8e coup	Échec/ Réussite	Niveau de résolution
1re boite	7	3	3						0	
2e boite	7	2	1	1					1	
3e boite	6	5	1						1	

Cette prise de note est rapide et permet de mieux être à l'écoute de l'enfant. Une fois les trois boites remplies, vidées ou non, l'enseignant peut étudier le niveau de résolution [qui concerne la résolution globale pour les trois boites].

NIVEAU DE RÉSOLUTION

L'évaluation du « niveau de résolution » n'est pas facile à faire et ne peut bien souvent avoir qu'un statut d'hypothèse. Malgré tout, l'intérêt d'un codage rigoureux est de mettre en évidence, non la **réussite de la tâche, mais les progrès dans l'apprentissage**, ce que ne permet pas toujours une appréciation trop globale. Pour cela, il est indispensable que l'enfant soit invité à résoudre plusieurs fois la même situation, parfois à des intervalles de temps importants.

Pour cette situation, nous avons utilisé le codage suivant :

0 : aucune entrée dans la situation, refus de participer
9 : place des châtaignes dans la boite, mais ne respecte pas le « un dans un »
8 : respecte la consigne de remplissage (une châtaigne dans chaque alvéole) et cherche à remplir la boite, mais n'anticipe pas la fin (même s'il y a parfois réussite)
7 : prend conscience qu'il faut faire attention « à la fin » (ralentit, par exemple) mais n'anticipe pas vraiment
6 : anticipe en diminuant la quantité prise vers la fin (par exemple n'en prend plus que 4 ou 5 à la fois alors que chaque prise précédente apportait plus de 7 ou 8 châtaignes), mais sans précision
5 : prend une seule châtaigne à chaque fois, du premier au dernier tour 6
4 : anticipe et prend vers la fin 1, 2 ou 3 (exact), sans comptage explicite
3 : anticipe vers la fin et prend 1, 2 ou 3 (exact), avec comptage explicite
2 : anticipe à partir d'un nombre plus grand que 3 avec des procédures de type spatial (par exemple dispose les châtaignes dans son plateau comme les alvéoles encore vides)
1 : anticipe à partir d'un nombre plus grand que 3 avec comptage

Ce codage peut sembler bien abstrait, trop rigoureux, voire inutile pour une pratique normale de classe ; **il n'est certes pas indispensable et chaque enseignant peut se construire ses propres outils.** Nous le proposons ici à titre d'exemple parce qu'il nous a beaucoup aidé à suivre les progrès de chaque enfant.

Activité 3 Prolongement[4]

Une activité du même type peut être conduite avec des boites contenant peu d'alvéoles (de 2 à 4, par exemple), soit dans les mêmes conditions que ci-dessus (pour les enfants qui éprouveraient des difficultés dans la gestion de 12 alvéoles), soit en obligeant les enfants à demander la quantité nécessaire de châtaignes avec leurs doigts, en choisissant une étiquette points ou en utilisant un mot nombre.



L'activité pourra être reprise en éloignant le panier de châtaignes de la boite, l'enfant ayant ou non la possibilité de faire des allers-retours entre le panier et le plateau qui, lui, reste à proximité de la boite. Dans ce dernier cas, **le contrôle de l'égalité des quantités d'alvéoles et de châtaignes est alors plus difficile** et la mémoire davantage sollicitée.

4. Merci à Roland Charnay d'avoir proposé ce prolongement dans son ouvrage *Comment enseigner les nombres entiers et la numération décimale ? De la PS au CM2*, Hatier, 2013.

ANNEXE 7 : EXTRAITS DES ÉCHANGES SUR UN FORUM (À PROPOS DE LA RESSOURCE HATIER)

Nous avons mis en caractères gras ce qui correspond à des arguments ou des questions plus ou moins en relation avec le matériel et la manipulation. (https://forums-enseignants-du-primaire.com/topic/59251-apprentissages-math%C3%A9matiques-en-maternelle-le/)

Apprentissages mathématiques en maternelle, le cd-rom aux éditions Hatier, qui a déjà travaillé avec cet outil en maternelle en classe de moyenne section/grande section ? **Par quelle activité commencer ? Quelle progression avez-vous suivi ?**

Je ne connais pas cet outil. Les situations mathématiques sont travaillées dans ma classe à partir du livre "découvrir le monde avec les mathématiques" chez Hatier. **Un tas de manips** proposées à partir d'un **matériel très accessible pour les enfants** (situations problèmes), et **de récup.** (ex: boites d'œufs).

Sauf erreur toujours possible de ma part (je n'ai pas le CD sous la main), il s'agit d'un CD-ROM reprenant ce qui est proposé dans l'ouvrage "Apprentissages numériques en grande section" de l'équipe ERMEL. **Si c'est bien le cas**, tu devrais pouvoir trouver quelques réponses à tes questions dans cet ouvrage.

---

coucou,
j'ai travaillé en stage avec ce cd l'année dernière et m'en suis servi pour mon mémoire sur les situations problèmes en maternelle. très bon outil ! **tout est clair (objectifs, déroulement...)**
j'ai le cd sous la main et ce cd est issu des travaux conduits au COREM sous l'égide de l'IREM puis du LADIST. pour renseigner Dominique...
moi **je n'y vois pas de progressions mais des idées de mises en situation en situations problèmes pour des objectifs choisis**.

Je connais le Cd dont tu parles, il nous a été **fortement conseillé** par notre formateur IUFM !
Je l'ai parcouru et je le trouve vraiment très bien fait : il propose **des situations concrètes et ludiques**, avec **du matériel à manipuler**, tout en étant **très clair avec les objectifs pédagogiques et les compétences à travailler**. En plus, plusieurs **situations sont déclinées sur une période assez longue**, avec **des variantes** très intéressantes à mettre en place !
Si tu parcours les situations, tu verras qu'ils te font **des propositions de "progressions"**, en précisant "cette situation doit venir avant ou après celle-ci...", mais sinon c'est vrai qu'il n'y a **pas de progression précise.**
J'ai testé deux activités en classe: le tri de graines en PS et les allumettes en MS, je peux te dire que **ça a très bien marché** et que **les enfants ont adoré !** Seul point "noir": il y a **pas mal de matériel à préparer**, mais ça vaut le coup. En tout cas, je suis bien décidée à travailler avec cet outil cette année ! Si quelqu'un a eu l'occasion de travailler avec ce CD toute une année, je suis aussi intéressée par son avis !

L'un des auteurs Joël Briand, enseigne à l'IUFM de Bordeaux et intervient **lors des conférences pédagogiques**. Alors peut-être que le cd rom contient **les mêmes situations que celles que je connais déjà**...?
Je ne sais pas si le cd rom indique une progression mais lors d'une conf. un exemple d'organisation possible relative au domaine pré-numérique et construction du nombre a été donné.
1- Tri de graines (PS)

2- Boites d'allumettes (MGS)
3- Mise du couvert (MS) et Voitures et garages (MGS) autocommunication
4- Voitures et garages (MGS) autocom écrite
5- Voitures et garages (MGS) comm écrite et Respectez le rang(GS)
6- Le bon panier(GS)
J'avais mis en ligne le jeu des parkings et des voitures dans un post intitulé situations problèmes. J'ai également mis en place dans ma classe de GS le jeu du bon panier. Ce sont **des situations intéressantes**, mais qui **demandent du temps** afin que l'enfant construise lui même les notions en jeu et où **les phases de bilans sont essentielles**.

---

voilà le sommaire mais **je ne trouve pas ça parlant du tout** : c'est ce que tu voulais?

Moi, ça me parle car sur Bordeaux on nous parle de ces situations à longueur de conférence.
Et on peut trouver la majorité de ces situations dans la revue Grand N Maternelle Tome 1

J'ai le cd, et je ne vois pas **par quoi commencer**, on peut commencer n'importe comment ? déjà, je n'ai **pas de coin garage** dans ma classe !
Il doit falloir **du temps pour comprendre le contenu** avant de pouvoir l'appliquer... **Ou j'expérimente, et j'essaie de tout améliorer pour la prochaine année** ?

---

tu n'as pas besoin de coin garage mais d'une centaine de voitures et de petits cartons matérialisant les garages. les activités sont triées par domaines et chacune d'entre elles est progressive.

---

il va falloir **encore dépenser**… on peut fabriquer les voitures en carton aussi ?

En stage, j'ai entendu parler de cette situation nécessitant de nombreuses voitures, on avait pensé au lot de petites voitures pas chères du genre 3 euros les 20 ou 25 mais bon, pour avoir le nombre, ça fait toujours aux alentours de 15 euros

---

l'idée est de permettre aux enfants de dénombrer une quantité de voitures, de garder la quantité en tête pour aller chercher les garages : en cherchant un peu, j'imagine qu'on peut **faire le même exercice de rapprochement de quantités avec d'autres supports**.

Bien sûr tu peux utiliser des cartons avec les voitures imprimées dessus : c'est ce que je fais depuis des années... D'ailleurs cela a l'avantage de **moins distraire les enfants**... de l'objectif car avec de vraies petites voitures, ils ont souvent tendance à jouer avec ... ou à se disputer pour avoir leur voiture préférée... C'est une situation **très facile à mettre en œuvre** et que les enfants apprécient beaucoup **bien qu'artificielle**...
Lance toi et laisse le temps aux enfants d'agir et de parler et tu verras ça sera super !

Extraits des échanges sur un forum à propos de la situation « Le bon panier »[134]

Lors d'un stage, j'ai vu une séquence (vidéo) menée en GS sur l'addition. Malheureusement je ne me souviens que de bribes mais je sais que **j'avais beaucoup aimé la démarche**. Il s'agissait de paniers et d'œufs, les enfants avaient un travail devant eux (une fiche avec un panier et des œufs ?) et ils devaient se déplacer pour aller voir une fiche. Le but pour eux était si je me souviens bien **de réaliser le travail en moins de déplacements possibles** (une fois en l'occurrence), et pour cela **ils devaient se servir de l'addition**. Il me semble également qu'il s'agissait de colorier les œufs. Est-ce que quelqu'un aurait déjà vu cette séquence ou aurait une autre séquence **avec le même style de démarche** à me proposer ?
PS: à chaque déplacement je crois que l'enfant mettait un trait à côté de son nom (il y avait un tableau prévu à cet effet), et lorsque tout le monde avait réalisé le travail on regardait qui avait fait le moins de déplacement, il expliquait alors sa démarche aux autres (il avait additionné).
PS: il me semble que ce qu'ils allaient voir en se déplaçant étaient des fiches avec un nombre associé à une couleur et un autre nombre associé à une autre couleur (mais en quoi cela réfère-t-il à l'addition alors ???? ahlala!!! Quand on n'a pas de mémoire il faut espérer que les autres en aient!!
Si vous avez une démarche quelconque liée à l'addition, ça m'intéresse aussi !

J'allais dire la même chose: c'est le **jeu du bon panier**.
J'ai déjà fait ce jeu en classe. Par contre, la plupart des élèves ont réussi à résoudre la situation problème sans forcément passer par la procédure qui consiste à calculer la somme mais seulement en mémorisant bien le message.
Pour **que l'élève puisse s'auto évaluer facilement**, j'ai inscrit les messages par ex 3 rouge et 4 bleu sur une enveloppe qui contient 3 jetons rouge et 4 bleu : les enfants ayant le droit d'ouvrir et de vérifier qu'une fois l'exercice fini. Ou pour aider les enfants en grande difficulté pendant l'exercice...
Il faut que les enfants **sachent déjà lire les nombres, énumérer et dénombrer une petite collection**.
Cette situation fait suite (enfin c'est conseillé) aux situations intitulées " Voitures et garages" du même groupe de travail

---

J'ai mis en place le jeu du bon panier dans ma classe suite au visionnage rapide de la cassette citée. Mais après votre discussion j'ai des doutes sur le déroulement que j'ai adopté...
Chaque enfant de GS avait une carte codée du type: 2 bleu 4 rouge 3 vert. Après avoir lu le code et trouver le nombre d'œufs total, il devait aller chercher le bon panier (9 œufs) parmi d'autres paniers (9, 10, 11,12,13...) mélangés et placés à distance.
Tous mes élèves ont réussi du premier coup sauf un enfant qui ne savait pas comment ajouter les nombres et transporter de mémoire la quantité (arrivé devant les paniers, il ne savait plus quel était le nombre d'œufs dans le panier !)
Fallait-il procéder ainsi ou ai-je tout faux ???

Bah ta façon de procéder me paraît être celle présentée sur le cd rom! Simplement il y a une première phase où les paniers ne sont pas à distance mais mélangés sur la table où se trouvent les enfants et ce afin que les enfants comprennent bien le principe, le but à atteindre... La deuxième phase, qui est celle que tu as mise en place, constitue celle où les enfants doivent additionner les nombres à l'avance pour pouvoir aller chercher directement le bon panier. Pour l'enfant qui n'a pas réussi, pourquoi ne pas mettre en commun la procédure adoptée par ceux qui ont réussi afin de l'aider pour la fois suivante ?

---

[134] Dire que c'est nous qui avons mis en gras ?

Ce qui m'étonne c'est que tous tes élèves aient pensé à additionner les nombres. Les miens ne sont pas passés tout de suite par cette procédure et même certains n'ont jamais pensé à cette procédure. Cela a permis de comparer par la suite les procédures de chacun et de trouver les plus efficaces. Mais cela dépend peut être du niveau de la classe ....
Le **plus difficile pour l'enseignant** dans ce type de situation est de ne **pas induire les procédures quand il donne la consigne**. Il ne faut pas non plus faire un exemple car l'enfant doit construire seule sa propre procédure (tout du moins lors du premier passage à l'atelier math) et non pas imiter la procédure de la maîtresse.

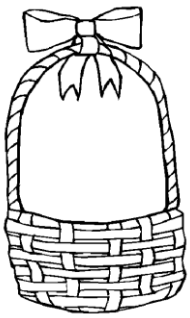
Auriez vous d'autres idées de jeu pour travailler l'addition, l'ajout de 2 nombres???
J'ai fait un jeu avec une boite où l'on met des jetons et ce en 2 fois ,ils mémorisent la quantité en fait . Je cherche un jeu **où ils manipulent pour compter ?**

Bonjour,
Je remonte ce post parce que le jeu du "bon panier" m'interesse beaucoup.
Question cruciale : OU TROUVER LES IMAGES DE PANIER ? Elles ne sont pas dans le cd-rom !!!
Merci.

Tu peux chercher dans google image et modifier à ton gout , je l'ai fait pr toi :
Bon il faudra que tu retouches un peu à la main pr le trou...



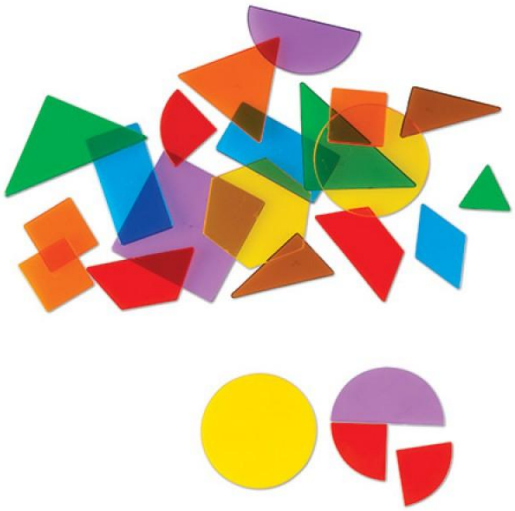
Et un troisième:



Merci, c'est vraiment gentil !
Pour te remercier je pose une autre question (hihihi) : le cd-rom dit qu'il faut une quinzaine de paniers, mais on met combien d'œufs dans chacun ?

Moi j'ai essayé la séquence cette semaine avec mes GS et pour l'instant ça a bien marché. J'ai mis entre 7 et 12 oeufs par panier et sur les fiches consignes je me suis arrêtée à 10 œufs.

COMMUNICATION



COMMUNICATION C11

MANIPULER, REPRESENTER, COMMUNIQUER EN RÉEDUCATION ORTHOPHONIQUE

Emmanuel VERGNOL
Doctorant, université de Montpellier
LIRDEF
emmanuel.vergnol@etu.umontpellier.fr

Floriane WOZNIAK
Maître de conférences, université de Montpellier
LIRDEF
floriane.wozniak@umontpellier.fr

Résumé

Selon Morel (2014), il n'est pas rare de trouver une classe où un tiers des élèves sont ou ont été suivis par un orthophoniste. Dans le cadre d'une thèse sur les pratiques des orthophonistes impliqués dans la prise en charge des troubles de l'apprentissage en mathématiques, une série d'observations a pu être réalisée en cabinet. Nous présentons dans cette communication une séance relative à la multiplication avec un élève-patient scolarisé en CM2 dans laquelle nous nous intéressons plus particulièrement aux activités de manipulation, représentation et communication en jeu.

I - INTRODUCTION

Il existe un contexte favorable à l'externalisation de l'aide aux élèves en grandes difficultés scolaires et à leur prise en charge par les orthophonistes (Morel, 2014).

Si l'institution scolaire reconnait la difficulté scolaire comme un problème qu'elle doit prendre en charge, ce dont témoigne le mille-feuille des dispositifs d'aide successivement instaurés à l'école et le nombre de textes institutionnels s'y rapportant (Vergnol, 2015), elle ne fournit pas au professeur d'éléments permettant d'objectiver la réalité et l'ampleur de la difficulté. C'est au professeur d'en assumer seul le diagnostic et le traitement sans qu'il ait véritablement reçu une formation pour ce faire. C'est ainsi que, si les difficultés persistent, l'école peut proposer un autre niveau d'aide, extérieure à la classe, en sollicitant un enseignant spécialisé (le maître E).

Mais parce que l'école est dans la société, elle ne peut échapper au double mouvement de médicalisation (Conrad, 1992 ; Petrina, 2006) et de psychologisation des problèmes sociaux (Castel, Enriquez, & Stevens, 2008). Ce phénomène, que Morel (2014) qualifie de *médicalisation de l'échec scolaire*, se spécifie en un processus complexe par lequel l'échec scolaire peut être considéré comme un problème médical : l'explication des causes des difficultés et leur traitement sont alors pensés en termes médicaux (ou psychologiques) et pris en charge par des professionnels du soin. C'est ainsi que la société française donne la possibilité aux parents de solliciter une aide extérieure à l'école en remboursant le coût financier d'une rééducation orthophonique dès lors que le médecin de famille l'y autorise. L'intervention d'un orthophoniste, réalisée sous prescription médicale, est en effet remboursée par la sécurité sociale. Son activité, qui peut se résumer par le tryptique « prévention-bilan-traitement », portant sur les « *troubles de la communication, du langage dans toutes ses dimensions, de la cognition mathématique, de la parole, de la voix et des fonctions oro-myo-faciales* » (Loi de modernisation de notre système de santé, 2016), c'est à ce titre que son intervention est sollicitée.

L'orthophoniste[135] apparaît alors comme un acteur incontournable de la prise en charge de la difficulté scolaire en mathématiques. Ainsi 35 % d'entre eux suivent des patients pour ce type de troubles, pour une moyenne d'environ 1,5h par semaine avec une tendance à la hausse (Le Feuvre, 2007). Si les troubles en mathématiques représentent une part mince de l'activité professionnelle hebdomadaire d'un orthophoniste, le phénomène de prise en charge n'est pas pour autant négligeable. Dans une étude sur les champs d'intervention des orthophonistes datant de 2011, la Direction de la recherche, des études, de l'évaluation et des statistiques (Drees) évaluait à plus de 35 000 le nombre de patients ayant consulté pour des difficultés en mathématiques alors que 75 000 élèves sont pris en charge en mathématiques par les maîtres E (estimation haute d'après les chiffres du ministère de l'éducation nationale en 2012-2013).

Comment cette prise en charge spécifique est-elle réalisée ? Qu'est-ce qui différencie le traitement de la difficulté scolaire par l'orthophoniste, le maître E ou le professeur des écoles dans sa classe ? Parle-t-on seulement des mêmes objets d'apprentissage lorsque la difficulté scolaire en mathématiques est abordée d'un point de vue thérapeutique par l'orthophoniste ou d'un point de vue pédagogique par le professeur des écoles ou le maître E ? Quelles sont les techniques de « rééducation » relatives à l'apprentissage des mathématiques ? Quelles mathématiques sont travaillées dans ces « protocoles » ? Voilà quelques-unes des questions qui nous ont conduits à nous intéresser aux praxéologies des orthophonistes lorsqu'ils prennent en charge les troubles de l'apprentissage en mathématiques. Ceci nous a amenés à réaliser des observations en cabinet et l'objet de cette communication est de présenter l'une d'entre elles.

Dans un premier temps, nous présentons la séance observée, en la situant au sein du corpus d'observations réalisé dans le cadre de nos recherches. Dans un second temps, nous analyserons le rôle de la manipulation dans cette séance. Ce faisant, nous montrerons comment s'articulent les activités de manipulation, représentation et communication.

II - PRÉSENTATION DES OBSERVATIONS

1 Les données recueillies

Dans le cadre de notre recherche sur les praxéologies des orthophonistes, nous avons pu observer soixante-quatre séances de bilan ou de traitement avec trois orthophonistes et cinq élèves-patients[136] au sein même de leur cabinet entre avril 2017 et juin 2018 (voir Tableau 1). Précisons qu'une séance de rééducation orthophonique a une durée de trente minutes environ et une séance de bilan entre trente minutes et une heure.

Élève-patient	Sexe	Âge	Classe	Séances Bilan	Séances Rééducation	Orthophoniste
EP1	F	12	5e	1	-	O1
EP2	M	11	6e	1	9	O2
EP3	M	9	CM1	2	-	O3
EP4	F	8	CE2	3	27	O1
EP5	M	10	CM2	-	21	O1
			Total	**7**	**57**	

Tableau 1. Panorama des observations effectuées

[135] La profession d'orthophoniste en France est en forte expansion : elle est passée de 4080 orthophonistes en 1980 à 23 521 en 2015 selon Kremer & Lederlé (2016).

[136] Le contexte d'externalisation de l'aide a pour conséquence de placer l'enfant en difficulté d'apprentissage mathématique comme sujet de deux institutions en même temps (médicale et scolaire), c'est pourquoi nous le qualifions d'élève-patient.

Ainsi, par exemple, nous avons pu observer une séance de bilan et neuf séances de rééducation par l'orthophoniste O2 prenant en charge l'élève-patient EP2.

Les séances observées ont été enregistrées à l'aide d'une caméra (par-dessus le bureau du professionnel, cas de la plupart des séances des patients EP4 et EP5) ou d'un dictaphone numérique (cas des élèves-patients EP1, EP2, EP3 et de deux séances d'EP4). L'accord des parents et des enfants était demandé avant toute observation et les parents pouvaient demander l'arrêt des observations en cas de gêne pour eux ou leur enfant. De même, si l'orthophoniste ne souhaitait plus participer au projet, les enregistrements cessaient, ce qui est arrivé pour les orthophonistes O2 et O3.

Dans cette communication, nous présentons la séance de rééducation 9 de l'élève-patient EP5 pris en charge par l'orthophoniste O1.

EP5 est un garçon scolarisé en classe de CM2 (né en 2007). Il est suivi en orthophonie depuis septembre 2015, à la suite d'un bilan effectué par un centre référent des troubles du langage et des apprentissages (CRTLA) qui a diagnostiqué des « fragilités logico-mathématiques ». Par ailleurs, lors du bilan orthophonique initial, les parents d'EP5 ont mentionné des difficultés scolaires en mathématiques depuis le CE1.

O1 est une orthophoniste très expérimentée, elle est également formatrice dans une école d'orthophonie et co-fondatrice d'un organisme de formation connu de la profession. Elle est spécialisée dans la rééducation logico-mathématique, c'est-à-dire que sa patientèle est composée uniquement de personnes qui consultent pour des difficultés dans le domaine des mathématiques ou de la logique.

2 La séance 9

La séance 9 dure vingt-neuf minutes et cinquante secondes et a été enregistrée le 18 janvier 2018 au cabinet de l'orthophoniste. L'enregistrement a eu lieu en l'absence du chercheur, qui attendait dans la salle attenante. Un échange entre l'orthophoniste et le chercheur a néanmoins eu lieu à la fin. La séance présentée ici porte sur le calcul multiplicatif et s'inscrit dans une séquence de huit séances sur ce domaine mathématiques (Tableau 2), elle est la troisième dans l'ordre chronologique.

Numéro de séance	Domaine abordé	Numéro de séance	Domaine abordé
1	**Calcul multiplicatif**	12	**Calcul multiplicatif**
2	Résolution de problèmes additifs de type scolaire	13	**Calcul multiplicatif**
3	Résolution de problèmes additifs de type scolaire (suite)	14	**Calcul multiplicatif, proportionnalité**
4	Logique, combinatoire	15	Dénombrement, constitution et comparaison de collections
5	**Calcul de division**	16	Jeu d'échanges (troc)
6	Logique, combinatoire	17	Jeu 'numérique' d'encastrement
7	Résolution de problèmes additifs	18	Calcul avec des fractions
8	Logique, combinatoire	19	Calcul avec des fractions
9	**Calcul multiplicatif**	20	Calcul avec des fractions
10	**Calcul multiplicatif, résolution de problèmes multiplicatifs**	21	Résolution de problèmes complexes
11	**Calcul multiplicatif**		

Tableau 2. Domaines mathématiques abordés dans les séances de rééducation d'EP5

Au cours de cette séance, il ne s'agit pas d'une première rencontre avec le type de tâche T « représenter une multiplication par du matériel ». EP5 l'avait déjà rencontré en séances 1 et 5, respectivement trois mois et deux mois plus tôt environ.

Nous pouvons partager la séance en cinq moments, en nous référant aux moments de l'étude introduits par Chevallard (2002), que nous présentons de façon synthétique dans le Tableau 3.

	Moment	Tâche	Remarques	Minutage
1	Rencontre de la tâche	Représenter 3 x 9 avec du matériel : poissons et 2 étiquettes (« 3 x 9 », « poissons »)		4 min 20 s
2	Construction de la technique	Représenter 3 x 9 avec du matériel : poissons, assiettes et 2 étiquettes (« 3 x 9 », « poissons », « assiettes »), en associant un nombre à un type de matériel	Introduction d'un nouveau matériel par O1 (les assiettes)	8 min 05 s
3	Construction de l'environnement technologique (formulation)	(D)écrire la situation matérielle construite	EP5 doit décrire puis écrire ce qu'il a fait, en utilisant des mots spécifiques (chaque, chacun, chacune)	11 min 37 s
4	Institutionnalisation	Mémoriser deux objets de savoir déclaratifs	Les deux savoirs déclaratifs à retenir : - les « *mots magiques* » de la multiplication : « *chaque, chacun, chacune* » - « *dans une multiplication les deux nombres ne parlent pas de la même chose* »	18 min
5	Travail de la technique	Reprendre les tâches des moments 2 à 4	La multiplication est la même, seul le matériel change (nounours et moules à cupcakes)	18 min 46 s

Tableau 3. Les moments de la séance 9

Au début de la séance (moment 1), O1 fait tirer deux étiquettes à EP5 : dans la boîte intitulée « uns », EP5 tire l'étiquette « poissons » et dans l'autre boîte (sans intitulé) une étiquette « 3 × 9 ». O1 énonce alors la consigne : « *tu fais trois fois neuf avec des poissons* », qu'elle complète en disant ensuite « *quand Emmanuel regardera ce qu'il y a sur l'bureau qu'il puisse dire 'ah y a trois fois neuf poissons'* ». La mise en scène avec le tirage de deux étiquettes et l'évocation d'une situation fictive (quand Emmanuel viendra…) n'aident pas EP5 à se représenter la tâche qu'il a à accomplir. L'apport de matériel ou l'action de l'élève (tirage des étiquettes) ne sont pas des conditions suffisantes pour que la dévolution se réalise. Il faut un enjeu. Quant à l'évocation de la situation fictive, elle ne dit pas davantage ce qui est attendu : changer le sujet qui regarde le produit de l'action – le chercheur plutôt que l'orthophoniste – ne lève pas l'ambiguïté de l'énoncé.

EP5 fait alors ce qu'il sait faire : il calcule le résultat de la multiplication. O1 s'en rend compte et lui signifie que le résultat en lui-même ne l'intéresse pas : « *je m'en fiche du résultat* ». Le malentendu se révèle alors à EP5 qui demande :

EP5 : qu'est-ce que j'suis censé faire ?
O1 : tu es censé faire trois fois neuf avec des poissons
EP5 : mais ça fait vingt-sept
O1 : oui ça fait vingt-sept mais
EP5 : ah trois fois trois p... trois fois d'poissons
O1 : tr...
EP5 : trois poissons
O1 : vas-y prends-les tes vingt-sept poissons

Comme la situation n'avance pas, O1 finit par laisser EP5 prendre les vingt-sept poissons. Ainsi, ce début de séance dresse le tableau de la relation didactique qui se noue : une mésogenèse[137] entièrement contrôlée par O1 et une topogenèse qui réduit EP5 à l'exécution de tâches.

L'introduction d'un nouveau matériel – les poissons – ne débloque pas la situation qui piétine malgré la tentative de l'orthophoniste de faire appel à la mémoire didactique de EP5 à propos d'un apprentissage ancien, évoquant « comment il faisait avant de savoir calculer » :

O1 : avant que tu saches tes tables comment tu faisais pour prendre trois fois neuf ?
EP5 : prendre trois fois neuf ?
O1: oui
EP5 : avec mes doigts tout avant j'comptais avec mes doigts j'utilisais
O1 : tu le savais pas, comment tu comptais trois fois neuf ?
EP5 : quand j'étais plus euh
O1: ça te parait difficile je vois
EP5 : je faisais trois plus neuf non
O1: ah est-ce que c'est pareil trois plus neuf ?
EP5 : non, non pas du tout

Ici, la question de l'orthophoniste porte sur un moment didactique qui précède l'acquisition d'une connaissance. O1 ramène donc EP5 au début de la chronogenèse sur la multiplication (au CE1/début du CE2). Or l'apprentissage conduit à une réorganisation des praxéologies antérieures : on ne se souvient généralement pas de « comment on a appris ». Cet épisode révèle une dissonance entre l'attente de O1 – représenter avec du matériel le produit 3 × 9 – et sa demande immédiate qui convoque le souvenir des débuts de l'apprentissage du calcul – comment faisait-il pour calculer une multiplication avant de connaître les tables – alors qu'elle a annoncé précédemment « je m'en fiche du résultat ». Or l'instauration d'un contrat didactique fondé sur une topogenèse réduite – l'exécution des tâches assignées – amène EP5 à répondre au « premier degré » : il raconte comment *réellemen*t il faisait quand il ne connaissait pas ses tables. Il utilisait ses doigts et se trompait d'opération. C'est ainsi que le malentendu persiste.

La séance entre alors dans un deuxième moment, qui débute quand EP5 tire l'étiquette « assiette » dans la boîte « contenants ». L'orthophoniste pose un tas d'assiettes sur le bureau et demande à EP5 d'associer les deux nombres aux deux matériels présents : « y a un des nombres qui va parler de poissons et un des nombres qui va parler d'assiettes ».

[137] La mésogenèse est le procédé par lequel le milieu d'une situation se fabrique, se développe et s'enrichit. La topogenèse est le procédé par lequel la place et les attributions (le topos) des sujets d'une institution – ici, orthophoniste et élève-patient – sont fixées. La chronogenèse est le procédé par lequel la temporalité de la diffusion et de l'acquisition des savoirs est modifiée.

L'introduction du matériel dans le milieu change sensiblement la donne pour EP5 : alors qu'il devait, dans le premier moment, penser de lui-même à spatialiser des groupements de poissons, il a maintenant un matériel qui incarne ces groupements. Notons que l'introduction des assiettes comme contenants dirige la séance vers une représentation de la multiplication comme une addition réitérée.

Lors du troisième moment, l'orthophoniste engage une tâche nouvelle :

> *O1 : tu vas essayer d'écrire en une phrase ou deux c'qu'il y a là, tu devras écrire dans ta phrase les nombres trois et neuf, et tu devras écrire les mots assiettes et poissons. Et tu devras aussi écrire le mot magique de la multiplication [silence]*
> *EP5 : [chuchote]*
> *O1: ouais le mot magique de la multiplication et de la division d'ailleurs ici il a il y a un signe mais nous ce signe c'est fois*
> *EP5 : oui*
> *O1 : mais quand on le fait avec des choses on va pas écrire fois on va écrire un autre mot magique*

Avec la disposition matérielle comme support (les trois assiettes avec neuf poissons dans chacune), EP5 a pour tâche maintenant de décrire puis d'écrire une phrase qui résume la situation. O1 attend d'EP5 qu'il utilise un mot spécifique comme « chaque », « chacun » ou « chacune ». La première proposition sera écartée par O1, car elle n'est pas assez précise : « *il y a trois assiettes avec neuf poissons par-dessus* ». Aidé en partie par une gestuelle explicite de O1, EP5 finit par donner une formulation satisfaisante : « *il y a neuf poissons dans chacune des assiettes* ».

La réussite d'EP5 mène à un moment (le quatrième) d'institutionnalisation :

> *O1 : alors tu vas sortir de là tu auras deux choses à retenir, première chose les mots magiques de la multiplication*
> *EP5 : oui*
> *O1 : c'est quoi?*
> *EP5 : c'est chacune euh c'est chaque chacun chacune*
> *O1 : chaque chacun chacune, super ensuite tu vas retenir une deuxième chose, quand il y a une multiplication, il y a deux nombres, les deux nombres ne parlent pas de la même chose, tu vois bien que en dessous d'un nombre il y a le mot assiette*
> *EP5 : oui*
> *O1 : en-dessous de l'autre nombre il y a le mot poisson*
> *EP5 : poisson*
> *O1 : et c'est toujours comme ça*

On voit donc ici, dans ce moment court (45 secondes) mais important, un nouveau surgissement du didactique. L'institutionnalisation porte sur les ostensifs langagiers et sur la différence de fonction des deux nombres dans la multiplication, sans expliciter ces deux fonctions.

Le dernier moment de la séance 9 est en fait une reprise, avec le même produit mais du matériel différent (nounours et moules à cupcakes) des moments 2, 3 et 4. L'objectif est donc ici de travailler la technique utilisée dans les moments précédents : spatialiser des groupements d'objets en instrumentant un matériel comme contenant pour représenter la multiplication 3×9. La volonté de l'orthophoniste de faire travailler la technique illustre une fois de plus la composante didactique de la séance.

Maintenant que la séance 9 a été présentée dans ses différents moments didactiques, revenons sur le rôle du matériel et de la manipulation.

III - LE RÔLE DE LA MANIPULATION

Le matériel utilisé pendant cette séance est constitué d'assiettes en plastique, de poissons en bois et d'étiquettes de trois types : une étiquette intitulée « poissons » provenant d'une boîte intitulée « uns » (non visible sur la photographie), une étiquette intitulée « assiettes » provenant d'une boîte intitulée « contenants » (non visible sur la photographie) et une « étiquette calcul » (boîte sans intitulé) sur laquelle était écrit « 3 × 9 » (Figure 1). O1 et EP5 était assis en face l'un de l'autre séparés par un bureau sur lequel a lieu les manipulations.



Figure 1. Le matériel de la séance 9

1 D'un système didactique à un autre : un matériel pour un nouveau type de tâche

Si on suit Assude et *al.* (2016) et en référence à Chevallard (1997), EP5 est soumis à deux temps didactiques : celui du système didactique principal (SDP), qu'est la classe de mathématiques de CM2 dans laquelle il est élève, et celui du système didactique auxiliaire (SDA), qu'est le suivi orthophonique dans lequel il est patient. Nous considérons que le suivi orthophonique est un système didactique auxiliaire (comme quelque chose qui aide, qui apporte son concours) car il est mandaté pour venir en aide au système principal ou, en tout cas, il existe car le système principal fonctionne *a priori* mal pour cet élève.

Dans le SDP, l'étiquette « 3 × 9 » renvoie à la demande du résultat de l'opération qui est un savoir pratiquement naturalisé à ce moment-là de la scolarité, comme en atteste le programme d'enseignement et les attendus de fin du cycle 2 (extraits du BOEN 2015) :

> *Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul*
> *- Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée..., conduisant à utiliser les quatre opérations.*
> *- Sens des opérations.*
> *- Problèmes relevant des structures multiplicatives, de partages ou de groupements (multiplication/division).*
> *- Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques.*
> *- Sens des symboles +, -, ×, :*

Dans le SDA du cabinet de l'orthophoniste, la tâche donnée avec utilisation de matériel à manipuler renvoie donc EP au début de la chronogenèse lorsque l'enjeu était de « donner du sens à la multiplication ». Ainsi, en ce qui concerne la multiplication, le temps didactique est dédoublé. Ce phénomène de (dé)doublement du temps didactique a déjà été mis au jour dans d'autres travaux (Leutenegger, 2000 ; Schmutz, 2012) qui concernent des cours de soutien ou dans le cadre de l'adaptation scolaire. EP5 doit maintenant gérer deux temps didactiques.

Au début de la séance, ayant trouvé assez rapidement le résultat, EP5 ne comprend pas quel autre problème pourrait lui être posé avec ces poissons : il a trouvé la réponse. C'est pourquoi l'insistance de l'orthophoniste signifiant que le calcul de l'opération en lui-même ne l'intéresse pas, laisse EP5 désemparé, ce qu'il verbalise par un spontané « qu'est-ce que je suis censé faire ? ». La consultation de quatre manuels courants en usage dans les classes de CE1 et CE2, classes où la multiplication fait l'objet des premiers enseignements scolaires, montre que EP5 est face à un type de tâche nouveau. Ce qui ressort d'une rapide recension des types de tâches qui concernent la multiplication et qui s'approchent de la tâche observée (Tableau 4).

En effet, nous n'avons trouvé aucune tâche qui demande de représenter une situation multiplicative avec du matériel. Quelques tâches demandent de représenter un énoncé langagier (dessin) ou de représenter un dessin organisé d'objets par une multiplication ou une addition réitérée (voir des exemples en annexe).

Type de tâche	**Cap Maths CE1**	**EuroMaths CE1**	**Opérations Maths CE2**	**J'apprends les maths CE2**
Coder une situation (addition itérée) par un produit	X	X		
Calculer un produit (addition itérée)	X	X		
Réaliser un partage équitable	X			
Associer représentation/ addition itérée/produit/ quadrillage rectangulaire		X		
Associer une représentation dessinée à une situation multiplicative (addition itérée)			X	
Représenter une situation multiplicative (addition itérée)			X	X
Dénombrer un ensemble de x collections de y objets.			X	X
Associer une organisation spatiale (addition itérée) à un énoncé langagier				X
Coder un énoncé langagier par un produit				X

Tableau 4. Types de tâches en lien avec la multiplication dans quatre manuels d'usage courant au CE1 et CE2

Dans l'institution scolaire, les situations multiplicatives mettent en relation quatre composantes : énoncé langagier (avec des formulations spécifiques), représentations dessinées (avec deux grands types d'organisations spatiales : rectangulaires ou ensemble de collection d'objets groupés), écriture additive répétée et écriture multiplicative (voir la Figure 2).

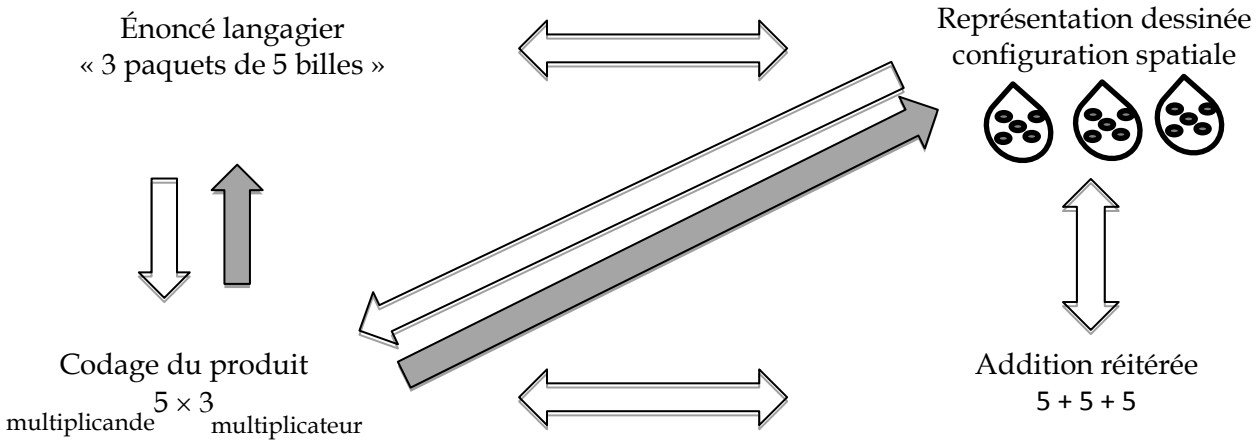


Figure 2. Composantes et relations en jeu dans les situations multiplicatives dans les manuels consultés et dans la séance 9

Dans les manuels parcourus ces quatre composantes et leurs relations sont travaillées mais dans certains sens seulement (flèches blanches de la Figure 2). Nous percevons alors que ce qui se joue dans le système didactique auxiliaire est la construction de nouvelles relations (flèches grisées de la Figure 2). C'est donc un type de tâche nouveau par rapport aux pratiques scolaires qui est l'enjeu du SDA : produire une organisation spatiale avec du matériel pour représenter un calcul. L'écriture multiplicative est donnée – le modèle est donné – il faut représenter la situation qu'elle modélise. Or, si on consulte les instructions officielles – les attendus de fin de cycle 2 – pour le calcul avec les nombres entiers, on y lit que le matériel a une fonction de production ou de validation du résultat d'un calcul : « *Pour calculer, estimer ou vérifier un résultat utiliser divers supports ou instruments : les doigts ou le corps, bouliers ou abaques, ficelle à nœuds, cailloux ou jetons, monnaie fictive* […]». Au travers du nouveau type de tâche travaillé, c'est bien une nouvelle fonction qui est assignée au matériel. Il doit à présent représenter un calcul en le contextualisant alors qu'il était jusqu'à présent un élément de la situation à modéliser.

C'est alors la conjonction du recul chronogénétique, la nouveauté de la tâche et comme nous l'avons déjà signalé, la dissonance entre l'attente de O1 – représenter avec du matériel le produit 3 × 9 – et sa demande immédiate qui convoque le souvenir des débuts de l'apprentissage du calcul – comment faisait-il pour calculer une multiplication avant de connaître les tables – qui provoque l'incompréhension d'EP5.

2 Le rôle épistémique du matériel

Pour sortir de l'impasse O1 va introduire un nouveau matériel dans le milieu. Si la nature du matériel est laissée au hasard par le tirage d'étiquettes, sa fonction est bien déterminée. L'étiquette « assiettes » est issue de la boîte « contenants », tandis que l'étiquette « poissons » est issue de la boîte « uns » (voir la figure 3).

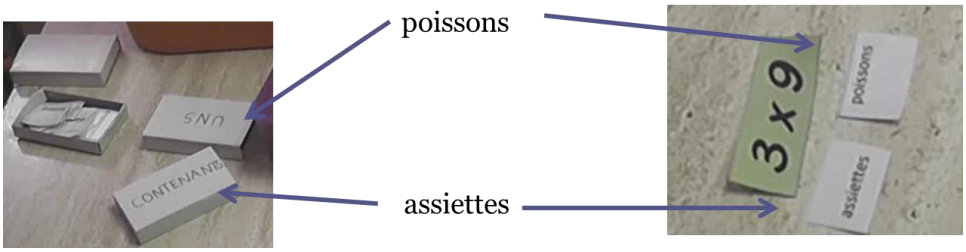


Figure3 : les étiquettes

À un type de matériel correspond une fonction du nombre dans la multiplication : la quantité de matériel « contenant » représente le nombre de termes répétés, tandis que le matériel « uns » représente ce qui est contenu, les termes répétés. O1 cherche ainsi à construire un environnement technologique dans lequel elle veut voir EP5 appliquer une technique particulière : en jouant sur la valence sémiotique des assiettes comme contenants et sur leur valence instrumentale pour représenter des groupements, l'orthophoniste attend de l'élève-patient qu'il attribue un nombre à chaque matériel et qu'il effectue des groupements.

Nous pouvons parler ici de la volonté de faire jouer un *rôle épistémique* au matériel pour représenter les groupements et les rendre visibles. Ce qui était un opérateur sans dimension (le multiplicateur) est rendu sensible par l'utilisation des assiettes. Lors d'un entretien avec le chercheur, O1 donne des éléments technologiques de ce rôle épistémique lorsqu'elle évoque l'ouvrage de Gueritte-Hess et *al.* (2016), qui a inspiré la mise en place de la séance :

> « *je suis en train de tout changer ça et là elle a super raison Bernadette, je peux pas dire autrement, il faut pas partir d'un point de vue additif, il faut d'emblée introduire un truc multiplicatif parce que sinon ils restent coincés sur de l'additif tout l'temps tout l'temps tout l'temps et si on leur dit que trois fois quatre c'est quatre plus quatre plus quatre ou trois plus trois plus trois plus trois on décolle pas, donc voilà, donc ça c'est les multi...* »

Cet ouvrage, écrit par une orthophoniste et des enseignants spécialisés, est un recueil d' « *idées* » pour aider les élèves à apprendre à résoudre des problèmes (multiplicatifs notamment). Voici trois éléments théoriques que nous retrouvons dans cet ouvrage et dans la séance. Nous trouvons d'abord un discours, repris par O1 concernant la place de l'addition réitérée :

> *Nous connaissons trop bien, de par notre pratique, les confusions que cette présentation* [par l'addition réitérée] *entraine durablement. L'apprenant s'agrippe à l'addition et ne peut en décoller puisque tout se voit. Le passage à la multiplication représente un saut important, difficile à effectuer pour de jeunes apprenants* (p. 18).

L'idée est donc ici de ne pas présenter la multiplication par l'addition réitérée, ni d'ailleurs, précisent plus loin les auteurs, par une « *méthode par grilles* » (quadrillages rectangulaires associés à un produit), présentations qui feraient obstacle à la compréhension de cette opération car trop « *complexes et réductrices* ». Nous reviendrons sur l'effet de l'introduction du matériel sur cet objectif.

Ensuite, la tâche de représentation par du matériel s'inspire également de l'ouvrage de Gueritte-Hess et *al.* (p. 22) : elle y est décrite comme une « *question fondamentale* » qui « *permet de faire un état des lieux* » et qui révèle « *la méconnaissance* » des enfants sur la « *nature* » de la multiplication. Voici l'intitulé de la question (p. 22) : « *Écrire en silence 3 x 2. Demander :* " Pouvez-vous me montrer cette opération avec les jetons que voici ? " ». Il s'agit bien de la même demande, la consigne étant légèrement différente (le verbe faire est utilisé par O1 au lieu de montrer).

Enfin, le livre que suit O1 produit un discours théorique sur « *le rapport à* "1" *dans les problèmes multiplicatifs* » :

> *Les deux nombres impliqués dans un problème multiplicatif sont de nature différente : un contenu, un contenant. Mais, sous le nombre représentant le contenu, il y a un rapport à* "1". *Découvrir ce nombre qui le cache est très difficile. C'est l'aspect le plus abstrait de la multiplication* » (p. 33).

Nous voyons bien comment O1 a fait pour incarner le couple contenant/contenu : il s'agit des boîtes « uns » et « contenants » et des matériels mis à disposition : assiette/contenant et poisson/contenu. Ceci a donc pour but de rendre visible l'opérateur sans dimension qu'est le multiplicateur en favorisant les groupements à l'aide des assiettes. Il n'est pas sûr cependant que ce soit l'incarnation, par du matériel, d'un concept mathématique qui ait aidé EP5 à réussir la tâche, tout au moins pas directement.

3 Un contrat didactique fondé sur la manipulation : manipuler pour communiquer

Le matériel est omniprésent dans la séance 9 et la tâche qui lui est assignée est une tâche de manipulation. Une fois les étiquettes, poissons et assiettes sur la table, pendant deux minutes environ, EP5 va manipuler les assiettes et les poissons pour décoder les attentes de O1. Il agit sur les objets et observe les signes d'O1 (gestes, para-verbal) ou écoute ses commentaires sur son activité pour tenter d'exécuter la tâche. Et après avoir réparti neuf poissons dans trois assiettes, finit par poser neuf poissons dans chacune des trois assiettes. Finalement, c'est l'activité de répartition – autrement dit la division comme partage – que l'élève-patient finit par arriver à exécuter la tâche.

Plus tard, c'est O1 qui va utiliser le matériel pour représenter les propositions de EP5 pour décrire la situation. La comparaison des deux situations matérielles va alors servir à O1 pour invalider la production langagière d'EP5.

C'est donc bien un contrat didactique fondé sur la manipulation et l'activité de EP5 qui est instauré : EP5 s'exécute (topogenèse réduite), utilise la manipulation pour décoder les attentes d'O1. EP5 ne dit rien, la communication passe par le geste et le regard d'O1. Et lorsqu'il s'agit de valider des formulations de EP5, c'est O1 qui retourne au matériel pour valider.

Or, le parti pris d'utiliser un matériel gène l'objectif que O1 s'était fixé. Alors que le discours technologique tenu par O1 s'oppose à l'utilisation de l'addition réitérée[138], nous voyons que, finalement, le recours au matériel dirige l'activité vers une répartition et donc une représentation spatiale de groupements réitérés car comme le souligne Vergnaud (1994, p. 121) :

> *Partir d'un matériel concret pour enseigner la multiplication revient obligatoirement à introduire la multiplication comme l'addition réitérée d'une même quantité et par conséquent à faire du multiplicande une mesure et du multiplicateur un simple opérateur sans dimension physique.*

Il se pourrait donc que ce soit la nature du contrat didactique à ce moment-là qui initie le succès d'EP5 dans la tâche.

IV - CONCLUSION

Comme nous l'avons dit, cette communication porte sur une recherche en cours. Les analyses didactiques des séances observées ne sont pas encore réalisées. Néanmoins, cette première analyse d'une séance de rééducation de la multiplication dans un cabinet d'orthophonie nous amène à formuler quatre observations que nous prendrons comme conclusion ici.

La multiplication est introduite au cycle 2 par des activités qui visent à lui donner du sens. Au cycle 3, la multiplication est devenue un outil parmi d'autres pour résoudre certaines situations. Or dans la rééducation orthophonique, la multiplication est abordée comme un objet d'étude. C'est en ce sens qu'il y a un recul chronogénétique. Cependant, du fait du nouveau rôle du matériel et du nouveau type de tâche que ce nouveau rôle fait travailler, il ne s'agit pas d'un réel recul : on ne refait pas ce qui a déjà été

[138] L'utilisation de l'addition réitérée comme entrée dans la multiplication a fait l'objet de débats comme le relate Roditi, (2002, p. 35-39).

fait. Il s'agit d'une reprise de l'étude par un type de tâche nouveau qui vise à (re)travailler le sens de la multiplication. Toutefois, le parti pris d'utilisation de matériel gène l'apprentissage visé : c'est le recours même au matériel qui induit une représentation de la multiplication comme une addition réitérée.

La séance observée met au jour le rôle épistémique qu'O1 fait jouer au matériel. D'une part en lui donnant une nouvelle fonction, celle de représenter une opération, d'autre part en jouant sur sa valence sémiotique et instrumentale pour aider EP5 à réaliser la tâche. Et ceci, au risque d'un effet Topaze (Brousseau, 2010) : là où O1 interprète la réussite de EP5 comme une compréhension du sens de la multiplication, il se peut que cette réussite soit le fait du recours au matériel.

Enfin, dans cette séance, nous avons observé un contrat didactique essentiellement fondé sur l'activité de l'élève-patient : au sein d'une topogenèse réduite et d'une mésogenèse entièrement contrôlée par O1, EP5 avance vers la solution en manipulant les objets et en tentant de décoder l'attente de l'orthophoniste.

La manipulation ici ne sert pas à expérimenter, la réponse n'est pas à produire mais à représenter car la tâche à réaliser est de rendre tangible un concept mathématique. La communication d'un état de connaissance se réalise par le truchement des objets à manipuler car même la verbalisation n'est qu'une description de ce qui a été fait. Comme si, dans cette séance, il s'était agi de faire pour dire.

Ces conclusions, provisoires car nos analyses sont en cours, sont limitées par le fait que nous n'avons rendu compte que d'une seule séance, d'une seule orthophoniste et que notre exploration des manuels n'a pas été exhaustive. La perspective de placer cette séance dans le contexte des autres séances du même domaine mathématique permettra déjà de compléter nos analyses en construisant notamment un panorama plus large des types de tâches rencontrés dans les séances de rééducation, et l'exploration plus systématique des manuels scolaires permettra de solidifier ce travail.

V - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Assude, T., Millon-Faure, K., Koudogbo, J., Morin, M.-P., Tambone, J., & Theis, L. (2016). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *36*(2), 197‑230.

Brissiaud, R., Clerc, P., & Ouzoulias, A. (2016). *J'apprends les maths CE2*. Paris, France : Retz.

Brousseau, G. (2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Castel, R., Enriquez, E., & Stevens, H. (2008). D'où vient la psychologisation des rapports sociaux ? *Sociologies pratiques*, *17*(2), 15‑27. https://doi.org/10.3917/sopr.017.0015

Charnay, R., Dussuc, M.P., Madier, D., & Combier, G. (2016). *Cap Maths CE1*. Paris, France : Hatier.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*, 17–54.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Éds), *Actes de la xie école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Conrad, P. (1992). Medicalization and Social Control. *Annual Review of Sociology*, *1*, 209‑232.

Gueritte-Hess, B., Giraud-Brun, M.-C., Reyes Mandeix, N., Saint-Viance, L., & Guéritte, M. (2016). *100 idées pour apprendre à résoudre les problèmes en maths*. Paris, France : Tom Pousse.

Kremer, J.-M., & Lederlé, E. (2016). *L'orthophonie en France*. Paris, France : Puf.

Le Feuvre, N. (2007). L'évolution des domaines d'intervention des orthophonistes. Dans L. Tain, *Le métier d'orthophoniste* (pp. 43‑52). Rennes, France : ENSP.

Leutenegger, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, *20*(2), 209‑250.

Morel, S. (2014). *La médicalisation de l'échec scolaire*. Paris, France : La Dispute.

Peltier, M.-L., Briand, J., Ngono, B., & Vergnes, D. (2012). *Euro Maths CE1*. Paris, France : Hatier.

Peltier, M.-L., Vergnes, D., Briand, J., Ngono, B., & Sampo, M. (2018). *Opérations Maths CE2*. Paris, France : Hatier.

Petrina, S. (2006). The Medicalization of Education: A Historiographic Synthesis. *History of Education Quarterly*, *46*(04), 503‑531. https://doi.org/10.1111/j.1748-5959.2006.00030.x

Roditi, É. (2002). La multiplication des nombres décimaux: enjeux, transpositions didactiques et contraintes d'enseignement. *Irem/Cahier de Didirem*, *39*.

Roiné, C. (2007). La psychologisation de l'échec scolaire: une affaire d'état. Dans *Actes du Congrès International d'Actualité de la Recherche en Education et en Formation*. Strasbourg.

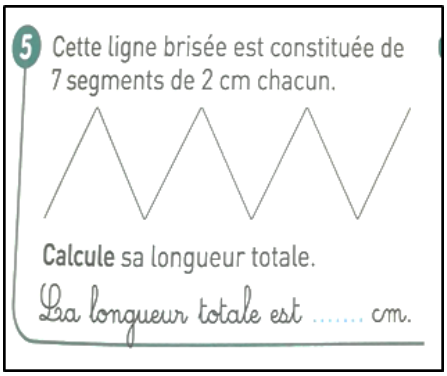
Schmutz, I. (2011). *Le soutien pédagogique, la classe ordinaire et le cabinet de logopédie/orthophonie : quelle interdépendance ? Analyse didactique de pratiques professionnelles auprès d'élèves dits « en difficulté » en mathématiques/en français* (Mémoire de maîtrise). Université de Genève, Genève.

Vergnaud, G. (1994). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Bern, Suisse : Peter Lang.

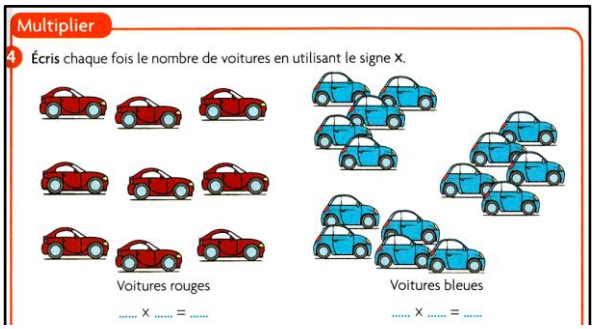
Vergnol, E. (2015). *Regards croisés sur la difficulté scolaire en mathématiques : le professeur des écoles, le maître E et l'orthophoniste* (Mémoire de master 2). Strasbourg.

VI - ANNEXE : EXEMPLES DE TACHES EN LIEN AVEC LA MULTIPLICATION DANS QUATRE MANUELS D'USAGE COURANT DE CE1 ET CE2

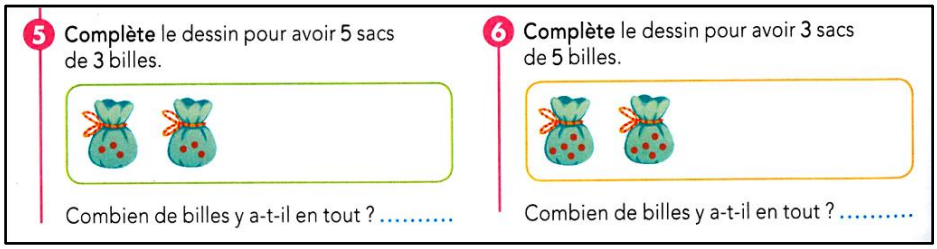
Ces quelques exemples choisis sont proposés ici à fin d'illustration.



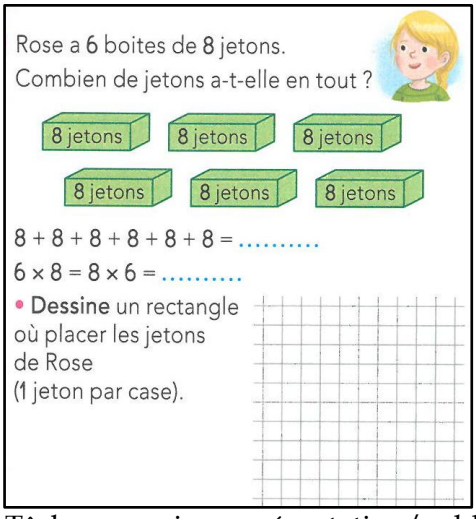
Tâche : calculer un produit (addition itérée). (Euro Maths CE1, 2012, p. 77)



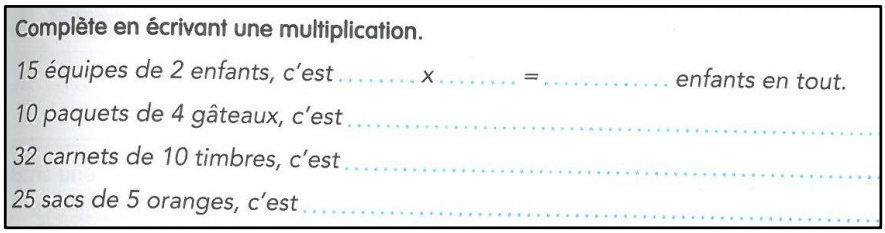
Tâche : coder une situation (addition itérée) par un produit. (Cap Maths CE1, 2016, p. 31)



Tâches : représenter une situation multiplicative (addition itérée) et dénombrer un ensemble de x collections de y objets. (Opérations Maths CE2, 2018, p. 42)



Tâche : associer représentation/ addition itérée/produit/ quadrillage rectangulaire (Opérations Maths CE2, 2018, p. 51)



Tâche : coder un énoncé langagier par un produit. (J'apprends les maths CE2, 2016, p. 47)

COMMUNICATION C12

MATH & MANIPS : FAVORISER L'APPRENTISSAGE DE L'ORGANISATION SPATIALE PAR LA MANIPULATION À L'ÉCOLE MATERNELLE

Marie-France GUISSARD
Directrice de recherche, CREM asbl
(Belgique)
mf.guissard@crem.be

Pauline LAMBRECHT
Chercheur, CREM asbl
(Belgique)
pauline.lambrecht@crem.be

Résumé

Lors de précédents colloques de la COPIRELEM (2012 et 2017), le CREM a présenté des ateliers décrivant des activités d'une recherche consacrée à l'introduction des manipulations dans l'apprentissage des mathématiques. Ces activités sont appelées Math & Manips (CREM, 2017). Cette communication propose une analyse de séquences destinées à l'enseignement en maternelle axées sur l'organisation spatiale et la géométrie.
Le premier thème principal aborde, par des activités de codage et décodage de consignes orales ou imagées, des questions de topologie comme l'intérieur et l'extérieur, les itinéraires, les notions au-dessus et en dessous.
Par un travail sur des assemblages de cartes, des empreintes et des puzzles, le second thème amène les enfants à repérer des symétries dans des figures et à reconnaître, assembler et comparer des formes géométriques simples.
Parallèlement à la description des activités, nous nous attacherons à mettre en évidence l'aspect mathématique des concepts abordés.

I - INTRODUCTION

1 Contexte et méthodologie de la recherche

Le CREM s'est impliqué dans une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves. Nous appelons *Math* & *Manips* ces activités conçues pour provoquer chez les élèves des conflits entre ce qu'ils pensent et ce qu'ils découvrent lors des expérimentations. Les élèves de tous âges, entre trois et dix-huit ans, sont confrontés (par l'enseignant ou par le milieu) à des phénomènes interpelants, qui sont organisés en une suite d'épisodes pour lesquels le recours à l'expérimentation avec divers matériels pédagogiques est propice à une meilleure compréhension.
L'activité expérimentale a pour but d'ancrer un nouveau concept dans la réalité. Une activité *Math* & *Manip* doit pousser les élèves à se poser des questions et, pour les plus âgés, les amener à entrer dans des démarches de modélisation. Elle doit donner du sens aux concepts qu'elle introduit et aux outils qu'elle nécessite, et par là même, rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés par l'aspect théorique et abstrait des mathématiques.

Dans l'esprit des travaux précédents du CREM, la recherche envisage la scolarité dans son ensemble, depuis l'école fondamentale jusqu'à la fin du secondaire en Belgique, ce qui correspond aux cycles de 1 à 4 en France. Les activités sont d'abord rédigées et documentées, en partenariat avec des enseignants du terrain. Elles sont ensuite expérimentées dans les classes de l'enseignement fondamental et secondaire et réajustées en fonction des observations et des réactions des acteurs : élèves et enseignants. Des retours de ces expérimentations sont intégrés dans les *Échos des classes* insérés dans la suite de ce texte.

L'originalité de la méthodologie sur laquelle s'appuie notre recherche réside dans le débat permanent entre enseignants de tous niveaux, formateurs d'enseignants et chercheurs. Chacun des membres du groupe de recherche présente sa production, ciblée sur la tranche d'âge pour laquelle il est le plus compétent, et l'ensemble du groupe participe à la discussion. Il s'agit ainsi d'un travail qui a une portée longitudinale.

Dans la tradition du CREM, l'ouvrage[139] issu de la recherche est destiné aux enseignants. Les documents directement utilisables dans les classes fournissent les informations nécessaires pour aborder les différents thèmes, décrivent des séquences d'apprentissage, donnent la liste du matériel nécessaire pour mener à bien les activités, et décrivent des situations rencontrées dans les classes où les activités ont été testées.

Le présent article décrit exclusivement les activités destinées aux élèves de l'école maternelle, la plupart d'entre elles ont pour cadre le monde sous-marin.

2 À l'école maternelle

Les séquences d'apprentissage destinées aux élèves de l'école maternelle sont axées sur deux thèmes principaux : l'organisation spatiale et la géométrie.

Notons que ces deux thèmes font évidemment déjà l'objet de nombreuses séances de psychomotricité dans les classes. Celles-ci sont indispensables au développement de l'enfant, lui permettent de prendre conscience de son corps et l'aident à structurer l'espace et le temps (De Lièvre & Staes, 2011). C'est pourquoi de telles séances de psychomotricité sont absolument nécessaires avant la mise en œuvre des ateliers proposés.

La partie intitulée *Repérage dans l'espace*, aborde, par des activités de codage et décodage de consignes orales ou imagées, des questions de topologie comme l'intérieur et l'extérieur, les itinéraires, les notions au-dessus et en dessous.

Par un travail sur des assemblages de cartes, des empreintes et des puzzles, la partie intitulée *Reconnaissance de formes*, amène les enfants à repérer des symétries dans des figures et à reconnaître, assembler et comparer des formes géométriques simples.

Chaque séquence d'apprentissage, qui met en avant l'aspect mathématique des concepts abordés, est organisée en plusieurs ateliers de difficultés diverses qui visent des apprentissages différents. Cette présentation est conçue pour permettre à l'enseignant de moduler les activités en fonction de l'âge des enfants et de leur niveau. Chaque atelier se déroule avec un groupe de quatre ou cinq élèves, pendant que les autres élèves sont occupés à une tâche autonome. Les ateliers proposés ne sont donc pas conçus pour être menés en parallèle.

Dans chaque manipulation, nous avons estimé essentiel de retrouver les caractéristiques suivantes :

- l'enfant est amené à faire des choix et à les justifier avant de manipuler ;
- les activités sollicitent différents modes de transmission de l'information (oral, visuel, gestuel, …) et impliquent des transferts d'un mode à l'autre ;
- l'ensemble des manipulations s'appuie sur un matériel facilement réalisable et réutilisable à différents niveaux.

II - REPÉRAGE DANS L'ESPACE

Lors des ateliers de cette séquence, les objectifs d'apprentissage pour les enfants sont d'associer le vocabulaire spatial à l'action, de s'approprier certaines notions de topologie, et de se familiariser avec la notion d'ordre.

[139] La publication, disponible au format pdf sur le site du CREM, propose en annexe le matériel spécifique à photocopier et éventuellement à découper, ainsi que les fiches qui sont destinées au cahier de l'élève et servent ainsi de traces écrites des activités menées en classe.

1 Intérieur et extérieur

Dans le langage courant, l'expression « à l'intérieur de », est souvent traduite par le terme « dans » ; de même l'expression « à l'extérieur de », est associée à « hors de ». Dans les ateliers proposés, l'enseignant veillera à exprimer chaque fois une même localisation de différentes manières.

Bien que la notion d'intérieur soit mieux perçue par les élèves de cet âge, souvent sollicités pour placer un objet à l'intérieur d'un autre, nous travaillons les deux notions simultanément tant elles nous semblent indissociables l'une de l'autre.

1.1 Des cercles et des poissons

Cette première activité consiste à compléter un plateau de jeu à l'aide de cartes représentant les notions d'« intérieur », et d'« extérieur ». La distinction entre ces deux notions passe par l'association d'un mot au dessin correspondant.

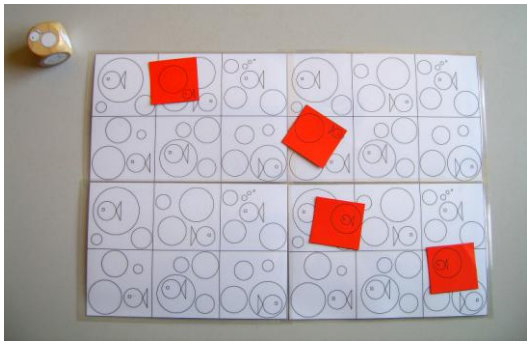


Figure 1

L'enseignant dispose au centre de la table quatre plateaux de jeu « Des cercles et des poissons » assemblés de manière à constituer un seul grand plateau composé de 24 cases (figure 1). Il place à côté, faces dessinées visibles, un tas de cartes « intérieur » - sur lesquelles un poisson se trouve à l'intérieur d'un cercle – et un tas de cartes « extérieur » – sur lesquelles un poisson se trouve à l'extérieur d'un cercle.

Notons que sur les plateaux, l'emplacement du poisson par rapport au cercle est variable, que ce soit à l'intérieur ou à l'extérieur.

Il montre aux élèves un dé « poissons intérieur/extérieur », dé dont trois faces représentent un poisson à l'intérieur d'un cercle et les trois autres faces un poisson à l'extérieur d'un cercle, et donne la consigne « *lance le dé, décris aux autres la position du poisson que tu vois sur la face du dé puis prends une carte "intérieur" ou "extérieur" selon ce que tu as décrit et place-la sur une case libre correspondante. Passe ensuite le dé à ton voisin* ».

Si l'enfant se trompe, soit en prenant une mauvaise carte, soit en la plaçant à un mauvais endroit sur le plateau de jeu, l'enseignant lui explique son erreur. L'élève remet alors la carte où il l'a prise et recommence son tour. Lorsqu'un élève lance le dé et se rend compte que toutes les cases correspondantes sont déjà occupées, l'enseignant demande quelles sont les cartes qu'il faut prendre pour compléter le plateau de jeu.

Échos des classes – Lorsque les cartes sont imprimées sur papier blanc, les enfants ne distinguent pas facilement les cases occupées sur le plateau de jeu. C'est pourquoi nous conseillons de les imprimer sur du papier de couleur.

1.2 Dé codé

On utilise cette fois un « dé codé », sur lequel trois faces montrent un point à l'intérieur d'une forme géométrique (triangle, carré, cercle), et trois faces montrent un point à l'extérieur de ces mêmes formes. Ceci amène l'élève à décoder la symbolisation des mots intérieur et extérieur représentés sur les faces de ce nouveau dé.

L'enseignant distribue à chaque élève un plateau de jeu décoré de nombreux cercles. Il dépose sur la table un tampon encreur représentant un poisson et le dé. Il demande aux élèves de décrire, pour chaque face, la position du point par rapport à la forme géométrique qui s'y trouve et donne ensuite la consigne « *lance le dé et, suivant le dessin affiché, estampille ta feuille à un endroit adéquat* ».

Avant d'agir, il est important que l'élève explique ce qu'il a lu sur le dé et indique l'endroit où il va estampiller sa feuille.

Cette activité peut être simplifiée en remplaçant, dans un premier temps, le dé codé par le dé poissons.

1.3 L'étang

L'enseignant commence par lire aux enfants une histoire ou une comptine dans laquelle il est question de poissons qui sont à l'intérieur ou à l'extérieur d'un étang (exemple en annexe). Ensuite, ils l'analysent ensemble pour découvrir tous les poissons qui se trouvent dans l'histoire et en créer une représentation à partir de douze cartes à décorer par les enfants en fonction du nom qui leur est donné dans la comptine.

Lorsque les poissons sont décorés, l'enseignant place sur la table le plateau de jeu représentant l'étang, annonce qu'il va relire lentement l'histoire et donne la consigne suivante.

« *Quand tu entends parler d'un poisson qui se trouve dans l'eau, prends son image et place-la à l'intérieur de l'étang. Si l'histoire parle d'un poisson se trouvant hors de l'eau, place le poisson correspondant à l'extérieur de l'étang.* »

Les élèves associent, chacun à leur tour, le poisson décrit par la comptine à sa représentation. À chaque phrase, un enfant prend l'image du poisson correspondant et la place à un endroit adéquat sur le plateau de jeu. Les élèves associent ainsi une information auditive à une représentation imagée.

Quand un élève place un poisson, les autres élèves l'observent et corrigent si nécessaire. Il est intéressant de montrer aux élèves qu'une multitude d'endroits correspondent à chaque information.

Remarquons que certains élèves ne perçoivent pas la surface de l'étang à la seule vue de son contour. Cependant colorier l'intérieur de l'étang dénaturerait l'activité puisque l'intérieur serait alors simplement apparenté à une couleur.

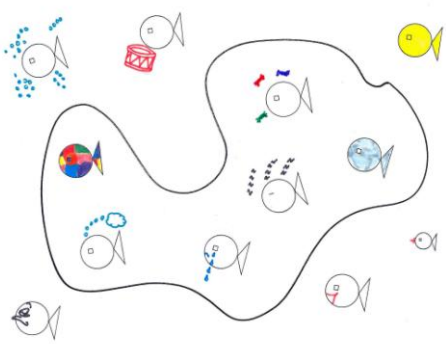


Figure 2

Dans la vie quotidienne, certaines consignes ne demandent pas d'être entendues entièrement pour être correctement appliquées. Quand on dit à l'élève de ranger les jouets « dans le bac », il n'est pas forcément attentif au mot « dans » lorsqu'il applique la consigne. La comptine proposée est écrite de manière à ce que l'élève ne puisse anticiper l'emplacement du poisson.

À la fin de l'activité, l'enseignant réalise une fiche synthèse à partir du travail effectué en classe. Un exemple se trouve à la figure 2. Cette fiche synthèse, accompagnée du texte de la comptine, prendra place dans le cahier de l'élève.

2 Itinéraires

Le but de l'activité est de favoriser l'appropriation de la notion d'ordre. Les élèves l'exercent ici au travers de tracés et de codages d'itinéraires.

2.1 Tracer un itinéraire et le coder

Cette activité consiste pour les enfants à tracer un itinéraire à partir d'une bandelette et à reconstituer une bandelette pour un itinéraire donné.

Chaque enfant reçoit une feuille sur laquelle sont représentés six éléments marins – poisson, algue, étoile de mer, méduse, corail et coquillage – et un crayon. L'enseignant montre alors aux élèves une bandelette reprenant les mêmes images. Il leur demande de « tracer » avec le doigt, sur leur feuille, un chemin qui suit l'ordre des éléments marins tels qu'ils apparaissent sur la bandelette. Cette étape, destinée à vérifier que tous les enfants comprennent la consigne, se fait collectivement. Ensuite, l'enseignant distribue à chaque élève une bandelette et un crayon puis donne la consigne suivante.

« *Trace sur la feuille l'itinéraire qui suit l'ordre des éléments marins de ta bandelette.* »

L'enseignant s'assure que chaque itinéraire tracé soit clair pour que le chemin puisse être lu facilement par un autre enfant dans la suite de l'activité. Après avoir éventuellement rectifié les itinéraires, l'enseignant retourne les bandelettes pour cacher la face dessinée. Il distribue à chaque élève six cartes reprenant les mêmes éléments marins et donne la consigne suivante.

« Change de place avec ton voisin. Observe le chemin tracé sur la feuille que tu as devant toi. Place ensuite les cartes, dans l'ordre des éléments rencontrés sur ce chemin, en partant du poisson. »

Lorsque chaque élève a réalisé l'exercice, l'enseignant demande à chacun de retourner la bandelette qui se trouve devant lui afin de vérifier l'ordre des éléments marins (figure 3). Remarquons qu'un chemin dont les éléments seraient placés dans l'ordre correct mais de droite à gauche (figure 4) sera validé par l'enseignant. Dans ce cas, la bandelette qui sert à la vérification sera tournée pour faciliter la comparaison comme l'illustre la figure 5.

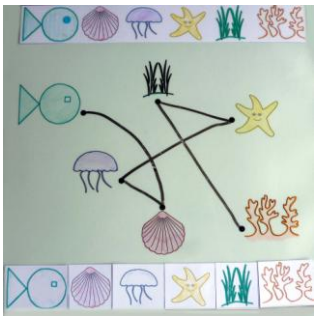


Figure 3

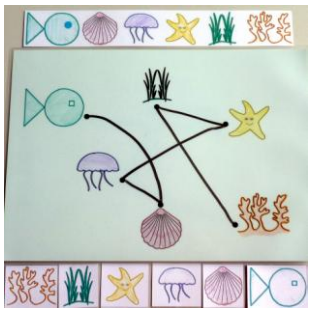


Figure 4

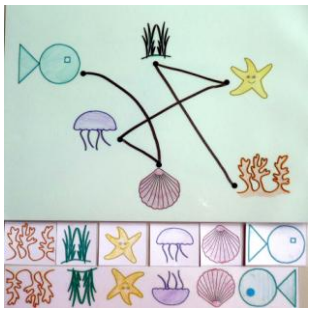


Figure 5

À la fin de l'activité, chaque enfant place dans son cahier la feuille sur laquelle il a tracé un itinéraire et la bandelette correspondante. Par la suite, l'enseignant peut recommencer l'activité en utilisant par exemple des feuilles plastifiées et des feutres effaçables.

Échos des classes – Certains enfants placent les cartes sans tenir compte du chemin tracé mais uniquement de l'ordre dans lequel les dessins apparaissent sur la feuille en le lisant de gauche à droite (figure 6). L'enseignant veillera à rectifier si la vérification par la bandelette n'est pas suffisante.

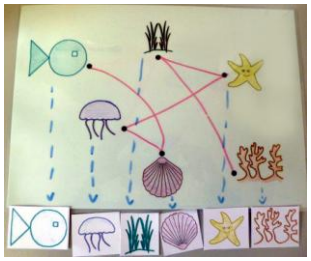


Figure 6

2.2 Associer une bandelette à un itinéraire

Il s'agit à présent de retrouver parmi un ensemble de bandelettes celle qui correspond à un itinéraire tracé. L'enseignant distribue à chaque élève trois (ou davantage) bandelettes et une feuille avec les six éléments marins sur laquelle il a tracé préalablement un itinéraire correspondant à une des bandelettes. Les itinéraires seront différents pour chaque élève. Il donne la consigne suivante.

« Parmi les trois bandelettes que tu as devant toi, retrouve celle qui correspond à ton itinéraire sachant qu'il débute au poisson. »

Une fois l'activité réalisée et corrigée par l'enseignant, les élèves remettent la bandelette avec les deux autres. Ils changent ensuite de place afin de refaire l'exercice avec un chemin différent, les chemins n'étant pas tous du même niveau de difficulté.

Échos des classes – À ce stade les élèves sont capables d'identifier parmi un ensemble de bandelettes celle qui correspond à un itinéraire. Par contre, face à une bandelette donnée, il leur est difficile de décider si elle correspond ou non au chemin tracé.

3 Au-dessus et en dessous

Dans les séances de psychomotricité, les élèves de maternelle sont souvent invités à se placer « sur », « sous », ou « au-dessus », « en dessous » d'éléments divers. Dans les activités décrites ci-après, on amène les élèves à utiliser ces repères spatiaux dans d'autres contextes, en plaçant un objet dans une position relative par rapport à d'autres. Les notions « au-dessus » et « en dessous » sont introduites simultanément.

3.1 L'arche



Figure 7

Les enfants devront placer une carte au-dessus ou en dessous d'un objet en fonction du code lu sur un dé.
Nous utilisons les cartes représentant les six éléments marins de l'activité précédente, un objet représentant une arche sous-marine sur et sous lequel il est possible de placer des cartes (figure 7).

Dans un premier temps, l'activité se déroule sans dé. L'enseignant pose l'arche sous-marine au milieu de la table, il met les cartes des éléments marins en un tas et donne la consigne suivante placer une carte au-dessus ou en dessous de l'arche suivant les indications.

L'élève prend une carte du tas. L'enseignant indique si la carte doit être placée « au-dessus » ou « en dessous » de l'arche. L'élève dépose sa carte en exprimant son action qui est alors validée collectivement.

Après un premier tour de table, l'enseignant poursuit en intégrant le dé « au-dessus/en dessous ». Il commence par identifier, avec les élèves, les différentes faces. Sur deux d'entre elles, un poisson se trouve au-dessus d'une ligne, sur deux autres faces, le poisson est dessiné en dessous de la ligne. Quant aux deux dernières faces, elles sont neutres, seul le poisson est représenté, laissant l'élève choisir « au-dessus » ou « en dessous ». Il est important de préciser aux élèves qu'il s'agit de décrire la position du poisson par rapport à la ligne et non l'inverse. L'enseignant donne la consigne suivante.

« Prends une carte " éléments marins" puis lance le dé. En fonction du dessin lu sur la face du dé, dépose ta carte au-dessus ou en dessous de l'arche, tout en décrivant ton action. Si la face du dé ne donne aucune indication, choisis l'endroit où tu souhaites la placer en annonçant ce choix aux autres élèves. »

Les élèves jouent à tour de rôle. En fonction de la carte tirée et de la face du dé, l'explication de l'élève pourrait ressembler à : *j'ai pris le corail et je le mets au-dessus de l'arche ou encore je place la méduse en dessous de l'arche.*

Notre objectif étant d'apprendre aux élèves à distinguer des positions et non pas à maîtriser du vocabulaire, dans les explications qu'ils fournissent, nous avons choisi de ne pas insister sur la différence entre « sur » et « au-dessus de » ni entre « sous » et « en dessous de ».

Échos des classes – Chez les petits, certains ne s'exprimant pas encore de manière compréhensible, ils se contentent de prendre une carte et de la placer au bon endroit. Néanmoins, il est important que l'enseignant les incite à verbaliser l'action réalisée.

Des élèves disent « en dessus » et « au-dessous ». C'est alors l'action liée à la parole qui permet de voir si la notion est comprise ou non par rapport à l'indication du dé.

3.2 Construction de tours

Les enfants vont construire des tours composées de trois blocs de jeu de construction de couleurs différentes – un bloc bleu, un rouge et un vert – à partir d'informations comportant les mots « sur », « sous », « au-dessus », « en dessous » et « entre ». Les notions « sur » et « sous » sont travaillées d'abord séparément puis simultanément.

L'enseignant donne à chaque élève un bloc de chaque couleur et lui demande de construire une tour à l'aide de ces trois blocs. Cette première consigne a pour seul objectif de vérifier que la notion de tour correspond pour tous à un empilage vertical des trois blocs.

La consigne est ensuite précisée :

« Construis une tour de trois blocs dans laquelle le bloc vert se trouve sur le bloc rouge. »

Chaque élève construit une tour puis la dépose sur la table. L'enseignant vérifie avec les élèves que l'information donnée a bien été respectée. Deux tours différentes peuvent apparaître : une tour « bleu-rouge-vert » et une tour « rouge-vert-bleu ». Si l'une de ces tours n'est pas représentée, l'enseignant la construit et la dépose à côté des autres tours. Les élèves constatent que deux « modèles » sont possibles et devraient prendre conscience qu'une instruction supplémentaire est nécessaire pour que toutes les tours soient identiques.

La consigne est alors précisée : « *Construis une tour dans laquelle le bloc vert est sur le bloc rouge et où le bloc rouge est sur le bloc bleu.* »

Une fois les tours construites et les constructions vérifiées, l'enseignant donne une nouvelle consigne en modifiant l'ordre des couleurs. D'autres constructions sont ensuite proposées en utilisant uniquement le mot « sous ». Pour chaque construction, l'enseignant peut donner la première partie de la consigne et attendre que les élèves la réalisent avant de donner la seconde partie de la phrase.

Par après, l'enseignant donne des consignes comportant les deux notions simultanément comme *construis une tour dans laquelle le bloc bleu est sur le bloc vert et sous le bloc rouge*. Un élève pourrait dire que, dans ce cas précis, le bloc bleu est « entre » les blocs rouge et vert. Cette remarque fait le lien avec la consigne suivante.

« *Construis une tour où le bloc vert se trouve entre le bloc rouge et le bleu.* »

Les élèves déposent leur tour sur la table afin de les comparer. Deux modèles de tours répondent aux informations données à savoir bleu-vert-rouge et rouge-vert-bleu. L'enseignant amène les élèves à comprendre qu'une information complémentaire est nécessaire à la construction de tours identiques. Sa consigne devient alors la suivante.

« *Construis une tour où le bloc vert se trouve entre le bloc rouge et le bleu, et où le bloc vert est sous le bloc bleu.* »

Chaque élève modifie sa tour s'il le juge nécessaire, en fonction de l'information supplémentaire entendue. Sur la table, toutes les tours devraient être identiques.

Échos des classes – Les élèves s'attachent toujours à construire leur tour en déposant les blocs sur leur base. Ainsi pour la dernière consigne, lorsque leur tour ne respecte pas la deuxième contrainte, ils reconstruisent la tour plutôt que de la retourner.

3.3 Description de tours

Les élèves se munissent de leurs trois blocs. L'enseignant propose à un élève « architecte » de construire, à l'abri du regard des autres, une tour de trois blocs. Puis il lui donne la consigne suivante.

« *Décris ta tour en utilisant les mots « sur », « sous », « entre » pour que tes copains puissent construire chacun une tour identique à la tienne.* »

Des informations redondantes ou contradictoires pourraient être formulées. Une information redondante comme *le bloc rouge est sur le bloc vert* suivie de *le bloc vert est sous le bloc rouge* ne permet pas d'avancer dans la construction. Des informations contradictoires telles que *le bloc rouge est sur le bloc vert* et *le bloc vert est sur le bloc rouge* rendent la construction impossible.

L'enseignant sera attentif à ce que l'élève exprime toujours la position d'un bloc par rapport à un autre ou par rapport à la table. Dire *le bloc rouge est au-dessus* n'est pas complet, même si l'on comprend bien que, pour l'élève, cela veut dire que le bloc rouge est au sommet de la tour.

Lorsque tous les enfants ont construit leur tour, toutes les tours sont déposées sur la table. Les vérifications et corrections peuvent alors s'effectuer. L'activité est ensuite répétée plusieurs fois pour que chaque élève puisse prendre le rôle de l'architecte.

Échos des classes – Malgré la précision de la consigne, certains élèves décrivent spontanément leur tour avec des phrases telles que *il y a d'abord le bloc vert, puis le rouge et puis le bleu*. L'enseignant rappelle alors que la tour doit être décrite en utilisant les mots « sur », « sous », « au-dessus », « en dessous » ou « entre ».

3.4 Description de tours avec contraintes

Il s'agit à présent de décrire des tours de trois blocs en utilisant exclusivement certains mots pour indiquer les positions relatives des blocs.

L'enseignant demande à un élève de construire une tour de trois blocs à l'abri du regard des autres. Il demande à un autre élève de lancer le dé « au-dessus/en dessous » utilisé dans l'activité précédente puis donne à l'élève architecte la consigne suivante.

« Si le poisson est au-dessus de la ligne, utilise uniquement les mots « sur » ou « au-dessus » pour décrire ta tour. Si le poisson est en dessous de la ligne, utilise uniquement le mot « sous » ou « en dessous ».
Si la face du dé n'indique pas de position pour le poisson, les mots « sur » (ou « au-dessus ») et « sous » (ou « en dessous ») doivent être utilisés dans tes informations. »

L'élève architecte donne des renseignements aux autres élèves en respectant les informations données par les faces du dé afin que chacun d'eux construise une tour identique à la sienne. Les indications peuvent être données en plusieurs phrases avec un temps d'arrêt marqué entre les informations.

Lorsque chaque élève a construit sa tour et l'a déposée sur la table, la tour cachée est dévoilée et on procède à la vérification. On répète l'activité pour que chaque élève ait l'occasion de prendre le rôle de l'architecte.

III - RECONNAISSANCE DE FORMES

Les compétences visées lors des ateliers de cette séquence sont de reconnaître des figures qui présentent une symétrie d'axe vertical, retrouver l'image d'une figure par symétrie axiale, identifier différentes formes géométriques par l'analyse informelle de leurs caractéristiques, et reconnaître l'équivalence de surfaces obtenues par différents assemblages de formes.

1 Symétrie

L'objectif est de reconstituer des figures géométriques en respectant une symétrie axiale.

À partir d'un jeu de cartes « solo » (une seule forme) d'une seule couleur (figure 8), l'enseignant reconstitue sur la table toutes les paires symétriques. Il laisse aux élèves un temps d'observation et puis leur demande pourquoi il a placé les cartes par deux de cette manière.

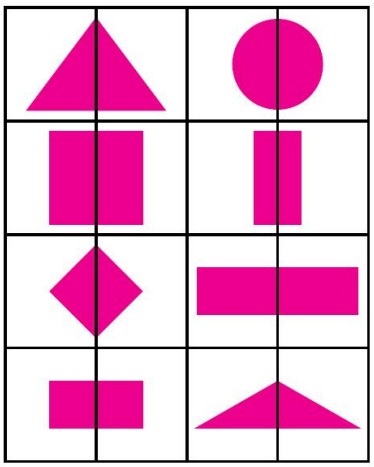


Figure 8

L'objectif est de permettre aux élèves de se familiariser avec les cartes symétriques. L'enseignant propose aux enfants de parler de « cartes amies » pour désigner les paires symétriques.
Devant les élèves, l'enseignant reprend une carte de chaque paire et reconstitue des paires dont certaines sont symétriques et d'autres pas. Il demande d'indiquer les paires symétriques et de justifier pourquoi les autres ne le sont pas ; il récupère au fur et à mesure les paires non symétriques. Ensuite, après avoir reconstitué les paires symétriques, il prend une carte de chaque paire, parfois celle de gauche, parfois celle de droite. Il mélange les cartes collectées et les dispose en une pile devant les élèves puis donne la consigne : *« Prends la première carte de la pile et place-la à côté de sa carte amie pour reconstituer les formes que nous venons d'observer. »*

Les élèves réalisent un assemblage chacun à leur tour. Une fois qu'ils sont capables de reconstituer des paires symétriques, l'enseignant intègre huit paires de cartes « solo » de l'autre couleur. Il dispose sur la table une carte de chacune des seize paires et empile les cartes restantes. Il donne alors la consigne suivante : *« Prends la première carte de la pile et place-la à côté de sa carte amie pour reconstituer des formes d'une seule couleur. »*

L'enseignant peut réaliser la même activité plusieurs fois tout au long de l'année en la complexifiant grâce à des cartes « duo » (deux formes) d'une couleur ou de deux couleurs (figure 9).

Échos des classes – La perception de la symétrie d'une figure est déjà très présente intuitivement chez les élèves. Ils arrivent d'emblée à reconnaître des paires symétriques et des paires qui ne le sont pas. La difficulté de l'activité réside principalement dans l'identification de la carte amie.

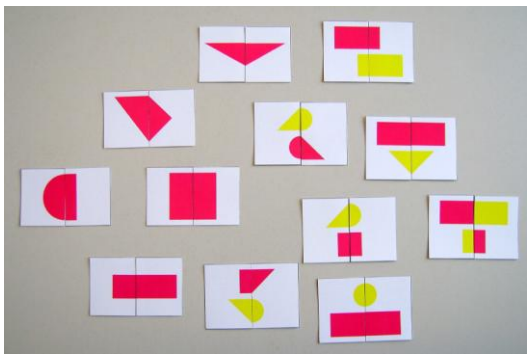


Figure 9

2 Empreintes

Avant de commencer l'activité, l'enseignant explique ce qu'est une empreinte. Il peut en faire la démonstration en enduisant de peinture une face plane d'une boîte et en l'appliquant sur une feuille de papier. Par la suite, il montre qu'on peut obtenir le même effet en contournant cette face de la boîte et en coloriant l'intérieur de la forme ainsi tracée. Ce sont les surfaces ainsi obtenues que nous appelons « empreintes » dans cette activité.

Nous travaillons uniquement avec les empreintes de faces planes, l'objet ne peut ainsi ni glisser ni rouler lorsqu'on trace le contour d'une face. Par exemple, les seules empreintes d'un cylindre prises en considération seront des disques. Remarquons que des empreintes assez différentes, non planes, sont obtenues en enfonçant des objets dans du sable par exemple. Ces dernières ne font pas l'objet de cette activité.

L'activité nécessite un ensemble de boîtes, au moins deux boîtes de plus que le nombre d'élèves du groupe, et si possible deux boîtes différentes ayant une empreinte commune. Par exemple : prismes droits à bases triangulaires, à bases hexagonales ou octogonales, à bases carrées, pyramides, boîtes cylindriques, boîtes à base ovale. Un échantillon de dix boîtes permet de nombreuses comparaisons intéressantes.



Figure 10

2.1 Empreintes libres

Il s'agit de faire découvrir aux élèves différentes formes obtenues par des empreintes de boîtes.

L'enseignant dépose les boîtes en vrac sur la table, afin qu'elles ne soient pas toutes présentées dans une position habituelle. Il choisit une boîte et réalise sur une feuille l'empreinte d'une de ses faces en la contournant à l'aide d'un feutre et en coloriant l'intérieur de son tracé. Il insiste sur le fait que l'empreinte d'une face correspond à toute la surface colorée et non à son contour. L'enseignant distribue quelques feuilles et un feutre à chaque élève puis donne la consigne suivante. « *Choisis une boîte et dessine des empreintes.* »

Les élèves devraient dessiner plusieurs empreintes en plaçant leur boîte de différentes manières sur leur feuille. Par exemple, une boîte en forme de prisme droit à bases triangulaires peut donner des empreintes triangulaires et des empreintes rectangulaires. Si nécessaire, l'enseignant encourage l'élève à dessiner plus qu'une seule empreinte, dans la mesure du possible, sans pour autant lui demander de les dessiner toutes.

Si un élève dessine deux empreintes identiques, c'est l'occasion de faire remarquer que les faces correspondantes de la boîte sont identiques. Cette première manipulation a pour but de familiariser l'élève avec la notion d'empreinte et non de trouver toutes les empreintes possibles d'une même boîte.

2.2 *Association*



Figure 11

L'étape suivante consiste à associer des faces planes de boîtes à des formes géométriques à partir de leurs empreintes.

L'enseignant place sur la table des grandes feuilles sur lesquelles sont dessinées les empreintes de toutes les faces des boîtes présentées aux élèves. Il donne la consigne suivante : « *Choisis une boîte puis retrouve ses différentes empreintes.* »

À tour de rôle, chaque élève choisit une boîte, regarde une de ses faces et cherche l'empreinte qui lui correspond. Il dépose alors la boîte sur cette empreinte. Si l'association est correcte, la boîte se positionne exactement sur l'empreinte.

La vérification est faite par le groupe puis l'élève poursuit en choisissant une autre face de la même boîte. Lorsque l'élève, aidé par le groupe, a trouvé toutes les empreintes possibles de sa boîte, la boîte est retirée de la table.

La démarche inverse est travaillée également. L'enseignant montre une empreinte dessinée et donne la consigne :

« *Montre la face d'une boîte qui correspond à cette empreinte et vérifie ton choix.* »

L'élève choisit une boîte et montre une face du solide qui correspond à l'empreinte. L'élève vérifie son choix en déposant la face de la boîte choisie sur l'empreinte. La boîte est ensuite remise avec les autres boîtes. Puis, c'est l'élève qui a trouvé une boîte correcte qui désigne une empreinte pour le suivant.

Si l'échantillon de boîtes le permet, l'enseignant peut faire trouver aux élèves deux boîtes ayant une face qui donne la même empreinte. Ces deux faces sont alors identiques, on peut les « coller » l'une contre l'autre.

2.3 *Ressemblance*

Pour terminer, on demande aux enfants d'associer la face d'une boîte à une figure géométrique, quelles que soient ses dimensions.

L'enseignant dispose sur la table les différentes boîtes, des gommettes et quatre formes de couleur représentant un carré, un triangle équilatéral, un rectangle et un disque, puis donne les consignes suivantes.

« *Choisis une boîte et montre une de ses faces. Si possible, identifie cette face à l'une des figures géométriques proposées. Prends une gommette de même couleur que la figure et applique-la sur la face indiquée.* »

Chacun à son tour, un élève montre une face et repère la figure correspondante parmi les formes se trouvant sur la table. De ce fait, il apprend à observer la forme d'une figure indépendamment de ses mesures, et indépendamment du solide. Lorsqu'il a placé une gommette sur une face identifiée, il replace la boîte sur la table. Si l'élève montre une face plane qui ne correspond à aucune figure de référence, il ne met pas de gommette et explique pourquoi. L'élève suivant choisit une face, sur la même boîte ou sur une autre, et fait le même exercice.

Deux faces avec des gommettes de même couleur sont associées à une même figure, mais ne sont pas pour autant superposables. Une boîte parallélépipédique ayant six gommettes de la même couleur sera soit un cube (composé de faces carrées identiques) soit un parallélépipède rectangle (composé de paires de rectangles identiques).

Notons pour l'enseignant que, si les faces carrées ou circulaires sont bien semblables[140] à la figure de référence, il n'en est pas de même pour les rectangles qui, eux, peuvent être très différents : il y a des rectangles « très allongés » et des rectangles « presque carrés ». Il est important de montrer aux élèves que les faces rectangulaires d'une même boîte peuvent être très différentes bien qu'elles soient identifiées par une gommette de même couleur.

L'activité peut également se faire en sens inverse à savoir, choisir une figure géométrique et chercher une face de boîte qui lui correspond.

Échos des classes – Lorsque les élèves participent à deux activités successivement, ils reprennent systématiquement la boîte choisie lors de la première activité pour réaliser la deuxième. L'enseignant peut intervenir en encourageant chacun à prendre une boîte différente.

3 Puzzles

Les activités sont menées à partir de cartes de différents types représentant des poissons, et de formes géométriques qui permettent de les paver. Les poissons ont des corps carrés, placés tantôt sur un côté, tantôt sur une pointe. On parlera de cartes « poisson-côté » lorsque le carré est placé de manière à ce que les bords du corps soient parallèles aux bords de la carte, et de cartes « poisson-pointe » lorsque le carré est placé sur sa pointe.

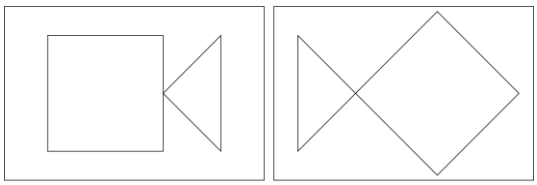


Figure 12

Les assemblages possibles sont les mêmes pour les deux types de cartes. Cependant, les pièces fournies à l'élève pour paver un poisson-côté ou un poisson-pointe sont choisies pour l'obliger à placer certaines pièces dans des positions qui ne lui sont pas familières.

Le matériel est conçu de telle sorte que la queue du poisson soit un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est de même mesure que la longueur des côtés du carré qui forme le corps. Ce n'est pas toujours en plaçant l'angle droit d'un triangle dans un coin du carré que l'on trouve une solution.

Le but de cette activité est d'observer les différentes caractéristiques des figures et de les comparer par superposition afin que l'assemblage des pièces des puzzles ne se fasse pas uniquement par essais et erreurs.

4 Puzzle poisson-contour

La première activité se mène avec des cartes qui reprennent uniquement le contour du poisson et se déroule en deux temps. Tout d'abord, chaque élève reçoit trois cartes poisson-côté et une enveloppe contenant trois grands triangles verts, quatre triangles moyens bleus, trois carrés rouges et quatre petits triangles jaunes. Les pièces permettent de recouvrir exactement les trois poissons. L'enseignant invite les élèves à observer les pièces qu'ils ont reçues dans l'enveloppe. L'observation de ces figures permet de voir que chacune d'elles possède au moins un angle droit et que certaines ont des côtés de même longueur.

L'enseignant donne la consigne suivante : « *Recouvre entièrement les trois poissons en utilisant les formes que tu as reçues.* »

[140] Deux figures sont semblables si l'une est l'agrandissement ou le rétrécissement de l'autre. Les angles correspondants sont alors égaux et le rapport des longueurs correspondantes est constant. Par exemple, un dessin à l'échelle est semblable à l'original.

L'enseignant précise aux élèves que les pièces ne peuvent ni se superposer ni sortir du contour du poisson comme à la figure 13 et que, de ce fait, il est parfois nécessaire de modifier l'emplacement des pièces comme à la figure 14.

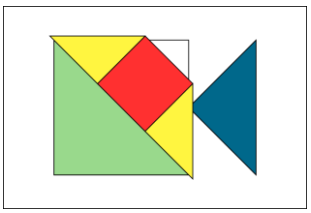


Figure 13

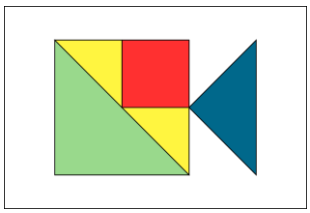


Figure 14

Le dépassement du contour ne sera peut-être pas perceptible par tous les élèves d'autant plus que certaines pièces sont petites. L'enseignant y sera donc attentif.

Le remplissage s'effectue librement et les combinaisons de pièces sont multiples. La queue, par exemple, peut être constituée d'un triangle moyen bleu ou de deux petits triangles jaunes.

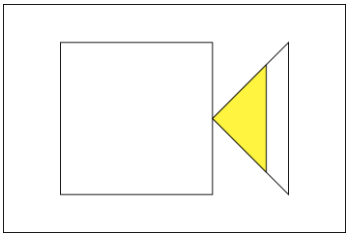


Figure 15

Si un élève n'a plus de triangle bleu pour recouvrir la queue, mais qu'il lui reste des petits triangles jaunes, un premier réflexe est de superposer l'angle droit du petit triangle jaune sur l'angle droit de la queue du poisson (figure 15). Dans ce cas, il n'est pas possible de terminer le recouvrement.

Les pièces géométriques sont conçues de manière à ce que l'élève puisse assembler deux petits triangles jaunes pour former un triangle moyen bleu ou un carré rouge, comme l'illustrent les figures 16 et 17.

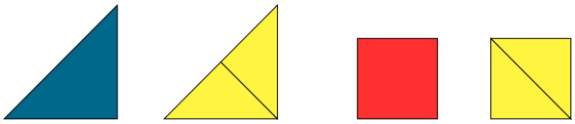


Figure 16

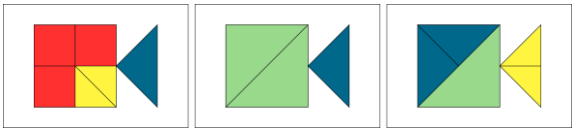


Figure 17

Certains élèves se retrouveront peut-être dans une situation semblable à celle de la figure 18, laquelle nécessite l'exploitation des équivalences pour réarranger les pièces au sein du dernier poisson, comme le montre la figure 19.

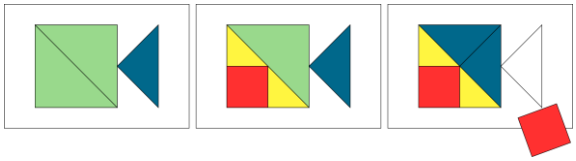


Figure 18

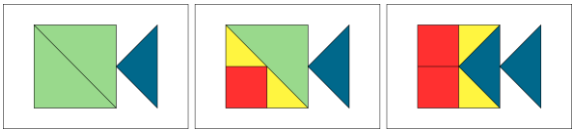


Figure 19

Il peut aussi arriver qu'un élève ne puisse pas terminer l'exercice car les pièces qui lui restent ne lui permettent pas de paver entièrement le dernier poisson, comme dans la figure 20. Il est important que l'enseignant s'accorde avec l'élève sur l'impossibilité de terminer le travail en conservant les puzzles déjà finalisés. Il encourage alors l'élève à débloquer la situation en échangeant des pièces avec les poissons déjà complétés, ce qui implique une déconstruction partielle du travail déjà accompli.



Figure 20

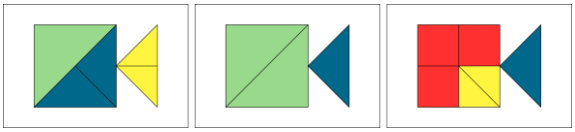


Figure 21

Dans notre exemple en figure 20, une solution consiste à rassembler deux grands triangles verts dans le corps d'un même poisson et les trois carrés rouges avec deux petits triangles jaunes dans le corps d'un autre. On obtient ainsi les puzzles de la figure 21.

Une activité similaire est menée ensuite avec les cartes où le corps du poisson est un carré sur pointe et une enveloppe contenant trois rectangles orange, six triangles moyens bleus, un carré rouge et quatre petits triangles jaunes.

Nous avons choisi de paver deux carrés identiques mais placés différemment sur une carte car les pavages qui en résultent montrent par exemple aux élèves qu'un rectangle n'est pas toujours positionné verticalement ou horizontalement. Le fait que l'élève soit confronté, dès son jeune âge, à l'image d'un carré sur pointe, l'amène à le reconnaître quelle que soit sa position et à ne pas confondre, plus tard, un carré sur pointe et un losange.

Échos des classes – Tous les élèves n'utilisent pas la même stratégie pour construire les poissons. Certains commencent par placer toutes les queues, d'autres recouvrent un poisson à la fois, d'autres encore placent des pièces sur chaque poisson sans logique apparente.

Dans la majorité des cas, les élèves placent d'abord les grandes pièces – rectangles orange ou grands triangles verts – et placent les angles droits des pièces dans les coins du carré qui représente le corps du poisson.

Lorsqu'un élève a placé les trois grands triangles verts, dont deux sur un même poisson, une remarque souvent émise est qu'*il manque des pièces*, qui sous-entend qu'il n'y a plus de grand triangle vert pour couvrir entièrement un deuxième poisson, ce qui le mène à chercher parmi les pièces qui lui restent de quoi remplacer la pièce manquante.

4.1 Autres puzzles

Pour chaque type de cartes on dispose aussi de cartes « pièces » sur lesquelles les contours des pièces et un œil sont dessinés et de cartes « œil » sur lesquelles seul l'œil du poisson est dessiné (figure 22).

Ces autres puzzles sont proposés, chaque fois avec une enveloppe de pièces adaptée. Le puzzle poisson-pièces fournit des pistes qui seront exploitables pour réaliser les puzzles suivants, notamment pour disposer judicieusement les pièces avec œil.

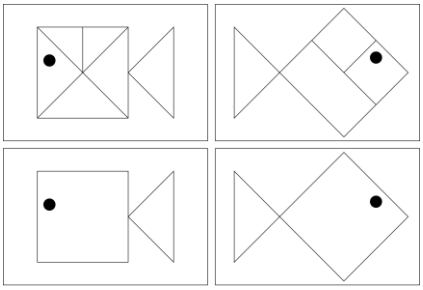


Figure 22

4.2 Puzzles avec contraintes

Il s'agit ici de recouvrir un poisson avec le moins de pièces possible, puis d'augmenter le nombre de pièces en en remplaçant une à chaque étape. L'intérêt de cette activité est aussi de travailler les équivalences et la comparaison des surfaces (sans la nommer).

D'autres questions suivent : paver un poisson avec le plus de pièces possible, le plus de couleurs possible…

Échos des classes – Régulièrement, les enfants expriment qu'ils ont besoin des pièces les plus grandes pour paver un poisson avec un minimum de pièces et des pièces les plus petites pour le paver avec un maximum de pièces.

IV - CONCLUSION

Il reste essentiel de travailler les notions de topologie par le corps, comme c'est le cas lors des séances de psychomotricité qui sont couramment pratiquées avec les tout-petits. Cependant, il nous a paru qu'on n'accorde peut-être pas toujours suffisamment d'attention à la prise de conscience des positions relatives d'objets extérieurs à l'enfant. C'est cet aspect que nous avons voulu développer dans nos activités dévolues au « repérage dans l'espace ».

La partie intitulée « reconnaissance de formes » est consacrée à une approche précoce des formes géométriques, y compris les rapports d'aires entre des formes simples qu'on peut comparer par décompositions et assemblages.

En particulier, la présentation de l'activité « Puzzles » à des publics variés (autres que les enseignants et formateurs de maternelle), nous a permis de constater à quel point ce genre d'activité était riche pour des apprenants de tout âge. Une telle approche développe des compétences très utiles pour aborder des problèmes liés à des décompositions de figures que de trop nombreux élèves à la fin du primaire et dans

le secondaire ne parviennent pas à résoudre. Une des raisons se trouve sans doute dans le fait qu'ils n'y ont pas suffisamment été préparés.

La mise au point de telles activités d'apprentissage pour les enfants de maternelle et les expériences menées dans les classes de tout petits nous ont convaincus davantage de l'importance de prendre le temps de mettre en place ces différentes notions avec les jeunes enfants.

V - BIBLIOGRAPHIE

CREM (2017). Coord. : Guissard, M.-F., Henry, V. *Math & Manips - Des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques.* CREM : Nivelles [https://www.crem.be/publications].

De Lièvre B., Staes L. (2011). *La psychomotricité au service de l'enfant, de l'adolescent et de l'adulte. Notions et applications pédagogiques*. De Boeck : Bruxelles.

Guissard M.-F., Lambrecht P. (2017). *Math & Manips* : Manipuler pour construire la notion de volume. *Actes du 44e colloque COPIRELEM*, Epinal.

Henry V., Lambrecht P. (2012). *Math & Manips* : introduction de manipulations dans les classes pour favoriser la construction des apprentissages. *Actes du 38e colloque COPIRELEM*, Dijon.

VI - ANNEXE

La famille poisson

La famille poisson
Vit dans un étang
Calme et reposant
Comme une grande maison

Mais lors de grands vents
Pires qu'un ouragan
Poisson en or, tu restes dehors
Poisson d'argent, tu es dedans
Poisson rieur, à l'extérieur
Poisson pleureur, à l'intérieur

La famille poisson
Vit dans un étang
Calme et reposant
Comme une grande maison

Lors de grands beaux temps
C'est l'chambardement
Poisson gourmand, tu restes dedans
Poisson junior, tu vas dehors
Poisson râleur, à l'extérieur
Poisson rêveur, à l'intérieur

La famille poisson
Vit dans un étang
Calme et reposant
Comme une grande maison

Lors de brises légères
Quand le jour se lève
Poisson tambour-major, tu vas dehors
Poisson pétillant, hors de l'étang
Poisson dormeur, à l'intérieur
Poisson couleur, à l'intérieur

COMMUNICATION C14

QUE NOUS APPRENNENT LES PROCEDURES DES ELEVES LORS DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES UTILISANT LA REGLE A L'ECOLE ?

Jacques DOUAIRE
Equipe ERMEL (Ifé)
jacques.douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN
Equipe ERMEL (Ifé)
CEREP- Université de Reims
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé

L'équipe ERMEL conçoit, expérimente, et produit des ingénieries didactiques (Artigue, 2002) sur l'ensemble de l'enseignement des mathématiques à l'école. En géométrie l'analyse des procédures de résolution des élèves dans des problèmes conduit à questionner le rôle de la manipulation, de la représentation et de la communication. En prenant l'artefact « règle » comme point d'entrée, nous proposerons d'étudier une évolution des tracés instrumentés des élèves à différents niveaux de l'école élémentaire. En particulier quelles sont les composantes de l'activité géométrique tant dans la production de tracés ou leurs contrôles par l'élève, que dans la maîtrise de l'outil ou l'évolution de son usage ?

PRÉSENTATION DE LA COMMUNICATION

Les observations, analyses et questions sur les tracés à la règle, abordées dans cette communication, sont issues des expérimentations de la recherche actuelle de l'équipe ERMEL (IFé-ENS-Lyon) sur les apprentissages spatiaux et les apprentissages géométriques de la Grande Section au CE1. Comme pour les autres recherches de l'équipe ERMEL, celle-ci présente deux buts. D'une part nous avons à expliciter les problématiques d'enseignement en prenant en compte les pratiques, besoins et difficultés des enseignants en identifiant : les composantes des apprentissages, les connaissances (procédurales ou déclaratives) dont les élèves disposent initialement, les problèmes ou activités permettant leur évolution, ainsi que les obstacles auxquels ils peuvent être confrontés. D'autre part, nous avons à produire des ressources pour les enseignants et les formateurs, leur proposant une vision cohérente des apprentissages dans ce domaine et en particulier de la place de la résolution de problèmes sur plusieurs années.

Or les enquêtes que nous avons menées auprès des enseignants nous ont montré la nécessité de leur fournir des outils d'analyse des connaissances des élèves, pour leur permettre d'identifier dans les gestes ou les formulations des élèves, les connaissances déjà présentes et d'envisager ainsi leur évolution. Toutefois dans le domaine des apprentissages spatiaux et géométriques les analyses des connaissances des élèves et les justifications de progressions issues de travaux de recherche dont peuvent disposer les enseignants sont plus réduites que dans le domaine numérique.

Cette description des observables, en particulier des gestes avec les instruments, et des productions lors des tracés constitue, selon nous, une première exigence en vue de la modification des pratiques, afin que les catégories « manipuler, représenter, communiquer » ne se réduisent pas simplement à des préalables, voire des prétextes à la transmission d'un vocabulaire géométrique, répété plusieurs années de suite et parfois déconnecté des potentialités mathématiques des élèves.

La finalité de notre recherche est de produire une ressource qui permette une transformation des pratiques d'enseignement cohérente avec les choix constants de l'équipe ERMEL : le développement des apprentissages mathématiques de l'élève par la résolution de problèmes prenant en compte ses

connaissances réelles dans les situations proposées. L'identification précise des connaissances que les élèves peuvent réellement mettre en œuvre étant indissociable de la proposition d'activités pour les développer.

Cette communication se situe dans la continuité des précédentes communications proposées à la COPIRELEM, elle aborde l'analyse des tracés issue de nos premières expérimentations puis les nouvelles hypothèses de recherche ainsi que des objectifs d'apprentissage possibles[141].

I - COMPOSANTES DE LA NOTION

Quelles sont les connaissances qui, au CP ou au CE1 peuvent contribuer à des acquisitions à plus long terme, c'est à dire qui ne correspondent pas seulement à la réussite de tâches ponctuelles lorsque l'on dit aux élèves ce qu'ils doivent faire « trace, plie… » mais qui deviennent des procédures fiables pour la résolution de problèmes spatiaux ou géométriques ? En d'autres termes quelles sont, dans le domaine du tracé de traits droits les connaissances susceptibles d'être développées et comment les activités menées au CP ou au CE1 peuvent-elles contribuer à ces acquisitions ?

Pour répondre à ces questions il est nécessaire d'analyser les composantes du savoir mathématique, les significations spatiales associées ainsi que connaissances déjà disponibles ou les obstacles présents chez les élèves de CP et de CE1. En effet les différents aspects des apprentissages liés aux tracés ou à la notion de trait droit permettent d'une part de représenter des objets du monde réel et, d'autre part, constituent une composante d'un savoir géométrique en constitution qui possède des propriétés que l'élève découvrira progressivement au cours de sa scolarité.

1 Aspects mathématiques « théoriques » de la notion

D'un point de vue théorique, une droite peut être caractérisée :

- comme intersection de plans ;
- comme courbe de rayon de courbure infini ;
- comme « la ligne la plus courte entre deux points » ;
- comme solution d'un problème de distance (par exemple une médiatrice) ;
- comme l'ensemble des points invariants d'une transformation (axe de symétrie dans le plan, axe rotation dans l'espace) ;
- comme l'ensemble des points alignés avec deux points.

2 Aspects « spatiaux » de la notion

La notion peut être appréhendée par l'élève du primaire à travers différentes significations en appui sur la perception ou l'expérience :

- un objet matériel : un fil tendu, un objet ou un bord d'objet rectiligne, un rayon lumineux, un pli de feuille… voire des objets « composés » (un mètre de menuisier que l'on déplie, des baguettes mises bout à bout…) ;
- la frontière entre :
  - deux régions planes de l'espace
  - deux régions du plan, comme des demi-plans ;
- la trajectoire d'un objet ponctuel animé d'un mouvement rectiligne (bille,…) ;
- le tracé de traits rectilignes dans l'espace graphique avec la règle, avec un logiciel de géométrie.

Nous nous appuyons sur nos recherches en cycle 3 pour faire de nouvelles hypothèses de recherche.

[141] Nous les avons proposés dans les quatre derniers colloques de la COPIRELEM, pour les lecteurs qui souhaiteraient avec des comptes rendus plus détaillés de ces expérimentations.

II - ÉTAPES DE LA RECHERCHE

1 Nos choix pour les CE2 et le CM

Dans une recherche précédente sur les apprentissages géométriques et la résolution de problèmes du CE2 au CM2 nous avions cherché à identifier quelles étaient les connaissances disponibles. Nous avions ainsi repéré que certains élèves au début du CE2 étaient surpris de constater qu'un trait pouvait être tracé entre deux points éloignés sur une feuille de format A3 ; pour eux le trait était ce qu'ils pouvaient tracer avec un double décimètre, et l'expérience du prolongement leur était étrangère.

Au CE2, nous nous étions appuyés sur certaines significations citées précédemment pour enrichir les représentations des élèves et développer les tracés : par exemple, un trait tracé sur une feuille peut anticiper un pli à produire (symétrie) ou être prolongé pour représenter une visée réalisée dans l'espace. Nous avions aussi vu que l'usage de la règle pour tracer des traits droits était, en général, appréhendée par les élèves, la qualité technique du tracé pouvant être améliorée.

Dans cette recherche nous avions produit des problèmes pour lesquels ces aspects de la droite étaient des solutions optimales comme dans le cas de « œil qui voit tout ». Les élèves devaient dire si « œilquivoittout » peut voir « le personnage » ou pas un paravent étant placé dans le dispositif placé sur une table (figure 1).

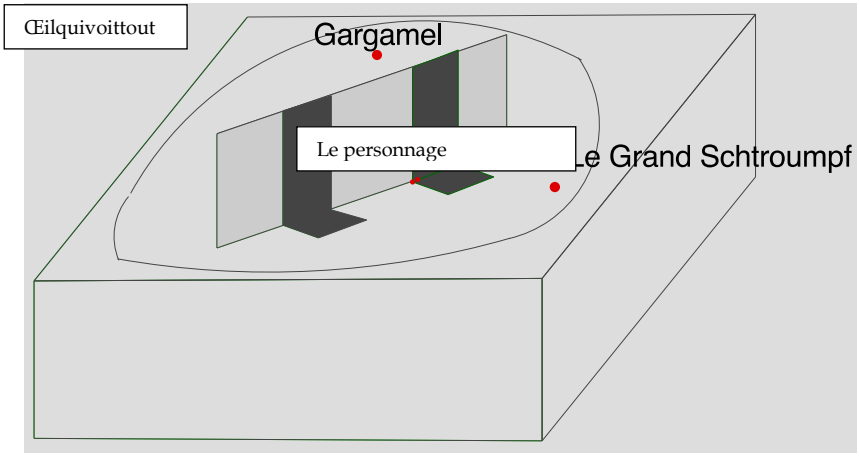


Figure 1. Dispositif matériel dans le méso-espace

Ce travail nous a conduit à émettre des hypothèses au début de notre recherche sur le cycle 2.

2 Une première hypothèse au CP et au CE1

Aussi au début de notre recherche actuelle nous nous sommes interrogés sur les aspects mathématiques de la notion de droite à aborder ainsi que sur la ou les signification(s) spatiale(s) sur laquelle (lesquelles) s'appuyer. Notre hypothèse initiale était de développer des expériences spatiales dans le méso-espace.

Nous avons donc envisagé de donner une signification spatiale au trait droit par une approche de la notion d'alignement fondée sur des expériences spatiales centrées sur l'idée de cacher un objet (résolu au moyen de la visée), à partir d'activités vécues dans l'espace de la cour ou du gymnase qui présentent les caractéristiques du méso-espace (en particulier l'élève fait partie du dispositif qu'il peut contrôler du regard). En effet le fait de cacher un objet derrière un autre (ou de se cacher soi-même), à une distance plus ou moins proche de celui-ci, pour qu'il ne soit pas visible de la place d'un observateur constitue une expérience assez partagée par les élèves.

3 Situation PLOT : cacher un objet

Le problème proposé était de placer un plot afin qu'il soit aligné deux par deux avec quatre autre plots dans la cour (consigne : où placer un plot bleu pour que, de sa place, le plot jaune cache le plot orange et que le plot rouge cache le vert cf. photographie ci-dessous). Puis, dans un deuxième temps, un problème analogue était proposé sur papier crayon, modélisant la situation résolue dans la cour, afin de

faire apparaître la ligne droite comme un moyen efficace pour résoudre un problème d'alignement de points. De façon similaire, il s'agissait donc de trouver, sur le papier un point aligné avec deux couples de points, représentant les plots dans la cour, la solution résidant dans l'intersection des deux droites formées par chaque couple de points.



Figure 2. Photographie d'un dispositif d'alignement de plots dans la cour.

En l'occurrence nous pensions ainsi permettre aux élèves de se constituer une expérience spatiale pour donner une signification au recours à des tracés de traits droits. Nous faisions l'hypothèse que des procédures développées dans le méso-espace seraient réinvestissables dans des tracés sur la feuille de papier et faire apparaître un trait droit comme une solution d'un problème d'alignement.

4 Résultats

Dans cette situation alors que, dans la cour, les élèves développaient des procédures spatiales de résolution s'appuyant sur la visée et d'autres gestes, la modélisation par une droite de la visée n'était pas effective dans la résolution sur papier. Certaines procédures dans le méso-espace (visée, utilisation des pas pour aller droit…, appui sur des repères propres à la cour) n'avaient pas de traduction dans le micro espace de la feuille. De plus, des difficultés spécifiques de tracé se posaient sur la feuille de papier, d'une part pour la compréhension de la symbolisation des objets de la cour (les plots vus de dessus représentés par des points), mais surtout pour le tracé à la règle de traits droits ; en effet, beaucoup de productions comportaient des lignes brisées et non des lignes droites, sans que les élèves n'y perçoivent de contradiction.

Deux difficultés principales apparaissaient donc : d'une part des élèves ne comprenaient pas en quoi le tracé sur la feuille représentait une modélisation de la situation vécue auparavant. D'autre part beaucoup d'élèves traçaient des lignes brisées, n'effectuant pas de déplacement correct de la règle pour reporter des traits sans qu'ils n'aient conscience de leur erreur.

Le trait droit ne leur était pas apparu comme solution à des problèmes.

III - NOUVELLES HYPOTHÈSES ET EXPÉRIMENTATIONS

Nous avons donc envisagé de traiter les difficultés repérées sur les tracés de traits droits, indépendamment de la résolution éventuelle sur papier crayon de problèmes d'alignement transposés du méso-espace. Il s'agissait que les élèves puissent découvrir comment prolonger un trait, percevoir qu'une ligne brisée n'est pas solution. Nous voulions aussi préciser quelles étaient les significations spatiales du trait droit dont les élèves disposaient ou qu'ils pouvaient acquérir. Nous distinguions donc deux composantes dans les activités de tracé, relatives à :

- L'« alignement » : la production d'alignements (placer des points ou des objets alignés) ou l'identification d'alignements (dire si trois points ou trois objets sont alignés).
- La « rectitude » portant notamment sur la capacité technique à tracer un trait droit dans différentes tâches et à découvrir les conditions des tracés.

Nous abordons plus spécifiquement ici les questions de rectitude qui concernent la production de traits rectilignes (produire un trait rectiligne, le prolonger) ou le jugement de traits rectilignes (dire si un trait en prolonge un autre) ainsi que la reconnaissance et l'usage des instruments susceptibles d'être utilisés dans ce but.

Afin de mieux connaître les compétences et difficultés des élèves, nous avons expérimenté deux types de problèmes à différents moments du CP ou du CE1.

- D'une part des problèmes où l'élève doit prolonger des traits tracés sur une grande feuille, nécessitant le report d'outils ; dans ce cas le seul tracé d'un trait droit avec un double décimètre ne suffisait pas et Il est alors nécessaire d'effectuer des reports avec la règle pour prolonger un trait jusqu'au bout de la feuille. Au risque de produire des lignes brisées où des traits presque alignés mais décalés les uns par rapport aux autres.
- D'autre part une situation où les élèves ont à joindre cinq points pour tracer une étoile. Celle-ci est réalisée avec un fil de laine sur une planche où des clous en constituent les sommets ; puis les élèves doivent la reproduire sur papier. Le trait droit apparaît ici comme composante d'une figure.

Notre hypothèse est que c'est dans la comparaison des productions entre elles et aussi avec le modèle que les élèves peuvent identifier les différences, les erreurs, en exprimer les causes et donc progresser. Comme pour les autres apprentissages mathématiques le rôle de ces problèmes est de permettre aux connaissances et conceptions des élèves – qu'elles soient compatibles avec les savoirs visés, ou qu'elles constituent des obstacles de différentes nature – d'être explicitées et ainsi traitées, notamment lors de mises en commun.

1 Situation PAPIER PEINT : prolonger des traits

Les versions des situations successives proposées différaient par le contexte : dans un premier temps celui-ci était un papier peint composé de bandes parallèles. Les élèves disposaient d'une amorce de papier peint (à bandes horizontales) dont ils avaient à prolonger les traits frontières des bandes sur une grande feuille. Puis nous avons simplement proposé de prolonger des traits tracés sur une feuille de format A3 ou voisin. Les élèves avaient le choix des instruments afin de les amener à identifier les difficultés et les techniques de tracé. Quelques productions de cette dernière activité au milieu de l'année du CP sont présentées sur les figures 3, 4 et 5.

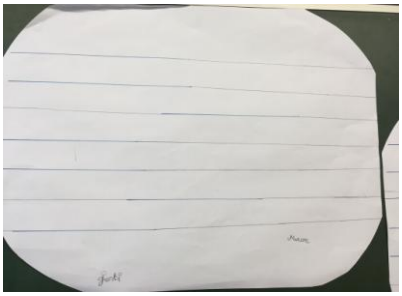


Figure 3. Des tracés à la règle

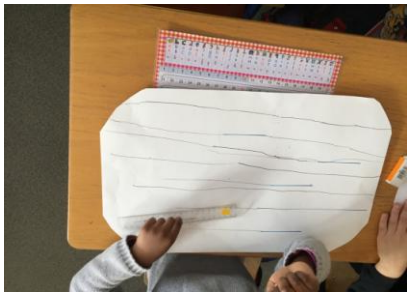


Figure 4. Des tracés sans règle

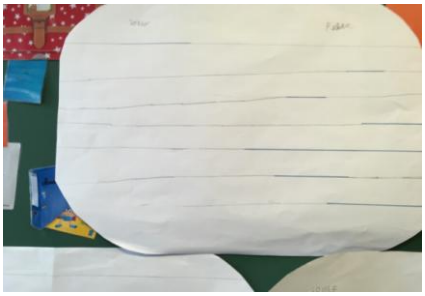


Figure 5. Des tracés « mixtes »

Nous avons observé au CP, avec des élèves qui n'avaient pas encore été confrontés à ce type de problème et quelle que soit la période de l'année, que de rares élèves en restaient à des tracés uniquement à main levée.

2 Situation ÉTOILE : Tracer une figure

Dans la deuxième situation L'ETOILE quelques élèves produisaient aussi des tracés à main levée. Cette difficulté ne relève pas seulement d'une mauvaise analyse ou compréhension de la figure, du but à atteindre mais d'une faible capacité à produire des tracés à la règle, liée à un manque de pratique ou des expériences ayant pu leur donner confiance en leur capacités, (en dehors d'élèves rencontrant des difficultés spécifiques d'ordre moteur ne relevant pas des mathématiques)

Un des éléments caractéristique est que des élèves ayant effectués des tracés à main levée peuvent avoir conscience de ne pas réussir ce qui leur est demandé, même en affirmant qu'ils ont « fait une étoile », ou en disant eux-mêmes qu'ils ne peuvent pas la tracer avec la règle.

D'autres types de productions, dans cette situation, ont apporté un éclairage sur les connaissances des élèves. Par exemple , un élève après avoir tracé – correctement - les trois premiers côtés affirme qu'il s'est trompé car la figure ainsi formée représente un « A » majuscule et qu'il voulait faire une étoile, sans identifier qu'elle en constitue une étape. Un autre, une fois tracés les deux premiers traits issus d'un des sommets, trace les autres en plusieurs morceaux, comme s'il devait s'arrêter à chaque intersection ainsi créée.

Il nous semble important que les séances conduites permettent une explicitation de ces représentations.

IV - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Les trois problèmes proposés ont donc des finalités différentes, même si la première (modéliser une activité vécue dans le méso-espace) n'a pu être atteinte. En effet il s'agit de comprendre que le tracé de traits droits :

- permet de trouver un emplacement (un lieu point ou plot comme intersection de deux droites) pour la situation PLOT,
- de reproduire une figure pour la situation ETOILE,
- doit satisfaire des conditions pour correspondre à un prolongement de traits pour la situation PAPIER PEINT.

Mais dans ces trois situations les points ne constituent pas des éléments définissant le tracé. Dans PLOT l'idée de cacher, ou l'action de viser donne aux objets un autre statut que celui d'un point sur une feuille. Dans ETOILE c'est principalement la conformité à la forme générale qui est le critère de jugement de la figure, avec notamment des caractéristiques de taille, de rectitude des traits. Dans les tracés de PAPIER PEINT (ou des versions suivantes) les points sont absents.

Dans ces problèmes l'apprentissage du tracé comporte plusieurs éléments :

- comprendre le but à atteindre : pourquoi faut-il prolonger le trait ?
- savoir tracer un simple trait avec un instrument ;
- expliquer la technique de report de la règle ;
- être capable d'anticiper la direction d'un trait.

Ces apprentissages nous semblent pouvoir être développés dès le CP. Les situations citées constituent pour les élèves des expériences qui leur permettent de construire une représentation du trait droit et d'acquérir progressivement une habileté technique fondée sur l'analyse de leurs productions et leur contrôle.

V - BIBLIOGRAPHIE

Argaud, H.-C., Barbier, L., Douaire, J., Emprin, F., Gerdil-Margueron, G., Vivier, C. (2016). Ressources pour la résolution de problèmes et les apprentissages géométriques au cycle 2 : une approche spatiale des figures courbes et du cercle. *In actes du XLIIème colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques COPIRELEM : former et se former … quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ?* Besançon les 16, 17 et 18 juin 2015. [CD-ROM]. ARPEME.

Argaud, H.-C., Douaire, J., Emprin, F. (2018). Actions, langages, représentations dans la résolution de problème spatiaux et géométriques de la GS au *CE1 In actes du XLIVème colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques COPIRELEM*. Épinal les 13, 14 et 15 juin 2017. [CD-ROM]. ARPEME.

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui, *Revue Internationale des Sciences de l'éducation,* n°8, 59-72.

Équipe ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*, (Hatier ed).

COMMUNICATION C15

LE TERRAIN D'ALPHONSE OU LES INFORTUNES DE LA MESURE

Alain KUZNIAK
Professeur
LDAR (EA 4434) Université Paris Diderot, UA UCP UPEC URN
alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

Assia NECHACHE
MCF, ESPE de Hirsh
LDAR (EA 4434) Université de Cergy-Pontoise, UA UPD UPEC URN
assia.nechache@hotmail.fr

Résumé

Dans cette contribution, nous nous proposons de revisiter le jeu entre paradigmes GI et GII dans le cadre du curriculum actuel qui accorde une place importante aux activités de modélisation dans l'apprentissage des mathématiques. Nous avons proposé à des étudiants de master MEEF 1er degré et de licence pluridisciplinaire, une tâche géométrique de modélisation sur l'estimation de l'aire d'un terrain, le terrain d'Alphonse. La résolution de la tâche suppose une articulation entre GI et GII en questionnant le rôle de la mesure et la place de l'approximation. Elle vise à aider ces étudiants à identifier les paradigmes en jeu dans la résolution d'une tâche géométrique de façon à éviter certains blocages sur la nature du travail mathématique attendu. S'insérant dans une perspective de formation d'enseignants en géométrie, notre communication se propose de montrer l'intérêt des outils didactiques développés dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique pour comprendre et influer sur le travail géométrique réellement produit par les étudiants futurs professeurs des écoles.

I - INTRODUCTION ET OBJECTIFS

1 Le contexte de la recherche

Dans cette communication, nous présentons une partie d'une recherche portant sur l'étude du travail géométrique des étudiants se destinant au métier de professeur du premier degré. Il s'agit pour nous de revisiter le jeu entre paradigmes GI et GII (Houdement et Kuzniak, 2006 ; Tanguay et Geeraerts, 2012) dans le cadre du curriculum actuel (dans la scolarité obligatoire) qui accorde une place importante aux activités de modélisation dans l'apprentissage des mathématiques.

Dans le cadre du master MEEF 1er degré, nous avons proposé à 45 étudiants de première année de master, une tâche géométrique sur l'estimation de l'aire d'un terrain, « le terrain d'Alphonse ». La résolution de cette tâche fait appel à la modélisation et elle suppose une articulation entre GI et GII en questionnant le rôle de la mesure et la place de l'approximation. Elle vise à aider les étudiants à identifier les paradigmes en jeu dans la résolution d'une tâche géométrique de façon à éviter certains blocages sur la nature du travail mathématique attendu.

Cette recherche s'insère dans une perspective de formation d'enseignants en géométrie et ses objectifs se déclinent comme suit :

- identifier le travail géométrique réellement produit par les étudiants pour le comprendre et à terme pouvoir l'influencer
- sensibiliser les étudiants aux questions de mesure et d'aire en relation avec les paradigmes géométriques GI et GII et avec le jeu possible entre ces deux paradigmes.

Par ailleurs, notre communication se propose de montrer l'intérêt des outils didactiques développés dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et Nechache, 2014 ; 2015) pour comprendre et influer sur le travail géométrique réellement produit par les étudiants futurs professeurs des écoles.

2 La tâche proposée aux étudiants : le terrain d'Alphonse

L'énoncé de la tâche est :

> Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?
>
> *Une information complémentaire*
>
> Alphonse a demandé à une amie périgourdine de l'aider et celle-ci ne lui a renvoyé que la longueur d'une des diagonales : 630 m.

Pour résoudre cette tâche, les étudiants doivent mobiliser des connaissances portant sur les quadrilatères, la notion d'échelle et de la mesure de l'aire d'un quadrilatère. De manière originale, la réalisation de cette tâche suppose une première modélisation liée à la forme et la représentation du terrain.

II - ÉLÉMENTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

Cette recherche s'inscrit dans le cadre théorique des Espaces de Travail mathématique articulé avec la notion de paradigme géométrique.

1 Les paradigmes géométriques

Rappelons que les paradigmes géométriques et les usages possibles de cette notion en formation des enseignants ont déjà fait l'objet de plusieurs présentations à l'occasion des colloques de la Copirelem. Pour une présentation complète, nous renvoyons plus particulièrement aux articles de Kuzniak et Rauscher (2003, 2004). Quant au modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM), son usage en formation des enseignants dans le cas de la géométrie est notamment illustré dans l'article de Gomez-Chacon et Kuzniak (2011). Il a été également présenté dans une communication (Kuzniak, 2014) lors du colloque de la Copirelem en 2014.

Selon Kuhn (1976), un paradigme désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Cette notion de paradigme permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe d'individus qui travaille sur le même sujet. En se situant dans le même paradigme, les personnes peuvent alors se comprendre car elles utilisent un vocabulaire et des concepts communs qui leur permettent d'envisager et de traiter un problème de la même manière. A contrario, lorsque les individus ne se réfèrent pas au même paradigme, des malentendus vont apparaître, souvent source d'une réelle incompréhension.

Dans le cadre de l'enseignement, il est possible d'identifier trois paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 2006) appelés respectivement GI, GII et GIII et définis comme suit :

- ***le paradigme GI*** définit une géométrie qui s'intéresse au monde de la pratique, au monde des dessins, des objets réels, il s'agit de ce qu'on peut appeler la géométrie naturelle (ou Géométrie I). Cette géométrie a pour source de validation la réalité et le monde sensible. D'une certaine façon, tous les types d'arguments rationnels, en particulier pragmatiques et expérimentaux, sont permis pour justifier une affirmation et convaincre un interlocuteur.
- ***le paradigme GII*** renvoie à une géométrie axée sur la démonstration, très attentive aux propriétés, aux théorèmes, aux relations entre les définitions des objets. Il s'agit de la géométrie axiomatique naturelle (ou Géométrie II). La Géométrie II est bâtie sur une

schématisation de la réalité mais une fois les principes et axiomes fixés, les démonstrations doivent se situer à l'intérieur du système des axiomes pour être certaines.

- ***le paradigme GIII*** renvoie à la Géométrie axiomatique formaliste (Géométrie III), qui privilégie essentiellement les relations entre les axiomes définissant les objets sans se préoccuper de leur relation avec la réalité.

Actuellement, dans l'enseignement de la géométrie au niveau primaire et secondaire, seuls les paradigmes GI et GII sont pris en compte. Le paradigme GIII constitue, parfois, un horizon qui peut aider les professeurs à inscrire leur enseignement dans le temps long de la formation aux mathématiques. Par ailleurs, ces paradigmes ne sont pas hiérarchisées suivant leur qualité : ils n'ont pas les mêmes fonctions et la même finalité.

Les paradigmes géométriques permettent d'identifier la nature épistémologique du travail réellement produit dans une institution scolaire. Cette identification de la nature du travail permet par la suite de comprendre et de caractériser la circulation du travail géométrique au sein de l'Espace de Travail Mathématique.

2 Les Espaces de Travail Mathématique

Tel qu'elle a été développée, la théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak 2011), notés ETM, a pour objectif d'analyser et d'organiser le travail mathématique produit par des élèves ou des enseignants dans une institution scolaire donnée. Les Espaces de Travail Mathématique sont conçus et pensés de manière à favoriser l'exercice du travail mathématique par ses utilisateurs. Les ETM sont organisés suivants deux plans (Figure 1) :

- le plan épistémologique, composé de trois pôles : representamen, l'artefact, référentiel théorique. Il permet de structurer le contenu mathématique.
- le plan cognitif composé de trois processus cognitifs : visualisation, construction et preuve. Il vise à structurer l'ETM lorsqu'il est proposé à un individu dont l'intention est d'effectuer le travail mathématique. Ce plan rend compte du travail mené par l'utilisateur de cet espace de travail pendant l'activité de résolution d'une tâche.

Le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles :

- une genèse sémiotique fondée sur les registres de représentation sémiotiques qui donne aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;
- une genèse instrumentale, qui a pour fonction de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif ;
- une genèse discursive de la preuve, qui permet de donner un sens aux propriétés pour les mettre en œuvre dans le raisonnement mathématique.

Ces trois genèses favorisent la circulation entre les deux plans horizontaux en activant une articulation entre les composantes respectives des deux plans.
Cet ensemble de relation peut être visualisé grâce au diagramme (Figure 1) qui fait de plus apparaître les relations entre les deux niveaux basées sur différentes dimensions ou genèses : sémiotique, discursive, instrumentale.
La mise en œuvre du travail géométrique peut être initiée à partir de l'une des trois dimensions associée à chacune des genèses (sémiotique, instrumentale et discursive), ou à travers de l'articulation de deux d'entre elles : sémiotique et instrumentale ([Sem-Ins]), sémiotique et discursive ([Sem-Dis]), ou encore discursive et instrumentale ([Dis-Ins]). Ces différentes articulations définissent ainsi trois plans verticaux de l'Espace de Travail Mathématique (Figure 2).

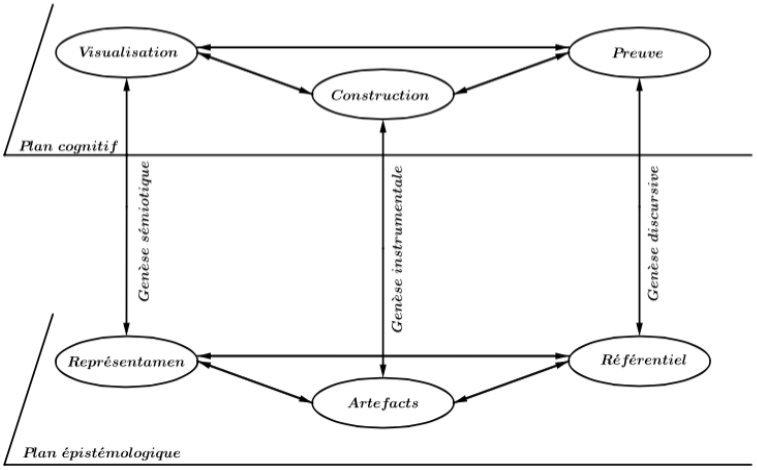


Figure 1. Diagramme général des Espaces de Travail Mathématique

Les différents plans verticaux permettent dans la suite de préciser la circulation du travail géométrique dans l'ETM et la manière dont le travail géométrique se poursuit et s'effectue. L'analyse du travail mathématique et de sa circulation au sein de l'ETM s'appuiera sur l'identification des outils *sémiotique, technologique, théorique* (Kuzniak, Nechache et Drouhard 2016) du plan épistémologique associés à chacune des dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) de l'ETM. Cette analyse prendra en compte la manière dont un sujet utilise et transforme ces outils en des instruments (sémiotique, instrumentale et discursive) du plan cognitif (Ibid., 2016). Elle permettra ainsi de préciser les ETM personnels des sujets et leur distance éventuelle aux ETM idoines développés par les professeurs dans le cadre des ETM de références souhaités par les diverses institutions concernées par l'enseignement des mathématiques.

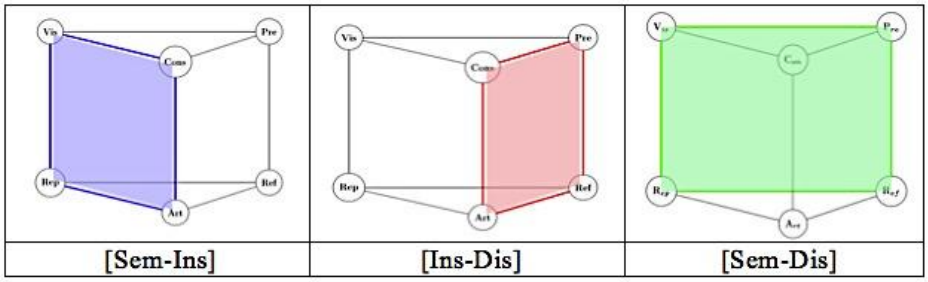


Figure 2. Les trois plans verticaux de l'ETM (Kuzniak & Nechache 2014)

3 Les points d'appui pour analyser la tâche proposée.

Dans cette recherche, nous avons choisi de mener l'analyse de la tâche géométrique en identifiant la manière dont les outils sémiotique, technologique et théorique sont utilisés par un sujet. Ainsi, l'étude de l'usage des outils sémiotiques passe par l'identification des différentes décompositions notamment méréologiques des figures (au sens de Duval). Cette étude des différentes décompositions nous amène à questionner leurs « légitimités » du point de vue théorique en nous appuyant sur des outils théoriques tels que les propriétés de dissection et d'équidécomposabilité (Hilbert). En ce qui concerne, les outils technologiques, il s'agira de mettre en évidence les outils de construction géométrique ainsi que les formules de calcul d'aire de figures usuelles (triangle, carré, trapèze, rectangle) qui peuvent être utilisées. Par ailleurs, notre analyse de la tâche prend en compte la manière dont la mesure de l'aire et le mesurage interviennent dans le raisonnement. Cela nous permet de préciser le(s) paradigme(s) géométrique(s) qui guide(nt) le travail mathématique.

III - ANALYSE DE LA TACHE PROPOSÉE AUX ÉTUDIANTS

1 Les formes possibles du terrain d'Alphonse

Rappelons l'énoncé de la tâche :

> Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?
>
> *Une information complémentaire*
>
> Alphonse a demandé à une amie périgourdine de l'aider et celle-ci ne lui a renvoyé que la longueur d'une des diagonales : 630 m.

L'objectif est de déterminer l'aire du terrain qui intéresse la famille d'Alphonse. En utilisant les outils de construction géométrique nous pouvons obtenir plusieurs formes possibles du terrain d'Alphonse. Ces formes peuvent être convexe ou non convexe (Figure 3).

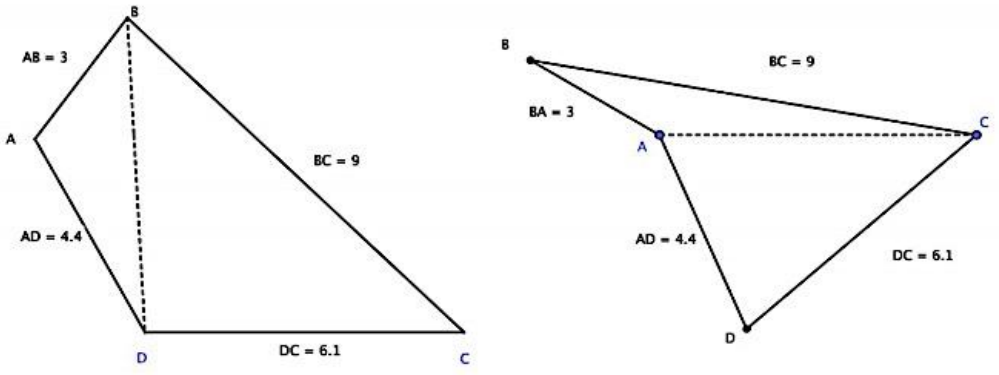


Figure 3. Les formes possibles du terrain d'Alphonse

Bien que la forme d'un quadrilatère croisé soit une forme possible au vu des données de l'énoncé, nous avons néanmoins écarté cette possibilité car nous supposons (aidé par « le bon sens ») que dans la réalité les rares terrains ayant une forme d'un quadrilatère croisé sont considérés comme deux champs triangulaires.

2 Quelques méthodes pour résoudre la tâche

Nous proposons quelques méthodes possibles faisant appel à la décomposition et la recomposition d'un quadrilatère (en utilisant l'une de ses diagonales) et à une construction géométrique utilisant (ou non) des outils de construction géométriques et/ou une échelle adaptée. Ces méthodes peuvent faire intervenir un ou plusieurs paradigmes géométriques. Toutes ces méthodes nécessitent la construction à l'aide ou non d'instruments de construction géométrique (compas et règle graduée) du quadrilatère en prenant par exemple comme mesure des côtés :

Mesure du terrain (dans la réalité)	300 m	900 m	610 m	440 m	630 m
Mesure du terrain (sur le dessin)	3 cm	9 cm	6,1 cm	4,4 cm	6,3 cm

Tableau 1. Echelle retenue pour la construction du quadrilatère

Méthode 1. Calcul de l'aire avec mesure effective de longueurs à l'aide de la règle graduée sur la figure construite

À partir du quadrilatère convexe construit, on obtient une décomposition de ce quadrilatère en deux triangles (voir la figure 3). Il s'agit alors de calculer l'aire de chacun des deux triangles. Pour ce faire, on trace une hauteur de chacun de ces deux triangles et on mesure leur longueur à l'aide d'une règle graduée. Dans le cas du quadrilatère convexe, on trace la hauteur h_1 du triangle ABD et h_2 du triangle BCD (Figure 4). On effectue la somme des aires des deux triangles afin d'obtenir l'aire du quadrilatère et ainsi conclure sur l'aire du terrain d'Alphonse.

Cette méthode utilise la figure et le mesurage sur celle-ci comme outil technologique pour déterminer l'aire du quadrilatère. Ainsi, elle met essentiellement en jeu le paradigme GI.

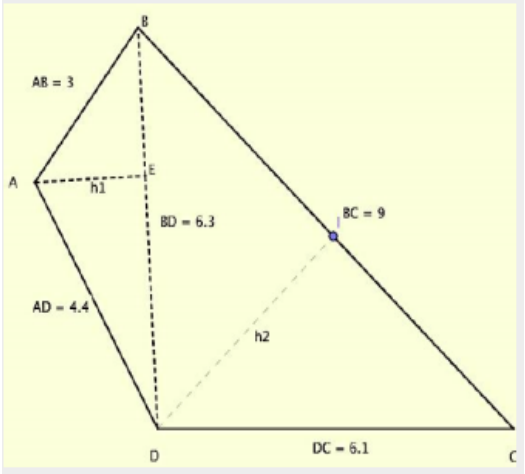


Figure 4.

Méthode 2. Calcul de l'aire avec mesure effective d'angles à l'aide d'un rapporteur sur la figure construite

Cette méthode est une variante de la méthode présentée précédemment. La longueur de chacune des deux hauteurs est déterminée en utilisant les formules trigonométriques. En se plaçant dans le triangle AED rectangle en E par exemple, on mesure à l'aide d'un rapporteur l'angle ADE (Figure 5). On utilise la formule sin (ADE) = h_1/AD afin d'obtenir une longueur de h_1. On procède de la même manière en se plaçant dans le triangle BIC rectangle en I pour obtenir une valeur de la longueur h_2. Par la suite on calcul l'aire de chacun des triangles ABD et BDC afin d'en déduire celle du quadrilatère.

Cette méthode à l'image de la méthode précédente met en jeu le paradigme GI.

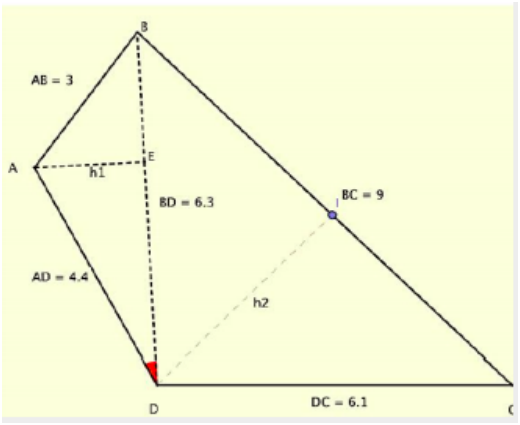


Figure 5.

Méthode 3. Usage du théorème de Pythagore

On pose *DE*= *x* et *CI*=*y* (Figure 5). Pour déterminer *x*, on utilise deux fois le théorème de Pythagore. Une première fois dans le triangle *AED* rectangle en *E*. Une deuxième fois dans le triangle *AEB* rectangle en *E*. On obtient alors deux égalités : $h_1^2 = 19{,}36 - x^2$ (*1*) et $h_1^2 = 9 - (6{,}3 - x)^2$ (*2*). On en déduit alors : $19{,}36 - x^2 = 9 - (6{,}3 - x)^2$. La résolution de cette équation permet d'obtenir la valeur de *x* qui est égale à 50,5/12,6 cm. On remplaçant *x* par 50,5/12,6 dans l'une des deux égalités (1) et (2) on obtient la valeur de h_1 qui permet par la suite de calculer la valeur de l'aire du triangle *ABD*. De la même manière, en déterminant la valeur de *y*, en déduit celle de h_2 et ainsi que celle de l'aire du triangle *BDC*. L'aire du quadrilatère cherchée est alors déduite de la même manière que dans les deux premières méthodes présentées ci-dessous. Cette méthode utilise le théorème de Pythagore comme un outil technologique pour déterminer

des longueurs qui nécessite cependant de faire des allers retours entre la figure et les calculs. De ce fait, cette méthode met en jeu deux paradigmes GI et GII. Cette méthode peut très vite conduire à des erreurs de calculs et à même à l'abandon car les calculs peuvent être lourd à mener (notamment chez des étudiants M1).

Méthode 4. Travail sur une figure générique pour découvrir une formule

Cette méthode consiste à se placer dans l'un des deux triangles mis en évidence à l'issue de la décomposition du quadrilatère (convexe ou non). Par exemple dans la figure 5, on se place dans le triangle ABD et on note a, b et c ses dimensions. On peut appliquer la formule d'Héron[142] dans ce triangle pour calculer son aire et de même pour le triangle BDC. On en déduit par la suite l'aire du quadrilatère cherchée. Cette méthode utilise la formule d'Héron comme outil à la fois théorique mais technologique pour déterminer et justifier l'aire du quadrilatère cherchée. Ainsi, le travail sur la figure n'est pas essentiel et devient heuristique par rapport aux trois autres méthodes. Cette méthode met alors en jeu le paradigme GII. Des variantes de cette méthode sont possibles, si les étudiants cherchent eux-mêmes une formule générale. Dans ce cas, le travail suppose un travail algébrique important et non évident.

3 La mise en œuvre de la tâche en classe

Nous avons proposé la tâche « le terrain d'Alphonse » à des étudiants de première année de master MEEF 1er degré. La mise en œuvre de cette tâche a été conduite selon trois phases ayant des objectifs spécifiques. Chacune des phases s'achève par une mise en commun.

Dans la première phase, nous avons distribué l'énoncé de la tâche sans l'information complémentaire concernant la longueur de l'une des diagonales du terrain et nous avons laissé 10 minutes aux étudiants pour chercher une solution. Il s'agit ici de conduire les étudiants à constater qu'il manque des données (i.e la longueur d'une diagonale) pour pouvoir résoudre la tâche. A l'issue de cette phase, nous avons ramassé les productions des étudiants avant de procéder à une mise en commun. Dans la deuxième phase, nous avons proposé l'information complémentaire sur la diagonale et nous avons laissé 10 minutes pour chercher une solution. L'objectif de cette phase est de mettre en évidence les différentes formes possibles du terrain. Après les 10 minutes du temps de recherche, nous avons ramassé les productions d'étudiants et nous avons par la suite mené une mise en commun. Cette mise en commun permet de rendre compte des deux formes possibles du terrain d'Alphonse et de discuter les méthodes utilisées par les étudiants. Pour la dernière phase, les étudiants ont mené un travail de calcul d'aire du terrain en se plaçant tout d'abord dans le cas où le terrain avait la forme d'un quadrilatère convexe puis une forme non convexe. La mise en commun à l'issue du temps de recherche (soit environ 1h), permet de répertorier (au tableau) toutes les méthodes utilisées par les étudiants afin de les discuter. Il s'agit plus particulièrement, de confronter les résultats obtenus en fonction des méthodes choisies et en fonction de la forme du terrain choisie pour mener les calculs.

Nous proposons un résumé du déroulement de cette mise en œuvre dans le tableau suivant en précisant l'objectif et la durée de chacune des trois phases, le matériel autorisé et les modalités de travail des étudiants :

	Phase 1	**Phase 2**	**Phase 3**
Objectif	Mise en évidence de la donnée manquante	Mise en évidence des différentes formes du terrain et des méthodes	Trouver l'aire en fonction de la forme du terrain retenu et discussion des résultats obtenus
Tâche	Enoncé sans information	Enoncé avec aide	Enoncé avec aide
Modalité de travail des étudiants	Individuel	Individuel	Individuel

142 Formule d'Héron : S= $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec $p=\frac{a+b+c}{2}$

Matériel	Outils géométriques et calculatrice	Outils géométriques et calculatrice	Outils géométriques et calculatrice
Durée proposée pour la recherche d'une solution	10 min	10 min	45 min - 1h

Tableau 2. Déroulement de la mise en œuvre de la tâche dans une classe de M1

IV - MÉTHODOLOGIE

1 Recueil de données

Pour mener notre recherche concernant le travail géométrique réellement produit par les étudiants de master MEEF 1degré, nous avons travaillé avec deux groupes de M1 (soit 45 étudiants).

Nous avons opté pour une technique de recueil de données basée sur les productions écrites des étudiants (45 productions pour chacune des phases, soit 135 productions). Le recueil de données est également basé sur les dialogues produits lors des mises en commun. Ces dialogues ont été enregistrés et transcrits intégralement.

2 Analyse des productions des étudiants

L'analyse des productions écrites des étudiants a été effectuée suivant une grille d'analyse que nous avons construit. L'analyse est centrée sur le travail effectué sur la (ou les) figure (s) construite (s) (Tableau 3) et sur le discours portant sur l'aire et la mesure de l'aire (Tableau 4).

Figure								
Représentation de la figure		Nombre de figures tracées		Type de figure tracée		Travail sur la figure tracée		
A main levée	Avec des instruments (règle et compas)	Une	Plusieurs	Quelcon-que	Particulière	Décom-position	Tracé de la hauteur et son mesurage	Tracé d'une dia-gonale

Tableau 3. Grille d'analyse des productions des étudiants du point de vue de la figure

Discours					
Portant sur l'aire		Portant sur le mesurage et la mesure de l'aire			
Sans texte	Avec texte	Dissection (décomposition de la figure en sous figures)	Calcul d'aire avec les formules connues	Usage du théorème de Pythagore	Mesure et ~~l~~approximation des longueurs

Tableau 4. Grille d'analyse de productions écrites des étudiants du point de vue du discours

L'analyse des enregistrements des mises en commun prend appuis sur :

- l'identification ou non (par les étudiants) de la donnée manquante pour fixer la figure ;
- la prise en compte (par les étudiants) de l'échelle pour la construction de la figure et le calcul d'aire ;
- la place de la mesure et de l'approximation dans le travail géométrique des étudiants ;
- l'usage ou non de théorèmes en acte formulés par les étudiants tel que : « deux figures ayant le même périmètre ont la même aire »

Ces analyses de résultats permettent de mettre en évidence la circulation du travail géométrique produit par les étudiants au sein des différents plans verticaux (Figure 2) de l'ETM et le paradigme géométrique qui guide ce travail.

V - RÉSULTATS ET DISCUSSION

Dans cette communication, nous avons choisi de présenter uniquement les résultats de la première phase de l'expérimentation. Rappelons que dans la première phase, l'énoncé de la tâche a été proposé aux étudiants sans l'information complémentaire (une diagonale mesure 630 m). Contrairement aux attentes initiales, cette phase a suivi un déroulement inattendu du fait que la quasi-totalité des étudiants n'a pas relevé la nécessité d'obtenir des conditions supplémentaires pour fixer la forme du quadrilatère. En effet, les étudiants se sont engagé dans la recherche de l'aire du terrain en ajoutant spontanément certaines conditions supplémentaires : le quadrilatère était nécessairement particulier (condition lié au type de contrat didactique propre à l'enseignement de la géométrie en France ?) ou que tous les quadrilatères avaient la même aire puisqu'ils avaient le même périmètre et il était donc possible de raisonner sur une figure particulière. Pour illustrer nos propos, nous présentons ci-dessous les productions de quatre étudiants : Ivana, Francis, Katia et Séverine.

Production d'Ivana

L'étudiante construit un quadrilatère convexe en choisissant une échelle (identique à celle du Tableau 1) et à l'aide d'une règle graduée et d'un compas (outils de la dimension instrumentale). La figure obtenue est un quadrilatère (nommé ABCD) ayant un angle droit (en D) (Figure 6). Toutefois, dans l'énoncé de la tâche aucune indication n'est donnée sur les angles du quadrilatère. Ce quadrilatère a été conçu de telle manière à avoir un angle droit :

> Ivana : En fait j'ai construit la figure de manière à avoir un angle droit, et du coup j'ai calculé l'aire du premier triangle en faisant ~~euh.~~

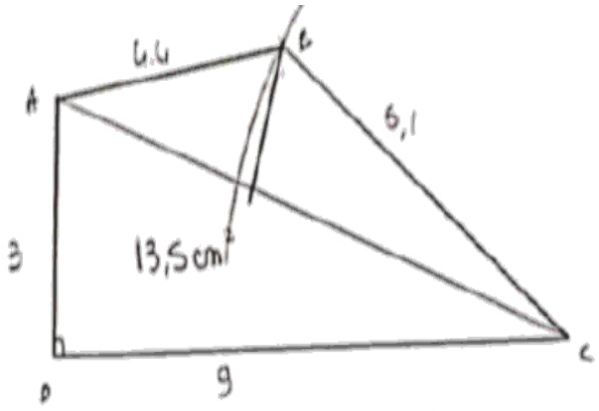
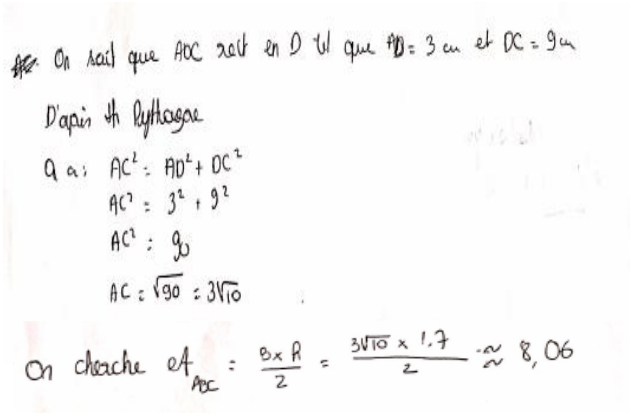


Figure 6. La figure tracée par Ivana



Figue 7. Production écrite d'Ivana

L'étudiante décompose le quadrilatère suivant une diagonale (ici [AC]) de façon à obtenir deux triangles ABC (quelconque) et ADC (rectangle en D) (dimension sémiotique). Elle calcule l'aire du triangle ADC rectangle en D en utilisant la formule de calcul d'aire d'un triangle (outil de la dimension instrumentale). Elle obtient 13,5 cm² qu'elle convertit immédiatement en m² (soit 135000 m²). Ensuite, elle applique le théorème de Pythagore (outil de la dimension discursive) dans ce même triangle afin d'en déduire la longueur du côté [AC] (Figure 7). Elle calcule enfin l'aire du triangle ABC en mesurant à l'aide d'une règle graduée (outil de la dimension instrumentale) la longueur de la hauteur issue de B relativement au côté [AC]. Elle obtient alors une valeur approchée de l'aire d'environ 8,06 cm² (Figure 7).

Lors de la présentation orale de sa méthode, Ivana explique qu'elle n'a pas eu le temps d'achever son raisonnement :

Professeur : Donc tu as trouvé l'aire du triangle rectangle ici ADC.

Ivana : Oui. Pour le deuxième triangle, J'ai calculé avec Pythagore pour avoir l'hypoténuse.

Professeur : Ivana comment as-tu trouvé la longueur AC ?

Ivana : J'ai fait Pythagore, parce que ADC est rectangle en D. Après je n'ai pas eu le temps de finir.

Le professeur questionne alors l'ensemble de la classe sur la légitimité de la méthode d'Ivana. Une étudiante affirme qu'Ivana a considéré que le triangle ADC était rectangle en D alors qu'il n'y a aucune indication dans l'énoncé de la tâche. Le professeur poursuit le dialogue en se basant sur les différents quadrilatères produits par chacun des étudiants. Ce dialogue a permis de mettre évidence l'usage par Ivana d'un théorème en acte (« deux figures ayant le même périmètre ont également la même aire ») pour élaborer le travail mathématique :

Professeur: Quand je regarde les différents quadrilatères que vous avez dessinés, je ne pense pas que vous ayez dessiné la même chose. Chacun d'entre vous a dessiné un quadrilatère différent des autres.

Ivana : Peu importe comment il est le terrain, l'aire c'est la même car on a les mêmes mesures.

Professeur : Êtes-vous d'accord ?

Étudiants : Non

Professeur : Marie pourquoi tu n'es pas d'accord ?

Marie : Parce que, par exemple ce que l'on a ici on peut calculer le périmètre, par exemple on peut avoir un carré et un rectangle avec le même périmètre mais avec des aires qui diffèrent.

Professeur : Donc, deux figures ayant le même périmètre n'ont pas obligatoirement la même aire. Vous vous rappelez, on l'a vu au premier semestre. Donc Marie contredit ce que tu viens de dire Ivana.

En résumé, le travail mathématique produit par Ivana a été initié dans le plan [Sem-Ins] pour construire un quadrilatère *ABCD* au moyen d'outils de construction géométrique et avec l'hypothèse que l'un des angles du quadrilatère était un angle droit. Cette inclusion d'une propriété supplémentaire est courante chez les étudiants qui ont choisi d'utiliser des outils de construction. Le travail mathématique est ensuite placé dans le plan [Sem-Dis] pour calculer l'aire du triangle ADC et pour déterminer la longueur [AC] à l'aide du théorème de Pythagore (dimension discursive). Enfin, Ivana utilise la règle graduée pour mesurer une longueur (la hauteur du triangle ABC issue de B) et elle applique la formule de l'aire d'un triangle pour déterminer l'aire du triangle ABC. Le travail mathématique se termine donc dans le plan [Ins-Dis] avec une utilisation non spécifiée de la mesure. Cet appui sur la mesure et l'usage des outils de construction géométrique pour valider des propriétés nous indiquent que le travail mathématique semble être guidé par le paradigme GI. Cependant, ce travail n'est pas conforme aux « règles mathématiques » puisque l'étudiante n'a aucun contrôle sur les résultats obtenus. Quand le professeur l'interroge sur la légitimité de son travail, elle répond que « tous les quadrilatères ont la même aire parce qu'ils ont le même périmètre » et c'est pourquoi il est possible de raisonner sur une figure particulière. Ce théorème en acte conduit au fait que son travail mathématique n'est pas valide. Avec ce travail, nous sommes confrontés à un problème d'interprétation assez commun, qui concerne l'identification du paradigme exact dans lequel l'étudiant travaille. Les étudiants, en raison du contrat didactique très fort à ce niveau, évitent généralement la mesure et pensent donc qu'ils travaillent dans le paradigme GII. Mais, en fait et en partie pour éviter les obstacles liés à la difficulté de construire une preuve basée uniquement sur les propriétés, ils entrent subrepticement dans le paradigme de GI soit, comme Ivana, en utilisant des mesures non supposées, soit comme nous le verrons ci-dessous en utilisant des données basées uniquement sur la perception.

Production de Francis

En choisissant une échelle, Francis construit à l'aide d'une règle graduée et d'un compas un quadrilatère convexe de telle sorte que cela soit un trapèze (Figure 7). Rappelons que dans l'énoncé aucune indication sur la forme du quadrilatère n'a été signalée.

Pour construire le trapèze, il procède à des réajustements de la construction à l'aide des instruments de construction géométrique (outils technologiques) et exerce un contrôle visuel :

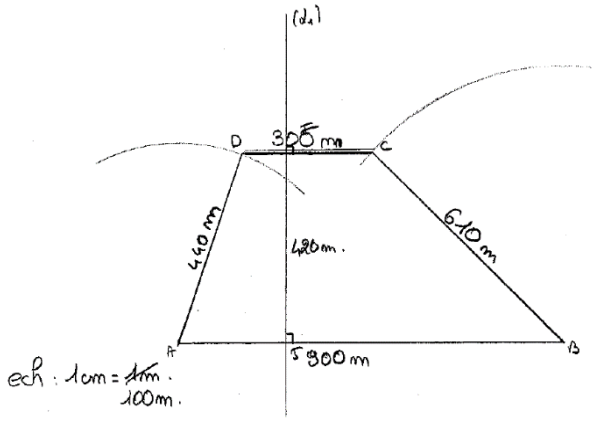


Figure 8. Construction de Francis

Professeur:	Est-ce que vous avez une idée de ce que ça pourrait être ? Est-ce que cela peut être un carré ?
Étudiants :	Non.
Professeur :	Un rectangle, Un losange ?
Étudiants :	Non.
Professeur :	Tout cela vous savez calculer les aires. Ensuite, un trapèze ?
Boris :	Cela pourrait mais.
Florine :	Oui mais avec les mesures cela ne coïncide pas.
Francis :	**Si cela fait un trapèze.**
Professeur :	Cela fait un trapèze ?
Francis :	**Oui, j'ai pris la grande base 900 m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle et puis j'ai tracé une perpendiculaire à la grande base.**

Francis justifie ensuite à l'aide d'une propriété géométrique que le quadrilatère obtenu à l'issue de la construction est un trapèze (Figure 9).

Francis :	**Cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elle donc cela fait un trapèze.**

Pour terminer, Francis mesure à l'aide de la règle graduée la longueur de l'une des hauteurs du trapèze (ici [IJ]) et applique la formule de calcul d'aire d'un trapèze (Figure 9) pour obtenir l'aire recherchée.

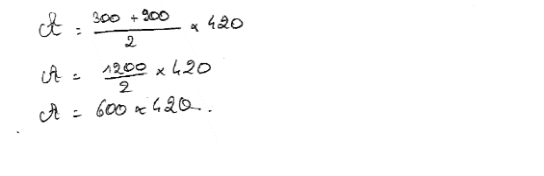


Figure 9. Calcul de l'aire du terrain

Le travail mathématique produit par Francis est initié dans le plan [Sem-Ins] pour construire à l'aide des outils de construction géométrique (outil technologique) un quadrilatère convexe ayant la forme d'un trapèze. Cette construction est par la suite justifiée à l'aide de la propriété : « deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles » (outil théorique). La formule de calcul d'aire d'un trapèze (outil technologique) est appliquée pour produire le résultat (ici l'aire du terrain). Ainsi le travail mathématique s'achève dans le plan [Ins-Dis]. Ce travail mathématique repose sur des raisonnements considérés comme valides dans le paradigme GI.

Production de Katia

Katia commence par construire deux figures à main levée. Elle propose une transformation de la première figure à la seconde de telle sorte que l'aire de la figure soit plus ou moins invariante. À partir des longueurs initiales du terrain (900 m, 440 m, 610 m, 300 m), elle effectue la moyenne arithmétique des longueurs des côtés opposés du quadrilatère (Figure 10) pour obtenir les mesures des longueurs des côtés de la deuxième figure, qui est un rectangle

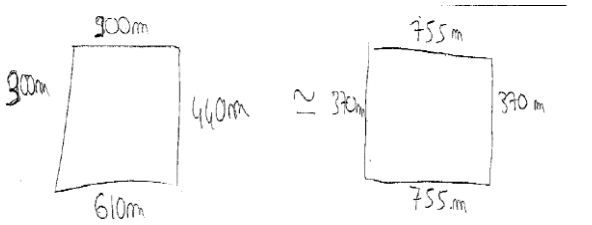


Figure 10.

Pour déterminer l'aire du quadrilatère, elle applique la formule de calcul d'aire d'un rectangle (Figure 11). Le travail géométrique produit par Katia se situe dans le plan [Sem- Ins]. En effet, ce travail est orienté vers l'utilisation d'une formule de calcul d'aire bien connue en transformant la figure géométrique initiale. Ce travail est réalisé sans aucun contrôle à l'aide d'outils matériels (outils géométriques) et sans aucun contrôle par des outils théoriques (propriétés). Par conséquent, si ce travail géométrique peut être considéré comme partiellement valable en GI, il n'est valide dans aucun des paradigmes.

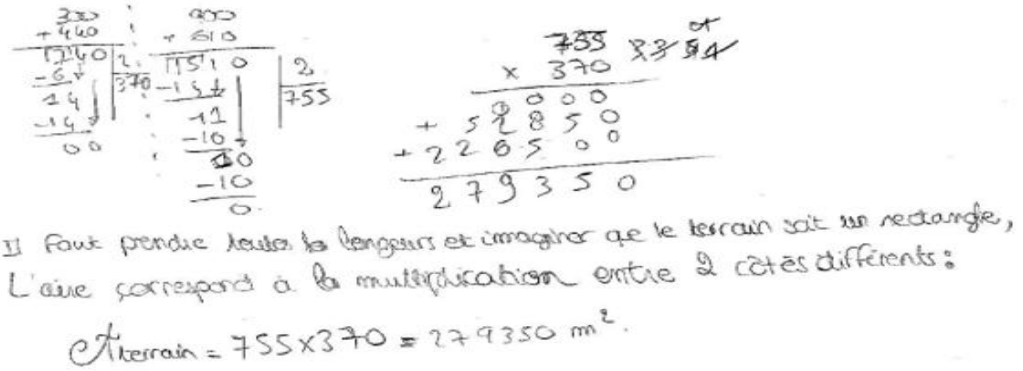


Figure 11.

Nous signalons que le travail géométrique de Katia est l'un des plus fréquents chez les étudiants qui ne voulaient pas utiliser d'instruments de construction. En effet, ces étudiants s'interdisent le mesurage sur la figure et cherchent à se situer en GII. Néanmoins, ils s'accordent une grande « liberté sémiotique » pour obtenir des formules ou appliquer des formules de calcul d'aire connues.

Production de Séverine

Dans son travail, Séverine commence par tracer à main levée un quadrilatère convexe quelconque. Elle produit une dissection à main levée de ce quadrilatère en un trapèze et deux triangles rectangles (Figure 12). Elle explique ainsi sa procédure :

> Séverine : Je suis parti d'un quadrilatère général, puis j'ai dessiné deux triangles à angle droit (à l'intérieur) pour compléter le quadrilatère.

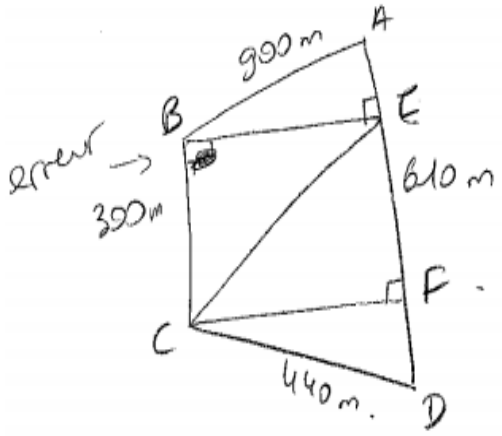


Figure 12.

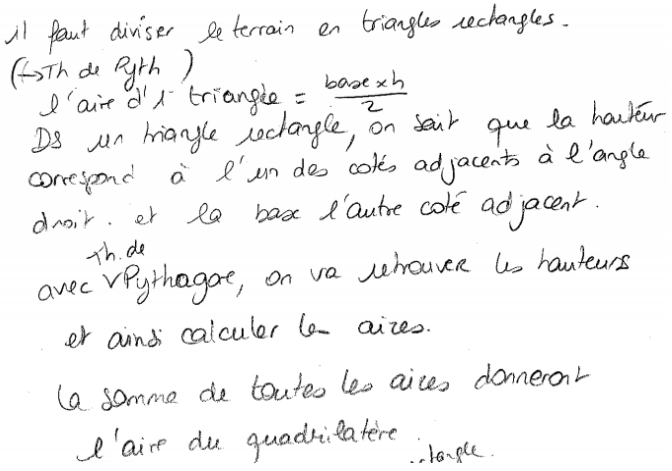


Figure 13.

Puis, sur sa feuille, Séverine explique qu'il serait nécessaire de trouver les hauteurs des triangles et aussi d'utiliser le théorème de Pythagore pour faire les calculs (Figure 13). Elle ne les exécute pas. Cependant, à ce stade, cela peut être considéré comme normal parce qu'il lui manque une donnée, mais elle ne l'a pas demandée.

Le travail géométrique produit par Séverine est donc bloqué dans le plan [Sem-Dis]. Le professeur intervient en essayant de motiver la nécessité d'avoir la valeur de l'une des diagonales du terrain.

> Professeur : Pouvez-vous commenter ce que Séverine suggère, avez-vous l'information nécessaire pour faire le calcul ?
>
> Chloé : Il n'y a pas d'indications de mesure, nous ne savons pas où la hauteur coupe (le côté) après cela donc nous n'avons qu'une dimension sur chaque triangle.

Les étudiants demandent par la suite des données supplémentaires mais pas celle de la longueur de la diagonale. Mais un étudiant (une nouvelle fois Francis) intervient pour affirmer qu'il n'était pas nécessaire d'avoir une donnée supplémentaire car l'usage de l'échelle conduit à prélever les mesures nécessaires directement sur le dessin :

> **Francis : Oui, mais comme nous l'avons fait avec une échelle respectée, nous pouvons mesurer**.

Par conséquent, l'intervention de Francis ramène le travail géométrique dans le paradigme GI assumée alors que Séverine et Chloé s'interdisaient de s'engager dans ce paradigme.

VI - CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons pu identifier les formes de travail géométrique des étudiants de première année de master confrontés à une tâche de géométrie liée à la mesure de l'aire d'un terrain. Les résultats que nous avons obtenus montrent, d'une part, des blocages (refus de l'usage des outils de mesure) chez les étudiants qui tentent de répondre aux attentes institutionnelles (un travail géométrique en GII). D'autre part, les résultats montrent des « rebonds » chez les étudiants qui assument parfaitement l'usage des instruments géométriques ou qui s'accordent une grande liberté sémiotique pour obtenir des formules ou appliquer des formules de calcul d'aire connues. Le travail ainsi produit est profondément incomplet parce qu'il est souvent confiné à un seul plan ou à une dimension de l'ETM.

De plus, et pour nous, c'est le plus inquiétant du point de vue de la formation des enseignants, ces étudiants disposent de très peu d'outils de contrôle autres que perceptifs et matériels sur leurs productions. Lorsqu'ils en utilisent d'autres, ils sont généralement basés sur des « théorèmes en actes » faux qui rendent le travail mathématique non valable d'un point de vue épistémologique. Il faut cependant noter que la tâche est déstabilisante car elle ne suit pas le contrat didactique habituel pratiqué à ce niveau de classe, qui suppose que toutes les données soient incluses dans l'énoncé de la tâche. De plus, les étudiants ont inclus dans ce contrat l'idée que toutes les formes géométriques qu'on leur demande d'étudier sont nécessairement des formes particulières. De leur propre initiative, ils ajoutent une propriété spécifique qui leur permet de ne pas être bloqués dans une dimension ou un plan de l'ETM. Cependant, leur travail ne peut être considéré comme valide.

Partant de ce constat, nous supposons que l'intégration des logiciels de géométrie dynamique dans ce travail géométrique pourrait être intéressante, notamment pour aider les étudiants à questionner les méthodes de construction et de validation. Nous souhaitons développer à l'avenir des tâches géométriques qui encouragent l'utilisation de logiciels dans la perspective d'une géométrie favorisant le travail de modélisation et d'approximation contrôlée. De manière générale, il s'agit pour nous de développer chez les étudiants un travail géométrique conforme aux règles du paradigme (voir annexe 1) mis en jeu et en même temps atténuer les effets du contrat didactique notamment ceux liés aux attentes du concours de professeurs.

VII - BIBLIOGRAPHIE

Gibel, P. & Henry, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des sciences de l'éducation*, **43 (1)**, 37-84.

Gomez-Chacon, I. & Kuzniak, A. (2011). Les Espaces de Travail Géométrique de futurs professeurs en contexte de connaissances technologiques et professionnelles, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **16**, 187-216

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Les paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **11**, 175-193.

Kuhn,T-S. (1977) En repensant aux paradigmes, In La tension essentielle, Odile Jacob, Paris.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail mathématique et ses genèses, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **16**, 19-24.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2014). Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. *Actes du 41e Colloque COPIRELEM, juin 2014, Mont de Marsan*.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2015). Using the Geometric Working Spaces in order to plan the teaching of geometry. In K. Krainer and N.Vondrova (Eds.), Proceedings of CERME 9 (pp. 543-549). Prague, Czech Republic: Charles University.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics education*, **48 (6)**, 861-874

Kuzniak, A. & Raucher, J-C. (2002). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *Actes du 29e Colloque COPIRELEM* (pp 271-290). La Roche sur Yon : Université de Nantes.

Kuzniak, A. & Raucher, J-C. (2003). Formation des PE1 et anamnèse géométrique. *Actes du 30e Colloque COPIRELEM* (pp 231-248). Avignon : Université d'Avignon.

Tanguay, D., & Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, 88, 5-24.

VIII - ANNEXE 1

Paradigmes géométriques prenant en compte l'aire et mesure d'aire

Paradigmes	Aire	Mesure de l'aire
GI/A1	Travail de décomposition et recomposition méréologique basée sur des découpages, des ajustements et des puzzles. Exemple du problème d'Ozanam où deux figures paraissent équidécomposables et elles n'ont pourtant pas la même mesure d'aire. Aire comme formule simple ou somme de formules simples associées aux décompositions.	Usage de la mesure avec utilisation des outils. Evolution graduelle privilégiant les calculs basés sur des propriétés ou formules, provenant de GII. Travail dans D ou Q restreint à des fractions relativement élémentaires.
GII/A2	Tradition euclidienne basée sur la congruence des triangles qui assure de fait une égalité des aires. Usages de notions communes précisant la nature des relations des parties ou tout. Démonstration basée sur des décompositions méréologiques par complément (parallélogrammes de même base) ou sur des congruences de figures (Pythagore).	La mesure directe sur la figure est interdite et il est important de parvenir aux conditions minimales permettant d'éviter au maximum les calculs. Usage d'une « géométrie algébrique élémentaire », rôle des théorèmes comme Pythagore ou Thales, trigonométrie et formule type Héron obtenu par du calcul algébrique (voir analyse a priori).
GIII/A3	Dans le traité de géométrie d'Hilbert une part importante est accordée à ce point avec l'introduction de relations d'équivalence comme l'équidécomposabilité, l'equal content, equalcomplement qui ne sont pas forcément équivalente (cela dépend du corps de base). Théorie élémentaire de la mesure de l'aire qui permet notamment de préciser la différence entre les propriétés de l'aire et de la mesure.	Deux figures équidécomposable si elles ont la même mesure d'aire. La réciproque de ce théorème est fausse dans l'espace (Dehn) La mesure est définie de manière générale et les valeurs sont prises dans R ce qui donne lieu à des raisonnements utilisant par exemple l'irrationalité de certains nombre. Préparation à la mesure liée aux infinitésimaux qui sera basé sur les mêmes propriétés.

COMMUNICATION C17

QUEL RÔLE DE LA MANIPULATION DANS LE MANUEL « MÉTHODE DE SINGAPOUR CP » ?

Nadine GRAPIN
Maitresse de conférences, ESPE de Créteil, Université Paris Est Créteil
Laboratoire de didactique André Revuz
nadine.grapin@u-pec.fr

Eric MOUNIER
Maitre de conférences, ESPE de Créteil, Université Paris Est Créteil
Laboratoire de didactique André Revuz
eric.mounier@u-pec.fr

Résumé

Alors que les commissions d'experts institutionnels (rapports IGEN, rapport de mission ministérielle) insistent sur une nécessaire adéquation du contenu des manuels avec les programmes en vigueur et sur la nécessité d'outiller les professeurs des écoles (PE) dans leur choix de manuels, comment les recherches en didactique des mathématiques peuvent-elles contribuer à répondre à ces besoins ?
La méthodologie d'analyse de manuels que nous avons conçue est dans la continuité de celle employée par Mounier & Priolet (2015) pour le rapport du CNESCO. Elle vise à étudier le contenu mathématique et didactique d'un manuel en commençant par une étude globale du manuel (sa structure, les intentions des auteurs, etc.), puis par une analyse centrée sur un objectif d'enseignement. Pour ce faire, nous étudions les tâches prescrites à partir d'une analyse *a priori* du savoir en jeu et des déroulements prévus ; des hypothèses sont ensuite dégagées à partir de cette étude locale quant à l'enseignement prescrit dans le manuel.
Nous exploitons cette méthodologie pour étudier le manuel « Méthode de Singapour – CP », notamment à travers l'introduction du sens de l'écriture chiffrée, et nous mettons en perspective le discours des auteurs au regard des résultats de notre étude, concernant en particulier le rôle de la manipulation.

Le manuel de mathématiques, objet familier de l'élève et de l'enseignant, est régulièrement étudié dans les travaux de didactique des mathématiques, que ce soit en tant qu'étape de la transposition didactique ou comme élément de la pratique de l'enseignant ou encore à des fins d'études comparatives (Grapin & Mounier, 2018). La méthodologie que nous avons présentée lors de notre communication situe notre travail plutôt dans ce dernier axe en se restreignant aux manuels scolaires de mathématiques de l'école primaire. Elle a la particularité d'étudier le contenu mathématique d'un manuel selon différents critères didactiques. Avant d'expliciter nos objectifs et de présenter notre méthodologie d'analyse, nous situons d'abord le contexte institutionnel dans lequel nous avons mené notre étude et explicitons les raisons qui nous ont conduits à choisir le manuel CP de la « Méthode de Singapour » pour mener ce travail. La méthodologie est ensuite décrite brièvement pour laisser une part plus importante aux résultats : ces derniers, présentés selon les étapes de la méthodologie, reviennent principalement sur la place et le rôle de la manipulation dans le manuel.

I - CONTEXTE INSTITUTIONNEL ET OBJECTIFS

Dans cette partie, nous situons le contexte dans lequel nous avons mené notre étude et montrons en quoi cette dernière répond à des besoins établis institutionnellement sur les manuels. Nos objectifs sont formulés dans le cadre de la didactique des mathématiques et situés par rapport à différents travaux antérieurs menés sur les manuels. Nous précisons dès lors que nous entendons par manuel, « *tout support pédagogique (livres ou fiches) qui doit être acquis par l'élève (lycée) ou qui est mis à sa disposition par l'établissement (école primaire et collège).* » (Mounier & Priolet, 2015).

1 Analyses de manuels de mathématiques : un point de vue institutionnel

Après trois rapports publiés par l'IGEN sur les manuels scolaires (tous niveaux et toutes disciplines confondues), le CNESCO (Conseil national d'évaluation du système scolaire) a commandé en 2015 dans le cadre de la conférence de consensus « nombres et apprentissages : premiers apprentissages à l'école primaire », une étude des manuels de mathématiques de l'école primaire (Mounier & Priolet, 2015). Les résultats de ces différentes analyses ont été des points d'appui du rapport ministériel de la commission Villani-Torossian « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » remis en février 2018. La baisse du niveau de maitrise des compétences mathématiques par les élèves français est le point de départ de ce dernier rapport ; c'est aussi ce même constat, plus axé sur la maitrise du nombre et du calcul, qui a motivé la tenue de la conférence de consensus précitée. Si les manuels de mathématiques apparaissent dans le rapport Villani-Torossian comme un des points de vigilance qui permettrait d'améliorer les résultats des élèves, ces différents rapports permettent de dresser un état des lieux de la situation actuelle. Nous ne retenons ici que quelques-uns de ces résultats et en signalerons d'autres au fil de notre analyse.

Le rapport Villani-Torossian revient sur le manque de conformité aux programmes de bon nombre de manuels présents dans les classes (p. 52), en particulier du fait de leur obsolescence, mais aussi sur la nécessité de fournir aux enseignants un outil leur permettant de réaliser « *un choix éclairé* » de leur manuel. Ainsi, dans la liste des 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques (Villani & Torossian, 2018), la vingtième, portant sur les manuels, préconise que : « *Les manuels de mathématiques feront l'objet d'un positionnement sur une échelle, par un comité scientifique, en regard de chacun des critères d'une courte liste arrêtée par ce même comité.* » (Ibid, p. 57). Elle précise :

> *La mission recommande que le contenu de chaque manuel scolaire soit analysé par un comité scientifique. La grille de lecture publiée à l'issue de ce processus ne constituerait ni une validation, ni une condamnation des manuels examinés, mais un outil sur lequel les enseignants pourront fonder leur choix. Elle pourrait fournir aux concepteurs de manuels des priorités pédagogiques, didactiques, mais aussi économiques, leur permettant de mettre en forme le contenu des programmes de façon adaptée.* Ibid, p. 57

Dans leur étude sur les manuels de mathématiques à l'école primaire, Mounier et Priolet (2015) soulignent une grande variété de l'offre éditoriale : ils ont ainsi dénombré en 2014 plus de 120 titres. Il est mentionné que deux types de supports sont disponibles pour l'élève : le support fichier se distinguant du support livre par le fait que les élèves sont amenés à répondre directement sur le fichier dans l'espace de traitement prescrit et non sur une feuille annexe. Même si le rapport IGEN de 2012[143] soulignait le peu de pertinence pédagogique des fichiers de mathématiques (p. 34), les éditeurs en publient encore beaucoup : au CP, le support livre n'existe pas au profit du seul support fichier, ce dernier tendant à disparaître au fur et à mesure de l'avancée dans la scolarité, pour n'être proposé que dans un quart des collections aux niveaux CM1 et CM2.

Par des observations en classe suivies d'entretiens avec une douzaine d'enseignants, Mounier & Priolet (2015) ont en outre montré que l'utilisation du manuel en classe était variable et que celui présent dans la classe n'était pas toujours choisi par l'enseignant. Seul un tiers des PE interrogés avait choisi le manuel utilisé par leurs élèves ; les critères qu'ils avaient utilisés pour faire leur choix reposaient sur le contenu mathématique du manuel (nombre et niveau de difficulté des exercices proposés) ou se référaient au manuel utilisé dans les niveaux précédents pour assurer une continuité des apprentissages.

En conclusion, face à une telle diversité de l'offre éditoriale, tant sur la forme que sur le contenu mathématique et didactique, l'enseignant se doit de réaliser des choix pour déterminer le (ou les) manuel(s) qu'il utilise pour concevoir son enseignement. Accompagner l'enseignant dans ces choix, comme le propose le rapport Villani-Torossian, apparaît dès lors comme une nécessité. Comment la

[143] Inspection générale de l'Éducation nationale (2012). *Les manuels scolaires : situation et perspectives.* Paris : Ministère de l'éducation nationale

didactique des mathématiques peut-elle participer à la conception d'outils permettant cet accompagnement ? Quelles grilles d'analyse de manuels concevoir pour les enseignants ?

2 « Méthode de Singapour » : une expression polysémique

Alors que les performances des élèves français de fin de CM1 sont en deçà de celles des autres pays européens à l'évaluation TIMSS (Colmant & le Cam, 2016), les élèves de Singapour sont en tête des classements à l'issue de ces évaluations : Singapour est ainsi premier des classements à TIMSS grades 4 et 8 en 2015 et se classe premier sur le grade 4 et second sur le grade 8 en 2011. Les résultats à ces évaluations internationales conduisent régulièrement les médias à citer en exemple l'enseignement des mathématiques tel qu'il est dispensé, appelé parfois « méthode de Singapour », sans pour autant étudier le contenu mathématique et la méthodologie utilisés dans ces évaluations (Bodin & al., 2016).

« Méthode de Singapour » est par ailleurs le titre d'une collection de manuels de mathématiques éditée par la Librairie des écoles en France. Nous reviendrons dans la partie relative à l'étude de manuels sur les auteurs du niveau CP et sur leurs intentions quant à l'enseignement des mathématiques, mais nous signalons que l'emploi de l'expression « méthode de Singapour » pour qualifier l'enseignement des mathématiques et pour désigner une collection de manuels est source de confusion, comme en témoigne par exemple les différents articles parus dans le hors-série du Point (Le point, 2017) consacré à la « méthode de Singapour », sous-titré «acquérir les fondamentaux grâce au meilleur enseignement du monde ». Dans cette revue, figurent à la fois des reportages sur l'enseignement des mathématiques à Singapour, une interview de Monica Neagoy, directrice de la collection de manuels « Méthode de Singapour », avec la participation d'autres auteurs du manuel mais aussi des exercices extraits des anciennes éditions de la « Méthode de Singapour » (manuel édité par la Librairie des écoles). Ceci illustre bien le fait l'expression « méthode de Singapour » renvoie à au moins deux objets différents : l'enseignement des mathématiques (voire même l'enseignement en général tel qu'il est ou a été dispensé à Singapour) et la collection de manuels édités en France portant ce nom. La confusion engendrée par l'emploi de cette même expression est amplifiée par le fait que les auteurs des manuels de cette collection sont régulièrement interviewés dans les médias sur « la méthode de Singapour ». Pour éviter tout malentendu dans notre propos, nous éviterons d'employer cette expression sans spécifier à chaque fois ce à quoi elle renvoie : l'enseignement à Singapour ou les manuels de la collection.

De l'enseignement des mathématiques dispensé à Singapour, la commission Villani-Torossian (à laquelle appartient Monica Neagoy) retient entre autres l'intérêt dans cet enseignement de :

> *[…] une pédagogie explicite et systématique, […] des étapes d'apprentissage identifiées (l'étape concrète, l'étape imagée, l'étape abstraite), les quatre opérations introduites dès le cours préparatoire […], des stratégies efficaces de résolution de problèmes mathématiques.* Villani & Torossian, 2018, p. 19

En conclusion, et comme le précise cette même commission, la stratégie mise en œuvre par Singapour pour améliorer les performances de ces élèves ne se limite à fournir des outils pour l'enseignant mais intègre aussi d'autres modifications, dans la formation des enseignants par exemple. Est-ce que les points d'intérêt pré-cités sont aussi mis en avant dans la collection de manuels ? Comment cela se traduit-il dans la progression, dans les contenus enseignés ? Autant de questions qui ont attiré notre attention et auxquelles nous souhaitions répondre avec un regard de didacticiens.

3 Objectifs de notre recherche et de notre communication

Notre premier objectif de recherche a été de concevoir une méthodologie permettant de mener une analyse didactique d'un manuel pour le chercheur afin d'étudier le contenu mathématique et didactique proposé par les auteurs et d'analyser la « faisabilité matérielle » des situations proposées en classe ordinaire et leur potentialité d'apprentissage concernant les notions mathématiques en jeu. En réponse aux besoins évoqués dans le premier paragraphe de cette partie, la transposition de cette méthodologie pour les enseignants est un autre de nos objectifs sur lequel nous reviendrons en conclusion. Nous avons exploité ensuite cette méthodologie pour étudier les manuels de mathématiques existants, et avons réalisé, entre autres, une étude comparative de plusieurs manuels de CP (Grapin & Mounier, 2018).

Nous ne revenons pas en détail sur la définition de la manipulation qui nous semble un sujet vaste (voir les communications à ce sujet dans ce même colloque). Il en existe différents usages (Beylot, 2019). Cependant notre objectif ne va pas être de les identifier. L'étude que nous présentons ici est issue d'une méthodologie d'analyse plus large sur les manuels en général et notre objectif est de replacer la manipulation dans cette analyse. La méthode d'enseignement des mathématiques à Singapour est citée dans le rapport de la commission Villani-Torossian et il y est mis en avant l'intérêt de distinguer trois étapes (concrète, imagée, abstraite) dans les apprentissages. Le manuel « méthode de Singapour CP » suit ces étapes à travers une « *approche concrète – imagée – abstraite* » (voir annexe 3) ; il apparaît ainsi comme un exemple intéressant à analyser, notamment pour étudier la manipulation par sa place et son rôle tels qu'ils sont envisagés par les auteurs que ce soit dans leurs intentions générales ou dans leurs prescriptions dans les séances.

Le manuel que nous avons retenu pour notre étude peut sembler atypique dans le sens où il résulte d'une adaptation de manuels existants dans d'autres pays. Il apparaît néanmoins comme un manuel ordinaire dans l'offre éditoriale en France et nous l'avons considéré comme tel. Pour cette raison, nous n'avons pas cherché à étudier l'enseignement des mathématiques à Singapour (les programmes, les manuels) ni la transposition entre les manuels singapouriens et ceux de la collection de la Librairie des Ecoles, même si ces questions sont didactiquement intéressantes et permettraient d'éclairer certains de nos résultats.

II - MÉTHODOLOGIE

Nous avons choisi de présenter succinctement notre méthodologie pour pouvoir montrer la façon dont nous l'avons exploitée et détailler davantage les résultats obtenus ; si le lecteur est intéressé par une description plus complète, nous le renvoyons à la lecture de Grapin et Mounier (à paraître).

La méthodologie que nous avons développée est dans la continuité de celle utilisée par Mounier et Priolet (2015) ; elle s'organise à un niveau global (sur l'ensemble du manuel) et à un niveau local (sur l'enseignement d'une notion clé) en trois étapes (Annexe 1).

La première étape, menée à un niveau global, décrit les caractéristiques générales du manuel et relève les intentions des auteurs. Cette première étape est surtout descriptive et s'appuie essentiellement sur le préambule ou l'introduction du guide pédagogique[144] et sur la programmation des séances. Dans le cadre de cette présentation, nous décrirons plus précisément la place et le rôle que les auteurs souhaitent donner à la manipulation dans l'enseignement qu'ils prescrivent dans le manuel.

La deuxième étape, se situe à un niveau local, dans l'analyse d'une notion clé, c'est-à-dire une notion soulignée comme telle dans les programmes et documents institutionnels, et dont l'importance pour la construction des savoirs prescrits a été relevée dans les travaux en didactique des mathématiques. Notre objectif est alors triple : identifier le savoir prescrit au fur et à mesure des séances, caractériser la nature des situations d'apprentissage, rendre compte de la faisabilité des scénarios prescrits en condition de classe ordinaire. Pour ce faire nous nous inscrivons dans la double approche didactique et ergonomique de Robert et Rogalski (2003) afin d'analyser les tâches prescrites (variété, complexité et niveau de mise en fonctionnement des tâches[145], variables didactiques, stratégies *a priori*) pour estimer les activités potentielles des élèves. Nous nous basons sur le guide pédagogique, quand il existe, pour déterminer le scénario *a priori* des séances dédiées à la notion clé. A un niveau global sur l'année, nous pouvons ainsi

[144] Les manuels dont disposent les PE sont très souvent accompagnés d'un guide pédagogique, « *documentation annexée au manuel scolaire et destinée au professeur* » (Mounier & Priolet, 2015, p. 7) dans lequel est réservée « *une place plus ou moins grande au volet organisationnel tel que le mode d'emploi, aux partis-pris pédagogiques et didactiques ou encore aux indications de gestion de chacune des séances* » (Ibid., p. 9).

[145] Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (Robert, 2008) va de technique à disponible en passant par mobilisable, selon le contexte (de facilement reconnaissable par l'élève à inhabituel) et la nature des adaptations à faire par rapport à ses formes déjà rencontrées. L'emploi des connaissances aux deux derniers niveaux peut requérir des étapes alors que ce n'est pas le cas au premier (le niveau technique). C'est pourquoi les exercices concernant le niveau technique comportent des tâches dites simples et isolées.

identifier l'itinéraire d'enseignement (Mounier, 2010), en identifiant tout particulièrement trois phases dans la progression didactique des savoirs (Perrin-Glorian & Hersant, 2003) : la phase 1 qui précède la présentation du savoir nouveau (construction des savoirs anciens participants à celle du nouveau), la phase 2 dans laquelle le savoir est nouveau et enjeu de l'apprentissage, et la phase 3 qui la suit (exercices convoquant le savoir élaboré). De manière plus locale en se centrant sur la phase 2, nous caractérisons les situations d'apprentissage en évaluant leur potentiel a-didactique (Brousseau, 1998). Pour ce faire, nous investiguons les caractéristiques d'une situation-problème au sens de Fénichel et Pfaff (2004-2005) : l'emploi de la connaissance visée par l'objectif de la séance permet-il de répondre à la tâche ? Y a-t-il une validation des réponses que les élèves peuvent faire eux-mêmes ? La réponse est-elle immédiate ? Les élèves peuvent-ils s'engager dans la résolution de la tâche ? Nous regardons aussi la place et la teneur des textes de savoir : leur contenu, le moment de la séquence où ils apparaissent, par qui et comment ils sont élaborés, ainsi que la forme sous-laquelle les élèves en disposent. Nous pouvons alors estimer en quoi le scénario prescrit par les auteurs favorise ou non un des trois dispositifs didactiques décrits par Rey (2001, p.31–35) : le dispositif « *explication-application* » dans lequel les exercices d'application suivent la présentation aux élèves d'un objet de savoir, le dispositif « *observation-compréhension-application* » où l'exposition des savoirs est précédée d'un temps d'observation des élèves qui permet par exemple une généralisation et enfin le dispositif « *problème-compréhension-application* » dans lequel la formalisation des savoirs est précédée d'une résolution d'un problème mettant en jeu une « manipulation d'objets » matériels mais aussi conceptuels. Dans cet article nous allons essentiellement indiquer les dispositifs didactiques que nous avons identifiés dans le manuel étudié afin de faire ressortir le rôle et la place de la manipulation. Ce que nous appelons « faisabilité des scénarios » concerne aussi certains éléments matériels comme la durée des séances et le matériel utilisé (sa nature et sa variété) qui renseignent sur la gestion des tâches et des interactions en classe en permettant d'envisager d'éventuelles adaptations à apporter (investissement de marges de manœuvre). Ces éléments participent alors aussi à l'analyse de la place de la manipulation dans le manuel.

Dans la troisième étape, il s'agit d'étudier à partir des observations faites sur une notion clé ce qui est généralisable à l'ensemble du manuel : nous pouvons ainsi dégager des hypothèses à tester sur d'autres notions ou montrer ce qui est présent dans l'ensemble du manuel. A ce stade, il est ainsi possible de revenir sur les intentions des auteurs (présentées à la première étape) et de confronter ce qu'ils visaient à ce qui est effectivement prescrit dans le manuel. Dans la partie dédiée aux résultats, nous nous attacherons ici à généraliser les observations faites sur le rôle et place de la manipulation.

III - ANALYSE DU MANUEL « MÉTHODE DE SINGAPOUR CP »

Afin d'analyser le manuel CP de la collection « Méthode de Singapour » paru en 2016, nous avons étudié le guide pédagogique (Neagoy & al., 2016a), les deux fichiers de l'élèves (Neagoy & al., 2016b, 2016c) ainsi que le recueil de fiches photocopiables (Neagoy & al. 2016d) ; nous avons aussi consulté le site internet de l'éditeur[146] puisqu'il met à destination de l'enseignant différentes ressources accompagnant les supports papier précités.

Nous présentons les résultats de notre analyse en suivant les trois étapes décrites dans la partie précédente et en nous centrant sur la place et le rôle de la manipulation. Une analyse plus exhaustive est consultable dans l'article de la revue Grand N à paraître (Grapin & Mounier, à paraître). Certains des éléments sur lesquels nous nous sommes basés sont consultables dans les annexes : le descriptif du matériel, la chronologie des tâches selon l'avancée du temps didactique d'une séance « clé » et des extraits du manuels (discours des auteurs, description de la séance précitée).

[146] https://www.lalibrairiedesecoles.com/la-methode-de-singapour-nouvelle-edition/ et https://www.lalibrairiedesecoles.com/produit/maths-guide-pedagogique-cp/

1 1re étape : niveau global - caractéristiques générales et intentions des auteurs

1.1 Présentation des auteurs (noms et fonctions)

Comme nous l'avons déjà signalé, la collection « méthode de Singapour » est dirigée par Monica Neagoy, docteure en *mathematical education*. Une courte biographie de certains des auteurs, proposée dans le guide pédagogique (Neagoy et *al*., 2016a, p.17), témoigne qu'ils occupent des fonctions diverses : professeur de mathématiques, conseiller pédagogique, professeur des écoles. Les auteurs ayant rédigé les fichiers à destination des élèves n'ont pas tous contribué à la rédaction du guide pédagogique, et réciproquement. Par ailleurs, chacune des unités (terme sur lequel nous reviendrons) est signée du nom de son auteur : par exemple, les deux premières sur les nombres sont rédigées par M. Neagoy, l'unité 10 « *les nombres jusqu'à 100* » par J-M. Jamet et celle sur les longueurs par A. Szikora.

1.2 Supports à destination des élèves et de l'enseignant & coût d'équipement

Pour l'élève, un fichier papier en deux volumes de 96 pages chacun (fichier A et fichier B) est prévu (Neagoy & al., 2016b, 2016c). Pour l'enseignant, un guide pédagogique de 272 pages en noir et blanc accompagne les fichiers. Il est structuré de la manière suivante : 4 pages pour la présentation de la progression sur l'année par « unité » et par séance, 12 pages de présentation de la méthode d'enseignement, 16 pages décrivant de façon synthétique le contenu de chaque unité (une page par unité). Les pages restantes sont consacrées à la description de chacune des séances (nous y revenons de façon plus précise par la suite).

L'enseignant dispose aussi d'un recueil (sous forme de livre) de 265 fiches photocopiables et de ressources téléchargeables sur un site internet : il peut retrouver le guide pédagogique (en couleur), des ressources matérielles supplémentaires (jeux, bandes numériques, etc.) et des indications générales sur la méthode d'enseignement avec des informations complémentaires à celles présentes dans le guide pédagogique.

Le fichier de l'élève est prévu pour utilisation « guidée » en classe, le travail autonome de l'élève devant être mené sur les fiches photocopiables. Dans les fichiers, entre 1 et 3 pages par séance sont prévues, l'ordre des séances suivant la progression prévue.

L'équipement d'une classe de CP de 23 élèves[147] s'élève alors à 380 euros environ[148]. A cela, s'ajoute un coût de reproduction que nous ne chiffrons pas ici, mais qui ne peut être négligé puisque, pour chaque séance, les élèves doivent travailler en autonomie quotidiennement à partir d'une ou plusieurs fiches photocopiables ; 265 fiches (une fiche par page) sont ainsi prévues pour un élève sur une année. En termes de matériel dont la classe doit en outre être équipée, l'équipement pour une classe (mentionné dans les pages d'introduction du guide pédagogique) se compose de 800 cubes multidirectionnels (cf. annexe 2.1, l'éditeur propose un tel ensemble à 94,90 €), de 10 à 15 sets de matériel de base 10 (Annexe 2.1), de 600 jetons de couleurs différentes et de monnaie factice (guide pédagogique, p.13). Signalons que d'autres types de matériels pédagogiques sont mentionnés dans le descriptif du déroulement de chaque séance, comme les cartes-constellations (cf. annexe 2.1) ou encore un boulier (pour la séance 109, description non indiquée par le manuel). Nous n'avons donc pu chiffrer précisément l'ensemble des besoins en matériel.

1.3 Organisation générale du manuel et répartition des séances par domaine

La progression proposée dans le manuel est découpée en cinq périodes de sept semaines environ chacune, comme la quasi-totalité des manuels en France (Mounier & Priolet, 2015). Le contenu mathématique est structuré en 16 unités : 11 sur le domaine « Nombres & calculs », 2 « Espace & géométrie » et 3 « Grandeurs & mesures ». Ces 16 unités sont découpées en 135 séances : 106 (79 %) pour

---

147 Le nombre moyen d'élèves par classes du CP au CM2 dans l'enseignement public était en 2016 de 23 élèves. http://cache.media.education.gouv.fr/file/2017/41/3/depp_rers_2017_801413.pdf (consulté le 30 avril 2018).

148 Un volume du fichier étant vendu 6,50 € l'unité, l'équipement d'une classe revient à 299 euros. S'ajoutent le coût du guide pédagogique (39,90 €) et des fiches photocopiables (39,90 €).

« Nombres & calculs », 14, (10 %) pour « Espace & géométrie » et 15 (11 %) pour « Grandeurs & mesures ». A titre de comparaison, huit manuels de CP sur les dix étudiés pour le rapport du Cnesco (2015) accordent entre 67 % et 72 % des séances au domaine « Nombres et calculs » ; le nombre de séances relevant de ce domaine dans le manuel « Méthode de Singapour CP » est donc important. En outre, les unités portant sur l'espace et la géométrie et les grandeurs sont réparties au fil de l'année comme le montre le graphique suivant (figure 1).

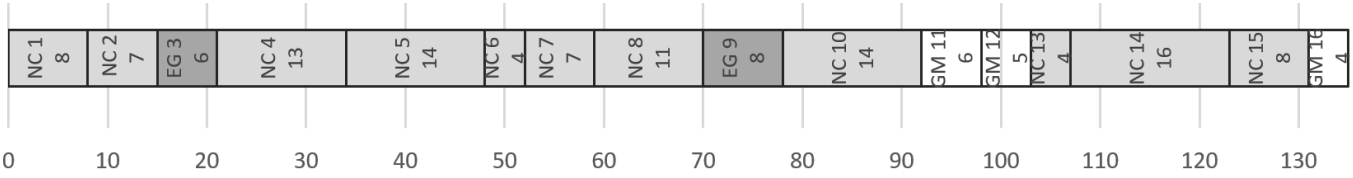


Figure 1. Répartition sur l'année des 135 séances selon les domaines (NC : nombre et calcul – EG : espace et géométrie – GM : grandeurs et mesures) et les unités[149]

1.4 Structure générale d'une séquence et d'une séance

Le terme de séquence n'est pas employé par les auteurs, la progression étant structurée en « unités ». Si on considère une séquence comme « *un ensemble de séances portant sur le même objet de savoir* » (Chopin, 2006, p.56), les unités ne sont pas des séquences puisque certaines portent sur plusieurs objets de savoir. Par exemple l'unité 14, « *L'addition et la soustraction des nombres jusqu'à 100* », correspond *a priori* à au moins deux objets de savoir distincts.

Chaque unité débute avec une première séance, dite d'introduction, et intitulée « *observons l'image* », au cours de laquelle les élèves sont invités à observer et échanger, sous le contrôle de l'enseignant, autour d'une image proposée sur une page entière de leur fichier. Selon l'unité, entre trois et quinze séances suivent cette séance d'introduction ; une séance « *d'objectivation* », intitulée « *ce que j'ai appris* » et visant à « *récapituler les grandes idées* » (guide pédagogique, p.15) clôt chaque unité.

Dans le guide pédagogique, chaque séance est décrite par :

- ses objectifs,
- un tableau synoptique indiquant la durée des phases de la séance et les modalités de travail ; ce tableau ne figure pas dans la première et la dernière séance de l'unité,
- des indications pour que l'enseignant puisse mener les différentes étapes prescrites par les auteurs,
- des exemples d'« *activités différenciées* », d'« *évaluations continues* », d'« *activités optionnelles* », d'« *activités de calcul mental* », une « *synthèse de la leçon* » et un encadré contenant « *des conseils utiles […] de nature mathématique ou pédagogique* ». (guide pédagogique, p.14–15).

Chacune des séances est prévue pour une durée approximative et moyenne d'une heure. La durée des phases dédiées au calcul mental, à la synthèse de la séance ou encore à l'évaluation continue n'est pas indiquée ; c'est donc à l'enseignant de l'intégrer, mais la durée moyenne des séances est par conséquent plus importante que celle indiquée. Par ailleurs, les séances de calcul mental ne sont décrites qu'une fois sur deux alors qu'il est prescrit dans les programmes une pratique quotidienne (de 15 minutes selon certains textes) : le contenu d'une séance sur deux de calcul mental est donc à la charge de l'enseignant.

1.5 Les intentions affichées des auteurs

Dans le préambule du guide pédagogique, les auteurs reviennent sur les performances remarquables des élèves singapouriens aux évaluations internationales et sur l'intérêt que peut représenter une telle méthode pour favoriser les apprentissages mathématiques. Il est précisé que le manuel utilisé à Singapour a été adapté pour correspondre aux attendus des programmes français « *tout en respectant l'esprit et les principes de la méthode* », mais aucune indication sur les transpositions réalisées n'est mentionnée.

[149] EG 9 signifie qu'il s'agit de l'unité 9, qu'elle relève du domaine « espace et géométrie » ; elle est composée de 8 séances.

Toujours dans ce préambule, les auteurs affichent, entre autres, comme « *pilier* » de l'approche de l'enseignement à Singapour, « *une grande importance accordée à la résolution de problèmes* » et justifient le choix d'une approche en trois étapes (annexe 3) :

> *L'approche concrète : les élèves sont guidés dans leur compréhension du concept grâce à la mise en situation ou la manipulation d'objets concrets (didactiques ou de la vie quotidienne). La présentation imagée : la situation est « schématisée » le plus souvent au tableau ou à l'aide du manuel. Elle permet de mettre en lumière, d'expliciter et d'exprimer les liens et les éléments importants du concept. Cette étape est appelée « semi-concrète ». La présentation abstraite : le recours aux symboles mathématiques constitue l'objet de cette ultime étape.* Guide pédagogique, p.8

Différentes schématisations sont ensuite proposées pour représenter des problèmes additifs et soustractifs.

La manipulation est présentée comme un passage « *nécessaire à la compréhension […] au service de l'abstraction au lieu d'être une fin en soi* » (guide pédagogique, p. 8) ; elle est prévue d'être « *utilisée pendant une, voire deux leçons* », dans le cadre de l'approche concrète. Sur le site internet[150], des précisions sont apportées, notamment :

> *Au CP, la manipulation est essentielle pour que les élèves acquièrent une sensibilité des nombres, des quantités et des mesures. […] C'est pour cette raison que la méthode de Singapour introduit chaque notion par une étape concrète, faisant appel à un matériel pédagogique riche et varié : jetons, cartes, cubes multidirectionnels, cubes de base 10…*

L'étape « *concrète* » peut donc s'appuyer sur des objets manipulables mais elle est aussi définie comme intégrant « *la mise en situation* » de ces objets ; nous comprenons ainsi que le terme de concret renvoie alors à la fois à un objet qui peut être manipulé (comme les exemples de matériel pédagogique ci-dessus l'illustrent), mais aussi à un objet représenté relevant d'une situation qualifiée de concrète pour l'élève. Par exemple, dénombrer une collection de 15 voitures représentées sur une page nous semble ainsi relever de l'étape « *concrète* » dans l'apprentissage du nombre, au vu de la précision donnée par les auteurs.

La prochaine étape de notre analyse va permettre d'éclairer cette approche en analysant ce qui est proposé pour l'enseignement de la signification des chiffres des écritures chiffrées (EC). Ceci nous permettra de mieux comprendre le sens que les auteurs donnent à la résolution de problème et en quoi consiste la pratique « *guidée* » prescrite. Si c'est l'enseignant qui guide, jusqu'où le fait-il ? Et à quel moment de la séquence d'apprentissage ?

2 2e étape : niveau local - analyse de l'enseignement d'une notion clé : l'écriture chiffrée au CP

2.1 Apports didactiques sur la numération écrite chiffrée au CP

Nous allons indiquer certains résultats sur l'enseignement de la numération écrite chiffrée au CP en privilégiant des éléments qui permettent d'analyser les situations d'apprentissage, et en particulier les tâches mettant en jeu la manipulation d'objets.

Deux systèmes de numération sont objets d'apprentissage au CP (Mounier, 2010) : la numération orale et la numération écrite chiffrée. Les élèves de l'école maternelle qui arrivent au CP ont essentiellement travaillé le nombre en utilisant son nom, le plus souvent jusqu'à « trente ». La numération orale en langue vernaculaire possède une structure propre à chaque langue dont on peut néanmoins dégager des caractéristiques communes pour les langues indo-européennes (Mounier, 2012). C'est l'aspect ordinal (avec repérants ou non[151]) qui est ainsi mis en avant dans la comptine numérique que les élèves apprennent, c'est-à-dire la succession d'items différents, immuablement énoncés dans le même ordre,

---

150 http://www.lalibrairiedesecoles.com/produit/maths-fichier-de-leleve-a-cp-nouvelle-edition/ (consulté le 17 avril 2018)

151 Les élèves de maternelle peuvent avoir noté ou non qu'après l'énoncé de la comptine de un à dix-neuf, la comptine de un à neuf est à nouveau prononcée en la faisant précédée du repérant « vingt ».

qui permettent en particulier d'indiquer des quantités par comptage. Les écritures chiffrées que les élèves côtoient ne sont alors que la version écrite des noms des nombres, une version écrite de la comptine numérique fréquemment placée en haut du tableau.

Au CP, du sens doit être donné aux chiffres des EC des nombres jusqu'à 99, mobilisant ainsi les deux aspects de la numération écrite chiffrée, positionnel et décimal (programmes 2016 (MEN, 2015) ; Tempier (2016)). Il s'agit alors de comprendre les relations entre une EC et les expressions en unités de numération. Par exemple, travailler l'aspect positionnel en reliant 56 avec 6 unités 5 dizaines (nous abrègerons en 6u 5d), l'aspect décimal avec 4d 16u et les deux aspects avec 26u 3d. Ces aspects se travaillent notamment en proposant des collections qui ne sont pas toujours organisées en dizaines et unités de manière maximale, c'est-à-dire pour une collection de cardinal 56 pas toujours en 5 groupes de dix et 6 objets isolés.

Nous ne revenons pas ici en détail sur les difficultés conceptuelles liées à la dizaine qui peuvent perdurer au-delà du CP (voir par exemple Deblois (1995)) mais soulignons les liens entre les procédures de dénombrement et les deux numérations. Prenons l'exemple d'une collection de 56 objets. Le comptage un à un, de un à cinquante-six, ou le comptage avec la comptine des dizaines (mobilisation des repérants dix, vingt, trente, quarante, cinquante) puis celle de un en un (cinquante-et-un, …, cinquante-six) utilisent en-acte les propriétés de la numération orale. L'EC peut alors être trouvée en connaissant l'EC du nom de nombre. L'EC peut cependant être obtenue sans connaitre le nom du nombre, mobilisant en-acte au plus près les propriétés de la numération EC. Il suffit en effet d'organiser la collection en dizaines de manière maximale (le plus de dizaines possibles) puis de coder cette organisation en comptant le nombre de dizaines (chiffre 5) et d'unités restantes (chiffre 6), et à accoler ces deux chiffres dans l'ordre conventionnel (56). Contrairement aux deux premières procédures, il est ici nécessaire de connaitre le nombre de dizaines et d'unités (Mounier & Pfaff, 2015, Mounier, 2017). Deux grands itinéraires d'enseignement sont alors envisageables (Mounier, 2010) : soit distinguer initialement les deux numérations avant de faire apparaître leurs points communs soit confondre les deux numérations avant de faire apparaître leurs différences[152].

Pour introduire la signification des chiffres ce sont le plus souvent des tâches de dénombrement qui sont proposées : que ce soit la production d'une collection connaissant son cardinal ou l'indication du cardinal d'une collection donnée. Il peut aussi s'agir de comparer les cardinaux de collections. Ces tâches de comparaison ont un certain potentiel pour problématiser l'intérêt de la dizaine que n'ont pas forcément les dénombrements, fussent-ils de collections importantes (Mounier, 2010), car la réussite aux dénombrements dépend moins du fait de choisir entre le comptage un à un et le comptage avec des dizaines que la maitrise de connaissances en énumération qu'elles mobilisent (Mounier & Pfaff, 2015). En outre, l'enseignement des opérations est un lieu privilégié pour réinvestir les connaissances sur les numérations : la numération orale via le calcul mental et la numération EC via les techniques opératoires.

[152] Le premier itinéraire est utilisé par au moins un manuel français en 2018, Mon année de Maths CP, Ed. Sed (Mazollier, Mounier et Pfaff, 2016). Le second itinéraire est utilisé dans tous les manuels analysés en 2015 par Mounier et Priolet.

2.2 *L'apprentissage de l'EC dans le manuel « Méthode de Singapour CP »*

Les trois phases découpant l'apprentissage de l'EC

La figure 2 répertorie les 102 séances concernant le nombre et permet de distinguer les trois phases de l'enseignement de la signification des chiffres des EC.

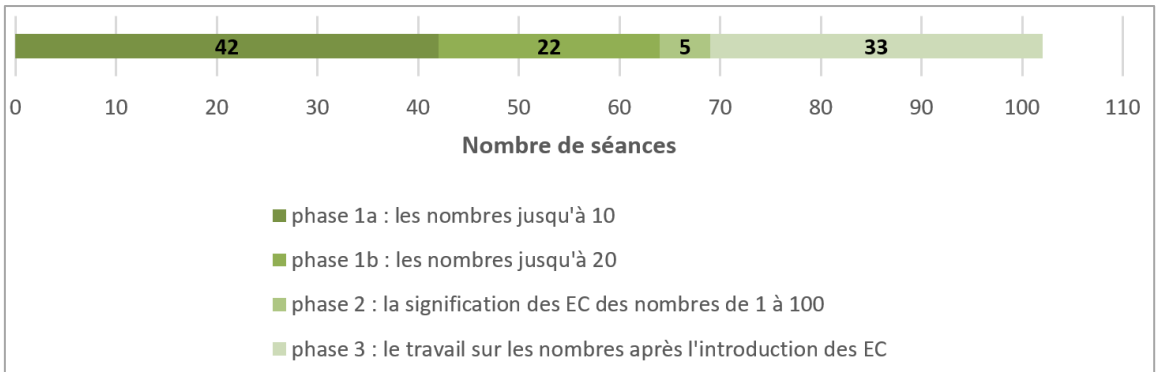


Figure 2. Poids relatifs et chronologie des différentes phases concernant l'enseignement du nombre calculé en nombre de séances[153]

La signification des chiffres des EC (phase 2) est introduite à 57 % de l'année scolaire, c'est à dire au début de la période 4 sur les 5 de l'année. Ainsi, pendant plus de la moitié de l'année les élèves n'identifient pas les chiffres des écritures chiffrées en termes de nombre de dizaines et d'unités. C'est un peu plus tardivement que les quatre manuels étudiés par Mounier & Priolet (2015), puisque cette introduction s'y déroulait en période 3 (40 à 50 % de l'année). En outre, le découpage du champ numérique est différent. Trois des quatre manuels analysés en 2015 abordaient auparavant les nombres jusqu'à 32, 59 ou 69. Les écritures chiffrées et le nom de ces nombres étaient donc connus des élèves avant qu'on ne leur enseigne la signification des chiffres (dizaine, unité). Comme pour le manuel « Méthode de Singapour CP », le 4e manuel étudié en 2015, n'abordait que les nombres jusqu'à 20 avant de donner du sens aux chiffres des EC.

Le savoir en jeu et son apprentissage

La progression des apprentissages suit des étapes clairement identifiables qui font l'objet de recommandation des auteurs en début d'unités (annexe 2.3). La construction des deux numérations ne suit cependant pas clairement l'un ou l'autre des deux itinéraires d'apprentissage précités. La numération écrite chiffrée est la forme écrite de la numération orale en phase 1 (pour les nombres jusqu'à 20), ce qui est attendu dans ce premier temps, puis c'est l'inverse en phase 3, les écritures chiffrées jusqu'à 99 y sont mises en avant sans que nous relevions d'apprentissage sur les noms des nombres. En phase 2, le découpage est le suivant (cf. annexes 3 et 2.2) : nombres de 20 à 30 (séance 80), de 30 à 40 (séance 81), les dizaines entières jusqu'à 100 (séance 82) et finalement les nombres de 20 à 100 (séance 83). Le nom et l'écriture chiffrée des nombres jusqu'à 40 sont tout d'abord introduits simultanément au dénombrement de collections organisées en dizaines et unités sans que soit explicitement relié le nombres de dizaines et d'unités avec les chiffres des EC. Ce lien est fait ensuite mais tout d'abord pour les dizaines entières avec une approche différente selon ces dernières. Pour les nombres 30, 40, 50 et 60 il s'agit d'expliquer pourquoi par exemple « trente » s'écrit avec un « 3 » et un « 0 »[154] (une collection de trente crayons est présentée organisée en 3 dizaines et 0 unités). A l'inverse, pour les nombres 70, 80, et 90, les EC sont d'abord fournies et il s'agit d'expliquer leur nom en français en l'associant à une décomposition de type soixante plus dix pour 70, quatre fois vingt pour quatre-

[153] La phase 1 de 64 séances a été scindée en phases 1a et 1b pour distinguer l'étude des nombres jusqu'à 10 et jusqu'à 20.

[154] Après avoir exprimé la collection en termes de dizaines et unités le PE doit « *Justifiez ainsi l'écriture 3 et 0 pour désigner 30* » (guide pédagogique, p. 178). Nous pensons qu'il faut comprendre « *Justifiez ainsi l'écriture 3 et 0 pour désigner trente* », sinon il y aurait redondance.

vingt[155]. Par la suite (fin de la phase 2 et phase 3), ce sont les EC des nombres jusqu'à 100 qui sont objet d'apprentissage, en lien avec collections. Le nom des nombres au-delà de vingt n'est alors pas un enjeu d'apprentissage explicite[156]. Outre les calculs (mobilisant les EC en phase 3), les tâches numériques demandées sont majoritairement des tâches de dénombrement de collections, presque toujours organisées en un nombre maximum de dizaines. Quand ce n'est pas le cas d'emblée, l'organisation est faite par le PE devant les élèves. A de rares moments les élèves doivent faire cette organisation et c'est alors toujours à l'invitation du PE et non laissé à leur initiative. La dizaine est donc « déjà-là » et présentée comme nécessaire pour dénombrer plus facilement puis ensuite indiquer les cardinaux par une EC. Nous n'avons pas relevé de travail spécifique sur sa conceptualisation (DeBlois, 1995)[157], bien que les auteurs indiquent de passer « *par une phase de manipulation, faisant « sentir » la dizaine comme étant dix fois une unité* » (annexe 2.3). Par ailleurs, il n'y a pas de tâches travaillant de manière explicite l'aspect décimal et l'aspect positionnel (en référence aux unités de numération) ni abordant la nécessité du 0 dans les EC.

Pour finir, signalons que les connaissances anciennes sur le dénombrement dont disposent les élèves *a priori* (c'est-à-dire en ne considérant que celles prescrites dans le manuel) avant d'aborder la séquence sur la signification des chiffres des EC sont insuffisantes pour répondre aux tâches de dénombrement. Les élèves ne savent en effet pas dénombrer au-delà de 20 alors que des collections plus importantes sont en jeu à ce moment. Ces connaissances sont-elles censées avoir été acquises par ailleurs [13] ?

Les situations d'apprentissage

Nous étudions ici le déroulement des séances de la phase 2, qui constituent une séquence de 5 séances consécutives (n° 79 à 83).



Figure 3. Extrait du fichier de l'élève (p. 21)

La première séance (n° 79) est entièrement dédiée à une introduction de la séquence. Il s'agit d'observer une image représentée sur une page entière (figure 3) du fichier. Les élèves en disposent sur leur fichier et il est conseillé de la vidéoprojeter au tableau. Le PE pose des questions aux élèves pour les amener à en discuter, notamment pour vérifier ce que disent les personnages sur le nombre de jouets qu'ils ont. La réponse attendue est une vérification par comptage en utilisant les dizaines constituées et le fait que « *10 et 10 font 20* », les éléments restants étant des objets « *isolés* » car non groupés par 10. Ensuite les élèves vont avoir le matériel de base 10 à leur disposition (annexe 2.1) et devront « *montrer la quantité vingt-trois* », le PE indiquant qu'il est possible « *de compter « le tout » en désignant chaque dizaine à l'oral plutôt que de compter de un en un* ». Le PE est invité à « *Renouveler la démonstration pour les nombres 25, 26, 27, 28 et 29* ». Le 3e et dernier temps de cette séance consiste à revenir sur l'image comme dans le 1er temps et à questionner les élèves sur le nombre de paquets de dix cartes et de cartes « seules », pour introduire le mot « isolé ».

[155] Il n'est cependant pas déjà évident pour un élève de CP que « trente plus cinq » c'est « trente-cinq » (Mounier, 2010).

[156] La numération orale utilisée à Singapour comme nombre de numérations asiatiques est formellement plus proche de la numération écrite que ne l'est la numération orale en France (Mounier, 2012). En outre, le rapport culturel avec les nombres et le rôle des parents dans l'éducation des enfants n'est pas le même qu'en France. Cela pourrait-il éclairer l'enseignement ici non explicite de la comptine numérique ?

[157] D'autres manuels y accordent une place plus importante (Mounier & Priolet, 2015).

Les séances qui suivent ont une structure similaire (voir annexe 2.4 pour les détails de la séance 80). Nous avons identifié plusieurs temps qui se succèdent dans l'ordre relaté ici.

- Dans un premier temps dit parfois de « *Mise en contexte* », l'enseignant est au tableau. Il montre des objets ou du matériel pédagogique aux élèves et leur pose des questions (tâche de dénombrement) sachant que ceux-ci ne disposent pas de matériel ni de fiches ou fichier.
- Dans un 2e temps de « *pratique guidée* », l'élève ouvre son fichier et le PE commente un encadré qui reprend ce qui a été fait précédemment en posant des questions aux élèves. L'élève fait ensuite les exercices du fichier qui sont similaires[158] à ce qu'il a vu auparavant.
- Le 3e temps est celui de la « *Manipulation* », reprenant des exercices encore similaires mais avec un matériel manipulable.
- Dans le 4e temps de la « *Pratique guidée individuelle* » les élèves reprennent un travail sur feuille avec des tâches similaires (fiches photocopiables ou fichier).
- Un 5e temps peut être consacré à un travail identique à ce qui a été fait en augmentant le champ numérique. Un moment de « *Différenciation* » est indiqué en fin de séance : le « *soutien* » consiste à reprendre des exercices similaires avec du matériel manipulable, l' « *approfondissement* » concerne d'autres tâches en lien avec la notion du jour étudiée ou à des connaissances anciennes.

Si les différentes étapes que nous avons décrites sont reprises dans les séances, il se peut que certaines se déroulent de manière un peu différente, notamment quand il s'agit de manipulation (en particulier le 3e temps n'apparait pas toujours), nous y reviendrons par la suite (§ 2.3).

Pour estimer la proximité à une situation-problème, nous avons étudié surtout le premier temps, c'est-à-dire tout ce qui se passe avant que l'élève regarde les éléments de savoir à retenir sur son fichier. Il apparaît que les élèves ne peuvent pas s'engager dans la tâche à l'aide du matériel. Ils ne peuvent faire des essais individuellement, ni valider les réponses de manière matérielle (il n'y a aucune possibilité de rétroaction matérielle). C'est l'enseignant qui guide et pose des questions sur une tâche simple et isolée : il n'y a pas d'étape, elle ne nécessite pas d'adaptation de connaissances et le contexte est similaire à celui déjà rencontré (comme le dénombrement d'une collection organisée en un maximum de dizaines), ce qui nous fait penser parfois à une maïeutique socratique car certains savoirs semblent être déjà là (comme la comptine numérique, les EC des nombres, le comptage). Les tâches ne forment donc pas des problèmes (Brousseau, 1998) dans le sens où il s'agit de répondre à des questions de type : « *Si j'ai deux cartes de 10, combien ai-je de points en tout ?* » (guide pédagogique, séance 81, p. 177) ou « *Combien d'images ai-je dans ce groupe ?* » (Ibid, séance 80, p. 175). La réponse à cette dernière question sollicite explicitement et directement un dénombrement, dénombrement qui ne peut donc apparaître comme solution à un problème. C'est pourquoi nous estimons que le dispositif didactique est proche d'un dispositif « *explication-application* » (Rey, 2001).

La faisabilité des scénarios

Nous prenons en exemple la séance 81 (guide pédagogique, p. 176 et 177) et suivons le découpage en 4 temps indiqué par les auteurs, les trois premiers de 10 minutes, le dernier de 30, soit une heure au total.

Certains « temps » nous interrogent quant au nombre de tâches qui y sont proposées et leur durée. Ainsi dans le 1e temps, les élèves doivent, en moins de 10 minutes, dénombrer collectivement 13 collections de points au tableau (qui sont obtenues successivement par ajout de 1 ou de 10) puis dessiner individuellement sur ardoise 3 collections, respectivement de 16, 26 et 28 points, avec une mise en commun pour chaque cas. Les connaissances mobilisées étant récentes, cette durée nous apparait très insuffisante, même si le PE décide de se baser sur le rythme des plus rapides. En outre, les élèves sont amenés à changer fréquemment de support pour effectuer le travail demandé : durant cette séance, ils doivent, successivement, regarder les cartes « constellation » au tableau, sortir leur ardoise et des feutres ou craies, ouvrir le fichier à une page donnée (et donc vraisemblablement ranger l'ardoise et les feutres),

[158] Dans le sens où les valeurs des variables didactiques proposées ne changent pas les procédures abordées précédemment, et où le contexte est proche de celui vécu auparavant.

fermer le fichier, regarder les cartes-constellations au tableau, réouvrir le fichier à une page donnée, ranger le fichier, utiliser deux fiches photocopiables, puis, selon les élèves, utiliser des cubes ou une ardoise, pour terminer la séance par une synthèse. Ce n'est pas l'emploi de supports et matériel divers qui nous interroge mais le fait de la multiplicité des actions à faire pour des élèves de cet âge, ce qui nécessite du temps et des moments de re-concentration qui ne nous apparaissent pas nécessairement pris en compte par les auteurs. Globalement, bien que le matériel utilisé nous semble adapté aux élèves de cet âge, il nous apparait difficile de réaliser le scénario prescrit dans le temps imparti, et impossible de proposer les tâches optionnelles indiquées sur le guide.

2.3 Le rôle de la manipulation dans l'apprentissage de l'EC dans le manuel « Méthode de Singapour CP »

Nous avons vu que dans le déroulement de la séance il y avait des temps dans lesquels intervenait du matériel manipulable. Les tâches sont ici toujours des tâches de dénombrement et presque exclusivement mettant en jeu des collections déjà organisées avec un maximum de dizaines (donc moins de dix objets isolés). Dans les cinq séances de la phase 2, nous avons précisé (annexe 2.2) le moment durant lequel il y a eu manipulation, le matériel utilisé (manipulable ou non) et qui a manipulé (l'élève seul, le PE devant les élèves). Nous relevons l'utilisation de matériels manipulables d'usage courant (cartes, crayons, pièces, ficelles) et du matériel spécifique à la numération : cartes-constellations, matériel de base 10, cubes multidirectionnels, décrits en annexe 2.1. Nous n'allons pas étudier la façon dont il est utilisé. Ceci demande une étude des signes qui apparaissent dans le déroulement des séances. Signalons que ce matériel est aussi présent dans d'autres manuels français (Mounier, 2010) ; Mounier & Priolet, 2015).

Dans chaque séance, avant l'exposition du savoir sur le fichier, il y a une manipulation d'objets. Celle-ci est cependant systématiquement faite par le PE devant les élèves. Le fichier est ensuite utilisé pour représenter ce qui a été fait et ce qu'il faut en retenir. La façon de faire le lien entre la manipulation avec le matériel, la représentation imagée de cette manipulation et la représentation sous la forme d'EC n'est pas explicitée et est à la charge du PE. Le fichier ou les fiches photocopiables sont utilisées dans le dernier moment de la séance. Les collections étant alors de fait figurées, le travail demandé aux élèves ne peut être le même que celui avec des objets manipulables. Cependant le fait que les collections soient systématiquement organisées en un nombre maximum de dizaines permet d'éviter les problèmes d'énumération, mais aussi par la même de ne pas aborder cet apprentissage. Après le temps d'exposition du savoir sur fichier, et en sus des tâches sur fiches ou fichier, dans deux des cinq séances (séances 80 et 83), le guide mentionne à nouveau l'emploi de matériel manipulable. Ce n'est donc pas une utilisation systématique, mais à la différence du premier temps de la séance, ce sont les élèves qui peuvent l'utiliser de manière individuelle. L'élève est guidé dans ce qu'il doit faire, même si la collection ne se présente pas initialement de manière organisée en dizaines et unités :

> *Répartissez la classe en groupes de 3 ou 4 élèves et distribuez un nombre aléatoire de cubes multidirectionnels. Demandez à chaque groupe d'estimer d'abord le nombre de cubes en l'écrivant sur leur ardoise dans un tableau de dizaines et d'unités. Les élèves doivent maintenant grouper les cubes en dizaines et en unités et trouver le nombre réel.* Guide pédagogique, séance 83, p. 180.

Il nous apparait que certaines possibilités qu'offre le matériel manipulable de poser un problème (celui de l'obtention de l'EC de la quantité, celle-ci n'étant pas organisée) ne sont pas exploitées.

Pour finir cet inventaire, signalons que dans deux séances (les 80 et 81) le recours au matériel manipulable est conseillé en différenciation : pour les élèves en « *soutien* » mais pas pour les autres en « *approfondissement* ». La façon de l'utiliser n'est cependant pas indiquée. Doit-on reprendre les tâches proposées auparavant ? Peut-il servir à une validation ?

3 3e étape : niveau global - généralisation de l'étude et retour sur les intentions des auteurs

À cette étape, nous essayons de généraliser à l'ensemble du manuel ce que nous avons observé localement et revenons sur les intentions affichées des auteurs, notamment ici, en ce qui concerne le rôle et la place de la manipulation. Nous avions constaté, lors de la première étape de l'analyse, que la

manipulation faisait partie intégrante de l'étape « *concrète* », le terme concret ne signifiant pas systématiquement physiquement manipulable, mais pouvant aussi renvoyer à la représentation d'un objet évocateur d'une situation ; des exemples d'objets manipulables étaient donnés, il n'était pas précisé qui les manipule (PE ou élève). En outre, les auteurs expliquaient que chacune des séances se composait de :

> *[…] trois parties essentielles, mais qui ne se succèdent pas toujours dans le même ordre : une phase d'exploration pratique (manipulation), une phase où l'on se concentre sur la leçon abordée (pratique guidée) et une phase d'entraînement individuel (pratique autonome).* Introduction du guide pédagogique, p. 14.

Nous avons pu observer dans l'analyse des séances de l'unité 10 une telle structure, se rapprochant d'un dispositif didactique « explication-application ». La manipulation, en jeu dans la phase dite « *d'exploration pratique* », est fréquemment prise en charge par l'enseignant, et non par l'élève ou sinon dans le cadre de processus de différenciation : la manipulation n'est donc plus utilisée pour découvrir *(« exploration »),* mais plutôt pour appliquer ou faire fonctionner ce qui a déjà été découvert. La prescription de ce type de pratique rejoint la volonté des auteurs de proposer une approche « *concrète* » dans laquelle l'élève doit être « *guidé* » dans sa « *compréhension du concept grâce à la mise en situation ou la manipulation d'objets concrets* ». Dans d'autres unités (unité 8, p. 148 ou encore unité 9, p.166 en géométrie) les élèves sont amenés à manipuler physiquement eux-mêmes les objets à leur disposition dans la phase précédent l'exposition du savoir : ce type de dispositif didactique se rapprocherait dans ce cas davantage de celui qualifié par Rey (2001) de « *observation – compréhension – application* ».

La mise en garde apportée au début de l'unité 10 au PE (annexe 2.3) vient renforcer l'importance que veulent donner les auteurs à la manipulation dans l'« *approche concrète* » :

> « *Attention à respecter la logique de la méthode concrète-imagée-abstraite lors de la présentation du tableau des dizaines et des unités, en passant systématiquement, comme suggéré dans les séances du présent guide, par une phase de manipulation, faisant « sentir » la dizaine comme étant dix fois une unité. Seulement ensuite, la représentation imagée du tableau des dizaines est rendue possible* ». Guide pédagogique, p.28.

Comme nous avons pu l'observer, la manipulation effective de différents objets est le plus souvent prescrite pour être réalisée par le PE devant les élèves. La manipulation ne renvoie donc pas à une action faite par l'élève. Il ne s'agit pas que l'élève expérimente par lui-même mais plutôt qu'il « voit le réel ». C'est le monde des objets « *concrets* » qui s'oppose ainsi à celui de leurs représentations figurées « *imagées* ». La manipulation ne permet donc pas de poser des problèmes, que ce soit dans une volonté d'organiser une situation problème ou, de manière plus générale, pour installer un dispositif didactique « *problème-compréhension-application* ».

IV - CONCLUSION

Concernant la manipulation, Beylot (2019) a montré dans son atelier qu'elle revêt plusieurs fonctions et peut ainsi intervenir à différents moments de l'apprentissage d'une notion. Si nous nous limitons à des manipulations effectives sur des objets physiques (et que nous écartons les manipulations mentales qui impliquent des questions de représentations des objets), de nombreuses questions se posent que ce soit sur le matériel manipulé, la personne qui le manipule, le moment où il est manipulé et sur les savoirs qui peuvent être construits à partir de l'utilisation de ce matériel. Ainsi, dans les séances précédemment étudiées, le matériel est régulièrement utilisé par le PE pour exposer le savoir au début de la séance et dans une moindre mesure par l'élève, lors des phases de réinvestissement. A aucun moment le matériel n'est proposé à l'élève pour le confronter à un problème permettant l'introduction du savoir visé ; au contraire, les prescriptions des auteurs (par exemple, séance 80, annexe 2.4) enjoignent l'enseignant pour guider l'élève pas à pas vers la découverte de ce nouveau savoir. Si le PE souhaite problématiser l'introduction d'un nouveau savoir (dispositif didactique du type *« problème-compréhension-application)*, il lui incombe non seulement de modifier les modalités de fonctionnement de la classe en permettant à l'élève de travailler de façon autonome lors de la phase d'introduction, mais aussi de modifier les valeurs de certaines variables didactiques. Pour les séances que nous avons observées, il s'agirait par exemple de proposer des collections manipulables par l'élève et non totalement organisées en un

maximum de dizaines. Une telle pratique s'écarterait néanmoins de celle « *guidée* » mise en avant par les auteurs.

L'analyse que nous avons réalisée mérite d'être étendue à d'autres manuels du même niveau si on souhaite mener une étude comparative, mais aussi à d'autres niveaux scolaires. Un premier travail a été réalisé en ce sens (Grapin & Mounier, 2018) et a montré des différences importantes entre trois manuels de CP (dont « Méthode de Singapour »), notamment sur les types de situations d'apprentissages prescrites (à partir des trois dispositifs didactiques définis par Rey (2001)) mais aussi sur la complexité des tâches proposées. En effet, dans les tâches de dénombrement, les collections n'y étaient pas toujours organisées en un maximum de dizaines. A la différence de « méthode Singapour CP » où l'aspect positionnel de la numération écrite chiffrée est privilégié, dans les deux autres manuels, l'aspect décimal est aussi en jeu. En outre, lors de l'étude de l'enseignement du sens de l'écriture chiffrée, nous avons observé que les deux autres manuels proposaient aussi du matériel pédagogique dédié à la numération. Les élèves étaient invités à le manipuler individuellement, y compris dans les phases d'introduction des savoirs nouveaux.

Un point de départ de notre travail est le besoin d'outiller les enseignants dans le choix d'un manuel. Or, la méthodologie présentée peut difficilement être mise en œuvre par un non spécialiste en didactique des mathématiques, l'étude de la notion clé demandant des connaissances spécifiques sur cette notion et exigeant un travail d'analyse conséquent sur ce qui est proposé dans un manuel. L'exploitation de cette méthodologie demande donc des adaptations et un accompagnement pour pouvoir être mise au service des enseignants. C'est une des perspectives de travail que nous nous donnons pour la suite.

V - BIBLIOGRAPHIE

Beylot, D. (2019). Analyse de manuels de cycle 2, place et fonctions de la manipulation. *Actes du 45e colloque Copirelem*. Blois 2018.

Bodin, A., De Hosson, C. Decamp, N., Grapin, N., Vrignaud, P. (2016). Acquis des élèves : comprendre les évaluations internationales PISA et TIMSS (volumes 1 et 2). *Rapport scientifique. Conseil National d'Évaluation du Système Scolaire.*

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

Chopin, M-P. (2006). Temps d'enseignement et temps didactique. Approche didactique de la question du temps dans l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école élémentaire, *Carrefour de l'éducation*, 21, 53-71.

Colmant, M., & Le Cam, M. (2016) TIMSS 2015 mathématiques et sciences : Évaluation internationale des élèves de CM1, *Note d'information, 33.* Ministère de l'Education nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche.

DeBlois, L. (1995). Le développement de l'écriture des nombres chez Christine. *Revue des sciences de l'éducation,* 31(2), 331-351.

Fénichel M. et Pfaff N. (2004-2005). *Donner du sens aux mathématiques.* (2 tomes) Paris : Bordas

Grapin, N., & Mounier, E. (à paraître) Méthodologie d'analyse de manuels et étude de « Méthode de Singapour » - CP, *Grand N.* 102, pp. 57 à 92

Grapin, N., & Mounier, E. (2018). Vers un outil d'analyse de manuels : exemple d'étude en 1ère année d'école élémentaire (3H). Revue de mathématiques pour l'école, 230, 30-37. http://www.revue-mathematiques.ch/files/4615/3839/6767/RMe-230.pdf.

Le Point (2017) Maths : la méthode de Singapour. Acquérir les fondamentaux grâce au meilleur enseignement du monde. Hors-série.

Mounier, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris.

Mounier, E. (2012) Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique. Application à la numération parlée en France. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 17, 27-58.

Mounier, E. (2017). Nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leur lien avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches en didactique des mathématiques*, 36(3), 347-396.

Mounier, E. & Pfaff, N. (2015). Quoi de neuf dans la numération au CP ? Le dénombrement en question. *Actes du XXXXI Colloque Copirelem* – Mont de Marsan 2014. Sur CD-rom. 15 pages

Mounier, E., & Priolet, My. (2015). *Les manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire – De l'analyse descriptive de l'offre éditoriale à son utilisation en classe élémentaire.* Rapport présenté lors de la conférence de consensus. Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. Paris : CNESCO, Lyon : IFÉ-ENS.

Neagoy, M., Nakatani, N., Szikora, N., Touchard, E., Jamet, J-M. (2016a). *Méthode de Singapour CP. Guide pédagogique.* Paris : La librairie des écoles.

Neagoy, M., Nakatani, N., Berriaux, B., Grasse., Deville, A. (2016b). *Méthode de Singapour CP. Fichier A.* Paris : La librairie des écoles.

Neagoy, M., Nakatani, N., Berriaux, B., Grasse., Deville, A. (2016c). *Méthode de Singapour CP. Fichier B.* Paris : La librairie des écoles.

Neagoy, M., Nakatani, N., Berriaux, B., Grasse., Deville, A. (2016d). *Méthode de Singapour CP. Fiches photocopiables.* Paris : La librairie des écoles.

Perrin- Glorian M-J., & Hersant M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23(2), 217-276.

Rey, B. (2001). Manuels scolaires et dispositifs didactiques. Dans Y. Lenoir, B. Rey, G.-R. Roy et J. Lebrun (Ed.), *Le manuel scolaire et l'intervention éducative : regards critiques sur ses apports et ses limites*, p. 25-40. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques de enseignants de mathématique : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies,* 2/4, 505-528.

Tempier F. (2016) Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, 98, 67 – 90.

VI - ANNEXES

ANNEXE 1 : *Schématisation des trois étapes de la méthodologie d'analyse*

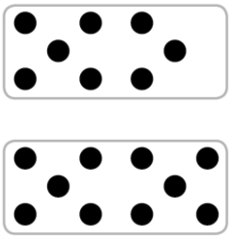
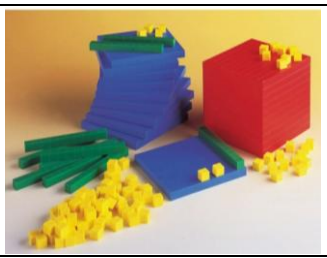
Etape 1 : niveau global : caractéristiques et intentions affichées des auteurs
- noms et fonction des auteurs
- différents supports et leurs fonctions prévues par les auteurs, coût d'équipement d'une classe
- organisation générale et répartition par domaines
- structure générale d'une séquence et d'une séance
- intentions des auteurs sur l'enseignement des mathématiques
  - ➢ *rôle et place de la manipulation*

Etape 2 : niveau local - analyse de l'enseignement d'une notion clé
- savoir prescrit
- situations d'apprentissage
- faisabilité des scénarios prescrits
  - ➢ *rôle et place de la manipulation*

Etape 3 : niveau global : généralisation de l'étude et retour sur les intentions des auteurs
  - ➢ *rôle et place de la manipulation*

ANNEXE 2 : *la manipulation dans la séquence d'introduction de la signification des chiffres des EC (séances n° 79 à 83).*

2.1 Descriptif du matériel pédagogique utilisé

		
Cubes muti-directionnels emboîtables vendus sur le site de l'éditeur[159].	Exemples de cartes-constellations téléchargeables sur le site de l'éditeur.	Exemple de matériel de base 10 ; ce type de matériel n'est pas décrit explicitement dans le guide pédagogique.

2.2 Chronologie des tâches selon l'avancée du temps didactique

Les indications dans le tableau suivant sont données suivant l'avancée chronologique des apprentissages que nous avons découpés en 3 temps didactiques : introduction, exposition et reprise du savoir. La mention « PE » signifie que seul l'enseignant dispose de la collection et que la tâche se fait

[159] Image extraite du site internet de la librairie des écoles : http://www.lalibrairiedesecoles.com/produit/methode-de-singapour-cubes-multidirectionnels/

collectivement. La mention « élève » signifie que l'élève dispose de la collection de manière individuelle ou en binôme (nous avons relevé une modalité de travail en groupe au-delà de deux uniquement dans la séance 83). Cependant, la « *pratique guidée* » préconisée par le manuel implique que la résolution de la tâche est accompagnée par le PE, même quand il s'agit de tâches où l'élève manipule individuellement ou en binôme (mention « élève »). Nous n'avons pas mis ici les tâches optionnelles mais avons signalé les tâches dites de différenciation (« *Soutien* » ou « *Approfondissement* »), ayant par ailleurs indiqué des limites sur le temps dont l'enseignant dispose en classe pour les faire. Quand la collection est présentée sur fiches (en référence aux fiches photocopiables) ou le fichier, elle est donc dessinée et non manipulable. Sauf indication contraire, les collections, manipulables ou non, sont toujours organisées en un nombre maximal de dizaines.

	Introduction du savoir	Exposition du savoir	Réinvestissement du savoir
n°79 (nbres jusqu'à 24)	Dénombrement sur fichier de collections dessinées diverses (PE puis élève) et avec le matériel de base 10 (PE, puis élève selon le temps).		
n°80 (nbres jusqu'à 30)	Dénombrement de collections manipulables d'images ou jetons (PE).	Dénombrement d'images identiques sur le fichier (élève). [Passage d'une collection non organisée à une collection organisée (l'élève n'a pas à faire cette organisation)]	Dénombrements : - de cubes multidirectionnels **manipulables** et sur fichier d'images identiques (élève), - sur fichiers d'étoiles, carrés, ronds et triangles (élève), - avec du matériel **manipulable** divers (élève en soutien). Dans tous les cas, l'élève n'a pas à organiser la collection ou cela lui est demandé.
n° 81 (nbres jusqu'à 40)	Dénombrement de collections manipulables de cartes - constellations (PE). Dénombrement sur ardoise de collections organisées en constellations du dé cinq (élève).	Dénombrement de cartes-constellations sur le fichier (élève).	Dénombrement sur fiches de points sur des cartes (points organisés en deux colonnes de cinq sur chaque carte) ; question sur le successeur de 39. Dénombrement avec des cubes multidirectionnels **manipulables** (élève en soutien).
n° 82 (nbres 10,30,40, 50,60,70, 80,90,100)	Dénombrement de collections manipulables de crayons de couleur, de cubes, de tubes de colle (PE). [Les premières collections comportent 10 objets unitaires, ensuite les collections sont organisées en dizaines]	Dénombrement sur fichier de crayons (élève). [La première collections comporte 10 crayons à dénombrer, ensuite les collections sont organisées en dizaines]	Dénombrement sur fiches de crayons et-ou écriture du nombre de dizaines et d'unités, l'EC étant parfois présente (élève) ; question sur le successeur de 99 (élève).
n° 83 (nbres jusqu'à 100)	Dénombrement de pièces de monnaies factices (PE).	Dénombrement sur fichier de pièces de monnaies (élève).	Dénombrement de cubes multidirectionnels **manipulables** (élève, groupes de 3 ou 4). Dénombrement sur fichier de cubes et de ronds (élève). Dénombrement sur fiches de boîtes de conserve, d'œufs, de crayons et de carrés (élève).

2.3 Extraits du discours des auteurs en préambule à la séquence

« Cette unité essentielle a pour objectif de faire connaître aux élèves les nombres jusqu'à 100 et présente le double défi de leur faire apprendre le vocabulaire (quarante, soixante, quatre-vingts…) et comprendre la logique du système décimal, tout en maintenant une perception « sensible » des quantités et en proposant une diversité de représentations. C'est par le biais de la comparaison, du déplacement et de la manipulation que sont donc enseignés les nombres jusqu'à 100. ». Guide pédagogique, p. 28.

*« **Quelques points de vigilance**. L'unité 10 présente relativement rapidement les nombres jusqu'à 100 afin de permettre aux élèves de déduire d'eux-mêmes la logique du système décimal : on écrit 40, 41, 42… de la même manière qu'on a écrit 30, 31, 32… Il ne s'agit donc pas, comme cela se pratique parfois, d'étaler sur toute l'année de CP l'apprentissage des nombres de 1 à 100, méthode qui a certes du charme pour les élèves mais qui les empêche de percevoir de manière synthétique le système décimal. Attention à respecter la logique de la méthode concrète-imagée-abstraite lors de la présentation du tableau des dizaines et des unités, en passant systématiquement, comme suggéré dans les séances du présent guide, par une phase de manipulation, faisant « sentir » la dizaine comme étant dix fois une unité. Seulement ensuite, la représentation imagée du tableau des dizaines est rendue possible. Dernier point de vigilance : veillez à ne pas nommer la colonne « dizaines » lorsque vous utilisez une barre de dix unités et que vous la mettez dans la colonne des dizaines du tableau. En effet, un élève attentif comprendra que chaque cube désigne une dizaine et que, par conséquent, la barre désigne une centaine. Il est très efficace d'utiliser le matériel de base 10 dans ce cadre (c'est ce qui permettra de décomposer des dizaines pour faire des soustractions avec retenue) à condition d'éviter ce malentendu classique. ». Guide de l'enseignant, p. 28. ».* Guide pédagogique, p. 28.

2.4 Description d'une séance dans le guide pédagogique : la séance 80 « Comptons (1) »

« 1 Mise en contexte : 21

*Disposez sur votre bureau une collection désordonnée de **21 images (ou jetons)**. Comptez-les collectivement : « 1, 2, 3, ..., 20 et 1 de plus, cela fait 21 ». Proposez aux élèves de compter d'une façon différente. Rangez les images en deux lignes de dix, plus une isolée, en vous inspirant de la disposition **page 22 du fichier B**. « Avons-nous un nombre différent d'images ? » Pointez la première ligne : « Combien d'images ai-je dans ce groupe ? » Faites-les compter. « Il y en a 10. Combien en aurai-je dans le deuxième groupe ? » Les élèves doivent répondre 10. Faites-les compter pour vérifier. Montrez l'image seule – en utilisant le terme « isolé » – et amenez les élèves au total de 21.*

2 Pratique guidée : 21, 22, 23

*Faites observer l'illustration de l'encadré « J'observe » de la **page 22 du fichier B**. « Que signifient les trois flèches bleues ? », « A-t-on le même nombre en haut et en bas de la flèche ? », « La flèche signifie que l'on a rangé les images. » Rappelez : « Pourquoi ai-je rangé les images en groupes de 10 ? Parce que c'est plus facile de compter les groupes de dix. Cela s'appelle "faire 10". » Demandez aux élèves de compter les quantités 21, 22 et 23 en reprenant la procédure de la mise en contexte.*

À chaque fois, faites lire les bulles prononcées par les personnages et écrivez les nombres en chiffres et en lettres au tableau, ainsi que les schémas de famille de nombres 20 / 1 / 21 ; 20 / 2 / 22 ; 20 / 3 / 23. « Que représente le 1 dans le nombre vingt et un écrit en chiffres ? » (l'image « isolée »), « Que représente le 2 dans le nombre vingt et un ? » (les deux groupes de dix images).

3 Manipulation en binôme : 24, 25, 26

*Affichez au tableau la **page 23 du fichier B**. Groupez les élèves en binômes et distribuez à chacun **25 cubes multidirectionnels** (non assemblés). Faites compter les cubes par chaque binôme. Écrivez 25 au tableau, en chiffres et en lettres. « Comment pourrions-nous compter les cubes plus facilement ? » Suggérez aux élèves de faire deux trains de dix cubes. « Deux trains de 10 cubes et 5 cubes isolés font 25. » Demandez aux élèves d'ouvrir le **fichier B à la page 23** et de répondre aux questions, chaque binôme construisant à chaque fois la quantité demandée avec les cubes.*

4 Pratique guidée individuelle : 27, 28, 29

*Affichez au tableau la **page 24 du fichier B**. Pour chaque exemple **a)**, **b)** et **c)**, demandez aux élèves de décrire les formes classées. Faites remarquer qu'elles sont groupées par couleur. Chaque couleur constitue un groupe de dix sauf pour une couleur dont les formes sont « isolées ». Les élèves remplissent les cases de façon individuelle.*

5 Composer et écrire le nombre 30
Distribuez à chaque binôme ***5 cubes supplémentaires****, et demandez-leur de former la quantité 30 en ajoutant 5 cubes aux 5 isolés. « Que remarquez-vous ? » Laissez les élèves expliquer ce qu'ils observent : un troisième groupe de 10 est à présent complet. « Y a-t-il des cubes isolés ? » (non), « Comment dit-on pour vingt-neuf et un ? », « Comptons de dix en dix : dix (un groupe de dix), vingt (un autre groupe de dix), trente (dernier groupe de dix). » Demandez aux élèves d'expliquer et justifier comment ils écriraient le nombre « trente » en se référant à la situation* ***d)*** *de la* ***page 24****. ».* Guide pédagogique, p. 174 et 175.

ANNEXE 3 : *Illustration de l'approche en trois étapes (concrète, imagée, abstraite) d'après le site internet de l'éditeur*

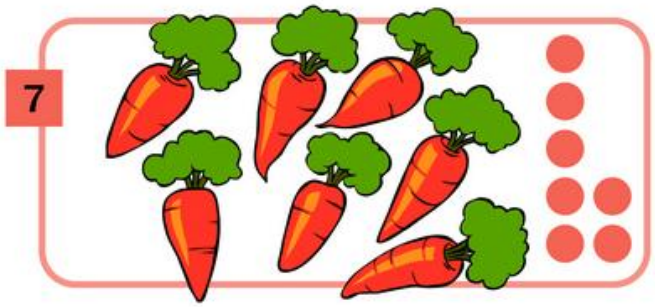
L'*« approche concrète – imagée – abstraite »*:

1. *L'approche concrète : les élèves sont guidés dans leur compréhension du concept grâce à la mise en situation ou la manipulation d'objets concrets (didactiques ou de la vie quotidienne).*
2. *La présentation imagée : la situation est « schématisée » le plus souvent au tableau ou à l'aide du manuel. Elle permet de mettre en lumière, d'expliciter et d'exprimer les liens et les éléments importants du concept. Cette étape est appelée « semi-concrète.*
3. *La présentation abstraite : le recours aux symboles mathématiques constitue l'objet de cette ultime étape.* (guide pédagogique, p.8)

Extraits de : http://www.lalibrairiedesecoles.com/la-methode-de-singapour-comment-ca-marche/ et de : http://www.lalibrairiedesecoles.com/methode-singapour/methodesingapour/amener-progressivement-les-eleves-a-l-abstraction/

Amener progressivement les élèves à l'abstraction
– À chaque séance, les élèves commencent par manipuler ou regarder des dessins d'objets familiers (**étape concrète**)
– puis ils les représentent de manière simplifiée sous forme de ronds, de barres ou de points **(étape imagée)**
– enfin, ils parviennent à la représentation des nombres par les chiffres (**étape abstraite**).

Dans l'exemple ci-dessous, provenant du manuel CP on retrouve les trois étapes
– 7 carottes dessinées (**étape concrète**),
– 7 ronds (**étape imagée**)
– le chiffre 7 (**étape abstraite**).



COMMUNICATION C19

QUELLES MODALITÉS POUR CONSTRUIRE UN RITUEL DE NUMÉRATION EFFICACE AU CYCLE 2 ?

Anne DIVISIA
PEMF, IREM de Grenoble
Anne.Divisia@ac-grenoble.fr

Géraldine MASTROT
PEMF, IREM de Grenoble
Geraldine.Mastrot@ac-grenoble.fr

Hélène STOFFEL
PEMF, IREM de Grenoble
Helene.Stoffel@ac-grenoble.fr

Marie-Caroline CROSET
Formatrice ESPE, IREM de Grenoble
marie-caroline.croset@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé

Le travail que nous présentons a pour point de départ nos visites et observations en tant que formatrices d'enseignants. Nous avons constaté la présence fréquente d'un rituel de numération pour dénombrer les jours d'école souvent appelé : "Chaque jour compte".
Ce rituel est mis en œuvre selon des modalités très variables. Nous les avons confrontées à des éclairages théoriques issus de la didactique des mathématiques et des sciences cognitives : les principes d'un rituel efficace (Eustache & Guillery-Girard, 2016), l'articulation entre manipulation et abstraction (Bruner, 1973), les contraintes inhérentes au matériel pour qu'il soit source d'apprentissage (Laski, 2015), la prise en compte de l'aspect décimal de la numération (Tempier, 2010) et la place des représentations (du dessin vers l'écriture chiffrée) (Dehaene, 1992).
En parallèle de ces analyses, nous avons mis en place une expérimentation dans deux classes (CP et CP-CE1) afin d'explorer les principes clés que ce rituel doit prendre en compte pour devenir un véritable dispositif didactique d'enseignement de la numération.
Cette communication propose d'identifier à l'attention des enseignants et des formateurs les modalités du rituel les plus bénéfiques en termes d'apprentissage.

Depuis janvier 2015, nous sommes membres d'un groupe IREM "primaire" de Grenoble composé de formatrices (formatrice ESPE en mathématiques, conseillères pédagogiques, PEMF exerçant dans différents cycles). La réflexion de ce groupe de travail porte sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 2, dont la maîtrise conditionne l'apprentissage et la compréhension d'autres champs mathématiques tels que le calcul ou les mesures de grandeur. En tant que formatrices, nous avons remarqué la présence fréquente d'un rituel consistant à dénombrer les jours d'école, rituel souvent appelé : "*chaque jour compte*".

Ce dispositif, qui se réduit souvent à atteindre le centième jour d'école, nous semble avoir un potentiel plus large et pourrait répondre à de vrais objectifs d'apprentissage en ce qui concerne la numération décimale.

Dans une première partie, nous décrivons brièvement le rituel "*chaque jour compte*" à partir de nos observations de classe. Cette description nous amène à nous questionner sur l'efficacité de ce dispositif quant à la prise en charge de la compréhension de la numération décimale de position. En nous appuyant sur quelques éclairages théoriques, nous proposons une évolution de ce rituel que nous décrivons et associons à l'analyse de quelques productions d'élèves. Enfin, nous concluons en listant les limites et points forts de notre dispositif.

I - POINTS DE DÉPART

4 Un rituel souvent observé : "*chaque jour compte*"

Au fil de nos visites et observations de classes, en tant que formatrices d'enseignants, nous rencontrons un rituel mathématique fréquemment utilisé, désigné par : "*chaque jour compte*".

D'origine nord-américaine, le "*Number of the day*" est largement repris par les sites d'enseignants (par exemple, http://www.charivarialecole.fr/archives/1101 ou http://boutdegomme.fr/rituels-maths-chaque-jour-compte-a109143610[161]). Ce rituel consiste à compter les jours d'école jusqu'au centième jour. Chaque jour, un élève responsable ajoute une paille qui représente un jour d'école dans un « gobelet des unités » (cf. photo 1). Lorsque ce gobelet contient dix pailles, il les regroupe à l'aide d'un élastique et les place dans le « gobelet des dizaines », c'est la phase de groupement. Il procède de façon identique pour les centaines (dix paquets de dix pailles passent dans le « gobelet des centaines » (cf. photo 2)). Après avoir manipulé les pailles, il remplit un tableau de numération collectif (cf. photo 2). Dans certaines classes, les autres élèves complètent, en parallèle, une fiche préremplie avec différentes représentations du nombre : écriture chiffrée, représentations analogiques, écriture en lettres, décompositions additives... (cf. photos 3).



Photo 1 - Les pailles
(source : *www.sanleane.fr*)



Photo 2 - Les pailles et le tableau de numération collectif (source : http://damedubois.eklablog.com)

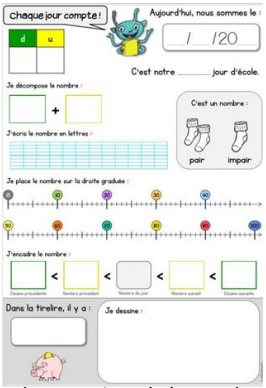


Photo 3 - les representations du nombre
(source : *www.lutinbazar.fr*)

Parmi les pratiques souvent observées, certaines variantes nous ont interpelées :

- Un élève responsable procède seul au rituel, sans mutualisation, ni temps collectif avec le reste de la classe.

- Le rituel se pratique sans matériel (absence de pailles ou autres éléments représentant les jours d'école - cf. photo 4) ou avec un matériel très varié (pailles de même couleur - cf. photo 1), de couleurs différentes au sein d'un même rang de numération (cf. photo 2) ou de couleurs différentes selon la position (une paille blanche vaut « un » tandis qu'une paille noire vaut « dix » - cf. photo 5).

- Le rituel se centre sur le remplissage du tableau de numération qui arrive dès le premier jour de classe avec la terminologie classique dizaine (d) unités (u) (cf. photo 6)

- Le groupement par « dix » est induit dès le dixième jour qui se situe mi-septembre (cf. photo 6)

- Des fiches de représentations du nombre préremplies sont proposées à l'ensemble de la classe. Elles sont complexes en début d'année et n'évoluent pas. Une jeune collègue de CE1 témoigne en février : "*Mes élèves commencent à y arriver...*".

- Le matériel du rituel n'est pas utilisé dans les apprentissages relatifs à la numération.

- Le rituel prend fin le centième jour d'école : les enseignants ne se permettant pas de le dépasser croyant alors être hors programmes.

[160] Sites consultés le 23 / 09 / 2018.
[161] Sites consultés le 23 / 09 / 2018.



Photo 4 - L'absence de matériel



Photo 5 - Les pailles de couleurs différentes selon la position

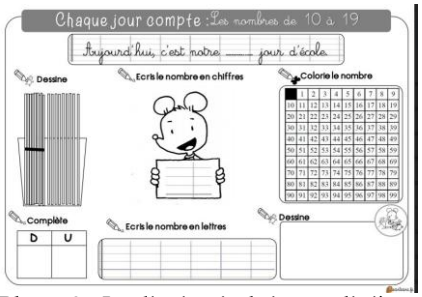


Photo 6 - La dizaine induite au dixième jour d'école (source : www.sanleane.fr)

5 Comment la numération décimale de position est-elle prise en charge par le rituel "chaque jour compte" ?

Les différents aspects décrits plus haut nous amènent à nous interroger sur ce rituel :

- La tâche prescrite est identique chaque jour. Il n'y a pas de progressivité des apprentissages. N'y a-t-il pas un phénomène de lassitude qui s'installe avec une perte de sens ? Peut-on parler de rituel quand il y a absence de progressivité ? **Ce rituel est-il porteur d'apprentissages mathématiques ?**
- Du matériel très différent est proposé selon les classes : quel sens est donné au matériel par rapport au nombre qu'il désigne ? **Quel sens fait-on porter au matériel utilisé ?**
- Différentes représentations du nombre sont imposées et ne sont pas toujours en relation avec le matériel utilisé : **Comment l'élève fait-il le lien entre le nombre et ses représentations ?**
- Le tableau de numération est au centre de l'activité. L'aspect positionnel de la numération (écrite, chiffrée) est donc prépondérant au détriment de l'aspect décimal. **Est-ce suffisant pour donner du sens à la numération ? Quel sens l'élève donne-t-il à ce tableau ?**
- La dizaine s'impose dès le dixième jour. Comment la pertinence du groupement par dix peut-elle être mise en évidence ? Les relations entre les unités de numération sont-elles prises en compte ? Autrement dit : **L'aspect décimal de la numération est-il travaillé ?**

Pour répondre à ces questions, nous proposons un détour par la théorie puis nous présentons le rituel que nous avons expérimenté dans deux classes (CP et CP-CE1).

II - ÉCLAIRAGES THÉORIQUES

Afin d'apporter des éléments de réponse à notre questionnement, dans ce paragraphe, nous nous appuyons sur quelques éclairages théoriques que nous déclinons en trois axes. Dans un premier temps nous abordons les **apprentissages mathématiques en jeu dans la numération décimale**, nous poursuivons ensuite avec les **différentes représentations du nombre** avant de nous intéresser à la place de **rituels** dans l'apprentissage.

1 Du côté de la didactique des mathématiques et des concepts de la numération

1.1 Les deux aspects de la numération

Tempier (2010) rappelle les deux aspects de notre système de numération, à savoir :

- L'aspect positionnel : chaque position indique une unité de numération. La position réfère à une unité : par exemple, dans « 5159 », le « 5 » peut représenter « 5 milliers » quand il est en quatrième position (en partant de la droite), ou « 5 dizaines » s'il se situe en deuxième position (en partant de la droite).

- L'aspect décimal : ce qui importe est la relation entre les unités. Ainsi, deux unités consécutives ont un rapport de dix. Dix unités, c'est une dizaine ; dix dizaines, c'est une centaine…

1.2 Les difficultés liées à l'apprentissage de la numération

Dans leur article de 1984, Bednarz et Janvier mettent en évidence de nombreuses difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la numération. Leurs expérimentations soulignent notamment les difficultés :

- à voir les groupements et leur rôle dans l'écriture conventionnelle, en dépit d'une place importante du travail sur cette écriture ;

- à voir la pertinence de ces groupements ;

- à opérer avec ces groupements : à les faire et les défaire ;

- à interpréter les procédures de calcul en termes de groupements : le sens des techniques opératoires est éludé.

Cette étude ancienne pourrait nous laisser penser que les difficultés ont été prises en charge dans l'enseignement. Or ce que nous montre Tempier, dans ses récentes recherches (2010, 2016), c'est qu'il n'en est rien. Sur son site de ressources[162], pour les enseignants, trois types de difficultés sont illustrées :

- Les difficultés concernant l'aspect positionnel de la numération : recomposer un nombre, par exemple lorsque les unités ne sont pas données dans l'ordre, ou lorsqu'un zéro doit marquer une position.

- Les difficultés concernant l'aspect décimal de la numération : recomposer un nombre avec plus de dix unités à certains ordres (par exemple, utiliser le fait que 21 dizaines correspondent à 210 unités) ou effectuer des conversions entre les unités de numération avec une difficulté renforcée lorsque la relation se situe entre deux unités non successives (par exemple, convertir trois centaines en unités).

- Les difficultés concernant l'utilisation de la numération pour résoudre des problèmes. Un exemple est donné dans le contexte de la monnaie et on pourrait l'étendre à d'autres problèmes de la forme : *combien faut-il de carnets de 10 timbres pour envoyer 563 lettres ?* La lecture du nombre n'est en général pas exploitée pour répondre à la question. Les enseignants considèrent d'ailleurs souvent que ce type de problème relève davantage de la division.

Ces auteurs nous alertent sur les difficultés des élèves, en ce qui concerne l'acquisition de la numération, notamment chez des élèves de CE2, c'est-à-dire autour de 8 ans.

Si l'on se réfère au rituel "*chaque jour compte*", évoqué en première partie, la dizaine imposée bien souvent le dixième jour, ne permet pas de travailler la nécessité du groupement et donc la construction de l'aspect décimal de la numération au CP.

1.3 La place du tableau de numération

Nous avons vu, lors de la présentation de « *chaque jour compte* », que le tableau de numération était prégnant dès les premiers jours de CP, associé avec la terminologie classique : *centaines, dizaines et unités*.

Lors des activités de remplissage du tableau de numération, il peut arriver que l'élève remplisse de façon « mécanique » le tableau. Ses réponses correctes n'attestent pas nécessairement de sa compréhension réelle : les termes de dizaines et unités semblent vides de sens et il restitue simplement le « *texte du savoir* » comme le dénonce Brissiaud, en parlant du verbalisme des figurations :

> *Le verbalisme est la restitution du « texte du savoir » sans réelle compréhension de ce savoir. Dans le domaine de la numération décimale, il existe deux formes de verbalisme qui correspondent aux deux grands types de représentations des nombres : chiffrées et figurées. Ces deux formes de verbalisme résultent d'une conception statique des représentations utilisées ; l'enfant peut alors fournir des réponses apparemment correctes, qui n'attestent pourtant pas de la compréhension réelle d'équivalences entre procédures de dénombrement.* (Brissiaud, 2005)

Une des pistes pour éviter le verbalisme des figurations (Brissiaud, 2005) est que l'élève groupe lui-même les dix objets pour construire « le paquet de dix » : la dizaine serait alors perçue comme la représentation spatiale du résultat d'une action. L'écriture chiffrée « 126 », par exemple, associée à une quantité organisée en « une centaine, deux dizaines et six unités » prend du sens et répond à une

[162] numerationdecimale.free.fr

procédure de dénombrement. Elle n'est pas l'aboutissement d'un simple automatisme qui consisterait à concaténer mécaniquement les trois chiffres.

Tempier (2010) dénonce la même dérive : « *Les mots unités, dizaines, centaines, … ne sont souvent utilisés que comme des étiquettes pour dire le nom des rangs dans l'écriture du nombre* ». L'accent est ainsi mis sur l'aspect positionnel dans l'écriture du nombre sans mise en relation avec son aspect décimal.

1.4 Comment éviter ces difficultés ?

Chambris (2012) déplore que le travail sur les unités de numération se limite aux tableaux de numération et à quelques décompositions réglées dont '*chiffre des…*" et "*nombre de…*" sans enseigner les relations entre unités du type "1 millier = 10 centaines". Elle précise que la seule unité présente dans l'enseignement de la numération semble être le "nombre 1". Dans sa volonté de faire évoluer l'enseignement de la numération, elle propose de travailler les relations entre unités de numération tant dans l'apprentissage de la numération que dans celui du système métrique.

De son côté, Tempier (2016), conseille, pour éviter de ramener l'élève à un apprentissage de techniques telles que le comptage en unités simples, la multiplication par 10 ou l'utilisation d'un tableau de numération sans mise en lien avec les savoirs de la numération : *il est nécessaire de faire des relations entre unités un enjeu fort d'enseignement.*

Nous montrons, dans la suite de notre présentation, comment nous tentons de prendre en compte ces recommandations de la recherche pour palier les difficultés évoquées.

2 Du côté des représentations

Tentons de recueillir quelques repères théoriques sur les représentations du nombre pour revenir notamment à notre questionnement sur les représentations proposées des élèves : **Comment l'élève fait-il le lien entre le nombre et ses représentations ?**

Il est possible d'interroger ces représentations avec différents prismes. Toutefois, nous faisons le choix de nous intéresser à ce que nous disent Dehaene et Bruner dont les cadres semblent parfaitement correspondre à ce que nous voulons souligner.

2.1 Le triple code de Dehaene et Cohen

On sait, et le travail de la conférence de consensus *Nombres et calculs au primaire* (2015) nous l'a rappelé, que l'apprentissage des nombres est favorisé par la diversité des représentations qui sont proposées aux élèves : dessins, schémas, désignations orales, désignations écrites, résultats de petits calculs, etc.

Dehaene & Cohen (1995) proposent un modèle avec trois grands systèmes de représentation mentale des nombres : le code analogique des quantités numériques, le code visuel arabe et le code verbal.

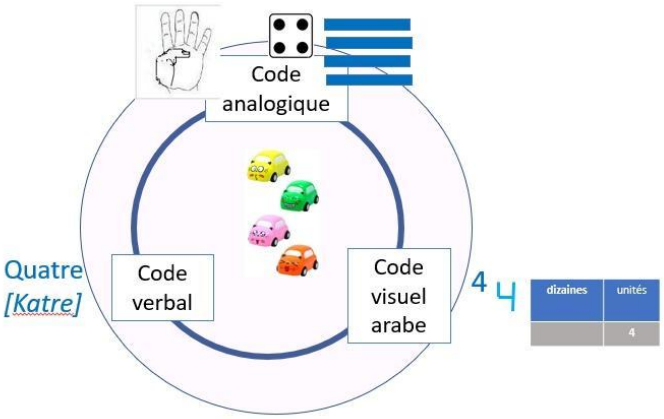


Figure 1 - Le triple code de Dehaene et Cohen (1995)

Le code analogique désigne la quantité physique. Ce système inné, sous-tendu par le lobe pariétal, permet d'appréhender le sens du nombre, autrement dit la signification des quantités. Ce système non symbolique permet donc une évaluation précise des petites quantités et une estimation approximative des grandes collections. Il sert à effectuer des comparaisons numériques et des calculs approximatifs.

Le code visuel correspond à la forme visuelle des nombres arabes. Cet aspect symbolique, intervient dans les activités de calcul précis et permet de réaliser des calculs mentaux complexes.

Le code verbal est la représentation auditive verbale (ex. "quatre" prononcé /katr/) utilisée principalement dans l'activité de comptage. Elle permet de coder la quantité et intervient dans les activités de calcul précis.

Pour travailler la numération, il est donc nécessaire d'aborder ces différents codes mais également le passage de l'un à l'autre dans des activités qui donnent du sens au nombre.

2.2 Les trois modes de Bruner

Le cadre de Dehaene & Cohen, s'il est pertinent avec l'approche des différentes représentations, ne prend pas en compte l'aspect manipulation, d'où l'intérêt d'aller regarder ce que propose Bruner (1973) qui précise que le savoir peut se représenter selon trois modes :

• **Le mode énactif,** où on apprend par l'action, par la **manipulation.**

• **Le mode iconique,** où il s'agit "*de pouvoir représenter quelque chose sans l'avoir sous les yeux. L'action est transformée en image mentale*".

• **Le mode symbolique,** qui propose une représentation abstraite : "*Le système symbolique représente les choses par des symboles qui sont déconnectés et arbitraires*." La représentation visuelle arabe, ou écriture chiffrée, d'un nombre en fait partie.

Sous cet éclairage, nous pouvons revenir au rituel : "*chaque jour compte*", lors duquel les élèves ne manipulent pas ou peu et pour lequel on pourrait déduire qu'il n'y a pas, par ce biais, de travail sur l'image mentale du nombre et sa représentation.

2.3 Les caractéristiques d'un matériel

Sur l'aspect matériel, Laski (2015) reprend des éléments identifiés dans une méta-analyse de Carbonneau et *al.* (2013). Ils listent les différentes caractéristiques d'une manipulation efficace pour conduire l'élève vers l'abstraction d'un concept mathématique :

- **Un matériel de référence utilisé comme support d'apprentissage sur une période de temps conséquente.**
- **Un matériel épuré qui se distingue des objets du quotidien.**
- Les objets familiers risquent de distraire les élèves, et ainsi, de rendre plus difficile le lien entre la manipulation et le concept mathématique. Les perles dorées Montessori sont citées comme un exemple de matériel épuré.
- **Un matériel "transparent" qui permet une représentation concrète du concept mathématique**. La mise en mémoire et la création d'images mentales sont facilitées par la ressemblance physique avec la propriété visée et le respect des relations de proportionnalité entre les différents éléments (taille, poids…).
- Lorsqu'**un autre matériel** (boites de Picbille, abaques, bouliers…) est proposé en relation avec le précédent, il faut expliciter en quoi ce nouveau matériel reprend la même notion mathématique.

3 Du côté de la ritualisation

Nous nous sommes d'abord intéressées aux recommandations des neuropsychologues Eustache et Guillery-Girard (2016) qui s'appuient sur les connaissances récentes des processus mnésiques. Nous avons retenu les suivantes :

- multiplier les modalités de présentation du nombre,
- donner des stratégies d'organisation (type carte mentale),
- utiliser des rituels qui améliorent la réceptivité des élèves.

Mais en quoi la ritualisation est-elle une méthode optimale pour mémoriser ? Là encore, Eustache et Guillery-Girard (2016), dans leur ouvrage de neurosciences, nous éclairent : la répétition des épisodes d'apprentissage soutient la formation de nouvelles connaissances pour compenser le faible empan de mémoire de travail de l'enfant. Elle favorise la mémorisation à long terme et permet d'effacer

progressivement les souvenirs spécifiques pour ne conserver que le concept. Enfin, par son caractère fractionné, le rituel permet de mobiliser les capacités d'attention réduites chez l'enfant.

Nous nous sommes ensuite intéressées à l'usage du rituel dans le cadre scolaire. Celui-ci est souvent rencontré notamment à l'école maternelle (appel, calendrier, dénombrement des élèves présents...). En sciences de l'éducation, Amigues et Zerbato-Poudou (2000) définissent un rituel par des caractéristiques précises :

- la grande régularité de l'activité qui se déroule à la même heure, dans le même lieu et avec la même durée.
- la **répétitivité** des gestes et des paroles qui lui donne **une identité formelle.**
- les **contraintes** avec des règles claires et respectées par tous. Tout n'est pas permis, il y a des règles pour s'exprimer et pour écouter.

De plus, le rituel a un caractère multifonctionnel. Sans chercher à faire une liste exhaustive de ses fonctions, nous avons retenu les suivantes :

- **la fonction de passage** entre la famille et la sphère scolaire : comme une activité de démarrage, un lanceur de la journée scolaire.
- **la fonction de socialisation :** il permet à l'enfant de prendre conscience de son appartenance à un groupe avec lequel il partage une culture. Tout le monde doit faire la même chose en même temps : des comportements collectifs sont construits.
- la **fonction langagière :** l'élève doit produire un message adapté à la situation.
- **la fonction d'acquisition d'autonomie** qui grâce à la répétition développe la confiance en soi.
- **une fonction d'anticipation :** Le rituel permet à l'enfant de se projeter dans un futur plus ou moins proche.

Les recherches plus récentes en sciences de l'éducation (Merri, 2015) confirment le fait qu'un rituel donne une sécurité affective et intellectuelle propice à la construction des savoirs.

Nous nous sommes ensuite penchées sur l'usage qui peut être fait d'un rituel en mathématiques. Dias (2015), dans son ouvrage "*Nous sommes tous des mathématiciens*", identifie le rituel comme une clé, un "type de médiation" qui ouvre sur des environnements d'apprentissage. Pour lui, ritualiser permet de stabiliser des connaissances mathématiques par l'acquisition d'automatismes et favorise le développement de nouvelles connaissances. Il cite deux rituels de numération : le nombre du jour et la boîte à cailloux qui permet la construction progressive d'un système d'organisation des nombres.

III - ÉLÉMENTS DE RÉPONSES : "LES CRAYONS"

Dans cette troisième partie, nous présentons une expérimentation menée dans deux classes du bassin grenoblois en CP. S'il s'inspire du "*chaque jour compte*" décrit plus haut, le rituel "*les crayons*", que nous avons construit, apporte de nombreuses modifications et des choix explicites pour répondre aux préconisations issues de la recherche. C'est un rituel sur lequel nous continuons à nous interroger.

1 La présentation du rituel "Les crayons"

Chaque jour, le rituel "*les crayons*" se déroule en plusieurs phases. Tout d'abord, un élève responsable pose un nouveau crayon au tableau (cf. photo 7), dénombre la collection avec la classe et annonce : "*Il y a x crayons au tableau, nous sommes le x^{ème} jour d'école*". Cette première phase orale se conclut par une formulation qui associe les aspects cardinal et ordinal du nombre.

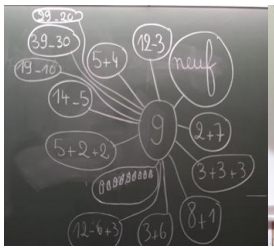
Puis, dans un deuxième temps, tous les élèves écrivent sur l'ardoise le nombre énoncé "*de toutes les manières qu'ils connaissent*". Toutes les représentations sont acceptées (analogiques, verbales, visuelles, symboliques… cf. photo 8). Enfin, un troisième temps est proposé pour conclure le rituel. Il peut prendre différentes formes parmi lesquelles on peut citer la construction d'une carte mentale collective, un retour sur une ou plusieurs productions d'élèves intéressantes et suscitant un débat, ou encore avec la représentation du nombre par les doigts des élèves... (cf. photos 9 et 10).



Photo 7 - Phase orale du rituel



Photo 8 - Phase écrite du rituel





Photos 9 et 10 - Conclusions du rituel

En parallèle, dans le cadre de l'enseignement du temps, un calendrier est complété avec les crayons pour représenter l'aspect ordinal du nombre (cf. photo 11).



Photo 11 - Les crayons dans le calendrier

Au bout d'une quarantaine de jours de classe, la routine s'installe. Le dénombrement des crayons devient fastidieux et source d'erreurs. Pour remobiliser les élèves, des rebondissements apparaissent qui permettent d'introduire le groupement.

Premier rebondissement : l'enseignant guide les élèves vers le groupement des crayons : par deux, par cinq, par dix. Ces propositions se font en parallèle du travail de la classe en calcul mental. Chaque proposition est testée et à chaque fois le tableau se réorganise (cf. photos 12, 13 et 14). Et finalement, le groupement par dix l'emporte par l'expérimentation de la classe et le guidage de l'enseignant.

Nouveau rebondissement : une fois le groupement par dix bien installé, le tableau est un jour malencontreusement mélangé par des lutins ou la dame de ménage.... Il faut tout remettre en place et la trousse, symbole de la dizaine est introduite en échange de dix crayons comme outil facilitant le dénombrement (cf. photo 15). Les échanges s'opèrent, la numération décimale est en marche. Plus tard, le cartable apparaîtra, représentant la centaine.



Photo 12 - Groupements par deux

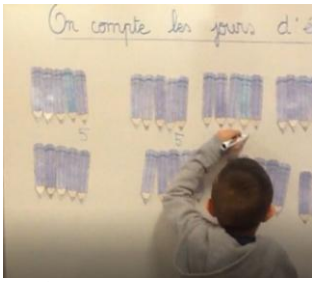


Photo 13 - Groupements par cinq

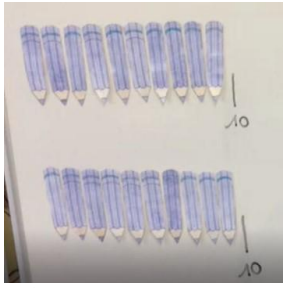


Photo 14 - Groupements par dix



Photo 15 - Introduction de la trousse

2 Une année de numération avec les crayons

Pour se donner quelques repères sur l'année, la trousse est introduite en novembre et le cartable en février/mars. À partir de ces grands jalons, une programmation s'est construite, dont voici les principaux éléments :

- La période 1 et le début de période 2 sont consacrés à dénombrer les crayons de un en un, de deux en deux, de cinq en cinq, de dix en dix (du premier jour d'école aux environs du quarante-sixième jour d'école) et à aborder la schématisation des crayons.

- La période 2 se poursuit avec l'introduction de la trousse (la dizaine), la poursuite du dénombrement de dix en dix, et la schématisation de ce nouvel élément qu'est la trousse. Les crayons et trousses sont utilisés dans le passage au calcul (en manipulation).
- En période 3 se situe l'introduction du cartable (la centaine) ainsi que l'addition en ligne avec l'apparition d'une nouvelle dizaine.
- En périodes 4 et 5, c'est au tour de l'addition posée en colonne et des nombreuses conversions (cf. paragraphe 3.4, Les relations entre les unités de numération).

Cette programmation est détaillée dans un tableau (cf. Annexe 1) où des activités de numération complémentaires (*fourmillions*, jeu du *banquier*…) sont proposées en parallèle.

De manière régulière, tout au long de l'année, la décomposition des nombres est travaillée prenant appui sur les nombres « 10 », « 50 », « 100 », les doubles, les presque doubles, les compléments à dix. Les conversions d'un nombre de trousses et d'un nombre plus grand que dix de crayons sont privilégiées. Par exemple, « 3 trousses et 15 crayons » font combien de crayons ? Le sens des différentes opérations (addition, soustraction, multiplication, division) est abordé au fur et à mesure des propositions des élèves.

Le cœur du rituel est **la prise en charge de la numération décimale avec les groupements**.

> *La variable "nombre d'unités de chaque ordre" permet de mettre en jeu les relations entre unités quand il y a plus de dix unités à certains ordres. Elle est déterminante pour permettre de développer une compréhension de la numération qui ne se limite pas à la connaissance de la valeur des chiffres en fonction de leur position mais prend en compte différentes interprétations des unités (une centaine comme dix dizaines ou cent unités)* Tempier (2016)

Nous distinguons différents types de décomposition. Il y a, d'une part, la décomposition dite canonique (par exemple, « 3c 5d 7u » pour « 357 ») ou encore des décompositions « groupées » en unités de numération (par exemple, « 35d 7u » pour « 357 » ou « 3c 57u » pour « 357 »). Ces décompositions ne nécessitent pas une compréhension décimale de la numération au sens où les élèves peuvent convertir ces décompositions en « 357u » en positionnant les étiquettes c, d et u correctement sans mobiliser les relations décimales entre les unités. Nous avançons l'idée que, ce sont les décompositions dont la concaténation des quantités d'unités de numération ne permet pas, à elle seule, d'aboutir à la bonne réponse ; par exemple, « 3c 4d 17u » pour « 357 » qui permettront de travailler les relations entre unités de numération. Nous les nommerons dorénavant *décompositions semi-groupées*. Ce sont ces décompositions qui offrent la possibilité de détecter les « experts apparents » qui donnent à croire à l'enseignant qu'ils ont une maitrise de la numération alors qu'ils n'ont que replacé les étiquettes au bon endroit.

À l'aide des crayons :

- Un travail spécifique sur les **conversions d'unités** est pratiqué (Chambris (2012)).
- La **technique opératoire de l'addition** est justifiée.
- Les **besoins des élèves** sont pris en compte, en effet :
    - Les représentations ne sont pas imposées.
    - Des incontournables sont identifiés : + 1 ; + 10, doubles, décompositions en « 10 + … » ; en « 20 + … » ; en « 50 + … ».
    - Un temps de recherche suffisant est accordé à chacun.
    - Des outils spécifiques viennent renforcer l'entraînement et construire les apprentissages : manipulation des crayons, liste d'incontournables comme points d'appuis pour les plus fragiles…
    - Le matériel est utilisé comme matériel de référence pour toutes les activités de numération de la classe.
    - Les différentes représentations sont travaillées : code analogique, code verbal, code arabe (Dehaene) ainsi que les passages d'un code à l'autre.
    - Différentes décompositions du code arabe sont construites : sous la forme canonique, groupées ou semi-groupées nécessitant des conversions entre unités de numération.

3 Du côté des élèves

Au début de la mise en œuvre du rituel "*des crayons*" dans nos classes, nous faisions produire, à l'ensemble des élèves, les différentes représentations du nombre de jours d'école sur ardoise. Toutefois, beaucoup d'éléments nous échappaient, que ce soit au niveau des erreurs comme des trouvailles des élèves et nous avons ressenti le besoin de garder une trace écrite régulière de ces productions.

En septembre 2017, nous avons décidé de proposer un entraînement sur ardoise du lundi au jeudi et de changer de support le vendredi pour travailler sur le carnet des jours d'école. Ce nouveau dispositif nous permet d'analyser de manière beaucoup plus fine les acquis des élèves mais aussi leurs besoins pour réajuster les modalités de différenciation. Nous pouvons ainsi facilement sélectionner les erreurs et/ou propositions nouvelles sur lesquelles prendre appui. Ce carnet permet aussi à l'élève ainsi qu'à ses parents d'observer les progrès réalisés depuis le début de l'année.

Dans ce paragraphe, nous allons nous pencher sur les productions d'élèves d'une classe de CP ayant travaillé avec le rituel "les crayons". Cette classe est située dans un établissement classé REP dans la commune de Fontaine, limitrophe de Grenoble. L'école accueille des élèves issus de milieux sociaux mixtes. La classe se compose de 23 élèves dont trois élèves allophones. Aux évaluations nationales de début de CP (évaluant les acquis de GS), le taux de réussite moyen de la classe sur l'épreuve de mathématiques était de 69 %.

Nous proposons une illustration de ce qui précède à travers l'analyse des progrès de trois élèves : une élève, S., en difficulté, une élève, O., qui est dans la moyenne de la classe, et enfin une élève, N., que l'on peut qualifier de performante dans son travail mathématique. Le choix s'est porté vers ces élèves pour les raisons suivantes : S. parce qu'elle présentait un déficit langagier qui la mettait en difficulté dans la compréhension de consignes ; O. parce qu'elle a obtenu un taux de réussite de 69,2 % la positionnant exactement dans la moyenne de la classe ; et enfin, N pour son attitude d'élève chercheur. Ces trois élèves nous semblent représenter les profils types de cette classe.

3.1 Les productions d'une élève située dans la moyenne de la classe

L'élève O., aux évaluations de rentrée, se situe exactement au niveau de la moyenne de la classe. En septembre, l'élève O. connaît la comptine numérique jusqu'à 28, elle sait lire les nombres jusqu'à 9, les écrire jusqu'à 12. Elle ne réussit pas à dénombrer une collection de 17 cubes : elle les touche mais ne les déplace pas et en pointe certains plusieurs fois.

Voici ses productions à trois moments de l'année :

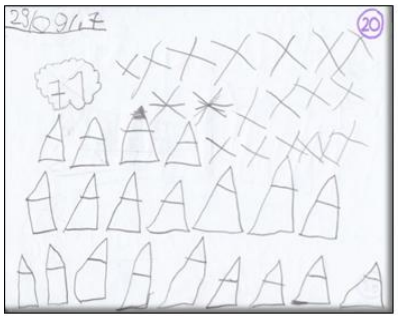


Photo 16 - Représentation du nombre 20 par l'élève O. en septembre

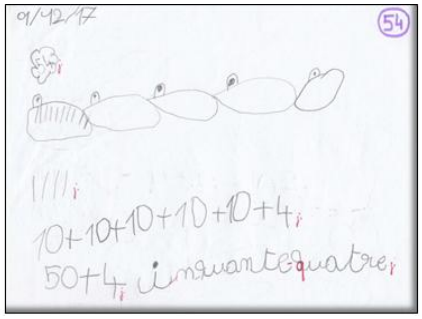


Photo 17 - Représentation du nombre 54 par l'élève O. en décembre

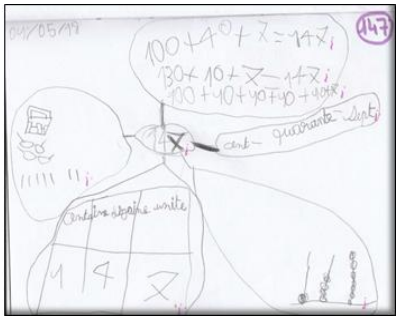


Photo 18 - Représentation du nombre 147 par l'élève O. en mai

En septembre, O. produit une écriture chiffrée erronée (71 pour 20), dessine 20 crayons et 19 croix.

En décembre, elle produit une écriture chiffrée correcte (54), schématise les crayons et les trousses, écrit deux décompositions additives qui prennent appui sur le schéma et finit par une écriture littérale du nombre.

En observant plus précisément cette seconde production, on remarque qu'elle commence par faire une trousse contenant les dix crayons puis continue en ne dessinant que les trousses sans les crayons. À ce moment de l'année, sa production suit toujours le même ordre : écriture chiffrée / schéma / décomposition additive qui reprend le schéma / écriture en mots.

En mai, O. réalise une carte mentale comportant six représentations du nombre (écriture chiffrée, écriture littérale, schéma des trousses et crayons, décomposition additive, tableau de numération, abaque) qui sont toutes correctes. Elle décompose le nombre dans un tableau de numération en précisant le vocabulaire centaine, dizaine, unité.

Lors des évaluations du mois de juin, O. connait la comptine numérique jusqu'à 199, elle sait lire et écrire les nombres jusqu'à 100 et dénombrer une collection de 37 cubes, en les comptant de un en un.

3.2 Les productions d'une élève en difficulté

L'élève S. est une élève allophone dont le milieu familial est très éloigné de la culture scolaire. Elle a un déficit au niveau des acquis langagiers, des manques importants de vocabulaire et elle est en difficulté de manière générale sur la compréhension des consignes orales. Son taux de réussite aux évaluations de rentrée est de 30,8 %. En septembre, elle connaît la comptine numérique jusqu'à 28, sait lire et écrire les nombres jusqu'à 9 avec une confusion entre 6 et 9 et réussit à dénombrer une collection de 17 cubes.

Voici ses productions aux trois moments de l'année :

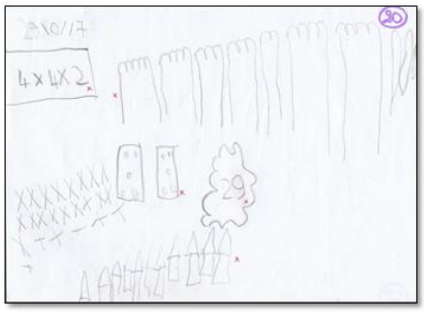


Photo 19 - Représentation du nombre 20 par l'élève S. en septembre

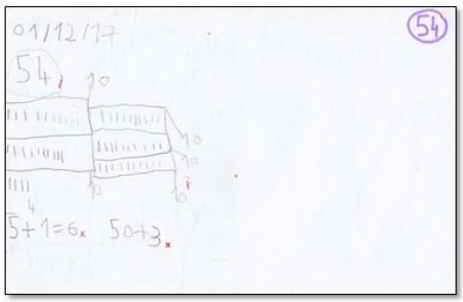


Photo 20 - Représentation du nombre 54 par l'élève S. en décembre

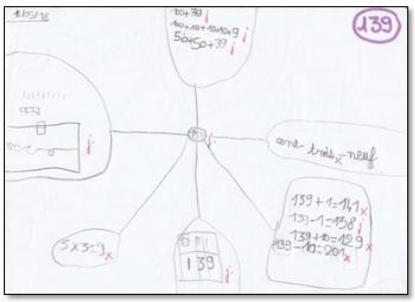


Photo 21 - Représentation du nombre 139 par l'élève S. en mai

En septembre, l'élève S. produit une écriture chiffrée erronée (29 pour 20) et ne fait pas le lien entre le nombre et la quantité d'éléments des collections qu'il représente (11 crayons, 24 croix, 10 points, 27 doigts).

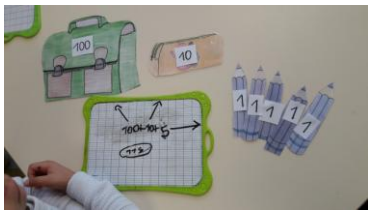
En décembre, son écriture chiffrée du nombre est correcte (54) et elle fait le lien entre le nombre et la quantité qu'il représente. Sa représentation analogique est constituée de 54 traits qui symbolisent les crayons groupés en 5 trousses et 4 crayons isolés. Elle ne sait pas encore y associer des écritures mathématiques correctes (5 + 1, 50 + 3)

En mai, elle réalise une carte mentale de six représentations du nombre partiellement correctes. Le lien entre numération orale et numération écrite est en cours d'acquisition (elle écrit cent-trois-neuf pour cent-trente-neuf). Elle produit beaucoup plus de décompositions mathématiques qu'en décembre (huit contre deux avec une moitié de productions correctes).

Modalités de différenciation (cf. photos 22 à 24) : l'élève S. a travaillé, une grande partie de l'année, à proximité du tableau de référence, avec du matériel à disposition et l'étayage de l'enseignante. La composition du groupe d'élèves l'accompagnant (de trois à cinq) a évolué avec l'analyse régulière des productions des carnets des jours d'école.







Photos 22 à 24 – modalités de différenciation

Lors des évaluations du mois de juin, l'élève S. connait la comptine numérique jusqu'à 69. Elle sait lire et écrire les nombres jusqu'à 100 avec des confusions sur 60 / 70, 80 / 90 et réussit à dénombrer une collection de 37 cubes, en les comptant de un en un.

3.3 Les productions d'une élève performante en mathématiques

L'élève N. est une élève performante dans l'ensemble des domaines scolaires. Elle est parfaitement lectrice lors de son entrée au CP. Son taux de réussite en mathématiques aux évaluations de rentrée est de 96 %.

En septembre, elle connaît la comptine numérique jusqu'à 78, elle sait lire et écrire les nombres jusqu'à 20 et sait dénombrer une collection de 37 cubes par comptage de un en un.

Voici ses productions aux trois moments de l'année :

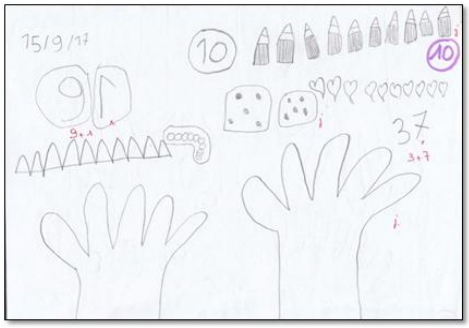


Photo 25 - Représentation du nombre 10 par l'élève N. en septembre

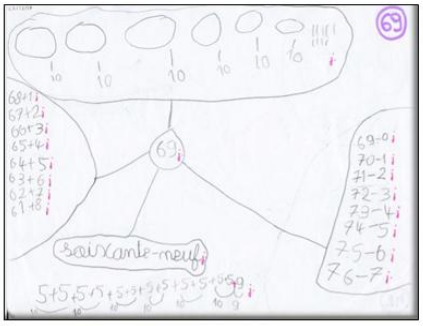


Photo 26 - Représentation du nombre 69 par l'élève N. en décembre

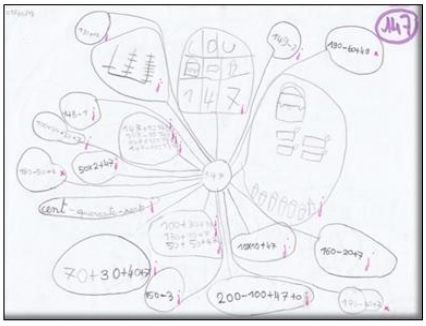


Photo 27- Représentation du nombre 147 par l'élève N. en mai

En septembre, l'élève N. produit une écriture chiffrée correcte. Elle représente le nombre principalement de manière analogique (mains, dés, collection de crayons et autres éléments). Elle connaît les décompositions du nombre 10 (9 et 1 ; 3 et 7) mais n'a pas encore acquis l'écriture mathématique du signe +.

En décembre, elle schématise les trousses en utilisant l'écriture chiffrée (10). Elle produit majoritairement des décompositions mathématiques additives (68 + 1, 67 + 2, 66 + 3, 65 + 4…) et soustractives (69 – 0, 70 – 1, 71 – 2, 7 – 63…). Elle agit de manière mécanique en appliquant ses propres algorithmes (elle enlève un au premier terme de la somme et ajoute un au second...). Toutes ses productions sont correctes.

En mai, elle réalise une carte mentale très dense de 19 représentations du nombre. Sa production s'est enrichie d'écritures multiplicatives et mixtes (50 x 2 + 47 ; 10 x 10 + 47 ; 70 + 30 + 40 + 7 ; 130 + 10 + 7 ; 200 – 100 + 47 + 0…). Elle prend appui sur les nombres 50, 100 et leurs décompositions (70 + 30 ; 50 + 50).

L'élève N. se positionne en élève chercheur, qui prend des risques dans sa quête de nouvelles écritures du nombre. Ce qui la conduit aussi à produire des écritures erronées (190 – 60 + 49 ; 170 – 40 + 7 ; 180 – 50 + 7).

Lors des évaluations du mois de juin**,** l'élève N connaît la comptine numérique au-delà de 200, elle sait lire et écrire les nombres jusqu'à 100 et elle sait dénombrer des collections de 37 éléments en utilisant le groupement (par deux ou par dix).

Pour chaque élève présenté, nous constatons une progression dans les apprentissages mathématiques : connaissance de la comptine, lecture des nombres, dénombrement d'une collection d'objets. Leur connaissance des nombres s'agrandit, leurs décompositions s'enrichissent chacune à leur niveau, à leur rythme. Les autres élèves de la classe s'inscrivent dans l'un ou l'autre de ces profils. Actuellement, notre groupe IREM s'attache à réaliser un travail d'analyse plus détaillé sur les indicateurs de progrès de l'ensemble de la classe.

3.4 Les relations entre les unités de numération

Comme nous l'avons décrit précédemment dans la présentation du rituel "les crayons", l'élève responsable du rituel annonce chaque jour, après avoir posé un nouveau crayon et après avoir animé le dénombrement de la collection par la classe : "*Aujourd'hui, il y a ... crayons, nous sommes le .. .ème jour d'école*".

Plus le nombre de crayons augmente dans l'année et plus les possibilités de décliner la première proposition s'étoffent grâce aux groupements par dix. Par exemple, au 147e jour d'école, la première partie de la phrase s'est déclinée ainsi : "*Aujourd'hui il y a 147 crayons, on peut aussi dire qu'il y a 1 cartable 4 trousses et 7 crayons ou encore 14 trousses et 7 crayons*". Une autre élève a complété la phrase "*On peut aussi dire 1 centaine 4 dizaines et 7 unités ou 14 dizaines et 7 unités ou 147 unités*".



Photo 28 – Différentes représentations du nombre 147

Les relations entre cartable, trousses et crayons sont travaillées dans un premier temps à l'oral. Puis, les élèves transcrivent ensuite à leur manière ces conversions sur l'ardoise et dans leur carnet (cf. photo 28). Leurs productions servent ensuite de points d'appui à l'explicitation régulière des relations entre les crayons, les trousses et le cartable. La consigne de l'enseignant peut aussi conduire l'ensemble de la classe à travailler spécifiquement ces relations comme en témoigne celle du 166e jour d'école "*Aujourd'hui vous allez représenter le matériel sans le cartable*" (cf. photos 29, 30 et 31).



Photos 29, 30 et 31 - Différentes représentations du nombre 166

Cette démarche s'accompagne progressivement de l'introduction du vocabulaire mathématique centaine / dizaine / unité et de l'usage des abréviations associées c / d / u. Les nombreux aller retours avec les désignations de cartable / trousse / crayon contribuent à l'explicitation de ces termes. Notre objectif de fin d'année est que les élèves délaissent le vocabulaire spécifique "cartable / trousse / crayon" au profit du vocabulaire mathématique décontextualisé.

IV - EN GUISE DE CONCLUSION

1 Limites et pistes d'amélioration

Pour clore notre propos, nous évoquons quelques limites à notre rituel "les crayons" ainsi que certaines pistes d'amélioration.

- En premier lieu, nous identifions la nécessité de renforcer le lien entre les aspects ordinal et cardinal du nombre même si, à la suite de Mounier (2016), nous pouvons dire que "*La comptine numérique, qui permet de compter un par un, est particulièrement adaptée à la perception du nombre dans son aspect ordinal. Il est également possible de compter par paquets en énonçant par exemple 2, 4, 6… ou 10, 20, 30…*"

- Une deuxième piste d'amélioration répondrait aux recommandations de Laski (2015) en ce qui concerne le matériel : l'absence de sobriété peut détourner l'attention de l'élève de l'apprentissage de la notion visée (la trousse est un matériel de la vie quotidienne qui pourrait être davantage épuré) et le rapport de dix n'est pas conservé entre ce qui représente l'unité, la dizaine et la centaine (la trousse devrait être dix fois plus grande que les crayons).

- Enfin, ce matériel constitué de trousses et de crayons, qui se veut être un matériel de référence, se prête difficilement à la technique opératoire de la soustraction (le matériel des cubes proposé par Tempier est

beaucoup plus adapté et l'auteur propose de nombreuses pistes (voir site[163])). Il conviendrait donc de faire des liens entre ce matériel et celui des crayons pour travailler la technique opératoire de la soustraction.

2 Points forts

Au-delà de l'aspect matériel et de ses défauts, la proposition de mise en œuvre, pour éviter les écueils du rituel classique du chaque jour compte, nous paraît répondre aux éléments théoriques relevés. Voici en conclusion une synthèse des points forts de notre proposition :

- Le rituel "les crayons" permet de mettre l'accent sur l'aspect décimal de la numération décimale en s'appuyant sur la manipulation. Les notions de dizaine, de centaine ainsi que les relations entre les unités de numération sont construites progressivement avec les élèves et se placent au cœur des activités proposées. La notion de groupement apparaît à l'élève comme une procédure nécessaire pour dénombrer et non comme une réponse à une injonction de l'enseignant.

- Les conversions et les décompositions canoniques ou semi-groupées sont régulièrement travaillées assurant une compréhension de la numération.

- Les différentes représentations du nombre sont travaillées. On retrouve les modes de représentation décrits par Dehaene et Bruner : le mode symbolique englobant le code verbal et arabe, le mode énactif (manipulation des crayons) et iconique (schémas des crayons) précisant le code analogique.

- De par les nombres proposés, l'usage du matériel et de la manipulation, les représentations ouvertes, ce rituel évolue et s'adapte au rythme d'apprentissage de chaque élève ainsi que nous l'avons vu dans la présentation des progrès de trois élèves aux profils très différents. Tous peuvent être au travail sur une tâche collective qui ne se distingue pas par le nombre travaillé mais par le nombre ou le type de représentation demandé. Des représentations incontournables sont identifiées sécurisant l'élève fragile tandis qu'un espace de liberté permet à l'élève de devenir chercheur s'il le souhaite.

Des traces écrites (cartes mentales collectives et carnet des jours d'école) accompagnent la structuration des connaissances. Par l'analyse des représentations proposées, l'enseignant peut enrichir les procédures des élèves et affiner son enseignement (différenciation).

Au fil de l'année, les nombres en jeu "grandissent" : on démarre avec de petits nombres, on compte de un en un, puis de dix en dix. On joue avec ces nombres selon des consignes qui évoluent. Chaque carte mentale est source d'apprentissage et d'assise des connaissances. Les élèves s'emparent des représentations des autres, ils capitalisent la connaissance apportée par le groupe et mise en avant par l'enseignant.

Enfin, nous ne pouvons pas conclure sans mentionner le fait que ce rituel développe un goût partagé pour les mathématiques, le plaisir de chercher dans un cadre sécurisant car réitéré tous les jours… et qu'il contribue à faire aimer les nombres !

V - BIBLIOGRAPHIE

Amigues, R., Zerbato-Poudou, M.-T. (2000). *Comment l'enfant devient élève. Les apprentissages à l'école maternelle*, Retz.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N, n° 33*, pp. 5-31.

Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation orthophonique, n° 223.* pp. 225-237.

Bruner, J. S. (1973). *The relevance of education*, New York: Norton.

[163] numerationdecimale.free.fr

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *n° 105*(2), p. 380.

Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? G*rand N, n° 89*, pp. 39-69.

CNESCO, (2015). Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. Dossier de synthèse. http://www.cnesco.fr/fr/numeration.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. Cognition, n° 44, pp. 1-42.

Dehaene, S. & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, n° *1*, pp. 83–120.

Dias, T. (2015). *Nous sommes tous des mathématiciens*, Magnard.

Eustache, F., Guillery-Girard, B. (2016). *La neuroéducation - la mémoire au cœur des apprentissages,* Odile Jacob.

Laski, E. et al. (2015) What Makes Mathematics Manipulatives Effective? Lessons From Cognitive Science, *Sage Open*, n° *5*(2).

Merri, M. (2015). Pour un renouveau des usages et des définitions des rituels à l'école, *Recherche en éducation*, *hors-série n° 8*.

Mounier, E. (2016). École et nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leurs liens avec la numération écrite chiffrée et la numération orale. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Vol 36/3*, pp. 347-396.

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N, n° 86*, pp. 59-90.

Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N, n° 98*, pp. 67-90.

VI - ANNEXE 1 : PROGRAMMATION SUR UNE ANNÉE SCOLAIRE DU RITUEL DES CRAYONS

SEPTEMBRE					OCTOBRE				NOVEMBRE			DECEMBRE				
Nombre de semaines S1		S2		S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	
Nombre de jours d'école J5		J10		J15	J20	J25	J30	J35	J40	J45	J50	J55	J60	J65	J70	
J1 : Introduction du 1er crayon	Dénombrement de 1 en 1	J6 Début carte mentale 		Dénombrement de 1 en 1, 2 en 2, 5 en 5, recherches pour schématiser les crayons et anticiper le résultat (1)	Début écriture en mots	Début dénombrement de 10 en 10, intro. marqueurs de 10		Vacances	Apparition erreurs, lassitude vers J47 intro. trousse (2) vers J50 intro. 1ere forme tableau numération (3)			Recherches pour schématiser les trousses Enrichissement carte mentale du nombre avec les décompositions		Début du calcul : utilisation du matériel pour comparer et ajouter le nombre de filles et de garçons(4)		Vacances
Activités complémentaires		Lucky Lucke : décomposition des 10 premiers nombres		Introduction des doigts de Stella Baruk	Greli Grelo : addition de petits nombres	Greli Grelo : compléments à 10			Boite noire : compléments à 10			Ermel : Le château des nombres jusqu'à 50		Les petits doubles (jusqu'à 10) + activités autour du château des nombres		

(1) : les élèves proposent des idées pour anticiper le résultat du comptage par exemple laisser une trace du nombre écrit en chiffre pour le lendemain.
(2) : l'introduction de la trousse se fera lorsque les élèves sauront bien compter de 10 en 10 , on veillera à ne pas choisir un nombre rond (40) . La proposition de J47 est purement indicative, on peut tout à fait introduire la trousse plus tard. Le groupement doit arriver comme une nécessité au groupe classe pour réussir à compter de manière plus fiable l'ensemble des crayons.
(3) : ce premier tableau de numération utilisera les symboles trousse et crayon, l'introduction des termes unité et dizaine se fera ultérieurement.
(4) : utilisation de l'écriture symbolique du calcul avec les signes + et =

JANVIER			FEVRIER			MARS					AVRIL		AVRIL	MAI				JUIN JUILLET
S15	S16	S17	S18	S19		S20	S21	S22	S23	S24	S25		S26	S27	S28	S29	S30	S31 à S36
J75	J80	J85	J90	J95		J100	J105	J110	J115	J120	J125		J130	J135	J140	J145	J150	J155 à J180
Activités spécifiques sur les nombres 60/70, 80/90 Jeux d'entrainements			vers J90 introduction d'additions avec retenues en ligne	L'approche de 100 stimule l'usage de la soustraction 100-....	Vacances	Introduction du cartable	Recherches pour schématiser le cartable	Utilisation du matériel pour réaliser des additions posées (sans retenue puis avec retenue) Retour sur les cachotiers				Vacances	Utilisation du tableau de numération avec les termes centaine, dizaine, unité puis C, D, U		Enrichissement de la carte mentale du nombre : introduction de l'écriture 1C6D4U			
Activités complémentaires		Ermel : Le château des nombres jusqu'à 99				Ermel : Jeux du banquier		Ermel : les Fourmillions					Les grands doubles (jusqu'à 20)	Ermel : Les carrelages				

COMMUNICATION C21

PRATIQUES INCLUSIVES AU COLLÈGE : ANALYSE DIDACTIQUE DES DIFFÉRENTES TEMPORALITÉS LORS D'UNE SÉANCE DE GÉOMÉTRIE EN CLASSE DE 5ÈME

Frédéric DUPRÉ
Doctorant
Aix Marseille Université - ADEF
frederic.dupre@ac-nancy-metz.fr

Résumé

Notre recherche s'inscrit dans le projet PIMS[164] (Assude, Perez, Suau, & Tambone, 2015 ; Assude, Perez, Tambone, & Vérillon, 2011) qui vise à étudier des pratiques professionnelles en situations inclusives essentiellement dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1991). Nous nous intéressons aux dispositifs ULIS (unités localisées pour l'inclusion scolaire) au collège qui permettent à des élèves reconnus institutionnellement handicapés (ERIH) d'avoir une scolarité dans une classe ordinaire tout en bénéficiant d'un dispositif de soutien. L'organisation de ces dispositifs place les élèves au cœur de deux systèmes didactiques : celui de la classe ordinaire et celui du regroupement spécialisé.
À travers une étude de cas, nous étudions une séance de mathématiques en classe de 5ème qui introduit la notion de parallélogramme. Notre analyse nous amène à questionner l'avancée des différentes temporalités produites par le système didactique principal ainsi que le temps personnel de deux ERIH présents dans cette classe.

I - INTRODUCTION ET CADRE THÉORIQUE

Notre objet d'étude concerne les dispositifs ULIS (unités localisées pour l'inclusion scolaire) au collège qui permettent à des élèves reconnus institutionnellement handicapés (ERIH) d'avoir une scolarité dans une classe ordinaire tout en bénéficiant d'un dispositif de soutien. L'organisation de ces dispositifs place les élèves au cœur de deux systèmes didactiques (Chevallard, 1991, 1995) : celui de la classe ordinaire et celui du regroupement spécialisé. Le travail que nous menons vise à questionner des pratiques professionnelles en situations inclusives en nous appuyant sur le cadre théorique de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999).

Les études concernant ces dispositifs au collège restent limitées. Des entretiens cliniques auprès d'un coordonnateur et de deux professeurs de collège ont pu montrer que ces acteurs collaborent, mais que les pratiques de chacun changent peu (Ployé, 2013). Chaque acteur reste sur sa professionnalité en cherchant à entretenir celle-ci sans heurter l'autre. L'enseignant spécialisé pouvant même limiter les situations d'inclusions, en évitant d'inclure des élèves qui poseraient problème dans la classe pour ne pas heurter les enseignants du collège. D'autres travaux ont pu montrer dans le cadre d'une étude de cas en classe d'histoire-géographie que les élèves qui bénéficient de l'ULIS peuvent vite se retrouver hors-jeu et que l'articulation entre la classe et le regroupement spécialisé est « un objet absent des pratiques et des discours » chez les enseignants concernés (Toullec-Théry & Pineau, 2015, p.52).

Dans d'autres contextes, l'articulation entre deux systèmes didactiques a été questionnée. Dans le cadre de l'adaptation scolaire en Suisse, les travaux de Leutenegger ont mis en évidence le fait que le temps didactique du système auxiliaire est généralement en retard par rapport à celui du système principal (2000). Le même type de phénomène a été décrit en France dans le cadre des regroupements

[164] Pratiques inclusives en milieu scolaire

d'adaptation[165] (Tambone, 2014). Le système auxiliaire peut aussi être envisagé en amont des apprentissages menés dans le système principal. Ce cas de figure a été développé dans le cadre d'un projet de recherche collaborative en contexte scolaire québécois. Les résultats de ces travaux ont mis en évidence des conditions pour que le système auxiliaire puisse avoir une fonction d'aide vis-à-vis du système principal (Assude et al., 2016 ; Theis et al., 2016).

Nos travaux se placent dans la continuité de ces recherches. Nous cherchons à mettre en évidence des actions permettant de coordonner les différents systèmes didactiques qui existent dans le cadre des dispositifs ULIS au collège. Lors du précédent colloque, nous avons présenté une première analyse dans laquelle on observait que le système auxiliaire éprouvait des difficultés pour se saisir des tâches issues du système principal. Nous avons mis en évidence des difficultés de synchronisation entre les systèmes didactiques en jeu (Dupré, 2018). Nous proposons ici de poursuivre ces analyses à partir d'autres matériaux recueillis dans la même classe à un grain plus fin, l'échelle temporelle retenue étant celle de la séance.

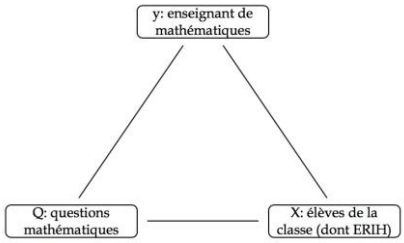
Pour cela, nous allons tout d'abord présenter les notions théoriques sur lesquelles nous nous appuyons. Ensuite nous détaillerons notre dispositif de recueil de données ainsi que la méthodologie d'analyse. La dernière partie sera consacrée à l'étude d'une séance de mathématiques en classe de 5ème qui introduit la notion de parallélogramme et à la place du système auxiliaire vis-à-vis de cette séance.

1 La notion de système didactique

L'organisation fonctionnelle des dispositifs ULIS induit pour les ERIH un emploi du temps qui alterne entre la classe et le regroupement spécialisé. Cette alternance impose à ces élèves une appartenance à des systèmes didactiques différents. En nous appuyant sur les textes prescriptifs (Benoit, 2013 ; MEN, 2010, 2015), nous considérons la classe de mathématiques comme le système didactique principal (SDP) et le regroupement spécialisé comme le système didactique auxiliaire (SDA) au système principal. Pour Chevallard, le SDA intervient pour une aide à l'étude vis-à-vis du SDP. D'autres travaux ont pu également mettre en évidence le rapport de dépendance du système auxiliaire vis-à-vis du système principal (Tambone, 2014 ; Nédélec-Trohel, 2015).

1.1 Système didactique principal

La modélisation d'un système didactique proposée par Chevallard autour d'une relation ternaire composée par l'apprenant, le savoir et l'enseignant permet de réfléchir aux relations entretenues entre ces différents pôles (1991). Par la suite, cette modélisation sera notée S(X ; Y ; Q) : X est un collectif qui étudie un type de question Q. Y représente ce que l'auteur nomme un collectif de personnes (une personne au singulier sera notée y) qui peuvent intervenir dans le processus d'aide à l'étude (1995). Dans nos travaux, X correspondra aux élèves de la classe (dont les ERIH font partie), Q correspondra à un ensemble de questions et y représentera l'enseignant de mathématiques.



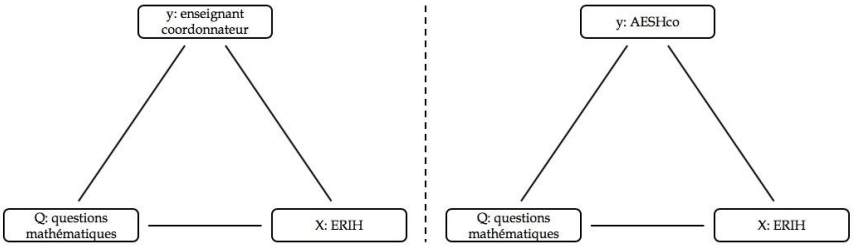
Modélisation du SDP(X ; y ; Q)

L'espace de l'étude ne peut être réduit au système didactique principal (SDP), mais est composé également par l'ensemble des systèmes didactiques auxiliaires qui sont associés au SDP.

[165] A l'école primaire, dans le cadre des RASED (réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté), l'enseignant spécialisé est amené à travailler avec un petit groupe d'élèves qui a été repéré en difficulté au sein de la classe.

1.2 Systèmes didactiques auxiliaires

Les systèmes didactiques auxiliaires (SDA) peuvent être internes ou externes à l'établissement. Dans le cadre de nos travaux nous ne regarderons que certains SDA internes qui sont créés par les textes prescriptifs relatifs aux dispositifs ULIS (MEN, 2010, 2015). Pour reprendre la modélisation précédente, X correspondra aux ERIH, Q sera associé à des questions appartenant au programme de mathématique et y pourra être représenté par l'un des acteurs du dispositif ULIS : soit l'enseignant coordonnateur, soit l'AESHco[166].

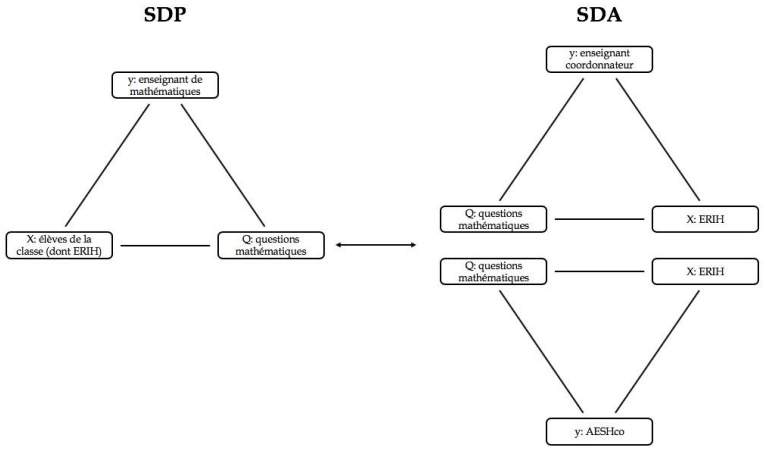


Modélisation des SDA(X ; y ; Q)

Ces systèmes ont pour vocation d'aider à l'étude au sein du SDP. Certains travaux ont montré qu'il existe un rapport de dépendance du SDA vis-à-vis du SDP dans le sens où ce sont les enjeux de savoir du SDP qui pilotent le SDA (Theis et al., 2016). Nous allons chercher à modéliser les articulations potentielles entre SDP et SDA dans le cadre des dispositifs ULIS.

1.3 L'articulation entre SDP et SDA

Nous venons de voir qu'il existe une dépendance du SDA vis-à-vis du SDP. Les ERIH représentent l'élément commun aux différents systèmes observés. Au sein du SDP ils font partie du collectif X avec les autres élèves de la classe. Au sein du SDA, le collectif X est constitué exclusivement d'ERIH. Nos précédents travaux (Dupré, 2018) nous ont permis de mettre en évidence que le SDA peut exister de façon séparée du SDP (temps dit de regroupement avec l'enseignant coordonnateur, temps d'aide aux devoirs avec l'AESHco). Le SDA peut également coexister dans le même espace-temps que le SDP dans des situations de coenseignement ou d'accompagnement des élèves par l'AESHco. Nous proposons de représenter, à travers le schéma suivant, les systèmes didactiques qui peuvent exister dans le cadre des dispositifs ULIS afin de pouvoir réfléchir à l'articulation entre le SDA et le SDP lors de pratiques inclusives.



Représentation des systèmes didactiques lors de pratiques inclusives

[166]Accompagnant d'élèves en situation de handicap « collectif » : ces personnels ont une fonction collective et peuvent accompagner l'ensemble des élèves qui bénéficient du dispositif ULIS. En pratique dans le département des Vosges, chaque dispositif au collège bénéficie d'un AESHco.

Dans un autre contexte (dans le cadre des RASED), l'observation des relations entre le SDP et le SDA ont permis de mettre en évidence différents dysfonctionnements possibles : le SDA peut recréer sa propre norme à partir d'objets très éloignés de la progression didactique officielle ; le SDA peut perdre les enjeux de savoir dans les situations qu'il propose ; le SDP ne considère pas l'élève comme « enseignable » en dehors du SDA (Tambone, 2014).

Notre travail nous amène à questionner la compatibilité des questions Q présentes dans ces différents systèmes et de quelle manière le pôle Y peut favoriser cette articulation. Pour répondre à ces questions, nous allons nous attacher à mettre en évidence des contraintes liées aux temporalités propres à ces différents systèmes.

2 Les notions de temporalité

De nombreux travaux se sont intéressés à la notion de temps dans l'enseignement. Chopin montre qu'un nombre important de ces études se placent dans une approche « provisionnelle » dans le sens où il s'agit d'une ressource qu'il faut maitriser (Chopin, 2011). Une autre approche, « processuelle », considère le temps comme un *construit*, il est à la fois un produit des systèmes didactique et un cadre pour l'action des pôles X et Y de ces systèmes (Assude et al., 2016). Nous nous inscrivons dans cette perspective et pour cela nous avons besoin de définir différentes temporalités : le temps didactique, le temps praxéologique, le capital-temps et le temps personnel de l'élève. Les trois premières sont propres au système didactique dans lequel elles apparaissent.

2.1 Le temps didactique

Le temps didactique correspond au découpage du savoir dans une durée et se mesure par l'avancement dans l'exposition aux savoirs. Son évolution s'observe à mesure que des objets nouveaux sont introduits par l'enseignant. Au fur et à mesure de son avancée, les objets introduits deviennent obsolètes. Pour continuer de faire progresser le temps didactique, l'enseignant doit alors introduire de nouveaux objets (Mercier, 2001). Ce renouvellement s'observe à travers la dialectique ancien/nouveau qui permet également de caractériser la vitesse d'exposition aux savoirs. Seul l'enseignant est capable de ce type d'anticipation (l'introduction d'objets nouveaux), il est ainsi responsable de la chronogénèse du savoir (Chevallard, 1991).

Cette temporalité ne concerne que des objets de savoir issus du processus de transposition didactique externe (Assude et al., 2016). Il sera possible d'observer son évolution au sein du système didactique en repérant les types de tâches et les tâches (Chevallard, 1995) relatives à ces objets tout en les confrontant à la dialectique ancien/nouveau.

2.2 Le temps praxéologique

La notion de temps praxéologique est introduite afin de « préciser l'analyse du temps d'enseignement et de la dialectique ancien/nouveau » (Assude et al., 2016, p. 7) et elle correspond au temps d'évolution des praxéologies. Cette dernière est composée de deux blocs : le bloc *praxis* qui est relatif aux types de tâches et aux techniques qui s'y rapportent et le bloc *logos* qui est lui un discours rationnel sur la technique : ce discours est nommé technologie. Celle-ci peut avoir deux fonctions par rapport à la technique : la première permet de la justifier rationnellement, la seconde de l'expliquer et de la rendre intelligible. La théorie correspond à un niveau supérieur qui reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière occupe vis-à-vis de la technique (Chevallard, 1999). Le triplet (technique, technologie, théorie) qui entoure un type de tâche constitue une praxéologie ponctuelle. Toute évolution dans l'une des composantes praxéologiques se traduit par une évolution du temps praxéologique. Ainsi, lorsque le temps didactique avance, le temps praxéologique avance également. Cependant, la réciproque n'est pas de mise (Assude et al., 2016). Nous pouvons citer à titre d'illustration le travail sur une nouvelle technique relative à une tâche ancienne : le temps praxéologique avance, le temps didactique n'évolue pas.

Il sera possible d'observer l'évolution de cette temporalité au sein d'un système didactique en repérant les praxéologies ponctuelles associées aux types de tâches qui existent au sein du système didactique.

2.3 *Le capital-temps*

Le capital temps correspond à la valeur attribuée au temps d'horloge disponible. Ce temps d'horloge incompressible peut être considéré à différentes échelles (l'année, la période, le chapitre, la séance). Le capital temps est considéré sur différents intervalles pour lesquels une valeur peut être attribuée. La gestion de ce capital par l'enseignant l'amène à estimer le coût de chacune des activités par rapport au temps d'horloge disponible. Il est donc amené à faire des choix dans les différentes activités qu'il propose afin d'atteindre un objectif en fonction du capital temps dont il dispose. Une étude a permis d'identifier des stratégies mises en œuvre par l'enseignant afin de gagner[167] du capital temps : la gestion de la relation individuel/collectif, l'utilisation d'affichages, la capacité à laisser de côté ce qui n'est pas en rapport avec l'avancée du temps didactique et le fait de réaliser des synthèses intermédiaires (Assude, 2005).

Dans cette même étude, il est proposé de définir le rythme d'une séance comme le rapport entre le temps didactique et le capital temps. On le caractérisera de rapide lorsque le temps didactique évolue rapidement pour un capital temps limité ; à l'inverse un rythme lent correspond à une faible évolution du temps didactique dans un capital temps plus long.

La caractérisation du capital-temps à l'échelle d'une séance se fera à partir du synopsis de celle-ci : il s'agira de mesurer le temps d'horloge attribué par l'enseignant aux différentes phases de la séance. Nous chercherons également à repérer les stratégies permettant de gagner du capital-temps et de les confronter à celles que nous venons de citer.

2.4 *Le temps personnel de l'élève*

Cette notion correspond au temps personnel de l'élève dans sa relation au savoir en tant qu'enseigné. Elle n'est pas limitée au système didactique (ce cadre temporel inclut par exemple l'étude à la maison, le travail dans un système auxiliaire), mais se construit en référence au temps didactique qui lui, est une temporalité institutionnelle. Pour Mercier, l'élève doit « négocier l'articulation de son temps personnel avec le temps officiel » (1992, p. 196). L'enseignant doit pour sa part s'assurer de la synchronisation des temps personnels des élèves par rapport à l'avancée du temps didactique à travers la progression qu'il instaure.

L'observation de cette temporalité consistera à observer des signes qui traduisent le partage de l'intention didactique. Ces traces seront relatives à l'engagement dans la tâche, à l'utilisation d'une technique visible, le discours produit (en participant oralement devant le groupe entier, dans des échanges en aparté avec l'enseignant ou avec un pair) ou encore les productions lors d'un travail écrit ou d'une évaluation.

3 Question de recherche

Les notions que nous venons de définir vont nous permettre de préciser notre question de recherche. Notre travail vise à questionner les actions permettant de synchroniser les différentes temporalités en jeu afin de coordonner différents systèmes didactiques (Assude et al., 2016). Notre question de recherche dans cette étude peut se formuler de la façon suivante : *quelles actions permettent de synchroniser les différentes temporalités afin de coordonner les différents systèmes didactiques en jeu au sein d'un dispositif ULIS?*

Nous proposons pour cela d'observer au sein des systèmes didactiques les différentes temporalités qui existent puis, à partir de celles-ci, de questionner la compatibilité entre le SDA et le SDP. Ces observations seront menées ici dans le cadre d'une étude de cas en classe de 5ème.

Nous allons maintenant dans une seconde partie décrire le dispositif de recueil de données ainsi que la méthodologie d'analyse retenue.

---

[167]Nous parlerons de gain lorsque la valeur attribuée à un intervalle augmente, c'est-à-dire que les choix de l'enseignant ont une plus grande influence sur la progression du temps didactique. A l'inverse, un étirement du capital temps correspond à une diminution de la valeur attribuée à un intervalle, c'est-à-dire lorsque les choix de l'enseignant limitent la progression du temps didactique.

II - DISPOSITIF DE RECUEIL DE DONNÉES ET MÉTHODOLOGIE

Les données présentées dans cette étude de cas font partie d'un corpus plus vaste qui a été recueilli dans le cadre d'un doctorat[168]. Ce travail s'inscrit dans une démarche qualitative. Nous cherchons à comprendre ce que pensent les acteurs, comment ils parlent, comment ils agissent. C'est la multiplication des études de cas, dans le cadre du projet PIMS, qui présente un intérêt dans une visée compréhensive (Grawitz, 2001).

Nous allons dans cette seconde partie tout d'abord présenter le dispositif global de recueil de données ainsi que la méthodologie retenue.

1 Le dispositif de recueil de données

Le dispositif de recueil de données est organisé en trois phases qui se déroulent à des échelles temporelles différentes. Les deux premières phases s'appuient sur des méthodologies éprouvées dans d'autres travaux. La phase trois représente une évolution de la phase deux. Pour chacune de ces phases nous avons travaillé avec des binômes composés d'un enseignant de mathématiques et d'un enseignant coordonnateur ULIS. Notre terrain a été circonscrit au périmètre géographique du département des Vosges.

1.1 Phase 1

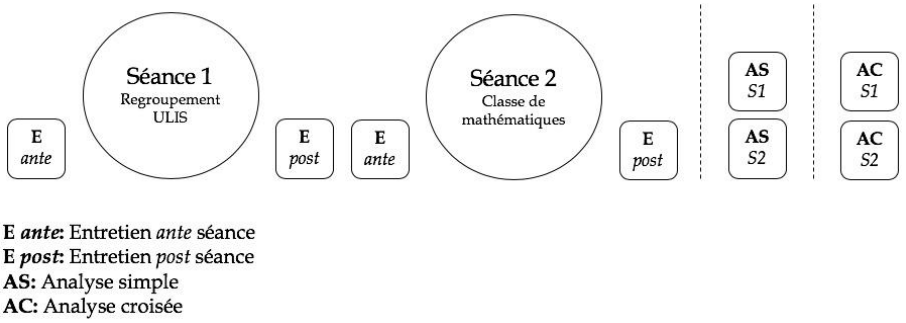
Cette première phase s'inspire d'une partie de la méthodologie utilisée dans les travaux de Leutenegger (2000, 2009). Elle marque l'entrée dans le dispositif de recherche pour les enseignants et va nous permettre d'observer le fonctionnement des systèmes didactiques à une échelle temporelle correspondant à l'étude d'un chapitre de mathématiques. Deux dossiers sont constitués par les enseignants, ils sont constitués des traces relatives à ce chapitre dans le SDP pour le premier et au sein du SDA pour le second. Nous proposons aux enseignants de nous transmettre l'ensemble des éléments qu'ils estiment significatifs sur cette période (entre le début de l'étude et l'évaluation finale). Un relevé des interactions entre les acteurs du pôle Y des systèmes didactiques est proposé sous la forme d'un calendrier. Les entretiens menés permettent pour le premier de préciser le projet de l'enseignant et, pour le second, de présenter l'ensemble des traces qu'il a regroupé dans le dossier transmis. Les différents matériaux recueillis doivent nous permettre de reconstruire une partie de la vie des objets au sein du système didactique et la mise en parallèle des dossiers vise à comprendre comment les systèmes didactiques en jeu s'articulent.

1.2 Phase 2

La seconde phase s'appuie sur la méthodologie de recueil de données éprouvée dans le cadre du projet PIMS (Assude et al., 2015). Le recueil est réalisé à l'aide de captations vidéos qui nous permettent de saisir un enchainement de deux séances, l'une dans le SDP, l'autre dans le SDA (ou inversement). Chaque séance est entourée par un entretien *ante* qui vise à repérer le projet de l'enseignant et un entretien *post* qui permet à l'enseignant de mesurer l'écart entre ce qui était prévu et ce qu'il a réalisé. Le recueil comporte également une analyse simple dans laquelle l'enseignant choisit un moment singulier de sa séance qu'il souhaite nous montrer. Ces trois types d'entretiens sont filmés, deux acteurs sont concernés : l'enseignant et le chercheur. Le recueil de données se termine par une analyse croisée dans laquelle le second membre du binôme choisit un court extrait qu'il souhaite nous montrer en présence de l'enseignant filmé dans la séance : l'enseignant coordonnateur choisit un moment dans la séance de mathématiques et l'enseignant de mathématiques choisit un moment dans la séance filmée au sein du

[168] Doctorat débuté en décembre 2015 à l'université d'Aix Marseille, sous la direction de Teresa ASSUDE (EA 4671 ADEF) et de Jean-Michel PEREZ (EA 2310 LISEC). Le titre provisoire est « pratiques inclusives en mathématiques dans le second degré »

regroupement ULIS (trois acteurs sont présents : enseignant de mathématiques, enseignant coordonnateur et chercheur). Le schéma suivant représente le recueil de données lorsque le SDA est mis en œuvre avant le SDP.



Représentation des différentes étapes du recueil de données en phase 2

Le dispositif vidéo est composé de plusieurs caméras qui saisissent la vue globale de la classe, le tableau, les actions de l'enseignant et le travail réalisé par les ERIH. Ce dispositif est complété par des enregistreurs numériques équipés d'un micro-cravate qui sont répartis dans la salle de classe (sur l'enseignant, sur les ERIH et sur d'autres élèves).

1.3 Phase 3

La dernière phase constitue une évolution de la précédente. Elle a été conçue à l'issue des premières analyses et vise à saisir à l'aide du même dispositif vidéo l'évolution des objets mathématiques au sein des systèmes didactiques sur un temps plus long correspondant à l'étude entière d'un chapitre de mathématiques. La durée de cette phase dépend directement des choix de l'enseignant du SDP. Pendant l'ensemble du chapitre, toutes les séances seront filmées dans le SDP et dans le SDA. Un enregistreur est également laissé aux enseignants pour enregistrer les échanges qu'ils peuvent avoir de façon informelle pendant le chapitre. À l'issue de ces captations, une analyse simple sera réalisée dans le SDP et dans le SDA ainsi qu'une analyse croisée.

1.4 Corpus de données

Le tableau synoptique suivant permet de présenter l'ensemble du corpus de données en notre possession. Le recueil s'est déroulé sur deux années scolaires dans quatre établissements différents. Quatre enseignants de mathématiques et quatre enseignants coordonnateurs ULIS ont participé à ce travail ainsi que trois AESHco.

	Lieux et dates	**Matériaux recueillis**
Phase 1	Collège 1 Collège 2 *Février et mars 2017*	2 dossiers SDP 2 dossiers SDA 9 entretiens (4 *ante* et 5 *post* dossier)
Phase 2	Collège 1 Collège 2 *Avril 2017*	1 enchainement de séances SDP/SDA 1 enchainement de séances SDA/SDP 10 entretiens *ante* et *post* 5 analyses simples 5 analyses croisées
Phase 3	Collège 3 Collège 4 *Mai 2018*	13 séances SDP 5 séances SDA 36 entretiens ante et post 1 enregistrement interséances 4 analyses simples 4 analyses croisées

L'étude de cas que nous présentons ici correspond à des données recueillies dans le collège n° 1 lors de la phase 2. Il s'agit d'un enchainement avec tout d'abord la séance dans le SDP puis celle dans le SDA. Nous allons maintenant détailler la méthodologie d'analyse retenue pour les matériaux en notre possession.

2 Méthodologie d'analyse de la phase 2

Un préalable à l'analyse consiste en la transcription des entretiens et des séances. Pour ces deux types de traces, les modalités de transcription diffèrent légèrement. Pour les entretiens filmés, la transcription se limite au discours de l'enseignant et aux interventions du chercheur. Chaque changement de locuteur est représenté par un tour de parole (noté *tdp*) associé à une indication temporelle. Les pauses à l'intérieur d'un tour de parole sont représentées par un « / » pour une pause courte (une à deux secondes), par un double « // » pour une pause de trois à quatre secondes et par un triple « /// » pour une pause plus longue. Lorsqu'un ton significatif (rire, énervement…) est relevé, il est indiqué entre crochets. Le niveau de précision est plus important en ce qui concerne la transcription des séances car celles-ci correspondent à notre matériel principal. Les tours de paroles sont définis par les changements de locuteurs dans le cadre du discours principal (oral collectif ou interactions avec l'enseignant). Les modalités de transcription reprennent les codes présentés auparavant pour les entretiens. Nous ajoutons dans un tableau en parallèle à chaque tour de parole les actions de l'enseignant et des ERIH (les actions peuvent correspondre à des gestes, des attitudes, l'évolution dans le travail écrit ou alors la transcription des propos en aparté). Une dernière colonne correspond aux évolutions dans l'affichage collectif au tableau. Ce niveau de précision dans la transcription des séances est rendu possible par le dispositif audio et vidéo, il nous apparaît nécessaire afin de pouvoir relever les praxéologies ponctuelles.

Les matériaux recueillis sont analysés à partir de ces transcriptions en deux étapes. Dans un premier temps il s'agit de réaliser une analyse des séances de façon indépendante puis de les confronter de façon à observer comment s'organise l'articulation entre le SDP et le SDA.

2.1 L'analyse des séances

L'analyse débute par la réalisation du synopsis de la séance. Celui-ci permet de repérer les différentes phases et sous-phases. Une fois ce premier découpage réalisé, un repérage des tâches, types de tâches et praxéologies ponctuelles est réalisé à l'intérieur de chaque sous-phase (ce repérage nous permettra de saisir le temps didactique et le temps praxéologique). Le capital-temps est considéré à l'échelle des différentes sous-phases, la mise en rapport avec la durée totale de la séance permet d'orienter notre attention afin de repérer des gestes ou des événements qui permettent de gagner du capital temps ou au contraire de l'étirer. Le dernier temps de l'analyse concerne le temps personnel des élèves qui est regardé à travers leur engagement dans les types de tâches proposés. Cet engagement s'observe à l'aide de différents indicateurs : l'entrée dans la tâche, la participation orale, les discours produits et les travaux réalisés.

Une fois ces quatre étapes réalisées, des hypothèses peuvent apparaître, des incertitudes peuvent subsister. Nous confrontons alors nos questionnements aux discours recueillis dans les entretiens *ante* et *post* ainsi que dans l'analyse simple.

Cette analyse est réalisée pour la séance filmée dans le SDP et pour celle filmée dans le SDA de façon séparée.

2.2 L'articulation entre le SDP et le SDA

Dans un second temps nous cherchons à comprendre comment s'articulent les systèmes didactiques. Pour cela, nous commençons par confronter les différents types de tâches rencontrés ainsi que les praxéologies associées : est-il possible de relever des types de tâches communs, des praxéologies ponctuelles qui s'y rapportent ? Cette confrontation nous permet de comparer les temps didactiques et praxéologiques produits par les systèmes didactiques afin de questionner leur compatibilité. À la suite de cela, l'analyse du temps personnel des ERIH nous amène à identifier des effets du SDA en tant qu'aide à l'étude au sein du système principal. Pour finir, nous cherchons à mettre en évidence des actions qui favorisent la synchronisation du SDA vis-à-vis du SDP.

Comme dans le premier niveau d'analyse, des hypothèses et des incertitudes subsistent. Les entretiens *ante* et *post*, l'analyse simple et l'analyse croisée sont utilisés afin de préciser nos observations et nos analyses. Des boucles de rétroaction peuvent intervenir lorsque le discours produit dans l'analyse simple ou croisée met en exergue des épisodes qui demandent à être observés à un grain plus fin encore.

III - ANALYSE D'UNE SÉANCE DE GÉOMÉTRIE EN CLASSE DE 5EME

L'étude de cas présentée correspond à l'analyse de la phase 2 (collège n° 1) de notre corpus de données. L'analyse de la phase 1 dans ce collège a fait l'objet d'une communication lors du précédent colloque à Épinal (Dupré, 2018).

La première séance se déroule dans une classe de 5ème en mathématiques. Dans cette classe, deux ERIH bénéficient du dispositif ULIS, il s'agit de Martin et de Florine. La seconde séance se déroule au sein du regroupement spécialisé, cependant, celle-ci ne pourra pas être analysée[169]. Nous disposons des matériaux suivants : la transcription de la séance, des entretiens *ante* et *post*, de l'analyse simple réalisée par l'enseignant de mathématiques et de l'analyse croisée réalisée par l'enseignante coordonnatrice en présence de l'enseignant de mathématiques.

1 Synopsis et évolution des temporalités

La séance marque le début d'un nouveau chapitre : « *je commence un nouveau chapitre sur le parallélogramme* » (entretien *ante*, *tdp* n° 2). Nous allons tout d'abord en présenter le synopsis puis nous nous intéresserons aux différentes temporalités qui existent au sein du SDP.

1.1 Synopsis

Dans l'entretien *ante*, l'enseignant de mathématiques précise l'organisation de la séance : « *aujourd'hui je vais commencer comme d'habitude par une séquence de calcul mental ensuite on fera une correction d'exercices qu'ils avaient donc à préparer chez eux pour ensuite débuter euh introduire une nouvelle notion* ». Il précise ensuite ce qu'il attend des élèves en géométrie : «*ils vont déjà commencer par une activité de rappel pour se rappeler le vocabulaire qu'ils doivent qu'ils sont censés connaitre dont on aura besoin par la suite dans le chapitre ensuite ils vont faire une construction euh déguisée sans qu'on leur dise que c'est le parallélogramme qu'ils sont en train de construire pour au final qu'ils s'en rendent compte et par là même trouver la définition du parallélogramme c'est à partir de leurs constructions bah on va dire que c'est l'objectif d'arriver jusque-là* » (*tdp* n 2).

Le projet annoncé par l'enseignant correspond à ce qui est réalisé, la séance peut ainsi être découpée en quatre phases. La première correspond à une activité rituelle de calcul mental, la seconde est consacrée à la correction des devoirs. Le nouveau chapitre débute à la phase trois. Cette phase s'appuie sur une fiche d'activités : dans un premier temps, les élèves doivent compléter un texte à trous avec du vocabulaire géométrique, la seconde partie de la fiche consiste en une construction qui vise à amener les élèves à réaliser un parallélogramme. La séance se termine par l'énoncé des devoirs.

Phase	*Sous-phase*	*Indice de coupure*
***Ph1* calcul mental** *d=8'20*	Calcul mental individuel	L'enseignant éteint le VPI
	Correction collective	« mettez votre note sur cinq »
***Ph2* correction des devoirs** *d=11'20*		« ensuite on va passer à autre chose »
***Ph3* fiche de géométrie** *d=27'40*	Présentation du travail à réaliser	L'enseignant distribue la fiche aux élèves
	Fiche, activité 1 : vocabulaire géométrique (travail individuel)	« stop on va corriger »
	Correction collective de l'activité 1	« vous pouvez poursuivre votre travail »
	Fiche, activité 2 : construction géométrique (travail individuel)	Sonnerie marquant la fin de l'heure
***Ph4* énoncé des devoirs** *d=0'20*		Départ des élèves

Synopsis de la séance filmée dans le SDP

[169] Lors de l'entretien *ante* l'enseignante coordonnatrice présente son projet de travail en mathématique mais un événement inattendu l'empêchera de mettre en œuvre ce travail lors de la captation vidéo : en arrivant dans le regroupement, Martin et Florine font part d'une commande de l'enseignante d'anglais. Ils demandent à pouvoir terminer une évaluation relative à cette matière, l'enseignante coordonnatrice abandonnera son projet mathématique afin de satisfaire à cette demande.

1.2 *Temps didactique*

Dans cette séance nous pouvons relever quatorze types de tâches. La première phase de calcul mental permet d'en observer cinq.

- T_1 : indiquer l'abscisse d'un nombre placé sur une demi-droite graduée
- T_2 : calculer une quatrième proportionnelle
- T_3 : compléter une égalité du type $x \times a = b$ avec $x \in \boldsymbol{D}$ écrit sous une forme fractionnaire
- T_4 : exprimer une proportion
- T_5 : calculer la mesure AM avec $M \in [AI]$ (MI et AI sont connus)

La confrontation avec les traces issues de la phase 1 de notre recueil de données nous permettent de dire que l'ensemble de ces types de tâches correspond à des d'objets anciens qui ont déjà été rencontrés par les élèves cette année. Dans cette phase le temps didactique n'avance pas, mais l'intérêt semble être de limiter l'obsolescence de ces objets en offrant aux élèves un temps de reprise nécessaire à l'apprentissage.

Dans la phase de correction des devoirs, un type de tâche est rencontré. Il s'agit de tenir compte des priorités opératoires dans un calcul en ligne (T_6). Là encore, il s'agit d'un objet ancien rencontré dans le chapitre précédent.

La troisième phase qui correspond à l'introduction du nouveau chapitre de géométrie nous permet de relever les huit types de tâches suivants :

- T_7 : compléter des phrases avec du vocabulaire géométrique permettant de décrire un quadrilatère quelconque (côté, côtés consécutifs, côtés opposés, sommet, diagonale, angles consécutifs, angles opposés, quadrilatère)
- T_8 : trouver l'ensemble des désignations possibles pour nommer un quadrilatère (ABCD, BCDA, etc.)
- T_9 : tracer un segment défini par deux points
- T_{10} : tracer une droite passant par deux points donnés
- T_{11} : tracer une droite parallèle à une autre passant par un point donné
- T_{12} : nommer le point d'intersection de deux droites
- T_{13} : nommer un quadrilatère particulier (le parallélogramme)
- T_{14} : formuler les propriétés d'un parallélogramme relatives à ses côtés

Deux d'entre eux correspondent à des objets nouveaux : pour T_7, une partie du vocabulaire est potentiellement nouveau (côtés consécutifs, côtés opposés, angles consécutifs, angles opposés) ; T_{14} correspond à des attentes du programme de 5ème, c'est également l'objectif de la séance formulé par l'enseignant : « *on doit arriver à ce qu'ils aient fait la connexion entre les parallèles et le parallélogramme euh qu'ils réussissent à formuler une espèce de définition correcte* » (entretien *ante*, *tdp* n° 14).

Cette phase ne marque pas une avancée rapide du temps didactique (ce sont majoritairement des types de tâches anciens qui sont mobilisés, la dialectique ancien/nouveau est donc limitée), mais semble avoir pour but de remettre en mémoire du vocabulaire et des gestes de constructions qui seront ensuite nécessaires à l'introduction des objets nouveaux travaillés dans ce chapitre qui débute.

1.3 *Temps praxéologique*

La recherche des praxéologies ponctuelles relatives aux types de tâches rencontrés permet de mettre en évidence six techniques visibles : soit lors de la séance, soit dans les discours produits lors des entretiens.

Dans les phases une et deux qui correspondent exclusivement à des objets anciens nous observons que pour chaque type de tâche, une technique accompagnée d'un discours est visible au moment de la correction collective. Le temps praxéologique semble ici permettre de s'entrainer à l'utilisation de techniques rencontrées dans les séances précédentes.

Dans la phase de géométrie, deux techniques sont visibles, elles sont relatives à T_{11} et T_{13}.

- $\tau_{11.1}$ tracer une demi-droite perpendiculaire à la droite de départ puis une seconde demi-droite perpendiculaire à la précédente
- $\tau_{13.1}$ rechercher les noms d'un quadrilatère en ordonnant les possibilités dans l'ordre alphabétique

La première correspond à une animation projetée en aide à la construction, la seconde est accompagnée d'un discours lors du temps de correction collective du texte à trous.

Dans cette dernière phase, le temps praxéologique évolue pour remettre en mémoire une technique qui a déjà été vue par les élèves ($\tau_{11.1}$) et pour accompagner la découverte d'un nouveau type de tâche (T_{11}).

1.4 Capital-temps

Le tableau suivant nous permet d'observer les choix réalisés par l'enseignant en ce qui concerne le capital temps à l'échelle des différentes phases de la séance. Dans cette séance, un tiers du temps est consacré au travail sur des objets exclusivement anciens (*Ph*1 et *Ph*2). Les deux autres tiers correspondent à l'étude du nouveau chapitre. Cependant, dans la phase 3, le capital temps est principalement utilisé pour des types de tâches qui concernent le travail sur le vocabulaire ancien (T_7 et T_8). La sous-phase qui correspond à l'objectif géométrique formulé par l'enseignant (T_{14}) n'apparaît qu'en fin de séance avec un capital-temps restreint (4'14).

Phase	*Sous phase*	*Capital temps attribué*
***Ph1* calcul mental**	Calcul mental individuel	5'40
	Correction collective	2'40 **Total *Ph1* : 8'20**
***Ph2* correction des devoirs**		**Total *Ph2* : 11'20**
***Ph3* fiche de géométrie**	Présentation du travail à réaliser	0'58
	Fiche, activité 1 : vocabulaire géométrique (travail individuel)	14'30
	Correction collective de l'activité 1	7'58
	Fiche, activité 2 : construction géométrique (travail individuel)	4'14 **Total *Ph3* : 27'40**
***Ph4* énoncé des devoirs**		**Total *Ph4* : 0'20**

Capital temps à l'échelle des phases de la séance

1.5 Temps personnel des ERIH

Dans les trois premières phases de cette séance, l'étude des actions relatives au travail de Martin et de Florine ainsi que les transcriptions des discours (participation en classe, apartés avec l'enseignant, apartés avec des pairs) permettent de mettre en évidence un engagement de ces deux ERIH dans les types de tâches proposés par l'enseignant de mathématiques.

Comme nous ne disposons pas ici d'une séance dans le SDA à analyser, nous nous sommes concentrés sur l'analyse croisée afin de revenir par rétroaction sur trois épisodes qui apparaissent lors de cet entretien. Ces épisodes vont nous permettre d'observer à un grain fin le temps personnel de Martin et de Florine, c'est ce que nous allons maintenant présenter.

2 Étude de trois épisodes

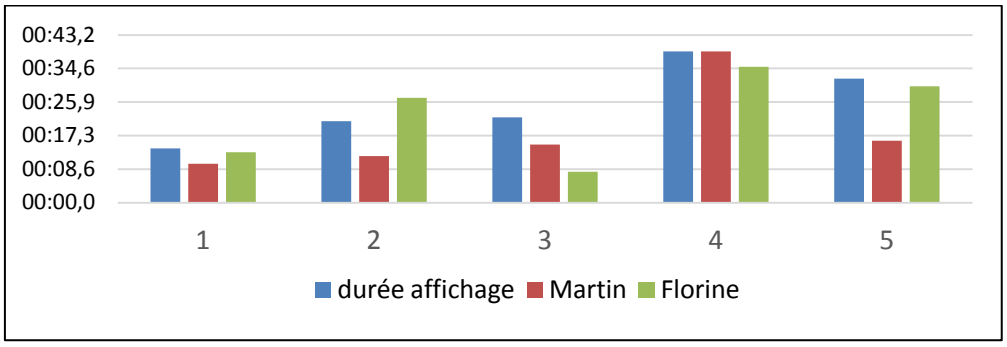
Lors de l'analyse croisée, l'enseignante coordonnatrice (qui n'était pas présente lors de la séance sein de la classe de mathématiques) questionne à plusieurs reprises la synchronisation du temps personnel des ERIH vis-à-vis des cadres temporels produits par le SDP. Son regard s'oriente principalement vers

Florine pour laquelle elle dit par exemple, « *j'aurais pu aider Florine à plusieurs reprises* » (*tdp* n° 1), « *plusieurs fois elle est en retard par rapport aux autres* » (*tdp* n° 3). Elle précise dans son discours sur quoi son regard se porte lorsqu'elle parle de retard vis-à-vis du reste de la classe, cela nous permet de dégager trois épisodes sur lesquels nous allons revenir plus en détail.

2.1 Épisode 1 : calcul mental

En ce qui concerne la première phase de la séance qui correspond à un rituel de calcul mental, la coordonnatrice échange avec son collègue dans ces termes : « *pour ton calcul mental au départ on aurait pu organiser pour que soit ils aient déjà vu en amont tout ce que tu avais demandé […] peut-être que les réponses seraient venues un petit peu plus vite* » (*tdp* n° 3). Nous avons montré précédemment que dans cette phase, les objets présentés étaient anciens et qu'il s'agissait principalement d'un temps permettant de réinvestir des techniques déjà rencontrées. Cet épisode met à nouveau en évidence que la coordonnatrice n'a pas connaissance des objets travaillés par les ERIH au sein de la classe de mathématiques, cela avait déjà été observé lors de l'analyse du corpus correspondant à la phase 1 du recueil de données (Dupré, 2018).

L'analyse du capital temps à un grain plus fin qui correspond aux cinq questions posées nous permet de confronter le temps attribué par l'enseignant au temps personnel de Martin et de Florine (les durées sont exprimées en secondes) pour répondre à celles-ci. Le diagramme suivant nous propose une représentation de ces durées (en bleu, la durée d'affichage de la question projetée, en rouge la durée mise par Martin pour écrire sa réponse ; en vert, la durée mise par Florine pour écrire sa réponse).



Capital temps et temps personnel des ERIH au regard des 5 tâches

Cette confrontation du capital temps et du temps personnel des ERIH nous permet de montrer que le temps attribué par l'enseignant varie en fonction des questions, et que pour la plupart de celles-ci, Martin et Florine arrivent à répondre dans le temps attribué. Ils obtiennent trois réponses justes sur les cinq questions (Florine : questions 1, 3 et 5 ; Martin : questions 1, 2 et 4).

On observe dans cette phase deux gestes de l'enseignant de mathématiques qui peuvent influencer le capital temps. Lors de l'entretien *ante* il explique : « *aujourd'hui je vais commencer comme d'habitude par une séquence de calcul mental* » (*tdp* n° 2). Le choix de s'appuyer sur des types de tâches connus permet de gagner du capital temps, en effet, l'enseignant n'a pas besoin de lire ou d'expliquer la consigne qui a déjà été vue lors des rituels précédents, les élèves de la classe la connaissent et s'engagent spontanément dans le travail. Le second geste est mis en avant par la caméra qui suit l'enseignant. Nous observons l'enseignant balayer du regard à plusieurs reprises l'ensemble de la classe de façon systématique avant de passer à la question suivante. Le fait de s'assurer que tous les élèves aient répondu avant de passer à la tâche suivante est un geste qui étire le capital-temps.

En conclusion, dans cet épisode nous observons une synchronisation du temps personnel des ERIH avec le temps didactique du SDP. Les deux gestes mis en évidence qui influencent la gestion du capital-temps dans cette phase semblent faciliter cette synchronisation : Martin et Florine connaissent les types de tâches proposés et l'enseignant veille à attendre l'ensemble des élèves avant de proposer une nouvelle question. Le discours de l'enseignante coordonnatrice témoigne par contre d'un éloignement du pôle enseignant du SDA vis-à-vis du SDP dans le sens où son discours nous indique que l'activité n'est pas, pour elle, repérée comme ritualisée et que les types de tâches ne sont pas repérés comme anciens.

2.2 *Épisode 2 : correction de l'activité 1*

Le second épisode correspond à la troisième partie de *Ph*3 dans le synopsis de la séance : la correction du texte à trous. Le capital temps attribué par l'enseignant est de 7'58 pour cette sous-phase. Deux gestes de l'enseignant permettent d'influencer cette temporalité. Nous retrouvons comme dans une étude précédente (Assude, 2005) que la réalisation de synthèses intermédiaires par l'enseignant (il prend en charge les explications susceptibles de faire progresser le travail des élèves) permet de gagner du capital-temps. Nous observons dans cette phase un autre geste qui est source d'étirement de ce capital : il consiste à dévoluer aux élèves la correction au tableau et l'explication des techniques utilisées.

Dans cet épisode, l'enseignante coordonnatrice met en avant à nouveau le décalage de Florine vis-à-vis du reste de la classe : « *plusieurs fois elle est en retard par rapport aux autres vous êtes en train de faire le deuxième exercice qu'elle corrige encore le premier* » (*tdp* n° 3). Cette observation se confirme dans notre analyse. Florine s'engage dès le début de cette phase, mais son temps personnel se prolonge pendant quatre minutes supplémentaires alors que le reste de la classe débute l'activité suivante de construction géométrique. L'observation de son travail nous permet de voir que sur les huit mots à compléter dans le texte à trous, elle en a indiqué six qui sont justes et laisse deux réponses vides. Elle lève la main également pour participer à l'oral et indiquer une réponse dans cette sous-phase : son temps personnel est donc synchronisé avec celui de la classe à ce moment de la correction. Nous sommes amenés à nous questionner afin de savoir pourquoi celui-ci s'allonge au-delà du capital temps attribué. Un événement semble être à l'origine de cette désynchronisation en milieu de cette sous-phase : nous observons Florine effacer l'ensemble de ses réponses pour réécrire au stylo bleu la correction. Martin réalise la même chose alors que ses réponses sont justes également. Il ne s'agit pas d'une demande de l'enseignant du SDP et les autres élèves de la classe ne reproduisent pas ce geste. Nous pouvons donc nous interroger sur le fait de savoir si cette habitude n'est pas liée à un contrat habituel construit au sein du SDA.

2.3 *Épisode 3 : construction d'un parallélogramme*

Ce dernier épisode correspond au passage retenu par l'enseignante coordonnatrice lors de l'analyse croisée. Celle-ci explique son choix : « *j'ai choisi ce passage parce que on voit bien que l'enseignant a cherché à aider l'élève en montrant au tableau en enregistrant la correction où on voit bien avec les images comment corriger et ça m'a mis en colère de voir Florine qui ne réussissait pas à faire ce travail* » (*tdp* n° 1). Le passage évoqué correspond à la dernière sous phase de la phase 3. Celle-ci correspond à une tâche nouvelle qui doit amener les élèves à mettre en évidence une propriété d'un parallélogramme à la suite d'une construction. Le programme de construction est le suivant :

1. *A, B et C sont trois points non alignés. Trace les droites (AB) et (BC).*
2. *Avec la règle et l'équerre,*
    a. *Construis la droite (d) qui passe par A et qui est parallèle à la droite (BC)*
    b. *Construis la droite (d ') qui passe par C et qui est parallèle à la droite (AB)*

Les droites (d) et (d') se coupent en D. Place le point D.

Pour cela les élèves sont guidés dans cette construction afin de tracer de façon consécutive deux demi-droites perpendiculaires, il s'agit de la technique $\tau_{11.1}$. Celle-ci est présentée sous la forme d'une animation projetée qui ne s'accompagne pas d'un discours, en ce sens nous pouvons la qualifier de technique muette.

L'impact sur le temps personnel de Martin est nul, celui-ci verbalise en aparté qu'il connait cette technique : « *il faut faire comme ça on trace // oh c'était compliqué* [insiste ironiquement] *c'est très compliqué* » (Martin, *tdp* n° 271). Il réalise la construction attendue.

Florine par contre ne réalise pas la construction attendue. Elle trace tout d'abord (AB), puis la demi-droite perpendiculaire à (AB) et enfin une seconde perpendiculaire à cette demi-droite passant par B. Cette construction correspond au prototype de l'animation proposée en aide. Les images suivantes correspondent à des captures issues de la « caméra tableau » (1) de la « caméra travail Martin » (2) et de la « caméra travail Florine » (3).



1 : animation projetée ; 2 : construction en cours correcte ; 3 : construction achevée incorrecte

Dans cet épisode nous pouvons observer l'impact d'une technique muette qui peut être une source d'explication de la désynchronisation du temps personnel de Florine. Nous pensons en effet que l'absence de discours rationnel associée à cette technique ne lui permet pas de faire le lien avec la tâche à réaliser. Cela est renforcé par le faible capital temps relatif à cette phase de construction (4'14) alors qu'il s'agit là de l'introduction du premier objet nouveau de la séance (le capital temps dans cette phase n'est plus uniquement attribué par l'enseignant mais il dépend également de la sonnerie qui marque la fin de la séance au sein du collège). Le décalage observé chez Florine lors de la sous-phase précédente peut aussi influencer la désynchronisation de son temps personnel lors de cette dernière phase de la séance.

L'analyse de ces trois épisodes nous montre que certains éléments favorisent la synchronisation du temps personnel des ERIH aux temporalités du SDP, les gestes liés à la gestion du capital-temps par l'enseignant semblent occuper une place importante. Un point de vigilance apparaît par rapport à l'utilisation de techniques muettes.

L'analyse croisée nous apporte également des éléments de réflexion sur la place potentielle du SDA pour une aide à l'étude des ERIH au sein du SDP, c'est ce que nous allons voir dans cette dernière partie.

3 Place effective et potentialités du SDA vis-à-vis du SDP

Les échanges lors de l'analyse croisée entre l'enseignante coordonnatrice et l'enseignant de mathématiques nous apportent des indications sur la place effective et potentielle du SDA afin qu'il intervienne comme une aide à l'étude.

3.1 Place effective du SDA

Dans cette étude de cas, la séance filmée dans le SDA ne nous a pas permis de capter un travail en mathématiques. En ce qui concerne la séance du SDP, nous pouvons donc dire que le SDA n'est pas intervenu comme aide à l'étude, ni en amont (le discours lors de l'analyse croisée de l'enseignante coordonnatrice montre qu'elle découvre le travail qui était à réaliser et n'évoque pas un travail en mathématiques en amont lors d'un temps de regroupement sur des types de tâches partagés), ni pendant (les élèves ne sont pas accompagnés dans la classe par l'AESHco, il n'y a pas de coenseignement), ni *a posteriori*. Cependant, les échanges au cours de l'entretien laissent émerger des potentialités pour le SDA.

3.2 Potentialités du SDA vis-à-vis du SDP

Les discours de l'enseignante coordonnatrice (EC) et de son collègue de mathématiques (EM) laissent entrevoir des potentialités de rapprochement du SDA vis-à-vis du SDP. Nous en retranscrivons dans le tableau suivant des passages significatifs :

EC	j'aurais pu aider Florine à plusieurs moments	*tdp* n° 1
EC	il faut quelqu'un qui sans arrêt la remobilise et puis lui montrer aussi […]qu'ils aient déjà vu en amont tout ce que tu avais demandé comme ça ils connaissaient déjà ils savaient à peu près ce que tu allais demander donc peut-être que les réponses seraient venues un petit peu plus vite ou alors faire ce calcul mental en ULIS et après ils rejoignent le groupe classe […] je suis passé à côté de ces élèves qui étaient énormément inclus et qui avaient des possibilités et voilà je j'ai pas suffisamment suivi je pense	*tdp* n° 3

EM	je pense le plus efficace aurait été je pense la présence d'un adulte à ses côtés pour justement rester en phase avec la classe euh ça l'aurait aidé que tu travailles peut être plus en amont, mais je ne suis pas sûr que ça aurait gommé le décalage quand même	*tdp* n° 49
EC	ou alors lui donner la correction par exemple tu vois c'est des petites choses comme ça je me dis on aurait pu anticiper parce que l'on voit elle est lente quand elle prend note	*tdp* n° 56

L'enseignante coordonnatrice évoque tout d'abord en quoi le SDA aurait pu faciliter l'étude des ERIH au sein du SDP. Elle imagine différentes possibilités : un travail en amont, une externalisation de certaines activités (quitter le SDP pour venir les réaliser dans le SDA), la coprésence avec l'appui d'un adulte supplémentaire en classe de mathématiques, mais également certains aménagements au sein de la classe qui sont envisagés conjointement (« *on aurait pu anticiper* » *tdp* n° 56).

De son côté, l'enseignant de mathématiques estime que l'aide la plus efficace serait celle d'un adulte au côté de Florine en classe de mathématiques. Lorsque sa collègue évoque un travail en amont dans le SDA, celui-ci ne semble pas convaincu par la plus-value de ce type d'aide.

Ces échanges lors de l'analyse croisée permettent aux acteurs de commencer à imaginer des pistes pour que le SDA constitue une aide à l'étude pour les ERIH au sein du SDP.

IV - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Lors du précédent colloque, l'étude du dossier de traces recueillies dans les systèmes didactiques en jeu à l'échelle d'un chapitre traitant des écritures fractionnaires nous avait permis de mettre en évidence un éloignement entre le SDP et le SDA qui se traduisait par des temporalités désynchronisées (Dupré, 2018). L'étude de cas que nous venons de présenter permet de poursuivre ce travail à un grain plus fin en nous appuyant sur l'analyse d'un enchainement de séances filmées. L'absence de travail mathématique dans le SDA suite à la séance filmée dans le SDP nous a amenés à centrer notre analyse sur la séance de géométrie ainsi que sur l'analyse croisée qui en découle.

Nous avons dans un premier temps pu mettre à l'épreuve notre méthodologie d'analyse qui s'appuie sur le repérage de l'évolution de différentes temporalités au sein du système didactique : le temps didactique, le temps praxéologique ainsi que le capital temps. Le temps personnel des ERIH permet de discuter la synchronisation de cette temporalité propre à chaque ERIH vis-à-vis des temporalités produites par le système didactique. La question du capital-temps et des gestes pour l'étirer ou en gagner semble être importante pour favoriser la synchronisation du temps personnel ERIH en situation inclusive. À la suite des travaux d'Assude (2005), nous avons pu retrouver différents gestes qui permettent de gagner en capital-temps (réaliser une synthèse intermédiaire ; passer d'une relation individuelle à une relation collective ; présenter une technique sous forme d'animation ; prendre en charge l'explication de la technique ; s'appuyer sur des types des tâches connus de façon ritualisée). Certains gestes, au contraire, permettent d'étirer le capital-temps (s'assurer que tous les élèves ont répondu avant de passer à la tâche suivante ; accorder une importance aux phases individuelles de travail). L'analyse des praxéologies ponctuelles a permis également d'observer une difficulté pour Florine qui semble prendre source dans l'utilisation par l'enseignant d'une technique muette qui ne s'appuie pas sur un discours : cela l'empêche de s'en saisir pour réaliser la tâche attendue. Bien que le SDA ne soit pas présent directement dans cette étude de cas, les discours produits dans le cadre de l'analyse croisée laissent émerger différentes possibilités de la part des acteurs pour utiliser le système auxiliaire comme une aide à l'étude au sein de la classe de mathématiques. L'idée d'envisager la présence d'un adulte supplémentaire en classe est partagée par les deux enseignants. La coordonnatrice imagine également qu'un travail en amont serait possible ainsi qu'une externalisation de certaines activités.

Nous venons de voir à travers cette étude de cas à l'échelle d'une séance que la compatibilité entre le système didactique principal et le système didactique auxiliaire en jeu au sein des dispositifs ULIS est source de questionnement pour que le SDA agisse comme une aide à l'étude vis-à-vis du système principal. Certaines actions favorables à la synchronisation du temps personnel des ERIH avec le temps

didactique du SDP viennent d'être mises en avant et pourront continuer d'être questionnées à partir des analyses des matériaux recueillis lors de la dernière phase de notre recueil de données qui permettent de disposer de captations filmées de l'ensemble des séances d'un chapitre de mathématiques dans le SDP et dans le SDA. Nous souhaitons poursuivre nos travaux dans ce sens.

V - BIBLIOGRAPHIE

Assude, T., Millon-Fauré, K., Koudogbo, J., Morin, M.-P., Tambone, J., & Theis, L. (2016). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en didactique des mathématiques*, 36/2, 197 - 230.

Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., & Tambone, J. (2015). Conditions d'accessibilité aux savoirs. In J. Zaffran (Éd.), *Accessibilité et handicap : anciennes pratiques, nouvel enjeu*, Grenoble : Presses universitaires de Grenoble, 209 - 224.

Assude, T., Perez, J.-M., Tambone, J., & Vérillon, A. (2011). Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Education et didactique, 5(2)*, 65-84.

Benoit, H. (2013). *Distorsion et détournement des dispositifs inclusifs: des obstacles à la transition vers de nouvelles pratiques*, 49-63.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. (2e éd.)*. Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1995). *La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. In Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques,* Clermont-Ferrand: IREM, 83 - 122.

Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en didactique des mathématiques, 19/2*, 221 - 266.

Chevallard, Y., & Johsua, M.-A. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: la Pensée sauvage.

Chopin, M.-P. (2011). *Le temps de l'enseignement - L'avancée du savoir et la gestion des hétérogénéités dans la classe,* Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Dupré, F. (2018). Analyse didactique des différentes temporalités au sein des dispositifs ULIS. In *Actes du XXXXIV colloque COPIRELEM*. Epinal.

Grawitz, M. (2001). *Méthodes des sciences sociales (11e éd.)*. Paris: Dalloz.

Leutenegger, F. (2000). *Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. Recherches en didactique des mathématiques, 20(2)*, 209 - 250.

Leutenegger, F. (2009). *Le temps d'instruire. Approche clinique et expérientale du didactique ordinaire en mathématique*. Berne: Peter Lang.

MEN., (2010). *Dispositif collectif au sein d'un établissement du second degré*.

MEN., (2015). Unités localisées pour l'inclusion scolaire (Ulis), dispositifs pour la scolarisation des élèves en situation de handicap dans le premier et le second degré, Pub. L. No. 2015-129.

Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique.* Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, Bordeaux.

Mercier, A. (2001). *Petit vocabulaire à l'usage des enseignants débutants.* IUFM Université de Provence. Consulté à l'adresse https://hchicoine.files.wordpress.com/2008/05/mercier-2001-temps-didactique.pdf

Nédélec-Trohel, I. (2015). Dispositif d'aide à l'inclusion: collaboration entre coordonnatrice d'Ulis et professeur de géographie en 4ème de collège. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation, (70-71)*, 93 - 105.

Ployé, A. (2013). Collaborer à des démarches d'inclusion au collège : analyse clinique des modalités pédagogiques et des éprouvés psychiques des acteurs. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation, (61)*, 23 - 35.

Tambone, J. (2014). Enseigner dans un dispositif auxiliaire : le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine de l'élève. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle, 47(2)*, 51 - 71.

Theis, L., Morin, M.-P., Tambone, J., Assude, T., Koudogbo, J., & Millon-Fauré, K. (2016). Quelles fonctions de deux systèmes didactiques auxiliaires destinés à des élèves en difficulté lors de la résolution d'une situation-problème mathématique ?, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 21*, 9 - 37.

Toullec-Théry, M., & Pineau, V. (2015). Inclusion en cours d'histoire dans une calsse de 5ème de collège: une étude de cas. *Education et didactique [en ligne], (9-1)*, 33-55.

COMMUNICATION C22

LE RÔLE DES CROYANCES DANS LES PRATIQUES D'UNE PROFESSEURE DES ÉCOLES À PROPOS DU CALCUL MENTAL

Valentina Celi
ÉSPÉ d'Aquitaine, Lab-E3D, Université de Bordeaux, France
valentina.celi@u-bordeaux.fr

Marina De Simone
FAPSE, Université de Genève, Suisse
marina.desimone@unige.ch

Résumé

Vause (2011) définit les croyances comme un réservoir de valeurs et d'idées sur lesquelles les enseignants s'appuient pour agir en situation et justifier leurs actions. En nous appuyant sur cette définition, nous présenterons ici quelques résultats d'une recherche, en cours (Celi, 2017 ; Celi et De Simone, 2018), visant à enquêter sur le rôle des croyances dans les pratiques du calcul mental d'une professeure des écoles novice.
Entités cachées et insaisissables (Furinghetti et Pehkonen, 2002), les croyances sont souvent difficiles à être identifiées par le chercheur (Vause, ib.). C'est ainsi que nous précisons d'abord les précautions prises pour éviter de fausser les données recueillies. Nous montrons ensuite que les croyances de l'enseignante observée semblent bien orienter ses pratiques : par ses choix mathématiques – car elle repousse à plus tard le travail sur les propriétés des opérations sous prétexte que les élèves ne sont pas encore prêts – et didactiques – car elle accepte des techniques qui ne relèvent pas du calcul réfléchi mais qui compensent le manque d'assurance de certains élèves.

« Le rôle des croyances dans les pratiques d'une professeure des écoles à propos du calcul mental » est le deuxième volet d'une recherche, démarrée il y a presque trois ans, où nous nous intéressons à l'enseignement du calcul mental à l'école primaire et tentons d'analyser les données recueillies en termes de croyances et connaissances d'enseignants à propos de ce thème.

Dans ce texte, après avoir clarifié des éléments théoriques qui ont guidé nos analyses, nous résumons quelques résultats issus du premier volet de recherche où nous avons identifié des premiers éléments liés aux possibles croyances des quatre-vingt-seize futurs enseignants d'école primaire. Cette partie est suivie d'un zoom sur la méthodologie adoptée dans le deuxième volet de la recherche et sur l'analyse de quelques données recueillies dans le but d'identifier un lien possible entre les connaissances et les croyances d'une enseignante novice, relativement à ses pratiques sur le calcul mental. Nous terminons avec quelques perspectives suggérées par les résultats de ces analyses.

Mais, en préambule, nous précisons la signification que nous attribuons au calcul mental dans notre recherche ainsi que les constats à partir desquels les premières questions ont surgi.

I - PRÉAMBULE SUR LE CALCUL MENTAL

1 Du point de vue mathématique

Introduit depuis plusieurs décennies dans les programmes de mathématiques de l'école élémentaire, l'enseignement du calcul mental est considéré aujourd'hui comme important pour explorer les nombres, les opérations et leurs propriétés et pour favoriser le raisonnement. Il demeure aussi important après l'école élémentaire : il suffit de penser, par exemple, à l'utilisation des propriétés des opérations dans le domaine de l'algèbre.

Selon les lieux et les époques, la locution "calcul mental" a eu et a encore des significations différentes. Sans trop rentrer dans les détails, nous tenons alors à préciser que, avec l'expression « calcul mental » nous entendons du calcul réfléchi, oral et/ou écrit, où le choix de la technique adoptée peut varier

suivant les nombres en jeu et opère globalement sur ceux-ci, contrairement au cas du calcul posé en colonne ; l'utilisation (même en acte) et l'utilité des propriétés des opérations sont plus évidentes que dans le calcul posé ; on recourt au calcul mémorisé, comme les tables de multiplication ; en temps limité ou non, il peut s'articuler avec du calcul instrumenté (comme c'est le cas dans le premier exemple montré ci-dessous). Les deux exemples qui suivent illustrent la signification que nous attribuons à l'expression « calcul mental » dans ce travail.

Exemple 1. Dans la Figure 1, les productions de trois élèves d'une classe double niveau (CE2 et CM1) à qui on a demandé d'afficher le nombre 15 sur l'écran de leur calculatrice, cela sans utiliser les touches [1] et [5] : ce n'est qu'après avoir écrit sur papier les calculs qu'ils pensent effectuer qu'ils peuvent se servir de la calculatrice comme moyen de validation. Dans le premier cas, l'élève recourt implicitement au sens de la multiplication en tant qu'addition réitérée ; dans les deux autres cas, les élèves choisissent la décomposition multiplicative d'un nombre proche de 15 et ils « ajustent » en additionnant ou en soustrayant.

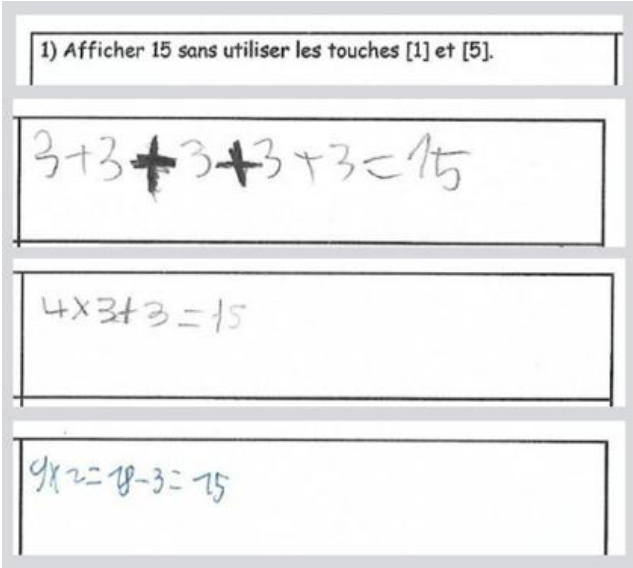


Figure1. « Affiche 15 sur l'écran de la calculatrice sans utiliser les touches [1] et [5] »

Les techniques exploitées par ces trois élèves nous semblent relever du calcul mental : ils mobilisent des notions et des propriétés diverses selon les cas, ils font aussi appel à du calcul stocké en mémoire.

Exemple 2. Dans une classe mixte de CP et de CE1, lors d'une séance sur le calcul mental du type N +9, l'enseignante demande de calculer 13 + 9 et interroge ensuite quelques élèves afin qu'ils explicitent leur technique. Un élève utilise alors la décomposition de 13 en 10 et 3, puis ajoute 9 à 10 et surcompte enfin à partir de 19, ajoutant 3. Elle dit précisément : « J'ai mis d'abord le 10/ après j'ai mis le 9/ ça fait 19// après j'ai compté dans ma tête/ ça fait 22 ».

Dans cet exemple aussi, la procédure que l'élève décrit nous semble relever du calcul mental. Au passage, soulignons que, ce jour-là, l'enseignante attendait à ce que les élèves se servent spontanément de la technique « N+9 = N+10–1 ».

2 Du point de vue de la *noosphère*

Les débats sur le rôle du calcul à l'école en général ne sont pas rares dans la *noosphère*.

Sans remonter trop loin dans le temps, il y a plus de dix ans, Charnay (2004) s'interrogeait sur les nouveaux outils de calcul utilisés dans la société et sur comment l'école aurait dû et pu les prendre en compte. À la même époque, Artigue (2004) soulignait la vision réductrice du calcul renvoyée par l'enseignement et la culture car considéré comme ce qui s'oppose au raisonnement, comme quelque chose de mécanique, d'automatisé ; ce qui, selon Artigue (ibid.), est à mettre en relation avec l'évolution des conceptions des dernières décennies sur l'apprentissage et l'enseignement.

Les résultats des évaluations nationales et internationales sont une source de grande discussion sur le calcul à l'école.

En 2007, dans un rapport officiel, le Ministère de l'Education Nationale (MEN) dénonçait les résultats négatifs en calcul dans les évaluations nationales de début de 6e, en soulignant notamment le manque d'intérêt que les enseignants attribuaient à la pratique du calcul mental. Cette polémique avait d'ailleurs contribué à l'abandon des programmes alors en vigueur.

En 2015, ce sont les résultats alarmants des évaluations des dernières années qui sont à l'origine de la conférence sur les nombres et les opérations, organisée par le Conseil National d'Évaluation du Système Scolaire (CNESCO), en partenariat avec l'Institut Français d'Éducation (IFÉ), alors que la maîtrise des nombres et du calcul est cruciale dans le parcours scolaire d'un élève et pour le futur citoyen qui sera. Les élèves sont ainsi décrits comme des experts en apparence parce qu'ils ont peut-être des connaissances déclaratives mais ils sont faibles en connaissances procédurales[170] :

> *Les performances en fin d'école primaire suggèrent qu'une proportion importante d'élèves peuvent se présenter au collège comme des "experts apparents" pouvant réussir certaines tâches […] Mais cette réussite opérationnelle peut traduire une conceptualisation insuffisante des nombres décimaux, voire des nombres entiers* (CNESCO, 2015).

Cette situation alarmante est confirmée actuellement dans le rapport de Villani et Torossian (2018)[171] où, parmi les vingt-et-une mesures à prendre en compte pour l'enseignement des mathématiques, trois sont consacrées aux nombres et aux calculs. La note de service[172] que le MEN actuel a publié en avril dernier, à propos de l'enseignement du calcul, fait d'ailleurs écho à ce rapport.

C'est à partir de certains de ces constats que les premières questions ont surgi et nous ont guidées dans le développement du premier volet de cette recherche :

- que pensent les futurs enseignants du calcul mental ?
- dans la formation initiale, comment les encourager à le pratiquer avec leurs élèves, avec intelligence ?

C'est la nature même du thème retenu, le calcul mental, qui nous a alors encouragées à nous intéresser à ce sujet en termes de croyances. C'est pourquoi, dans le paragraphe qui suit, nous présentons quelques éléments théoriques qui ont guidé les analyses des données recueillies.

II - DES ÉLÉMENTS THÉORIQUES

Sans prétendre à être exhaustives, nous avons investigué, dans différents domaines de la recherche, sur le concept de croyance. Bien que les caractérisations du concept de croyance soient nombreuses et, parfois, contradictoires, un point est commun à différents auteurs, à savoir la distinction entre la connaissance et la croyance, la définition de l'une est souvent construite en termes de relation avec l'autre.

Nous ne résumons ici que le travail de Vause (2011), étant celui que nous avons retenu pour développer nos analyses en termes de croyances et de connaissances[173]. L'auteure définit les croyances comme « un réservoir de valeurs et d'idées sur lesquelles les enseignants s'appuient pour agir en situation et justifier leurs actions » et les distingue des connaissances qu'elle définit comme « un ensemble de savoirs relatifs à un domaine et validées empiriquement ». Malgré cette distinction, un syncrétisme existe entre la connaissance et la croyance, ce qui conduit Vause (ibid.) à définir des *connaissances ouvragées* comme étant « un mélange de croyances, de connaissances issues de la pratique et de connaissances davantage théoriques ».

---

[170] http://www.cnesco.fr/fr/numeration/bilan-des-acquis/

[171] http://www.education.gouv.fr/cid126423/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques.html

[172] http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=128731

[173] Pour davantage de détails sur l'état de l'art à propos des croyances, nous renvoyons le lecteur à Celi & De Simone (2018a) et Celi & De Simone (2018b).

Notamment, Vause (ibid.) distingue ce qui est élaboré socialement de ce qui est élaboré personnellement ; puis ce qui est justifié et ce qui ne l'est pas (cf. Figure 2). Elle distingue ensuite :

- les connaissances théoriques : acquises durant des formations ou par des lectures théoriques ;
- les connaissances pragmatiques : relatives aux expériences d'enseignement d'un individu ;
- les croyances personnelles : liées à l'histoire d'un individu, valeurs qui ont « imprégné » sa vie, sur lesquelles il s'appuie sans nécessairement se souvenir du lieu et du moment précis où il les acquises ;
- les croyances partagées : valeurs partagées par les membres d'un groupe, sans aucune validité empirique.

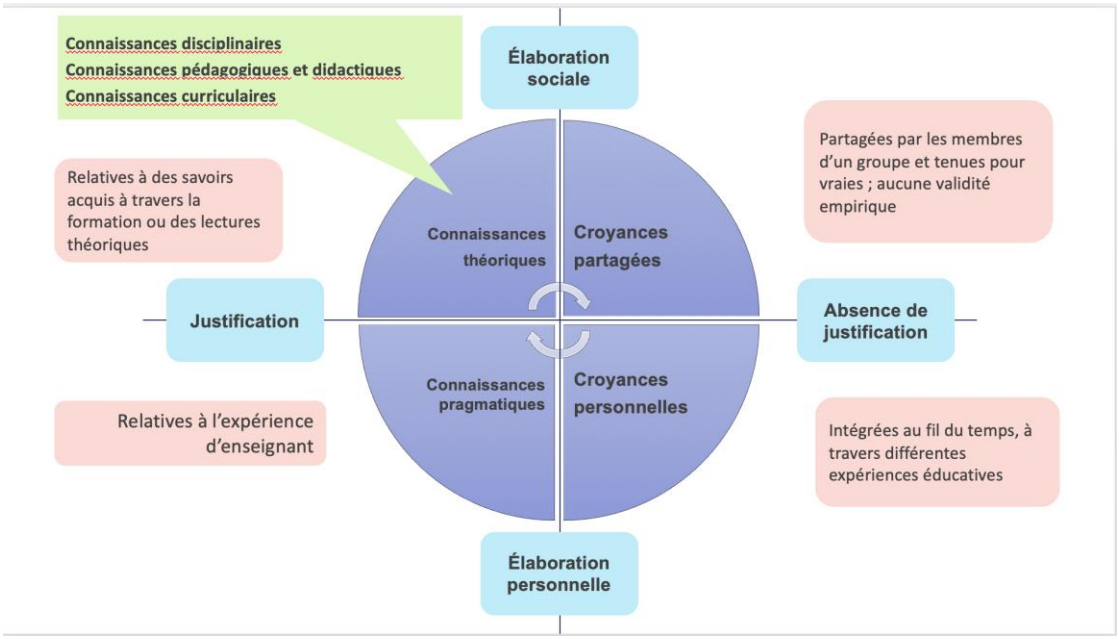


Figure 2. Articulation entre croyances et connaissances

Relativement aux connaissances théoriques, nous avons cru important et intéressant de les décliner ultérieurement (cf. Figure 2, en haut, à gauche). C'est ainsi que nous avons fait appel au modèle de Shulman (1986) qui distingue :

- les connaissances disciplinaires : connaissance du contenu, en l'occurrence mathématique ;
- les connaissances pédagogiques et didactiques : connaissances utiles "pour enseigner" ;
- les connaissances curriculaires : connaissances des textes officiels, élaborés pour enseigner une discipline, en l'occurrence les mathématiques.

D'autres modèles, davantage développés, existent sur les connaissances, comme celui de Shulman (1987), de Ball et al. (2008) et de Rowland et al. (2005). Le modèle de Shulman (1986) nous a toutefois semblé suffisant, notre objectif étant d'analyser les données en termes à la fois de croyances et de connaissances. Et ce rapprochement nous semble en tout cas pertinent en considérant que l'une des critiques avancées au modèles de Shulman (1986 ; 1987) et de Ball et al. (ibid.) est le manque de prise en compte « des dimensions plus émotionnelles telles que, notamment, les croyances par rapport à l'enseignement des mathématiques » (Demonty et al., à venir).

Et, en tout cas, comme nous le signalons à la fin de ce texte, le modèle même de Vause (2011) est remis en cause à l'issue des résultats de nos analyses.

III - LE PREMIER VOLET : UNE PHASE EXPLORATOIRE

Que pensent des futurs enseignants à propos du calcul mental ? Pour essayer de répondre à cette question, nous avons recueilli des données sur un échantillon de quatre-vingt-seize étudiants, futurs enseignants du premier degré, à savoir :

- une courte rédaction anonyme ("Pour moi, le calcul mental, …")[174] ;
- des réponses dans une évaluation de contrôle continu ;

des entretiens avec six d'entre eux, choisis indépendamment des résultats précédents et de façon aléatoire.

En synthèse, les résultats des analyses montrent que les connaissances disciplinaires sont quasiment ignorées. Les connaissances pragmatiques n'étant pas vraiment développées chez les futurs enseignants, la faiblesse en termes de connaissances disciplinaires et didactiques semble être comblée par des croyances, partagées ou personnelles, qui s'articulent souvent avec des connaissances curriculaires : le calcul mental est associé à une pratique régulière, avec rapidité et sans support ; le calcul mémorisé est souvent associé à l'utilité dans la vie quotidienne. Le calcul raisonné est associé soit à la difficulté, à l'angoisse, soit à l'aspect ludique.

Nous reviendrons sur certains de ces résultats, lors de l'analyse de quelques données recueillies au cours du deuxième volet de notre recherche.

IV - LE DEUXIEME VOLET : UNE ÉTUDE DE CAS

À l'issue de cette phase exploratoire, notre intérêt s'est focalisé sur la relation qui existe (ou pas) entre les connaissances et les croyances d'une professeure des écoles novice, à propos du calcul mental et de son enseignement : dans ses pratiques, quel est le rôle de ses croyances, à propos du calcul mental ?

1 Méthodologie

Un point partagé par certains chercheurs qui s'intéressent aux croyances est, par la nature même de ces entités, la difficulté à les reconnaître dans les discours de l'individu et dans ses actions. Furinghetti et Pehkonen (2002) les considèrent d'ailleurs comme des entités cachées et insaisissables.

C'est pourquoi, dans le deuxième volet de notre recherche, la méthodologie choisie prévoit davantage d'étapes que dans le premier volet.

Léa, enseignante novice dans une classe à double niveau (CM1 et CM2), a accepté de nous accueillir dans sa classe : nous lui avons demandé de pouvoir assister à quelques séances de calcul mental sans rien changer à ce qu'elle avait prévu dans sa progression.

Pour traiter un thème délicat tel que les croyances, il nous a paru important de prendre des précautions. Nous avons ainsi mis en place une méthodologie en plusieurs étapes et avec plusieurs entrées. Le contenu de chaque étape s'est construit à partir des étapes précédentes, cela afin d'enrichir et de préciser le recueil d'informations relatives à l'enseignante observée :

- plusieurs observations de classe lors de séance de calcul mental ;
- deux courtes rédactions écrites, au début et à la fin de l'expérimentation ;
- un entretien[175] ;
- un questionnaire.

[174] Il s'agissait de compléter la phrase de trois manières différentes.

[175] Nous nous sommes inspirées du protocole de l'*entretien d'explicitation* de Vermersch (1991), notamment en aidant l'enseignante à la description de ses actions et en excluant les questions qui portent sur la causalité de la situation, sur le pourquoi (p.66-67).

Toute séance observée était organisée de la même manière : une courte phase *plus ou moins ritualisée*, comme Léa la définira dans sa première rédaction écrite, et puis une longue phase portant sur *Le compte est bon* (cf. Figure 3).

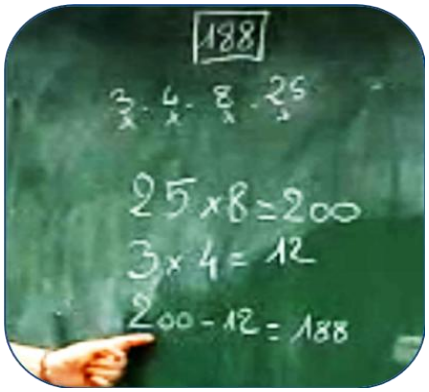


Figure 3. Le compte est bon

2 Analyse de quelques données recueillies

2.1« Plusieurs façons de réfléchir »

Dans sa première rédaction écrite, Léa précise : « **Personnellement**, j'alterne séances courtes et séances longues. Ces dernières permettent souvent d'échanger sur les stratégies mais aussi de constater qu'il y a bien souvent **plusieurs façons de réfléchir** ».

Elle confirme cette dernière idée dans la deuxième rédaction écrite en écrivant : « Enfin, une séance de calcul mental doit permettre aux élèves de constater qu'il existe parfois plusieurs solutions pour effectuer un calcul ».

Malgré la formulation de ces affirmation et l'utilisation de l'adverbe *personnellement* (dans le premier extrait), les observations de classe nous conduisent à reconnaître ici quelques **connaissances didactiques**, que Léa a probablement acquises pendant sa formation initiale ou à partir de lectures théoriques. Ces connaissances ont pour nous une valeur statique car elles ne sont pas présentes dans ses pratiques : pendant les longues séances où nous étions présentes, elle n'a jamais mis les élèves en condition de constater qu'il y a souvent *plusieurs façons de réfléchir* à un même calcul.

2.2« Simplifier les calculs »

Dans des réponses lors de l'entretien, Léa parle de l'utilisation de stratégies et d'automatismes qui permettent de simplifier les calculs :

> ***Qu'entends-tu par "stratégies de calcul" ?***
> *Léa : Par exemple, quand on est sur du calcul mental […] on essaie de voir quel est* ***le calcul le plus simple*** *[…]* ***la démarche*** *qu'ils vont adopter* ***pour se simplifier la tâche****.*

Elle revient sur cet aspect, au cours du questionnaire :

> ***Quels types de calculs stratégiques aimerais-tu que tes élèves mettent en œuvre lors des séances sur le calcul mental ?***
> *Léa : C'est lors des séances de calcul mental que les élèves expérimentent le mieux la propriété de commutativité. Cette propriété est celle qui, selon moi, amène l'élève à constater qu'il est intéressant, en calcul mental, de construire des* ***stratégies pour faciliter les calculs****.*

Nous n'avons toutefois rien trouvé de tel au cours des séances observées. L'interprétation de cette idée nous semble d'ailleurs délicate. Dans le premier volet de la recherche, cette association entre stratégies et simplicité n'apparaît pas ; au contraire, le calcul raisonné est parfois associé à la difficulté. Comment décider pourquoi et pour qui, pour calculer 25 par 8, il est plus facile de calculer (25 par 4) par 2 ou (8 par 5) par 5 ? Il faut tenir compte d'un trop grand nombre de facteurs pour pouvoir y répondre.

Cela nous conduit à interpréter cette idée comme une **croyance personnelle** de Léa.

2.3« Rapidité »

Dans ce travail, l'articulation dynamique entre les observations de classe et les déclarations de l'enseignante faites à différents moments et sous différentes formes (rédactions écrites, entretien, questionnaire) nous permet d'identifier des connaissances, des croyances mais aussi de reconnaître un mélange de celles-ci, ce que Vause (2011) définit comme des *connaissances ouvragées*.

Dans les séances observées, Léa encourage ses élèves à être rapides seulement pendant des phases *ritualisées* dans lesquelles elle les interroge, par exemple, sur les résultats des tables de multiplication. Et elle justifie ce choix, lors de l'entretien :

> ***Un élève dit "c'est une épreuve de rapidité" et tu dis "non". En proposant des tables de multiplication, tu incites toutefois tes élèves à faire vite. Selon toi, la rapidité est-elle importante lorsque l'on travaille sur les tables de multiplication ?***
>
> *Léa : Oui parce que c'est que je ne voulais pas qu'ils rentrent dans un calcul qui n'était pas mental, qu'ils se mettent à poser, voilà je voulais vraiment qu'ils restent dans l'automatisation, effectivement la mémorisation aussi.*

Cette idée de rapidité nous semble être une **connaissance didactique** (idée présente, par exemple, dans Butlen & Pezard, 1990), transformée en **connaissance pragmatique** parce que Léa en a fait l'expérience.

2.4 « Aspect ludique »

L'aspect ludique compte parmi les items identifiés dans le premier volet de la recherche : notamment, il est associé au calcul réfléchi. Nous attribuons à cela une valeur de croyance, nous nous demandons toutefois s'il s'agit d'une croyance personnelle ou partagée.

Si nous l'opposions à la croyance du calcul mental comme source de peur et d'angoisse, nous pourrions peut-être la définir comme une croyance personnelle. Le calcul comme synonyme d'activité ludique peut cependant être interprété comme une croyance partagée, nous pensons à ces ouvrages de "mathématiques récréatives", anciennes et récentes, dans lesquelles le calcul mental est conçu comme un jeu.

Dans la première rédaction écrite, Léa affirme : « Je préfère les séances qui présentent un aspect ludique pour créer une émulation et lever ainsi certains freins ».

Et encore, lors d'un échange récent, elle déclare vouloir réfléchir sur un dispositif tel que les *ateliers tournants*, à proposer à ses élèves et dans lequel elle souhaite que les activités sélectionnées aient un caractère ludique (cf. Figure 4).

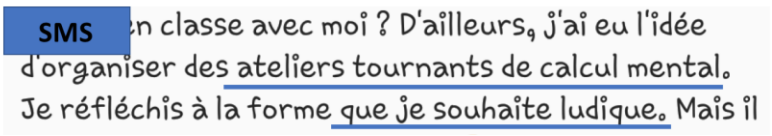


Figure 4. Extrait d'un échange récent avec Léa (sms)

Cela nous conduit à interpréter cette idée de Léa comme une **croyance personnelle**, une valeur enracinée dans sa pensée, puis transformée par l'expérience en une connaissance pragmatique car effectivement, pour faire travailler ses élèves sur le calcul mental, Léa choisit des activités ludiques (par exemple, *Le compte est bon*).

V - CONCLUSIONS

En résumant, l'idée que Léa a du calcul mental se manifeste entre connaissances didactiques et croyances personnelles, certaines étant mises en pratique et d'autres gardant une valeur statique.

Dans ses discours, elle parle de *stratégies*, de *plusieurs façons de réfléchir*. Lors des séances observées, nous n'assistons toutefois jamais à des échanges sur ces aspects. Sans compter que Léa autorise ses élèves à se servir (et à abuser !) de calculatrices et de calculs posés.

Finalement, ce sont surtout des croyances qui guident les choix et les actions de Léa dans la pratique du calcul mental.

Bien qu'elle reconnaisse l'importance des stratégies dans le calcul mental, en lui faisant remarquer qu'elle ne discute jamais avec ses élèves sur la façon de mener les calculs (comme c'est par contre le cas décrit au début, à propos du calcul 13 + 9), elle justifie ce choix et sa pratique en disant qu'il faut y arriver progressivement. Lors de l'entretien, elle dit précisément :

> *[…] pour l'instant en fait mon but c'est d'arriver **petit à petit** à aborder les stratégies de calcul […] je pense qu'on va y arriver **petit à petit**, il y a **une sorte de progression** dans la prise de conscience voilà de comment est-ce qu'on peut calculer, quelles sont les stratégies, est-ce qu'on peut avoir plusieurs stratégies.*

Elle justifie aussi ses choix en mettant en cause l'élève et ses faiblesses : elle arrive à considérer le recours au calcul posé ou à la calculatrice comme une étape possible de l'activité de l'élève qui fait du calcul mental, à l'accepter car cela rassure certains élèves et compense leur manque d'assurance. Dans le questionnaire, on peut lire :

> *À partir du moment où les élèves utilisent leur mémoire, inventent des stratégies, réfléchissent pour obtenir un résultat, j'estime qu'il s'agit de calcul mental. Certains d'entre eux **ont besoin d'un support écrit**, **poser une opération**, représenter une situation. Mais, **selon moi**, ces opérations sont **intermédiaires** et peuvent faire partie d'une activité de calcul mental.*
>
> *Certains élèves ont besoin de passer par cette phase, Cela en rassure certains. Cela compense leur manque d'assurance, de mémorisation des tables de calcul. Puis il y a l'engouement de la calculatrice […].*

Léa croit à l'aspect ludique du calcul mental : est-ce cette croyance qui empêche de conduire ses élèves vers une véritable construction de stratégies de calcul mental, de peur que cet aspect ludique disparaisse ?

VI - PERSPECTIVES

Ces conclusions nous conduisent à approfondir nos réflexions sur les pratiques des enseignants, à propos du calcul mental.

Si l'on considère les différentes techniques de calcul mental comme des artefacts (Rabardel, 1995), des questions se posent : les enseignants ont-ils conscience du **potentiel sémiotique** des techniques de calcul, de la relation qui existe entre l'utilisation de l'artefact et les significations mathématiques liées à son usage (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008) ? Les ressources pédagogiques à disposition des enseignants représentent-elles une aide à l'identification de ce potentiel sémiotique ?

Dans le manuel *Maths tout terrain* CE2, (Bordas, 2016), un exemple de ressource parmi d'autres, les auteurs prévoient un exercice de calcul mental, accompagné d'une technique possible, au début de chaque nouvelle leçon. Lorsqu'ils proposent, par exemple, d'ajouter 8 à un nombre, ils suggèrent de le faire en ajoutant 10 et en soustrayant 2. Cette technique, qui n'est pas si spontanée pour un élève, nécessite un travail préalable sur l'addition de 10 à un nombre et la soustraction de 2 à un nombre, sans oublier de justifier cette technique par le fait que 8 peut être égal à 10-2. Ce travail préalable, cette progressivité dans l'apprentissage des techniques de calcul réfléchi ne sont pas présents ou du moins pas facilement perceptibles dans le manuel en question.

Cela nous conduit à formuler l'hypothèse que les ressources pédagogiques n'aident pas l'enseignant dans le travail sur le potentiel sémiotique des techniques de calculs réfléchi[176]. Hypothèse à tester par une analyse de ressources scolaires que nous avons débuté depuis peu.

Ces résultats nous ramènent spontanément à la formation initiale et continue. En nous intéressant au processus de **transposition méta-didactique** (au sens de Arzarello et al., 2014), nous souhaiterions étudier le rôle du formateur dans son interaction avec les enseignants (futurs, novices ou experts) :

[176] Nous pourrions formuler autrement cette hypothèse en précisant que les ressources scolaires sur le calcul mental ne proposent pas (suffisamment) d'*assortiments didactiques*, à savoir *une suite ordonnée d'exercices réunis selon une même intention didactique, réalisables dans une unité de temps didactique* (Esmenjaud-Genestoux, 2000, p. 449 et suivantes). Dans l'exemple que nous venons de citer, il s'agirait alors de travailler dans l'ordre les calculs qui sont susceptibles de servir pour les calculs suivants.

Comment un formateur sensibilise-t-il ou pourrait-il sensibiliser les enseignants à l'identification et à l'utilisation du potentiel sémiotique des stratégies de calcul mental ?

Nos analyses nous ont fait prendre conscience des difficultés à identifier des croyances, à les distinguer des connaissances, à distinguer une croyance personnelle d'une croyance partagée, en soulignant l'importance de la perméabilité qui existe entre elles, constamment imbriquées dans les pratiques de l'enseignante observée.

Faut-il prendre davantage en compte la vision qu'un enseignant a des mathématiques (ou de l'un de ses chapitres) et de lui-même en tant qu'enseignant ? Cela nous conduit alors à nous intéresser à la notion d'**atteggiamento**[177], développée par Di Martino et Zan (2010).

Autrement, de la même manière que nous avons développé les genres de connaissances en nous appuyant sur le modèle de Shulman (1986), nous envisageons d'adapter un modèle qui nous permettrait de prendre en compte un éventail plus large de croyances (Op't y ende et al., 2006 ; De Corte et Verschaffel, 2008).

Cela fait partie de nos réflexions actuelles et de notre travail à venir.

VII - BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, *n. 54*, 23-39.

Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, M. et Martignone, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programs. *Mathematics teacher in the digital era*, Springer Netherlands (Ed.), 347-372.

Bartolini Bussi, M. et Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, New York, 746-783.

Butlen, D. et Pezard, M. (1990). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N*, *n. 47*, 35-59.

Celi, V. (2017). Intending teachers' beliefs and knowledges on mental computation in French primary school: which perspectives for the learning? which needs for the teaching?. *Simposium Más allá de la alfabetización numérica: una matemática formativa para la Educación Primaria, 5° Congreso Internacional Educational Sciences and Development*, mai 2016, Santander, España.

Celi, V. et De Simone, M. (2018a). La place des croyances dans la praxéologie d'une enseignante novice d'école primaire : le cas du calcul mental. *Actes Colloque CITAD 6*, janvier 2018, Autrans (France).

Celi, V. et De Simone, M. (2018b). Il calcolo mentale nelle pratiche di un'insegnante novizia di scuola primaria : un'analisi in termini di credenze e conoscenze. *Conferenze e seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis*, 175-197

Charnay, R. (2004). Des calculatrices à l'école primaire. Oui ? Non ? Pourquoi ? Comment ?, *Grand N, 74*, 67-75.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. *Rapport au savoir et didactiques*, 81-104.

De Corte, E. et Verschaffel, L. (2008). Chapitre 1. Apprendre et enseigner les mathématiques : un cadre conceptuel pour concevoir des environnements d'enseignement-apprentissage stimulants. *Enseignement et apprentissage des mathématiques*, De Boeck Supérieur, *Vol. 2*, 25-54.

Demonty I., Celi V., Masselot P., Tempier F. (à venir), Conceptualiser et évaluer les connaissances pour enseigner les mathématiques, *Actes de la 19e École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Paris 21-26 août 2017.

[177] En français, on pourrait le traduire par *comportement*, *attitude*, voire *posture*.

Di Martino, P. et Zan, R. (2010). 'Me and maths': towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13(1)*, 27-48.

Errera, A. (2016). (sous la direction de), *Maths tout terrain*. Bordas.

Esmenjaud-Genestoux, F. (2000). *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1.

Furinghetti, F. et Pehkonen, E. K. (2002). *Rethinking characterizations of beliefs. Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*. Springer, Dordrecht, 39-57.

Op't Eynde, P., De Corte, E. et Verschaffel, L. (2006). Epistemic dimensions of students' mathematics-related belief systems. *International Journal of Educational Research*, *45(1-2)*, 57-70.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Rowland, T., Huckstep, P. et Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8(3)*, 255-281.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15.2*, 4-14.

Vause, A. (2011). *Des pratiques aux connaissances pédagogiques des enseignants : les sources et les modes de construction de la connaissance ouvragée*. Thèse de doctorat en éducation, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.

Vermersch P. (1991). L'entretien d'explicitation. *Les cahiers de Beaumont*, 52bis-53, 63-70.

COMMUNICATION C23

CONGRUENCE ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE COMPARAISON

Annie CAMENISCH
MCF Sciences du langage, Université de Strasbourg - ESPE
LiLPa EA 1339
annie.camenisch@unistra.fr

Serge PETIT
Professeur de mathématiques honoraire
Université de Strasbourg – IUFM d'Alsace
petit.serge@sfr.fr

Résumé

Certains problèmes de comparaison engendrent des résultats erronés des élèves jusqu'en cycle 3. Certains élèves, comme le dit Olivier Houdé (*directeur du Laboratoire de Psychologie du Développement et de l'Éducation de l'enfant (LaPsyDÉ)*), ne parviendraient pas à « inhiber l'automatisme implicite ». Par exemple : « Il y a le mot moins alors je soustrais. ». Le même chercheur constate, en fin d'article, que : « Il [le cerveau] résiste de mieux en mieux – mais pas toujours ! – aux automatismes de pensée ». L'auteur ne précise cependant pas comment procéder pour permettre au cerveau de résister davantage et permettre à l'élève de trouver la solution du problème de manière plus sûre.
Faut-il dès lors attendre que le cerveau « résiste » ou bien est-il possible de développer un apprentissage spécifique permettant aux élèves de mieux réussir certains problèmes de comparaison ?
Des travaux spécifiques, portant notamment sur la langue, devraient permettre une amélioration des résultats. Ceci reste une hypothèse que nous détaillerons au cours de ce texte en analysant de tels énoncés, en exposant des tests réalisés auprès d'un millier d'élèves et en analysant les résultats obtenus. Nous montrerons de manière plus détaillée que développer des stratégies d'enseignement prenant appui sur la reformulation (traitement dans le registre de la langue naturelle) pourrait augmenter de manière très sensible les performances des élèves. Les résultats exposés ci-dessous ne sont que provisoires et seront infirmés ou confirmés dans une étude plus approfondie pendant l'année scolaire 2018-2019.

Il est devenu un lieu commun de constater que certaines difficultés rencontrées par les élèves en résolution de problème sont dues aux difficultés liées à la lecture et à la compréhension des situations proposées. La langue s'érige alors en obstacle à la résolution de problème et donc à un travail spécifiquement mathématique. Ce constat étant posé, on peut s'interroger sur le type d'activités à mener, dans le champ des mathématiques et/ou dans celui de l'apprentissage de la langue. Cette question impose une réflexion sur la prise en compte explicite d'activités spécifiques à la langue dans le cadre des apprentissages mathématiques en classes et dans des séances décrochées en amont ou en remédiation, ou encore de manière régulière et intégrée au cœur des situations de résolution de problème.

Afin d'apporter des éléments de réponse à cette interrogation première, nous inscrivons nos recherches dans le cadre théorique de la littératie scolaire qui s'intéresse aux compétences de lecture et d'écriture nécessaires à la réussite des élèves à l'école dans tous les domaines d'apprentissage. Or les énoncés de problèmes appartiennent bien à ce champ. La littéracie scolaire, communément définie comme le versant positif de l'illettrisme, « se réfère à la compréhension et à la production des textes écrits utilisés à l'école » (Grossman, 1999, 140-141) et s'intéresse aussi aux processus cognitifs que modifie l'usage de l'écrit. La littératie se situe alors au croisement de trois disciplines : l'anthropologie, autour des recherches de Jack Goody (Goody, 2006 ; Olson, 2006) qui analyse les rôles de l'écrit dans les processus cognitifs, la

didactique du français, en particulier avec les recherches sur les écrits intermédiaires (Chabanne et Bucheton, 2000), et les mathématiques, à partir des travaux de Raymond Duval sur les registres sémiotiques et les phénomènes de congruence[178] (Duval, 1995), sans oublier la classification des problèmes additifs de Vergnaud (Vergnaud, 1986).

Finalisée par des enjeux scolaires visant à améliorer les performances en résolution de problème, la littéracie envisage des apprentissages spécifiques intégrés aux apprentissages dans les différentes disciplines, et plus particulièrement en mathématiques. Il s'agit notamment d'y ancrer un travail explicite de lecture et d'écriture (Camenisch et Petit, 2005). Notre recherche reprend à son compte les propos d'Olson (2006, 85) stipulant que « l'écriture transforme le langage en objet de pensée ». Elle s'interroge en particulier sur la mise en place d'écrits intermédiaires considérés comme autant de pratiques réflexives « qui permettent de penser, d'apprendre et de se construire » (Chabanne et Bucheton, 2000, 24).

On peut donc formuler l'hypothèse suivante, à savoir qu'un travail spécifique portant sur le langage dans les écrits mathématiques permet d'améliorer les performances en résolution de problème. Il convient donc de s'interroger d'une part, sur la nature du travail spécifique mené en contexte mathématique, d'autre part, sur les caractéristiques des énoncés de problèmes considérés, à savoir, pour ce qui nous concerne ici, les énoncés de problèmes additifs de comparaison.

I - VARIATIONS AUTOUR DES ÉNONCÉS DE PROBLÈMES

Afin de mettre en exergue les caractéristiques d'un énoncé de problème additif de comparaison, nous nous appuierons sur un exemple tiré d'un manuel scolaire. Il permettra à la fois de cerner les variables langagières impliquées, comprenant aussi les écrits intermédiaires qu'il peut générer, et l'analyse de congruence entre les énoncés et les processus de résolution mis en œuvre.

1 Un exemple d'énoncé de problème en classe de CE1

Nous avons sélectionné un énoncé de problème extrait du manuel de CE1 *Pour comprendre les maths* (Hachette, 2018, 100) d'une part parce qu'il présente une situation prototypique[179] à des énoncés de problème de comparaison, d'autre part, pour la variété des écrits qu'il présente.

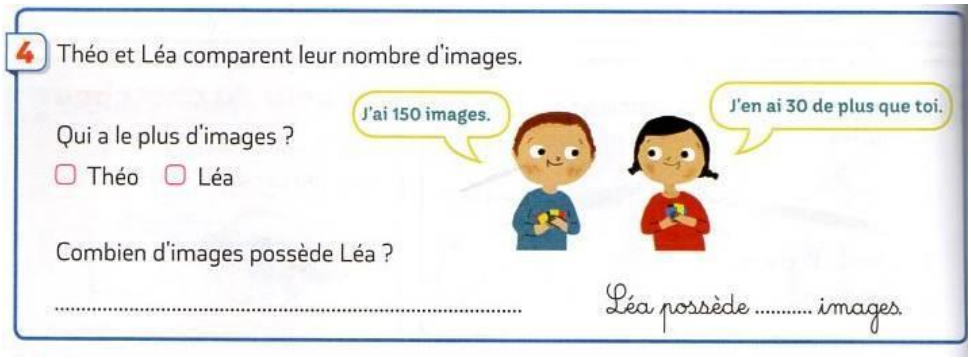


Figure 1. Un exemple d'énoncé de problème additif de comparaison

[178] Le mot *congruence* est formé sur le radical *-gr-* qui apparait dans des mots comme *progresser* (marcher en avant), *régresser* (marcher en arrière), le premier élément *con-* peut se traduire par *ensemble*. Deux représentations d'un même objet sont donc *congruentes* si et seulement si elles *marchent bien ensemble.* Ce qui signifie, entre autres, que les unités signifiantes de l'une et de l'autre apparaissent dans le même ordre et qu'elles portent les mêmes sens.

[179] Le *prototype* propose un exemple particulier, qui présente des caractéristiques communes et invariables, et s'oppose au *modèle*, qui serait à imiter pour reproduire des caractéristiques identiques. Le prototype permet des variations autour d'un exemple. Ici, l'énoncé est prototypique parce qu'il présente une situation rencontrée dans la plupart des énoncés de problèmes de comparaison : la comparaison d'un nombre d'objets.

Un énoncé de problème se présente comme un écrit fictif, comprenant un habillage, ici, sous la forme d'une situation évoquant des images réparties entre deux personnages appelés *Théo* et *Léa*. Il est formé d'une partie informative qui présente les données, sous forme textuelle, schématique, tabulaire, etc. et d'une partie injonctive, qui vise à réaliser une recherche pour trouver un résultat, le plus souvent sous la forme d'une question (Camenisch et Petit, 2008). Un problème additif de comparaison propose des comparaisons d'états (Vergnaud, 1986), ici un nombre d'images inégalement réparties entre les deux personnages. Il nécessite l'utilisation d'un vocabulaire spécifique, sous la forme de locutions adverbiales de comparaison, *de plus que, de moins que, autant que*. Au niveau des opérations mathématiques, sa résolution mobilise une addition ou une soustraction.

Cet énoncé de problème présente d'abord la situation fictive sous la forme d'une phrase introduisant les personnages et l'objet dont il est question : *Théo et Léa comparent leur nombre d'images*. Cette situation est illustrée par une représentation des personnages, qui sont des personnages récurrents dans ce manuel, donc connus des élèves. Les personnages tiennent dans leurs mains un nombre indéterminé d'images. Les informations ou données du problème apparaissent sous la forme de bulles où les personnages s'expriment dans un dialogue, Théo disant : « J'ai 150 images » et Léa répondant : « J'en ai 30 de plus que toi ». La comparaison s'exprime dans la réponse de Léa par l'usage de l'adverbe comparatif « de plus que ». Une difficulté linguistique provient de l'usage du pronom personnel « en » qui nécessite une structure syntaxique complexe : *J'en ai 30 de plus que toi*, renvoyant à *J'ai 30 images de plus que toi*. La partie injonctive du problème se présente sous la forme d'une phrase interrogative : *Combien d'images possède Léa ?*

Cette présentation d'un énoncé de problème de comparaison sous forme de dialogue accompagné d'une illustration n'est pas la plus fréquente. Mais si elle présente deux types d'écrits différents, narratif et conversationnel, c'est sans doute destiné à faciliter la représentation de la situation à des élèves de CE1, encore peu experts dans leur lecture des énoncés. Une présentation plus conventionnelle de la même situation prendrait la forme suivante :

Théo a 150 images. Léa a 30 images de plus que Théo. Combien d'images possède Léa ?

On peut remarquer la présence d'un écrit intermédiaire sous la forme d'une autre question précédant l'injonction du problème, avec une option à cocher parmi *Théo* ou *Léa* : *Qui a le plus d'images ?* Ce questionnement vise à interroger l'illustration et le dialogue pour estimer le résultat avant le calcul. Un autre écrit, fréquemment rencontré dans les manuels de CP et de CE1, se présente sous la forme d'une phrase réponse à trou : *Léa a …… images*. Du point de vue de la structure profonde, la question et la phrase réponse à trou renvoient à deux types différents d'une même phrase : un type interrogatif et un type déclaratif.

Du point de vue de la structure mathématique de l'énoncé, on peut constater qu'il y a congruence (Duval, 1995) entre l'énoncé et le processus de résolution visé. Ainsi, Théo et Léa apparaissent sur l'image dans le même ordre que dans la phrase introductive, les données numériques peuvent être prises également dans le même ordre, et l'égalité résolvante est congruente avec le mot « plus » utilisé dans l'énoncé : 150 + 30 = 180, calcul attendu dans les pointillés situés après la question.

2 Des variations plus ou moins congruentes

Les problèmes dans lesquels la traduction d'une égalité résolvante à partir des données figurant dans l'énoncé ne correspond pas à l'ordre ou au sens des unités de l'énoncé (opposition sémantique des unités signifiantes) sont dits « **non-congruents** » (Duval, 1995). C'est le cas d'une autre formulation de la même situation :

Théo a 150 images. Théo a 30 images de moins que Léa. Combien d''images possède Léa ?

L'unité signifiante *moins* de l'énoncé correspond à l'écriture du signe + dans une égalité résolvante qui reste la même : 150 + 30 = 180. La congruence concernant le sens de l'opération peut être cependant rétablie en écrivant une égalité résolvante à trou, elle n'est cependant pas congruente par rapport à l'ordre des données : ……. – 30 = 150.

Une autre formulation et un autre problème adoptant le point de vue de Léa s'appuient sur la même situation :

Léa a 180 images. Léa a 30 images de plus que Théo. Combien d'images possède Théo ?

L'unité signifiante *plus* de l'énoncé correspond à l'écriture du signe - dans une égalité résolvante : 180 – 30 = 150. La congruence concernant le sens de l'opération peut être cependant rétablie en écrivant une égalité résolvante à trou, elle n'est cependant pas congruente par rapport à l'ordre des données : ……. + 30 = 180.

En inversant les phrases des données, on obtient une autre formulation du même problème, qui n'est congruente ni du point de vue du sens (mot *plus*, signe -), ni du point de vue de l'ordre d'énonciation des données :

Léa a 30 images de plus que Théo. Léa a 180 images. Combien d'images possède Théo ?

Il convient dans ces cas, comme l'affirme Olivier Houdé (Houdé, 2017), « d'inhiber » cette tentation d'associer automatiquement le signe + à l'écrit *plus* de l'énoncé ou le signe – à l'écrit *moins* dans le texte. Or certaines pratiques enseignantes consistent à entourer par exemple le mot « plus » de l'énoncé et à mettre en évidence sa correspondance avec le signe « + » dans l'égalité résolvante, confortant, ce faisant, des représentations erronées. Une telle solution fondée sur un système cognitif de type « heuristique » (Houdé, 2017) qui se traduit par une « pensée automatique et intuitive » (Houdé, 2017) ne fonctionne qu'avec certains types de problèmes dont on dit qu'ils sont « congruents ». Mais il y a autant de formulations possibles, pour une situation donnée, utilisant le mot « plus » et dans lequel l'égalité résolvante mobilise le signe « - » et l'opération de soustraction, que de formulations utilisant le mot « plus » et dans lequel l'égalité résolvante mobilise le signe « + » et l'opération d'addition. Il est donc absolument nécessaire, pédagogiquement, de ne jamais procéder à ces associations qui renforcent des tendances naturelles et des automatismes non pertinents qu'il est difficile d'inhiber par la suite. Au contraire, il est conseillé, très tôt, d'attirer l'attention des élèves sur le fait qu'on ne peut pas déduire l'utilisation du signe + automatiquement dès lors qu'apparait le mot « plus » dans un énoncé et donc de mettre en place un « système algorithmique » (Houdé, 2017) qui se traduit par une pensée « réfléchie logico-mathématique », qui conduit toujours au résultat, mais peut-être un peu plus lentement.

Une même situation visant la comparaison de deux états peut donc générer une multiplicité d'énoncés de problème plus ou moins congruents[180]. Un objectif fixé de la recherche que nous menons vise à développer ce système algorithmique chez les élèves, en les faisant réfléchir à la situation, par la mise en œuvre d'un écrit intermédiaire (Camenisch et Petit, 2018). Cet écrit intermédiaire nécessite alors un travail mental qui permet de passer d'une formulation non congruente de l'énoncé à une formulation plus congruente, dont la résolution ne pose guère de difficultés aux élèves, notamment à ceux du cycle 2.

II - REFORMULATION ET COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES

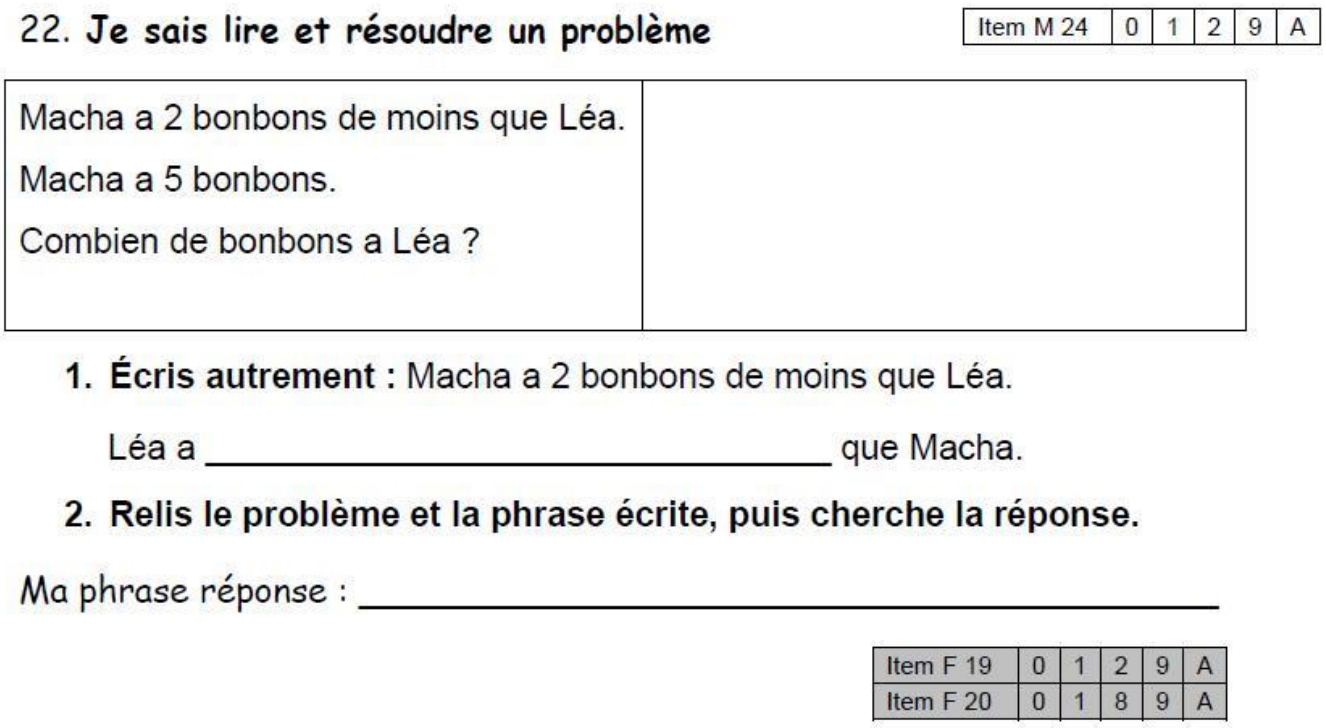
Les difficultés rencontrées par les élèves dans la résolution de problèmes de comparaison non congruents sont apparues lors d'évaluations de fin d'année réalisées dans des classes de CP. Ces évaluations de type sommatif avaient pour objectif de mesurer la réussite des élèves en numération et en résolution de problème suivant une même méthode de mathématiques[181], tout en observant les compétences de français mises en œuvre dans ce contexte mathématique.

[180] Dire qu'un énoncé de problème est congruent est un abus de langage si l'on se réfère à la définition du terme proposée par R. Duval. Cet abus de langage est commode et signifie que l'égalité résolvante experte (souvent attendue) s'écrit de manière congruente avec les données figurant dans l'énoncé (ordre et valeurs sémantiques). Il convient de remarquer que tout énoncé de problème de comparaison peut être congruent à condition de s'autoriser à écrire une égalité à trou, égalité résolvante algébrisée (le trou ayant la valeur d'une variable *x*).

[181] Pour information, il s'agit de la méthode *Construire les maths avec les NuméRas* sous la direction de Serge Petit (Nathan, 2017).

1 Présentation d'un cadre expérimental

Les évaluations ont été réalisées en juin 2017 dans une vingtaine de classes en Alsace ou en PACA, comprenant plusieurs classes de REP+, soit environ trois cents élèves au total. Ces évaluations avaient la particularité de comporter des items de mathématiques et de français portant sur les mêmes supports. Les sept énoncés de problèmes proposés comportaient les deux énoncés de problèmes additifs de comparaison non congruents suivants :



22. **Je sais lire et résoudre un problème**

Item M 24	0	1	2	9	A

Macha a 2 bonbons de moins que Léa. Macha a 5 bonbons. Combien de bonbons a Léa ?	

1. **Écris autrement :** Macha a 2 bonbons de moins que Léa.

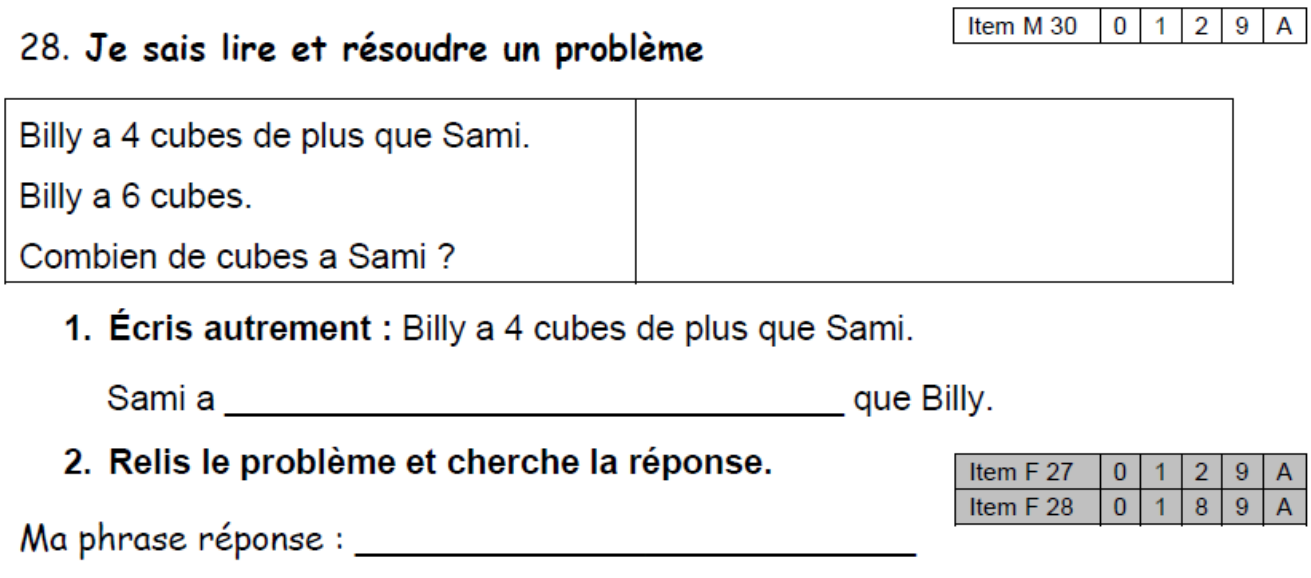
   Léa a _____ que Macha.

2. **Relis le problème et la phrase écrite, puis cherche la réponse.**

Ma phrase réponse : _____

Item F 19	0	1	2	9	A
Item F 20	0	1	8	9	A

Figure 16. Activité 22



28. **Je sais lire et résoudre un problème**

Item M 30	0	1	2	9	A

Billy a 4 cubes de plus que Sami. Billy a 6 cubes. Combien de cubes a Sami ?	

1. **Écris autrement :** Billy a 4 cubes de plus que Sami.

   Sami a _____ que Billy.

2. **Relis le problème et cherche la réponse.**

Item F 27	0	1	2	9	A
Item F 28	0	1	8	9	A

Ma phrase réponse : _____

Figure 3. Activité 28

Les deux énoncés se présentent sous forme textuelle avec une formulation analogue, l'activité 22 utilisant le mot *moins* avec l'égalité résolvante experte 2 + 5 = …, l'activité 28 utilisant le mot *plus* avec l'égalité résolvante experte 6 – 4 = ...

Deux questions suivent chaque énoncé de problème, la première visant l'écriture d'une phrase intermédiaire qui reformule la phrase comparative (traitement de l'information dans le registre de la langue naturelle) pour rétablir une convergence sémantique entre le signe utilisé pour l'opération et l'adverbe comparatif dans l'énoncé, la seconde demandant plus classiquement l'écriture d'une phrase réponse.

Différents items sont alors évalués : l'item M 24 ou M 30 évalue la réussite mathématique par un calcul ou un résultat juste, l'item F 19 ou F 27 évalue la correction syntaxique de la phrase intermédiaire, c'est-à-dire la capacité de l'élève à reformuler une phrase en *plus* en une phrase en *moins*, lorsqu'on change de sujet. L'item F 20 ou F 28 évalue la correction syntaxique de la phrase réponse.

2 Résultats

La réussite des élèves est relativement faible. En effet, pour l'activité 22 où 273 élèves ont été évalués, le taux de réussite est de 49 % (139 élèves contre 134). Statistiquement, on ne peut réfuter l'hypothèse que les résultats des élèves sont le fruit du hasard, comme si les élèves ne faisant qu'additionner ou soustraire les deux nombres en jeu de manière aléatoire.

La réussite est plus faible pour l'activité 28, portant sur 263 élèves, avec un taux de réussite de 40 %. Il est ici possible d'affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 2,5 % que les résultats des élèves en mathématiques ne sont pas le fruit du hasard, avec environ 40 % de réussite et 60 % d'échec (158 contre 105), mais s'orientent dans le sens de l'échec. On peut s'interroger sur les causes de la différence des résultats entre ces deux problèmes, qui traduisent la même situation de comparaison. Celle-ci est peut-être liée à la transformation en « moins » d'un « plus », ou, plus vraisemblablement, en classe de CP, à la nature de l'opération attendue qui est une soustraction. Le choix de la taille des nombres en jeu introduit peut-être un biais. Ce choix a été fait pour permettre à tous les élèves du CP au CM2 de résoudre exactement les mêmes problèmes, mais les élèves des plus grandes classes réagissent peut-être rapidement mentalement au vu de ces petits nombres alors qu'avec de plus grands nombres, ils poseraient et effectueraient une opération, prenant ainsi peut-être plus le temps de la réflexion.

Les résultats deviennent plus intéressants si l'on croise la réussite en mathématiques avec la réussite en français. En effet, on peut constater que lorsque les élèves échouent dans la reformulation en français (donc dans l'item 19), pour l'activité 22, ils ont un taux de réussite de 37 %, contre un taux d'échec de 63 %, alors que lorsque les élèves réussissent à reformuler la phrase intermédiaire, leur taux de réussite est bien supérieur en mathématiques, avec un taux de réussite de 73 % contre un taux d'échec à 27 %.

Activité 22	Reformulation échouée	Reformulation réussie
Échec en maths	63 %	27 %
Réussite en maths	37 %	73 %

Figure 4. Tableau des résultats pour l'activité 22

Ce tableau montre que les élèves réussissant à reformuler une donnée réussissent à 73 % le problème de mathématiques, au contraire de ceux qui ne parviennent pas à reformuler et qui ne réussissent qu'à 37 %.

Ces résultats sont corroborés dans l'activité 28, où les élèves échouant dans la reformulation en français (donc l'item 27) ont un taux d'échec en mathématiques de 78 %, contre 22 % de réussite, et les élèves réussissant dans la reformulation en français réussissent les mathématiques à 67 % contre 33 % d'échec.

Activité 28	Reformulation échouée	Reformulation réussie
Échec en maths	78 %	33 %
Réussite en maths	22 %	67 %

Figure 5. Tableau des résultats pour l'activité 28

Là encore, plus des deux tiers des élèves qui réussissent à reformuler la phrase résolvent correctement le problème.

Si ces résultats ne suffisent pas pour inférer l'existence d'une relation de cause à effet, entre la capacité à reformuler et la réussite en mathématiques, c'est-à-dire à prouver l'implication {réussite en maths => reformulation réussie}, ils permettent cependant de formuler l'hypothèse que la réflexion suscitée par la reformulation constitue une aide pour la résolution du problème. Ils font émerger un nouveau questionnement. Le caractère congruent ou non congruent des énoncés du point de vue du sens ou de l'ordre des données a-t-il un effet sur les résultats en mathématiques ? Si oui, quel est cet effet en fonction du niveau des classes ? Enfin peut-on confirmer la corrélation entre la compréhension de l'énoncé par la production d'un écrit intermédiaire et les résultats en mathématiques ? Ce questionnement nécessite alors la mise en œuvre d'une expérimentation spécifique.

III - RÉUSSITES, ÉCHECS ET CONGRUENCE

Le nouveau protocole expérimental est décliné en deux étapes. La première étape, réalisée en avril 2018, consiste en un test exploratoire destiné à vérifier une première hypothèse de travail, à savoir que la congruence ou non congruence des énoncés du point de vue du sens ou de l'ordre des données a une influence notable sur les résultats en mathématiques, en particulier au cycle 2. Mais il s'agit aussi de voir si les échecs peuvent perdurer, et dans quelle mesure, au cycle 3.

La seconde étape, qui sera intégralement menée sur l'année scolaire 2018-2019, consiste à proposer un travail explicite sur la représentation des situations des énoncés de problème de comparaison et sur la reformulation des données. Ce travail sera encadré par un test initial et un test final portant sur des énoncés de problèmes additifs de comparaison et de transformation, congruents et non congruents. Il ne sera plus proposé d'écrit intermédiaire. Afin de tenir compte de la distanciation qui pourrait être induite par le choix de plus grands nombres, des nombres dits « à deux chiffres » sont introduits dans le nouveau protocole.

Nous présentons ci-dessous le cadre expérimental de la première étape, avec une analyse détaillée des énoncés proposés et des résultats.

1 Cadre expérimental de la première étape

Les tests exploratoires ont été proposés en avril 2018 à soixante-six classes du CP au CM2, situées en Alsace, en PACA et d'autres régions de France. Elles ont concerné 968 élèves, également répartis par niveau, soit environ 200 élèves par niveau. Les enseignants disposaient de consignes strictes de passation qui étaient identiques pour tous les niveaux, sauf pour les classes de CP, où tous les énoncés étaient lus et relus oralement, avant leur résolution. Les élèves devaient résoudre quatre problèmes (voir annexe 2), deux problèmes congruents et deux problèmes non congruents, sur deux jours différents, sans qu'ils puissent disposer des problèmes déjà résolus. Aucune correction des problèmes n'avait lieu avant la résolution de l'ensemble des problèmes.

Après une analyse sommaire des énoncés proposés, des résultats très généraux seront donnés dans un premier temps énoncé par énoncé, avant que les résultats ne soient comparés dans un tableau récapitulatif niveau par niveau et en fonction de la congruence.

2 Analyse des énoncés de problèmes et réussite globale

Une analyse des énoncés permet de mesurer et de comparer la congruence entre les énoncés et le processus de résolution du point de vue du sens (*plus* ou *moins*) et de l'ordre des données ou de leur traitement.

2.1Analyse de l'énoncé de problème 1

Énoncé 1 : Luc a 2 pains de plus que Badi. Luc a 7 pains. Combien de pains a Badi ?

La manière experte de résoudre le problème 1 est : Badi a 7 **–** 2 pains. D'où la réponse : *Badi a 5 pains*.

Cet énoncé n'est congruent, ni du point de vue du sens des unités signifiantes, ni du point de vue de l'ordre des données. Les élèves sont tentés de formuler leur réponse en calquant mathématiquement l'écriture d'une égalité résolvante en suivant les données de l'énoncé dans l'ordre dans lequel elles apparaissent et en tenant compte du sens premier exprimé par certaines unités signifiantes comme le mot *plus*. Cela peut conduire certains élèves à écrire une égalité résolvante comme 2 + 7 = __ et à la réponse erronée 9. L'absence de congruence dans l'ordre des données peut aussi mener les élèves à une écriture soustractive erronée comme 2 – 7, avec un résultat juste (5 car le signe – utilisé de cette manière ne semble pas troubler certains élèves). Comme dit précédemment, le choix des mêmes petits nombres a été fait pour tous les niveaux d'enseignement, ce choix est susceptible d'entraîner un biais dans les plus grandes classes, par des réponses spontanées obtenues par un calcul non posé.

Les taux de réussite s'étalent en progressant régulièrement de 27 % en CP à 83 % en CM2. Un tel énoncé reste donc difficile pour des élèves de CM2. On pourrait s'attendre à une réussite totale ou quasi-totale à ce niveau et ce d'autant plus que les problèmes additifs relèvent du programme du cycle 2.

2.2Analyse de l'énoncé de problème 2

Énoncé 2 : Rémi a trois 3 pommes de plus que Lina. Lina a 5 pommes. Combien de pommes a Rémi ?

Cet énoncé est tout à fait congruent. L'égalité résolvante experte est 3 + 5 = __. Les unités signifiantes (3, plus et 5) apparaissent dans le même ordre dans l'égalité résolvante et dans le texte et le sens du mot « plus » se traduit par le signe « + ». Cet énoncé pose bien moins de difficultés aux élèves.

Les taux de réussite s'étalent en progressant régulièrement de 53 % en CP à 94 % en CM2. Un tel énoncé congruent, donc plus facile, n'est cependant pas réussi par l'intégralité des élèves, même en CM2.

2.3 Analyse de l'énoncé de problème 3

Énoncé 3 : Badi a 2 pains de moins que Luc. Luc a 7 pains. Combien de pains a Badi ?

Une première remarque s'impose : cet énoncé renvoie à la même situation que l'énoncé 1. Il n'est pas certain que les élèves s'en rendent compte. L'égalité résolvante experte est 7 – 2 = ___.

L'analyse de congruence entre cette égalité experte et la représentation de la situation donnée par l'énoncé est la suivante. Les unités signifiantes n'apparaissent pas dans le même ordre dans l'énoncé et dans l'égalité résolvante, puisque le 7 qui apparait en troisième position dans l'énoncé figure en première position dans l'égalité résolvante et inversement pour le 2. Cependant, le mot « moins », situé entre les deux unités signifiantes numériques se traduit par le signe -, en parfaite correspondance sémantique. Ce problème n'est donc pas tout à fait congruent, mais ne comporte pas de « piège » au niveau de l'opération à effectuer.

On a pu observer dans les productions que certains élèves mettent en œuvre une démarche fondée sur la congruence en écrivant l'égalité résolvante 2 – 7 = __ et concluent en donnant la bonne réponse : 5.

Les taux de réussite s'étalent en progressant régulièrement de 44 % en CP à 93 % en CM2. Un tel énoncé plus congruent que le premier, mais moins que le deuxième, est moins bien réussi en classe de CP, mais le taux de réussite est équivalent en CM2.

2.4 Analyse de l'énoncé de problème 4

Énoncé 4 : Lina a 3 pommes de moins que Rémi. Lina a 5 pommes. Combien de pommes a Rémi ?

Cet énoncé, dont la situation est identique à l'énoncé 2, est non congruent puisque son égalité résolvante experte est 5 + 3 = __. La rédaction de cette égalité résolvante prend pour point de départ une des données sous forme d'un état (les cinq pommes de Lina). Cette égalité peut être guidée par la reformulation de la comparaison en *Rémi a 3 pommes de plus que Lina.* L'égalité résolvante 3 + 5 = 8 est davantage guidée par l'ordre d'apparition des données dans l'énoncé.

Les taux de réussite s'étalent en progressant régulièrement de 39 % en CP à 77 % en CM2. Un tel problème non congruent n'est réussi que par moins de la moitié des élèves de CP et fait encore chuter plus de 20 % d'élèves de CM2.

3 Analyse des résultats

Le tableau ci-dessous met en regard les énoncés et la réussite des élèves en fonction des situations, des données dans leur ordre d'apparition et des solutions expertes attendues. Il présente aussi les énoncés par niveau de congruence décroissant. Ainsi l'énoncé 2 est congruent du point de vue de l'ordre et du sens (code 1), alors que l'énoncé 1 n'est congruent ni du point de vue de l'ordre ni du point de vue du sens (code 0). Les autres énoncés montrent des états intermédiaires de congruence, soit du point de vue du sens (énoncé 3), soit du point de l'ordre (énoncé 4).

	Situation	**Données**	**Égalité résolvante experte**	**Congruence**	**Réussite (en %)**				
					CP	CE1	CE2	CM1	CM2
Enoncé 2	Lina : 5 pommes Rémi : 8 pommes	**3 ; plus ; 5**	**3 + 5 = __** **5 + 3 = __**	ordre : 1 sens : 1	53	64	76	91	94
Enoncé 3	Luc : 7 pains Badi : 5 pains	**2 ; moins ; 7**	**7 – 2 = __**	ordre : 0 sens : 1	44	62	81	88	93
Enoncé 4	Lina : 5 pommes Rémi : 8 pommes	**3 ; moins ; 5**	**3 + 5 = __** **5 + 3 = __**	ordre : 1 sens : 0	39	38	53	68	77
Enoncé 1	Luc : 7 pains Badi : 5 pains	**2 ; plus ; 7**	**7 – 2 = __**	ordre : 0 sens : 0	27	35	70	77	83

Figure 6. Tableau comparatif des résultats des élèves en fonction de la congruence (en pourcentages)

Si l'on regarde la réussite des élèves du point de vue de la congruence des énoncés, on constate que c'est la correspondance sémantique entre l'opération experte à effectuer et le sens des unités signifiantes *de plus que* et *de moins que* qui conditionne la réussite des élèves, les énoncés 2 et 3 étant significativement mieux réussis à tous les niveaux que les autres. Les énoncés 1 et 4 sont de ce fait plus fortement non-congruents. Il existe une différence de réussite concernant l'ordre des données, mais on constate que si les énoncés congruents du point de vue de l'ordre sont mieux réussis en CP et CE1, ils sont curieusement moins réussis du CE2 et CM1, voire au CM2.

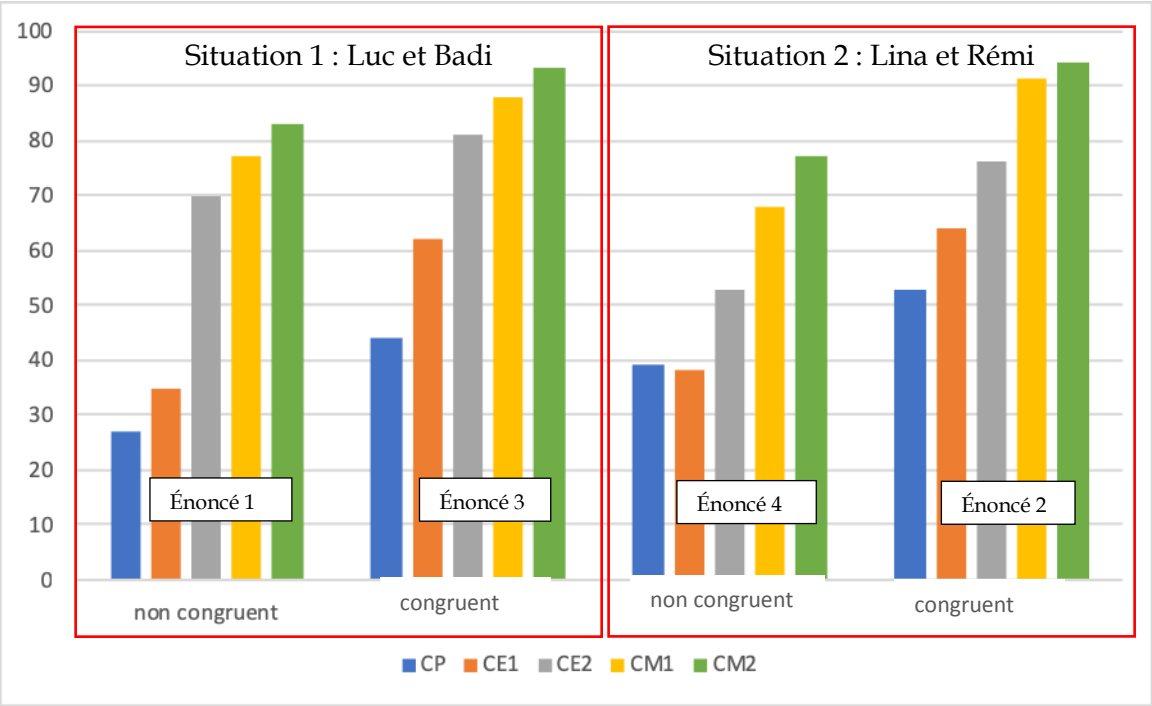
On peut aussi faire le constat assez naturel du progrès des élèves en fonction des niveaux, les résultats étant, à une exception près que nous tenterons d'analyser plus loin, progressivement meilleurs au fil des niveaux. Cependant, les taux d'échecs en classe de cycle 3 restent importants pour des problèmes dont la résolution ne devrait plus guère poser de problème au-delà du cycle 2 étant donné d'une part que les élèves du cycle 3 sont censés pouvoir lire et comprendre les textes du type des énoncés concernés et, d'autre part, sont censés maitriser les contenus mathématiques sous-jacents (addition, soustraction) et donc être capables d'effectuer un choix pertinent du calcul à réaliser.

Cette analyse, en termes de congruence, des problèmes explique la différence de réussite entre les énoncés 1 et 4 (non congruents) et les énoncés 2 et 3 (congruents), alors que les énoncés 1 et 3, 2 et 4 renvoient respectivement à la même situation.

	Énoncé 1 non congruent	Énoncé 3 congruent	Énoncé 4 non congruent	Énoncé 2 congruent	
	Même situation Luc : 7 pains ; Badi : 5 pains		Même situation Lina : 5 pommes ; Rémi : 8 pommes		
	R en %	R en %	R en %	R en %	Nombre élèves
CP	27	44	39	53	196
CE1	35	62	38	64	191
CE2	70	81	53	76	172
CM1	77	88	68	91	208
CM2	83	93	77	94	201
Total					968

Figure 7. Tableau comparatif de la réussite en fonction de la situation (en pourcentage)

Les résultats peuvent aussi se présenter sous forme de graphique :



4 Des conjectures autour d'une aberration

On peut constater qu'une aberration apparait à l'énoncé 4 entre les résultats des CP et des CE1. En effet, les CP ont globalement un résultat supérieur à celui des CE1. La différence peut s'expliquer par les méthodes utilisées en mathématiques. En effet, une partie de l'effectif en CP et en CE1 utilise une méthode de mathématiques[182] qui propose un travail explicite de reformulation d'énoncés de problèmes comparatifs non congruents.

Ainsi, un travail explicite porte sur les différents sens de l'adverbe « plus »[183]. Avant que les élèves n'aient à résoudre des problèmes de comparaison, l'enseignant peut leur faire réaliser différents exercices d'écriture ou de reformulation. Les exercices d'écriture à partir d'illustrations visent à écrire

[182] *Construire les maths avec les NuméRas*, sous la direction de S. Petit, Nathan, 2016.

[183] Il existe deux adverbes homographes s'écrivant PLUS. Un premier adverbe *plus*, est un adverbe de négation, le « s » final ne se prononce pas. On le retrouve dans des expressions comme « Il n'y a plus de pommes ». Un deuxième adverbe *plus*, fréquemment utilisé en mathématiques est polysémique dans cette discipline. Il peut d'une part renvoyer au signe +, symbole mathématique qui traduit une décomposition additive ou un ajout, d'autre part, être utilisé dans des locutions comparatives avec des prononciations diverses dans *le plus, le plus de, de plus que.*

des phrases pour comparer des collections en utilisant les mots *plus*, *moins* ou *autant*. L'enseignant est encouragé à pratiquer oralement des formulations symétriques de phrases comparatives à partir de situations quotidiennes, en transformant *plus* en *moins*, par croisement de sujet. Des exercices écrits complètent cette mise en œuvre préparatoire où les élèves doivent comparer des collections par la formulation de deux phrases symétriques[184]. Il n'est cependant pas possible de vérifier que tous les enseignants ayant fait passer ces tests à leurs élèves ont bien réalisé toutes les activités proposées avant la résolution de problèmes de comparaison.

Il convient aussi de noter que la méthode propose des activités spécifiques en langue à tout moment : activités lexicales, grammaticales, activités de compréhension, de reformulation, d'écriture, etc. et pas uniquement pour les problèmes de comparaison.

Nous avons donc distingué les classes de CP et de CE1, selon qu'elles soient susceptibles ou non d'avoir réalisé un travail sur la reformulation. Nous obtenons les résultats suivants :

	Item 1 NC	Item 3 C	Item 4 NC	Item 2 C	
	Même situation Luc : 7 pains ; Badi : 5 pains		Même situation Lina : 5 pommes ; Rémi : 8 pommes		
	R en %	R en %	R en %	R en %	Nombre d'élèves
CP Autres	12	29	29	51	52
CP avec reformulation	32	49	42	54	144
CE1 Autres	31	61	36	63	140
CE1 avec reformulation	45	67	42	67	51

Les différences les plus importantes se situent dans la réussite aux problèmes non congruents, en particulier pour l'énoncé 1, le moins congruent, où un pourcentage de réussite de 32 % pour les élèves pouvant pratiquer la reformulation, s'oppose à une réussite limitée à 12 % pour les autres élèves.

Au seuil de 2,5 %, on peut affirmer, concernant l'item 1 en CP (46/144 et 6/52)[185], que la réussite des élèves susceptibles de pratiquer des activités de reformulation est statistiquement différente de celle des élèves susceptibles de ne pas en pratiquer, au bénéfice des premiers.

On ne peut pas rejeter l'hypothèse que les élèves de CP susceptibles de pratiquer des activités de reformulation ont le même score que les élèves de CE1 ne pratiquant pas ces activités (46/144 et 43/140), scores respectifs de 32 % et de 31 %. On ne peut pas non plus rejeter l'hypothèse (60/144 et 50/140) qu'il en est de même pour l'item 4 qui semble mieux réussi par les CP que par les CE1 (respectivement 42 % et 36 % de réussite).

La pratique de la reformulation semble ainsi faire gagner une année d'apprentissage en résolution de ces types de problèmes non-congruents. La différence est cependant moins nette pour les problèmes congruents peut-être parce qu'ils ne posent pas de difficulté inhérente au langage.

Dans tous les cas, les CP susceptibles de pratiquer des activités de reformulation ont des scores supérieurs aux CP susceptibles de ne pas en pratiquer. Il en est de même pour les CE1.

La différence des résultats entre CP susceptibles de pratiquer des activités de reformulation et CE susceptibles de ne pas en pratiquer est moins marquée pour les deux items 2 et 3, items plus congruents.

[184] Voir en particulier le cahier d'élève *Je construis les maths avec les NuméRas*, Cahier 1, CP, Nathan, 2018, p.41-47.

[185] Nous notons ainsi les effectifs par réussite sur le nombre total d'élèves concernés.

Pour tous ces problèmes, on peut constater que le taux de réussite, surtout pour les problèmes les moins congruents, est nettement différent selon que la méthode invite explicitement à travailler la langue dans les apprentissages mathématiques ou non. On peut dès lors supposer que l'entrainement sur les reformulations a quelques effets positifs. C'est ce que cherchera à vérifier le protocole expérimental mis en place en 2018-2019.

5 Vers un nouveau protocole expérimental

Ce protocole expérimental visera à travailler de manière explicite la lecture de l'énoncé afin de dégager le sens de la situation (qui a le plus, qui a le moins), donc la compréhension de l'énoncé. Il proposera un travail de reformulation de phrases exprimant des comparaisons dans des situations théâtralisées puis reformulées par écrit. Il mettra aussi en œuvre une stratégie explicite de compréhension des énoncés, visant soit à « inhiber » (Houdé, 2017) un comportement automatisé des élèves, soit à favoriser une posture réflexive en résolution de problème.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Camenisch, A. et Petit, S. (2018). Résolution de problèmes et apprentissages de la langue à l'école élémentaire, *Au fil des maths* (528), 20-24.

Camenisch, A. et Petit, S. (2017). Writing in Mathematics : The Role of Intermediate Texts, *Research on Writing: Multiple Perspectives*, Fort Collins, Colorado, The WAC Clearinghouse, 201-222.

Camenisch, A. et Petit, S. (2016). Écrire en mathématiques : le rôle des écrits intermédiaires, *Recherches en écritures : regards pluriels*, Université de Lorraine, Recherches Textuelles (13), 235-259.

Camenisch, A. et Petit, S. (2008). Apprendre à écrire par les mathématiques. In D. Alamargot, J. Bouchand, E. Lambert, V. Millogo, et C. Beaudet (éds.), *Actes du colloque international De la France au Québec : l'Ecriture dans tous ses états*. Poitiers, France.

Camenisch, A. et Petit, S. (2007). Projets d'écriture en mathématiques pour mieux comprendre les énoncés de problème. *Actes du 33e Colloque européen de la COPIRELEM.* Dourdan, France : CRDP de Versailles, CDDP de l'Essonne Evry. Cédérom.

Camenisch, A. et Petit, S. (2005). Lire et écrire des énoncés de problème. *Bulletin de l'APMEP* (456), 7-20.

Chabanne, J.-C. et Bucheton, D. (2000). Les écrits intermédiaires. *La lettre de la DFLM* (26), 23-27.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée humaine*, Peter Lang.

Houdé, O. (2017). *Apprendre à résister*, Le pommier.

Goody, J. (2006). La littératie, un chantier toujours ouvert. *Pratiques* (131/132), 69-75.

Grossmann, F. (1999). Littératie, compréhension et interprétation des textes. *Repères (*19), 139-166.

Olson, D. (2006). Littératie, scolarisation et cognition. Quelques implications de l'anthropologie de Jack Goody. *Pratiques* (131/132), 83-94.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives. *Grand N* (38), 21-40.

V - ANNEXE 1 : EXTRAIT DES EVALUATIONS DE FIN CP, 2017.

Conception : S. Petit, A. Camenisch

22. **Je sais lire et résoudre un problème**

Macha a 2 bonbons de moins que Léa. Macha a 5 bonbons. Combien de bonbons a Léa ?	

1. **Écris autrement :** Macha a 2 bonbons de moins que Léa.

   Léa a _____ que Macha.

2. **Relis le problème et la phrase écrite, puis cherche la réponse.**

II - MA PHRASE REPONSE :

_____

Item F 19	0	1	2	9	A
Item F 20	0	1	8	9	A

28. Je sais lire et résoudre un problème

Item M 30	0	1	2	9	A

Billy a 4 cubes de plus que Sami. Billy a 6 cubes. Combien de cubes a Sami ?	

1. **Écris autrement :** Billy a 4 cubes de plus que Sami.

   Sami a _____ que Billy.

2. **Relis le problème et cherche la réponse.**

III - MA PHRASE REPONSE :

_____

Item F 27	0	1	2	9	A
Item F 28	0	1	8	9	A

VI - ANNEXE 2 : PROBLÈMES PROPOSÉS DANS LES TESTS EN RÉSOLUTION DE PROBLEMES ADDITIFS DE COMPARAISON, 2018

Conception : S. Petit

JOUR 1

1 Luc a 2 pains de plus que Badi. Luc a 7 pains.

Combien de pains a Badi ?

2 Rémi a 3 pommes de plus que Lina. Lina a 5 pommes.

Combien de pommes a Rémi ?

JOUR 2

3 Badi a 2 pains de moins que Luc. Luc a 7 pains.

Combien de pains a Badi ?

4 Lina a 3 pommes de moins que Rémi. Lina a 5 pommes.

Combien de pommes a Rémi ?

COMMUNICATION C24

LA MANIPULATION D'OBJETS MATHÉMATIQUES DANS L'ENVIRONNEMENT SCRATCH

Rosamaria CRISCI
Université Grenoble Alpes
Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Equipe MeTAH
rosamaria.crisci@univ_grenoble_alpes.fr

Résumé

Les nouveaux programmes de l'école primaire nous amènent à nous interroger sur la place de la manipulation dans un logiciel de programmation. Nous avons conçu des séquences didactiques avec le logiciel Scratch, centrées sur différents thèmes, à partir de séquences existantes dans l'environnement tangible et éprouvées. Nous présentons, dans cet article, une analyse qualitative de la manipulation présente dans une de ces séquences, en comparant les deux environnements. Nous mettrons en avant les apports et les limites de Scratch en termes de compétences travaillées.

Le cadre de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire favorise depuis toujours la conception et la mise en œuvre d'une grande variété d'approches, visant à répondre aux attentes définies dans les programmes scolaires. À l'heure actuelle, en particulier, les enseignants et les chercheurs se questionnent beaucoup sur le rôle de la manipulation d'objets tangibles pour l'apprentissage de notions mathématiques au cycle 3, notamment en lien avec l'introduction des nouvelles technologies dans les institutions scolaires. De plus en plus, en effet, le travail sur ordinateur/tablette/smartphone va de pair avec les activités classiques de la classe, parfois en s'y substituant.

Ainsi, les nouveaux programmes de l'école primaire française, présentés dans le Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015 entrés en vigueur dans l'année scolaire 2016-2017, requièrent explicitement qu'*en complément de l'usage du papier, du crayon et de la manipulation d'objets concrets, les outils numériques soient progressivement introduits*. Par ailleurs, ces programmes proposent d'*intégrer dans les activités d'enseignement l'usage de logiciels d'initiation à la programmation*.

Notre travail s'inscrit dans le cadre du projet EXPIRE[186], qui a comme objectif de proposer et d'évaluer des séquences d'enseignement portant sur des notions mathématiques à travers une approche algorithmique qui puisse s'intégrer dans les pratiques usuelles. Ces séquences sont actuellement objet d'expérimentation dans des écoles de Grenoble.

Dans cet article, nous allons présenter un descriptif de la manipulation d'objets mathématiques dans deux types d'environnements : tangible et virtuel (via programmation).

Dans la première section, nous présenterons le contexte de recherche qui a motivé l'étude de la manipulation d'objets mathématiques. Ensuite, nous définirons nos questions de recherche et les outils théoriques pertinents pour pouvoir expliquer les phénomènes de manipulation d'objets mathématiques dans un logiciel de programmation visuelle comme Scratch. Enfin, nous proposerons une analyse comparée de ces deux types de manipulation en termes d'apports et limites.

[186] EXPIRE (EXpérimenter la Pensée Informatique pour la Réussite des Élèves ; cf. http://expire.univ-grenoble-alpes.fr/) est une opération soutenue par l'État dans le cadre du volet e-FRAN (Espace de formation, de recherche et d'animation numérique) du Programme d'Investissement d'Avenir, opéré par la Caisse des Dépôts. Il implique l'Université de Grenoble Alpes, la ville de Grenoble, le CCSTI La Casemate, l'Espé et le Rectorat de l'Académie de Grenoble.

I - CONTEXTE DE RECHERCHE

L'algorithmique est un milieu pertinent pour la mobilisation et l'acquisition de connaissances mathématiques chez les élèves d'école primaire. Afin de vérifier cette hypothèse, en évaluant les caractéristiques et les apports de l'algorithmique en tant que vecteur d'apprentissage de notions mathématiques, nous avons réalisé des séquences didactiques portant sur des notions mathématiques, se déroulant avec le logiciel de programmation visuelle Scratch.

D'abord, nous avons choisi cinq notions et compétences mathématiques dont l'enjeu didactique est considérable au cycle 3 (élèves de 9 à 11 ans) : la division euclidienne, la décomposition additive, la résolution de problème, les fractions et l'aire. Pour chacune, notre approche a consisté à définir des objectifs d'apprentissage précis et à considérer une séquence existante dans l'environnement tangible et éprouvée dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Nous avons, ainsi, transposé chaque séquence de l'environnement tangible à l'environnement Scratch.

Dans certaines des séquences de départ, la manipulation d'objets concrets occupe une place centrale pour le développement des compétences visées. C'est dans ce contexte que nous sommes amenés à conduire des réflexions sur la place de la manipulation d'objets mathématiques dans un logiciel de programmation comme Scratch.

Afin d'être en mesure de comprendre les dynamiques qui se passent quand on bascule d'un environnement à l'autre en termes de manipulation d'objets mathématiques, il est essentiel de comprendre ce qu'est la manipulation dans ces deux types d'environnements, et notamment celle dans un logiciel de programmation.

En effet, dans l'usage commun du terme, le mot *manipulation* est souvent associé à des objets tangibles, c'est-à-dire des objets qui sont perceptibles visuellement et à travers les mains. Dans cette perspective, on ne pourrait parler ni de « manipulation dans un logiciel de programmation » (les activités sur ordinateur se font sur des objets virtuels), ni de « manipulation d'objets mathématiques » (objets abstraits).

1 Comment interpréter le mot « manipulation » ?

Les objets concrets en mathématiques sont largement utilisés dans l'enseignement à l'école primaire. En général, les motivations sont liées au fait qu'on veut donner aux objets mathématiques, vivant dans l'abstrait, une sorte de matérialité pour que les élèves arrivent à mieux les conceptualiser.

Des travaux de recherches ont montré que la manipulation de matériel tangible en mathématiques à l'école primaire :

- est plus facilement accessible aux élèves qui ne sont pas prêts pour les représentations graphiques ou symboliques de concepts abstraits (Dias, 2012) ;
- permet de développer la créativité (Dias, 2018) ;
- permet de supporter des raisonnements en faisant développer des compétences liées à la résolution de problèmes (Corriveau et Jeannotte, 2015);

Nous utilisons l'expression « manipulation d'objets mathématiques » au sens large : nous faisons référence aux actions sur un ou plusieurs objets (tangibles, symboliques ou virtuels) qui évoquent des concepts mathématiques. Dans cette perspective, on peut supposer que le logiciel Scratch pourrait faire vivre des problèmes mathématiques dont la résolution requiert un certain type de manipulation. Cette manipulation va être très différente de la manipulation d'objets tangibles, bien que nous supposions que les caractéristiques d'accessibilité en termes de représentation et de support du raisonnement restent présentes dans l'environnement Scratch.

2 La manipulation dans Scratch

L'interface initiale du logiciel Scratch présente un espace de programmation, directement accessible à l'utilisateur, dans lequel on peut mettre en place des actions sur les blocs d'instruction pour la

construction de l'algorithme, et un espace d'exécution qui affiche, après avoir exécuté le programme, son résultat. Ce dernier est représenté par des déplacements ou des actions d'un personnage.

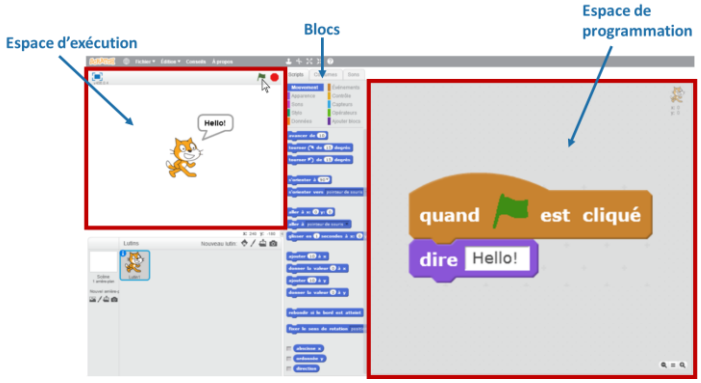


Figure 1. L'interface du logiciel

Pour accéder aux objets présents dans l'espace d'exécution, on est obligé, pour respecter la logique de l'environnement, de passer par l'espace de programmation.

L'observation détaillée des gestes faits par l'utilisateur d'un logiciel de ce type permet de voir immédiatement qu'ils sont très différents de ceux qui apparaissent lors de la manipulation d'objets tangibles. En effet, dans les situations de manipulation d'objets tangibles, le sujet exerce une action directe sur l'objet, les choix des actions et leur exécution sont souvent deux aspects indiscernables.

Dans Scratch, l'objet qu'on souhaite manipuler est représenté dans l'espace d'exécution, accessible de façon indirecte à travers la manipulation des blocs dans l'espace de programmation. On peut alors parler, de deux niveaux de manipulation qui séparent le sujet de l'objet. Le niveau de manipulation « directe » se fait sur les blocs dans l'espace de programmation, qui représentent des actions. Par conséquent, si on prévoit des tâches de construction d'un programme pour résoudre un problème dans l'espace d'exécution, on obligera les élèves à choisir une suite d'actions sans voir ses effets au fur et à mesure, à la différence de ce qui se passe dans l'environnement de manipulation tangible.

II - CADRE THÉORIQUE

Pour cela, nous allons décrire brièvement quelques outils théoriques, qui vont nous permettre de modéliser et analyser les séquences didactiques.

1 La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et le cadre T4TEL

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) est une des théories les plus importantes dans le contexte de recherche en didactique des mathématiques en France et à l'étranger. Développée par Yves Chevallard, elle implique un grand nombre d'éléments visant à décrire et analyser les dynamiques d'enseignement et d'apprentissage.

Dans le cadre de cet article, nous mobiliserons uniquement la notion de *praxéologie*.

1.1 Praxéologie

La TAD repose sur le postulat fondamental que toute activité humaine peut être décrite à travers une praxéologie (Chevallard, 1999). Le terme praxéologie vient des mots *praxis* (savoir-faire) et *logos* (savoir) ; une praxéologie, ou *organisation praxéologique ponctuelle*, est décrite à travers un quadruplet [T/τ/θ/Θ], où T représente un *type de tâches*, τ représente une *technique* qui résout le type de tâches T, θ est une *technologie*, c'est-à-dire un discours qui vise à justifier la technique τ et, finalement, Θ est une *théorie*, qui explique θ.

1.2 Formalisation et extension du modèle praxéologique : T4TEL

A partir de la TAD, Chaachoua (2018) a développé le cadre T4TEL, qui propose une formalisation de la notion de praxéologie. L'apport principal de ce cadre est l'introduction des variables. À chaque variable on associe des valeurs ; le système variables et valeurs permettent de caractériser les types de tâches

selon leur niveau de spécificité ou de généricité. Par exemple, la variable « nature des nombres » permet d'exprimer que le type de tâches « Calculer la somme de deux nombres entiers naturels » est plus spécifique que le type de tâches « Calculer la somme de deux nombres ». Grâce à l'introduction des variables dans le modèle praxéologique, on est en mesure de définir d'autres concepts, comme le générateur de types de tâches et les sous-types de tâches, qui formalisent des relations entre types de tâches.

Une technique peut être décrite à l'aide d'un ensemble de type de tâches, chacun, à son tour, avec ses techniques. Un concept que nous allons évoquer dans cet article est celui de type de tâches élémentaire : il s'agit d'un type de tâches pour lequel, relativement à une institution fixée, on suppose qu'il n'y a pas la nécessité d'expliciter la ou les techniques.

2 Questions de recherche

Nous pouvons maintenant formuler les diverses questions qui se posent lorsqu'on étudie la comparaison entre la manipulation présente dans les séquences d'enseignement traditionnelles et celle des séquences EXPIRE.

1. Comment exploiter les caractéristiques de l'environnement Scratch pour y faire manipuler des objets mathématiques aux élèves ?
2. Quels sont les apports et les limites de la manipulation d'objets mathématiques dans l'environnement Scratch par rapport aux activités classiques ?

La première question sera ici exploitée à travers la description des choix didactiques faits lors de la conception des séquences, en regardant notamment la séquence portant sur l'écriture fractionnaire. Nous allons répondre à la deuxième question en analysant les différences parmi les deux dispositifs en termes de manipulation attendue.

III - MANIPULER DANS LE LOGICIEL SCRATCH

Nous proposons trois séquences didactiques sur Scratch ayant la propriété d'afficher dans l'espace d'exécution une simulation virtuelle de manipulation d'objets tangibles. Il s'agit des séquences concernant : le sens de la division euclidienne, l'aire et l'équivalence entre différentes écritures fractionnaires.

Pour chaque séquence, nous avons prévu un ou plusieurs fichiers Scratch, avec les caractéristiques suivantes :

1) Dans l'espace d'exécution, nous avons représenté une simulation virtuelle de l'activité tangible de départ ;
2) Dans l'espace de programmation, nous avons défini des blocs d'instruction représentant les actions qu'on souhaite rendre disponibles aux élèves pour la construction de leur programme.

Nous allons décrire quelques éléments de manipulation qui interviennent lors des techniques de résolution de problèmes dans les deux environnements considérés, pour ce qui concerne les deux premières séquences. Ensuite, nous présenterons une analyse plus détaillée des choix didactiques concernant la séquence sur l'équivalence parmi les écritures fractionnaires.

1 La séquence sur le sens de la division euclidienne

Comme déjà anticipé, chacune des trois séquences didactiques présentées dans ce texte a la propriété de simuler, d'une certaine façon, la manipulation d'objets tangibles qui existe dans des séquences didactiques déjà éprouvées et expérimentées dans les classes.

Un premier exemple est la séquence EXPIRE qui a pour objectif de travailler le sens et l'écriture de la division euclidienne. Pour cela, nous sommes partis d'une activité célèbre dans le domaine de l'enseignement primaire des mathématiques, *Le jeu des cibles*, proposée par le manuel ERMEL (2005). Les objets dont l'élève dispose sont une représentation d'une demi-droite graduée ayant origine en 0 et sur

laquelle il est marqué un nombre cible sur un support papier (ou sur un tableau), et un marqueur (qui peut être un stylo, un crayon, un feutre, …) pour représenter les sauts. Il existe plusieurs représentations de cette situation. De notre côté, par commodité et simplicité de langage, nous avons modélisé la même situation en termes de bande numérique avec une case de départ (fixée toujours sur 0), et une case cible. L'activité prévoit la résolution du type de tâches suivant :

$T_{t,1}$ = « *Faire rapprocher au maximum un objet de la case cible sans la dépasser et en utilisant un seul type de saut*»

Sur l'espace d'exécution de Scratch, nous avons reproduit une bande numérique sous forme de spirale. Le marqueur est remplacé par des traces vertes, laissées par le personnage (un cercle) à chaque saut et constituant une variable (dans certaines tâches, il n'y a pas de traces, afin d'empêcher chez les élèves les techniques basées sur le comptage des cases à l'écran).

Le type de tâches dans cet environnement est :

$T_{S,1}$ = « *Créer un programme dans Scratch qui permet au cercle-repère de se rapprocher au maximum à la case cible sans la dépasser et en utilisant un seul type de saut*[187] »

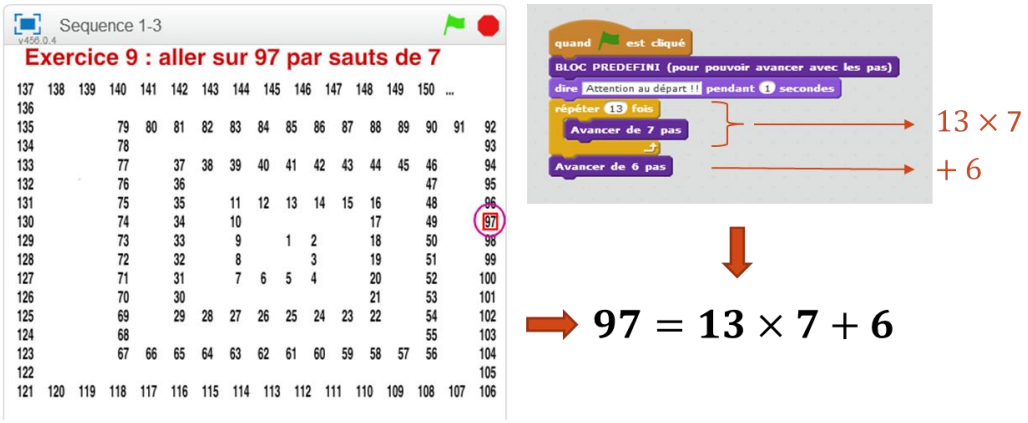


Figure 2. Séquence sur la division euclidienne

En poursuivant dans l'évolution des types de tâches, et notamment avec le choix des valeurs des variables fait dans la séquence, nous voulons amener l'élève à la conception de l'écriture de division euclidienne à travers certains types d'algorithmes (cf. Figure 2). On peut donc supposer que cette façon de manipuler, pas seulement les objets mathématiques, mais également les « gestes », permet, en passant par la verbalisation, de résoudre ce type de tâches en réfléchissant à divers niveaux d'abstraction.

Pour plus d'informations sur cette séquence, nous renvoyons le lecteur à l'article (Chaachoua et al., soumis et accepté).

2 La séquence sur le pavage de figures

De la même manière que pour la division, l'activité de départ pour la construction de la séquence sur le pavage des figures a été expérimentée et validée dans les classes d'école primaire française. Elle consiste à paver une figure (carré, rectangle ou autre) à l'aide d'un carré unité. Une étude didactique de cette activité se trouve dans (Douady & Perrin, 1984).

De façon générale, étant donné un certain type de matériel tangible, le type de tâches lié à cette activité est le suivant :

$T_{t,2}$ = « *Mesurer par pavage l'aire de la figure donnée à l'aide de l'unité de mesure donnée* »

Nous avons donc transposé cette activité sur l'espace d'exécution de Scratch en représentant dans les arrière-plans une figure dont il faut mesurer l'aire. Dans ce cas le rôle du personnage manipulable par le programme est le carré (ou le rectangle) unité, qui, grâce aux blocs d'instructions présents dans l'espace

[187] C'est-à-dire en sautant toujours le même nombre de cases.

de programmation, dépose une trace à chaque fois qu'il se déplace sur la figure. Le type de tâches concerné est maintenant :

$T_{S,2}$ = « *Créer un programme dans Scratch qui permet de mesurer par pavage l'aire de la figure donnée à l'aide du carré unité* »

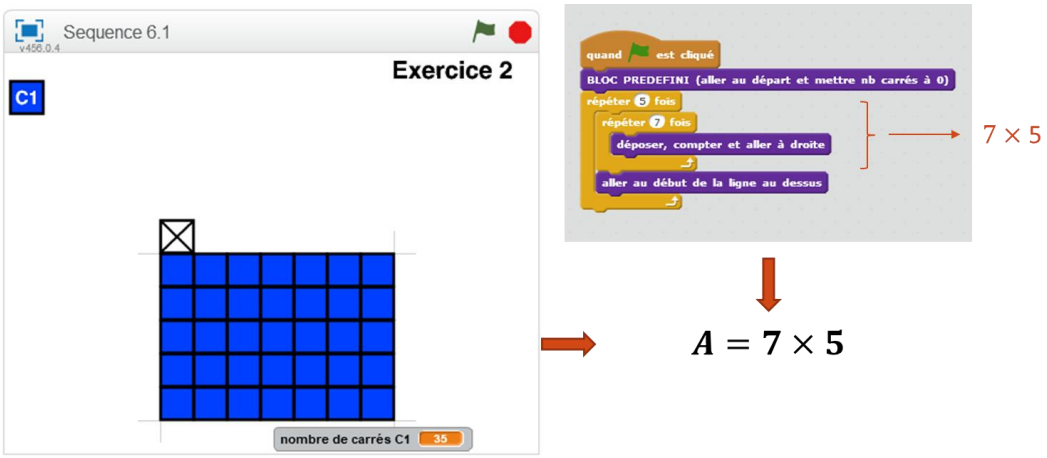


Figure 3. Séquence sur le pavage des figures

De la même façon que pour la division euclidienne, nous voulons mettre en avant le fait qu'il est possible de verbaliser certains types d'algorithmes pour faire en sorte que l'élève puisse faire abstraction des situations qui lui sont proposées. Dans cette activité, l'objectif est d'amener l'élève à donner du sens à la formule d'aire pour carrés et rectangles $A = L \times l$ (cf. Figure 3).

Pour plus de détails sur cette séquence, nous vous invitons à la lecture du mémoire de Triquet (2018).

3 La séquence sur les écritures fractionnaires

Par la suite, nous nous intéresserons aux gestes manipulatoires simulés dans la séquence EXPIRE qui a pour objectif de travailler le lien entre les différentes écritures fractionnaires d'un nombre.

Nous avons décidé, après une étude didactique des difficultés que les élèves du cycle 3 présentent autour de la notion de fraction, de faire travailler, dans notre séquence, les compétences suivantes :

a) Savoir mesurer des longueurs à l'aide de la bande unité u et de ses fractions ;
b) Savoir faire le lien entre plusieurs écritures fractionnaires d'un même nombre ;
c) Savoir faire le lien entre l'écriture fractionnaire et l'écriture décimale d'un nombre ;
d) Savoir repérer des points sur une demi-droite graduée à l'aide des fractions ;
e) Savoir exprimer un nombre fractionnaire/décimal à l'aide de plusieurs décompositions ;
f) Savoir écrire la décomposition canonique d'un nombre fractionnaire/décimal.

Pour travailler la séquence, il est donc nécessaire que les fractions aient déjà été abordées et travaillées. Elle est organisée en 3 séances : la première est centrée sur le développement des compétences (a) et (b), la deuxième sur (c) et (d) et la dernière sur les compétences (e) et (f).

Nous décrirons en détail uniquement la séance la plus intéressante en relation avec les objectifs que nous nous sommes posés dans cet article.

3.1 L'activité de manipulation d'objets tangibles de départ

De même que pour les séquences sur la division euclidienne et sur le pavage des figures, nous nous sommes inspirés d'une activité existante et éprouvée. Dans ce cas, l'activité de départ est connue sous le nom de *La bande unité*, proposée par le manuel ERMEL (2005). Cette activité est conçue en tant qu'outil pour l'introduction du concept de fraction dans sa signification de mesure. La première description de l'activité, donnée par le manuel, prévoit que *les enfants vont devoir trouver et exprimer la longueur de segments à l'aide de fractions d'une unité de longueur matérialisée par une bande de papier*. Il s'agit, en

particulier, d'un jeu d'échange de messages entre un émetteur et un récepteur concernant la mesure des longueurs de segments. Chaque élève, dans son rôle d'émetteur, doit formuler un message visant à faire reconnaitre à l'élève récepteur le segment de même mesure représenté sur une deuxième feuille. Pour mesurer le segment, il peut se servir d'une seule bande unité. Il a le droit de plier la bande autant de fois qu'il le souhaite, pour pouvoir obtenir des mesures précises.

Le message peut être écrit en langage naturel, et peut, selon les connaissances de l'élève, présenter des écritures numériques plus ou moins formelles. Un exemple de message peut être alors : « Sur un segment [AB] on peut reporter exactement deux fois la bande unité et la moitié de la bande unité ». Le manuel continue en expliquant : *les fractions et la notation fractionnaire seront introduites pour formuler les démarches et les résultats des mesurages.* Cela signifie qu'aucune connaissance concernant les fractions n'est attendue de l'élève au début de l'activité, mais que le concept de fraction sera introduit pour pallier l'insuffisance des nombres entiers pendant l'activité.

À partir de là, nous avons imaginé une activité similaire, mais qui porte sur les équivalences parmi différentes écritures fractionnaires. Nous considérons la séquence de la bande unité pertinente pour introduire la notion de fraction, mais le pliage de la bande en 2, puis en 4 et en 8 ne permet de travailler que des fractions ayant dénominateur égal à une puissance de 2 et des écritures sous la forme $l = k \cdot u, k = \alpha + \sum_{h=1}^{3} \beta_h \frac{1}{2^h}$, avec $\alpha \in N$ et $\beta_h \in \{0,1\}$.

Nous proposons alors une activité complémentaire à celle de la bande unité, mais dans laquelle les élèves doivent mesurer les longueurs des segments à l'aide de la bande unité et d'autres bandes représentant les fractions $\frac{1}{2}$ d'unité, $\frac{1}{3}$ d'unité, $\frac{1}{4}$ d'unité, $\frac{1}{5}$ d'unité et $\frac{1}{10}$ d'unité. Dans la suite, nous présentons les types de tâches et les techniques envisagées, en mettant en évidence les aspects liés à la manipulation.

Les types de tâches

Le jeu envisage la résolution, dans l'ordre, des trois types de tâches suivants :

$T_{Mesurer}$ = « *Mesurer le segment donné à l'aide de la bande unité u et des bandes 'fractions d'unité' autorisées* »

$T_{Formuler}$ = « *Formuler la mesure trouvée dans un message* »

$T_{Traduire}$ = « *Traduire le message à l'aide d'une écriture numérique* »

Dans le cadre de cet article, nous nous limitons à l'étude du type de tâches $T_{Mesurer}$, bien que les types de tâches $T_{Formuler}$ *et* $T_{Traduire}$ s'avèrent également des parties fondamentales du travail et constituent aussi des objets de nos recherches.

Les variables du type de tâches $T_{Mesurer}$.

En accord avec le cadre T4TEL, nous avons identifié des variables associées au type de tâches $T_{Mesurer}$. Les variables en question sont :

V_1 : Nombre de fractions autorisées (une, plusieurs)

V_2 : Nature des fractions travaillées (simples[188] ou non)

V_3 : Dénominateur des fractions travaillées (10^n, 2^n ou autre)

V_4 : Rapport longueur à mesurer/unité de mesure ($l = k \cdot u$, avec $k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ ou $k \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$)

Etant donné que la longueur du segment à mesurer est fixée, on jouera sur la valeur de la variable V_1 pour faire apparaitre plusieurs écritures fractionnaires pour représenter un même nombre. En effet, si on

[188] Il n'existe pas une définition univoque de fraction « simple ». Dans notre cas, nous choisissons de faire référence à un document du Ministère, disponible au lien http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fractions_et_decimaux/60/1/RA16_C3_MATH_frac_dec_doc_maitre_V2_681601.pdf qui récite : *lorsque le partage de l'unité se fait en un petit nombre de parts (2, 3, 4, ...), et que l'on prend un petit nombre de telles parts, on parle de fraction simple :* $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{10}$, *etc.*

autorise uniquement la fraction $\frac{1}{b}$, ça veut dire automatiquement que la longueur du segment ne peut que s'exprimer comme $l = a \cdot \frac{1}{b}u, a \in \mathbb{N}$. On peut observer que lorsqu'on passe de la valeur « une » à la valeur « plusieurs » la difficulté des techniques envisagées augmente considérablement.

Les variables V_2 et V_3 peuvent, dans le niveau scolaire considéré, prendre toutes les valeurs possibles. Par contre, il y a certainement des limitations sur la valeur qui peut prendre la variable V_4. D'abord, il ne sera pas possible de prendre en compte la valeur « $l = k \cdot u$, avec $k \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ». En autre, on pourrait descendre à un niveau de description plus bas des valeurs de cette variable. Si « $l = k \cdot u$, avec $k \in \mathbb{Q}$ », on peut facilement imaginer que les techniques seront différentes si $k = \alpha + \sum_{h=1}^{3} \beta_h \frac{1}{2^h}$, avec $\alpha \in N$ et $\beta_h \in \{0,1\}$, ou si $k = \alpha + \beta \frac{1}{10}$, avec $\alpha \in N$ et $0 < \beta < 10$.

Les techniques pour $T_{Mesurer}$.

Pour décrire une technique du type de tâches $T_{Mesurer}$, nous nous plaçons dans le cas V_1 = « une », pour la simplicité de la description (cela n'a pas d'impact sur les gestes de manipulation). Dans ce cas, toutes les techniques qui accomplissent $T_{Mesurer}$ sont équivalentes en termes de produit final (une mesure).

Chaque technique, en général, consiste à reporter la bande autorisée un certain nombre de fois, avec des gestes bien précis de juxtaposition, de contrôle et de marquage qui peut se modéliser sous la forme d'un algorithme.

Un exemple de technique est le suivant :

Algorithme qui modélise τ_1
point marqué = première extrémité du segment ;
Jusqu'à ce que le *point marqué* coïncide avec la deuxième extrémité du segment :
{$T_{Juxtaposer}$ = « Juxtaposer parfaitement le premier bord de la bande au *point marqué* sur le segment à mesurer, dans le sens de la longueur » ;
$T_{Vérifier}$ = « Vérifier que la bande, dans le sens de la longueur, soit parallèle au segment » ;
$T_{Marquer}$ = « Marquer sur le segment le point donné du deuxième bord de la bande » ;
point marqué = nouveau point marqué ;
$T_{Contrôler}$ = « Contrôler si le *point marqué* coïncide avec la deuxième extrémité du segment »}

La manipulation dans T_1.

Les gestes de manipulation exercés dans la technique τ_1 sont la juxtaposition et le marquage de la bande « fractions d'unité » autorisée. Chacun de ces gestes se fait sur du matériel tangible, mais évoque des objets mathématiques abstraits, comme il est résumé dans le schéma suivant :

Gestes de manipulation	**Objets manipulés**	**Objets mathématiques évoqués**
• Juxtaposition de la bande unité (ou « fraction d'unité ») au dessin du segment • Marquage des points • Report de la bande unité et/ou des bandes « fractions d'unité » l'un après l'autre	• Dessin du segment • Bandes « unité » et « fractions d'unité »	• Mesure d'un segment • Unité de mesure d'une longueur • Fraction de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{10}$ d'unité

On verra dans la description de la séquence EXPIRE que certains gestes de manipulation disparaissent à même niveau d'exécution dans l'environnement Scratch, mais, comme déjà anticipé, on gagne un autre niveau de manipulation due à la dimension algorithmique.

3.2 La séquence EXPIRE sur l'écriture fractionnaire

D'abord, nous avons choisi, pour des raisons liées à la taille de l'écran, d'inverser les objets qui représentent les segments à mesurer et l'unité de mesure. Nous avons donc placé dans l'espace d'exécution de Scratch un trait vertical sur lequel il y a une légende représentant l'unité et ses fractions (un demi, un tiers, un quart, un cinquième, un dixième) en lignes horizontales de couleurs différentes, et une bande, dont la première extrémité s'appuie sur le même trait vertical. Le « personnage » que l'on contrôle à travers le programme est un marqueur, qui reporte les segments représentés dans la légende l'un après l'autre en-dessous de la bande à mesurer en partant du trait vertical. Ainsi, dans l'espace de programmation, l'élève a à sa disposition : un bloc d'initiation, pour se mettre sur le trait vertical, les blocs de type « reporter x à droite », où x peut être l'unité ou l'une de ses fractions disponibles et, finalement, le bloc « répéter » (cf. Figure 4).

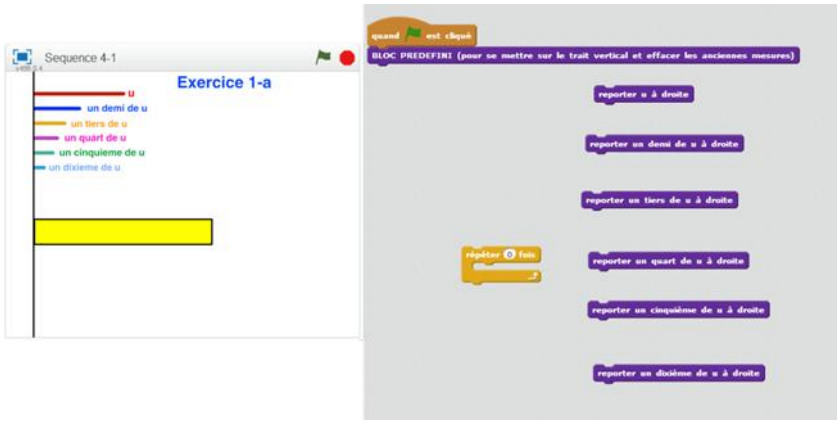


Figure 4. Interface de la séquence sur les fractions

Les types de tâches dans la séquence EXPIRE.

Notre séquence prend en charge les types de tâches suivants :

$T_{Programme}$ = « *Créer un programme dans Scratch qui permet de mesurer la bande colorée à l'aide du segment unité u et des segments 'fractions d'unité' indiqués* »

$T_{Traduire}$ = « *Traduire le programme à l'aide d'une écriture numérique* »

Comme dans le cas de l'environnement tangible, nous portons notre attention uniquement sur le premier type de tâches : $T_{Programme}$.

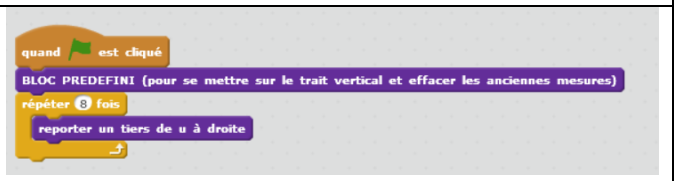
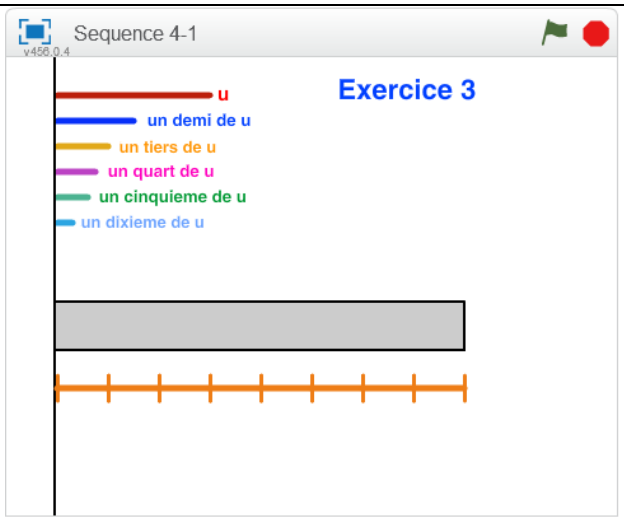
Les variables du type de tâches $T_{Programme}$.

Dans cette séquence, les variables et leurs valeurs restent identiques à celles identifiées dans l'environnement de manipulation tangible.

Les techniques pour $T_{Programme}$.

Dans $T_{Programme}$, le produit final n'est pas une mesure, mais un programme qui permet de faire une mesure. Avec cette perspective, on voit bien que les techniques changent complètement par rapport à celles employées pour $T_{Mesurer}$, grâce à la dimension algorithmique. Une analyse *a priori* de la situation nous fait imaginer que, dans ce cadre, il y aurait certaines techniques plus envisageables que d'autres. En particulier, on suppose que les élèves réalisent sur Scratch, dans un premier temps, des programmes plutôt désorganisés, qui simulent le tâtonnement présent dans la manipulation tangible, et, à mesure de leur progression dans les types de tâches, ils parviennent de mieux en mieux à produire des programmes bien structurés, notamment avec l'utilisation de la boucle « répéter ».

Nous proposons un exemple de technique (τ_2) d'un type de tâches où la variable V_1 prend la valeur « une », en la modélisant sous forme d'algorithme, pour pouvoir explorer les analogies et les différences avec la technique τ_1, accomplissant le type de tâches $T_{Mesurer}$.

<table>
<tr><th>Algorithme qui modélise τ2</th><th>Exemple de programme produit dans Scratch</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
point marqué = point de départ pour le report des segments (placé sur le trait vertical) ;
T_{Ass_rep} = « <u>Associer</u> le bloc 'reporter x à droite' au bloc 'répéter', avec x = 'fraction d'unité' autorisée »
$T_{Estimer}$ = « Estimer le nombre représentant le rapport entre la bande à mesurer et le segment 'fraction d'unité' autorisé »
T_{Taper} = « <u>Taper</u> le nombre estimé dans le bloc 'répéter' »
T_{Ass_I} = « <u>Associer</u> le bloc 'répéter' au bloc d'initiation »
$T_{Exécuter}$ = « <u>Exécuter</u> le programme »
point marqué = deuxième extrémité du dernier segment 'fraction d'unité' reporté ;
Jusqu'à ce que le point marqué coïncide avec la deuxième extrémité de la bande à mesurer :
{$T_{Evaluer}$ = « Evaluer combien de segments 'fractions d'unité' il faut enlever ou rajouter pour obtenir la mesure de la bande » ;
$T_{Ajuster}$ = « Ajuster le nombre dans le bloc 'répéter' » ;
$T_{Executer}$ = « <u>Exécuter</u> le programme »
point marqué = deuxième extrémité du dernier segment 'fraction d'unité' reporté ;
$T_{Contrôler}$ = « Contrôler si le point marqué coïncide avec la deuxième extrémité du segment »}
</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>Résultat du programme dans Scratch
 
</td></tr>
</table>

Cette fois-ci les types de tâches qui relèvent de gestes sont T_{Ass_rep}, T_{Taper}, T_{Ass_I} et $T_{Exécuter}$; les gestes impliqués sont très différents de ceux décrits dans τ_1, car ils sont liés à la dimension « programmation » qui est explicitement requise. On pourra retrouver certains des gestes de τ_1 si on descend à un niveau de description plus bas, comme on va le voir.

La manipulation dans T_2.

Nous avons déjà mis en évidence que les caractéristiques d'un environnement de programmation comme Scratch font en sorte que tout ce qui est une simulation virtuelle de la manipulation d'objets tangibles se fait indirectement à travers la construction de programmes, qui requiert également de gestes manipulatoires.

Pour décrire la manipulation présente dans Scratch, nous allons parler de deux niveaux :

1) Le premier niveau de manipulation, « directe », a lieu dans l'espace de programmation ; les gestes concernés sont visibles dans les types de tâches que l'élève met en place dans la technique de résolution afin de construire le programme. Dans ce cas les objets (de nature virtuelle) que l'élève manipule sont les blocs d'instruction, et les objets mathématiques évoqués font partie des connaissances mathématiques, mais aussi des connaissances algorithmiques, comme nous résumons dans le tableau suivant :

Gestes de manipulation	Objets manipulés	Objets mathématiques évoqués
• Association des blocs d'instruction dans l'ordre dans lequel on veut qu'ils soient exécutés • Taper un nombre dans le bloc « répéter » • Exécution du programme	• Bloc d'instruction « répéter » • Bloc d'instruction « reporter X à droite » • Bloc d'instruction prédéfini pour se placer sur le trait vertical	• Notion d'algorithme • Boucle « répéter » • Notion de programme • Mesure d'une longueur • Unité de mesure d'une longueur • Fractions de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$ d'unité

Observons que le statut des blocs d'instruction en tant qu'objets manipulés est différent de celui des bandes unités et des dessins des segments à mesurer, observés dans la manipulation tangible. En effet, les blocs d'instruction ne renvoient pas directement à des objets mathématiques, mais à des actions faites sur eux (ex. « *reporter un tiers de u à droite* »).

2) Le deuxième niveau de manipulation, « indirecte », sera alors accessible à l'élève à travers l'exécution du programme. Les objets mathématiques évoqués sont exactement les mêmes que ceux de l'activité de départ. En revanche, la manipulation virtuelle de ces objets n'est pas exactement la même, comme on peut le voir dans ce tableau :

Gestes de manipulation	Objets manipulés	Objets mathématiques évoqués
• Juxtaposition du segment unité et/ou des segments « fractions d'unité » en dessous de la bande à mesurer • Report des segments unité et/ou des segments « fractions d'unité » l'un après l'autre	• Représentation des bandes à mesurer sur l'écran • Dessins de segments sur l'écran qui représentent l'unité de mesure et ses fractions	• Mesure d'un segment • Unité de mesure d'une longueur • Fraction de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{10}$ d'unité

Parmi les gestes de manipulation, il manque le geste de marquage, qui a été pris implicitement en charge dans l'environnement Scratch à travers l'instruction « reporter x à droite ». Ce manque est dû au fait qu'on retient que le type de tâches $T_{Marquer}$ est élémentaire pour le niveau scolaire des élèves. D'ailleurs, d'autres actions de contrôle sont mises en place par l'élève dans la technique τ_1 qui disparaissent dans la technique τ_2 : les actions présentes dans $T_{Juxtaposer}$ et $T_{Vèrifier}$. Dans le logiciel Scratch, ces actions sont incorporées dans les blocs « *reporter x à droite* » et « *BLOC PREDEFINI (pour se mettre sur le trait vertical)* ». Encore une fois, elles ne sont pas explicitées, car il s'agit de types de tâches élémentaires dans le cadre des CM2.

Finalement, il est important d'attirer l'attention sur les conditions des boucles « jusqu'à ce que », présents dans les deux algorithmes modélisant les techniques τ_1 et τ_2. Dans les deux cas, il s'agit d'accomplir le type de tâches $T_{Contrôler}$. Il est indispensable que cette action de contrôle reste une tâche à la charge de l'élève, afin que la résolution du problème ne soit pas circonscrite à l'ordinateur. Pour cela, nous n'avons pas introduit ce type de boucle dans l'interface, non plus que des critères de vérifications de la solution.

3.3 *Apports et limites de la séquence Scratch*

Un premier apport de Scratch par rapport à l'environnement tangible se situe précisément dans les types de tâches. $T_{Programme}$ combine les deux types de tâches $T_{Mesurer}$ et $T_{Formuler}$ présents dans l'environnement de manipulation tangible : les élèves, en devant « créer un programme », produisent automatiquement comme résultat une sorte de formulation de la mesure trouvée (qui peut, comme le message résultat de l'environnement tangible, être traduit à l'aide d'une écriture numérique, cf. Figure 5)



Figure 5. Exemple de traduction

En outre, dans l'algorithme qui modélise la technique τ_2, il apparait les types de tâches $T_{Estimer}$, $T_{Evaluer}$ et $T_{Ajuster}$, étroitement liés à la boucle « répéter », qui ne peut pas se matérialiser dans l'environnement tangible, sinon de façon artificielle. À travers l'accomplissement de ces types de tâches, l'élève peut travailler certaines compétences transversales en mathématiques qui relèvent de la résolution de problème. En particulier, il est obligé à prendre des décisions à l'avance et à anticiper le résultat de ses actions.

Un autre apport potentiel de la manipulation avec Scratch peut être retrouvé dans les séquences sur la division euclidienne et sur le pavage des figures. En effet, nous supposons que la répétition des types de tâches choisies dans cet environnement permet à l'élève de conceptualiser une structure de programme standard, qui marche pour chaque exercice à condition d'utiliser les bonnes valeurs. Cela permettrait de travailler les formules mathématiques générales, comme l'écriture de division euclidienne ($a = b \times q + r$) ou la formule d'aire pour les carrés et les rectangles ($A = L \times l$).

Enfin, nous pouvons résumer les apports de l'environnement Scratch comme suit :

- explicitation automatique de la procédure ;
- précision ;
- anticipation de la solution ;
- capacité d'abstraction.

En termes de limites, nous pouvons affirmer que la manipulation dans Scratch, dans certaines des séquences construites, ne peut pas se substituer la manipulation d'objets tangibles. Un exemple concret est précisément l'activité de *La bande unité* du manuel ERMEL, qui prévoit le pliage de la bande unité pour obtenir ses fractions. Le geste tangible du pliage reste un passage fondamental pour la construction du concept de fraction, dans ses significations de *partie d'un tout* et de *mesure* (Vergnaud, 1983).

IV - CONCLUSIONS

Contrairement à la pensée commune, nous avons établi que le terme manipulation peut être effectivement associé à des objets virtuels vivant dans un logiciel de programmation, bien que cela ait des similitudes, mais aussi des différences avec la manipulation impliquant des objets tangibles. Notre approche ne vise pas à substituer définitivement la manipulation avec un logiciel de programmation à la manipulation d'objets tangibles. Nous retenons, au contraire, que ces deux types de manipulation doivent vivre en parallèle dans les activités de la classe de mathématiques pour leur complémentarité.

Les différences dérivent surtout de la diversité des objets manipulés, qui, dans un logiciel de programmation, représentent des actions que l'ordinateur doit accomplir. L'élève délègue à l'environnement Scratch une manipulation des objets présents dans l'espace d'exécution, à travers l'explicitation d'un programme. Les similitudes se situent au niveau des fonctions didactiques des deux types de manipulation. L'environnement Scratch nous semble, comme l'environnement tangible, un

milieu pertinent pour représenter des objets mathématiques, pour développer la créativité et surtout pour supporter des raisonnements en faisant développer des compétences liées à la résolution de problème.

Ainsi, en préservant les objectifs didactiques concernant l'apprentissage des mathématiques, ce qui change d'un environnement à l'autre se place surtout au niveau du développement de compétences liées à la résolution de problème : un logiciel de programmation, utilisé pour enseigner des notions mathématiques, permettrait, selon notre analyse *a priori*, d'obliger l'élève à faire des hypothèses, à rendre plus explicite la démarche de résolution du problème et, dans certains cas, à faire abstraction du problème.

V - BIBLIOGRAPHIE

Carriveau C., Jeannotte D. (2015). L'utilisation du matériel en classe de mathématiques au primaire : quelques réflexions sur les apports possibles. *Bulletin AMQ, LV(3)*, 32-49.

Chaachoua H. (2018). T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. *Pré-actes du séminaire de didactique des mathématiques, février 2018*, 5-22. https://ardm.eu/wp-content/uploads/2018/10/Pr%C3%A9actes-ARDM-fevrier2018.pdf

Chaachoua H., Tchounikine P. et Crisci R. (soumis et accepté). L'algorithmique et la programmation pour la construction du sens de la division euclidienne. *Soumis et accepté pour le colloque EMF 2018.*

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *RDM, 19(2)*, 221-265.

Dias, T. (2012). Manipuler et expérimenter en mathématiques. Paris : Magnard.

Dias, T. (2018). Construire des polyèdres : un rêve inaccessible. Dans J. Didier, G. Giacco et S. Chatelain (Eds.), *Culture et création : approches didactiques,* 47-59. Belfort-Montbelliard, France: UTMB. http://hdl.handle.net/20.500.12162/1677

ERMEL. (1995). Apprentissages numériques et résolution de problèmes. *Paris: Hatier,* 406-418.

Triquet E. (2018). Utilisation de l'algorithmique pour faciliter l'apprentissage du concept d'aire au cycle 3. Mémoire de Master MEEF, *Université Grenoble Alpes.*

Vergnaud G. (1983). Multiplicative Structures. Dans R. Lesh et M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, 127-174. New York: Academie Press.

COMMUNICATION C25

FAVORISER L'APPROPRIATION DES PROPRIÉTÉS GÉOMETRIQUES DES QUADRILATÈRES À L'ÉCOLE PRIMAIRE : ÉTUDE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE DANS LE MESO-ESPACE

Patrick GIBEL
MCF, ESPE D'AQUITAINE-UNIVERSITE BORDEAUX
Laboratoire Lab-E3D
Université de Bordeaux
Patrick.Gibel@u-bordeaux.fr

Sylvie BLANQUART-HENRY
PRCE, ESPE D'AQUITAINE-UNIVERSITE BORDEAUX
Laboratoire LDAR
Université de Bordeaux
Sylvie.Henry@u-bordeaux.fr

Résumé

Au cours de cette communication nous avons présenté l'analyse clinique d'une séquence mise en œuvre dans une classe de cycle 3 et dont les principaux objectifs sont : la reproduction de figures planes dans le méso-espace et la formulation des procédures mobilisées. Pour conduire les analyses *a priori* et *a posteriori* nous avons mis en œuvre un modèle d'analyse des raisonnements, développé par Bloch & Gibel (2011), Gibel (2015) qui articule deux cadres théoriques complémentaires : la Théorie des Situations Didactiques et la sémiotique de C.S. Peirce (1995). Au-delà de l'utilisation raisonnée des outils, l'analyse didactique détaillée des raisonnements met en évidence des éléments de la dialectique de l'action et rend compte de la variété des propriétés géométriques mobilisées, facilitant ainsi le passage d'une géométrie instrumentée à une géométrie déductive.

I - INTRODUCTION

Ce compte-rendu de communication traite de l'enseignement des propriétés géométriques des quadrilatères en fin d'école primaire (élèves âgés de 9 à 10 ans). Nous nous intéressons plus particulièrement aux situations d'apprentissage qui favorisent chez l'élève l'acquisition de connaissances spatiales et géométriques désignées, dans la suite de l'article, par le terme connaissances *spatio-géométriques*. Cette dénomination a été initialement introduite par Berthelot et Salin et a ensuite été reprise par de nombreux chercheurs, citons, parmi eux, Bloch et Pressiat (2008). L'analyse de ces situations du point de vue du fonctionnement des connaissances, plus particulièrement de leur mise en place dans la classe, requiert l'utilisation d'un outillage théorique spécifique : la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998). Cette théorie nous offre la possibilité d'analyser les connaissances et les savoirs, valides et erronés, mobilisés par les élèves en situation d'apprentissage et aussi d'étudier la nature et la fonction des raisonnements produits par les élèves (Bloch et Gibel, 2011 : Gibel, 2015).

Nous nous attacherons à produire des éléments de réponse à la question suivante :

Lors de l'étude des propriétés des quadrilatères, en quoi la confrontation des élèves à des situations d'apprentissage dans l'espace environnant (méso-espace) favorise-t-elle l'élaboration de raisonnements pertinents construits à partir de connaissances spatio-géométriques ?

II - LA THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES : UN CADRE THEORIQUE ADÉQUAT POUR L'ANALYSE DES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE ET L'ETUDE DES RAISONNEMENTS

1 L'étude de l'articulation entre connaissances spatiales et géométriques

1.1 Classification des différents types d'espace

Il convient de distinguer l'espace sensible et l'espace géométrique. Le premier est défini comme un espace qui nous est accessible par le biais des sens, le second est le résultat de l'effort théorique appelé géométrie. Cette dernière est définie par Brousseau comme étant l'ensemble des connaissances spécifiques nécessaires au contrôle de la consistance des énoncés sur l'espace (Brousseau, 2000).

Dans notre étude, nous souhaitons mettre en évidence les raisons pour lesquelles la confrontation des élèves à des situations d'apprentissage dans l'espace environnant favorise l'émergence de raisonnements chez les élèves. Pour cela nous produirons l'analyse clinique d'une séquence de classe en nous attachant à effectuer une analyse détaillée des formes de raisonnement élaborées par les élèves au cours des différentes phases de la séquence.

Comme le soulignent Berthelot et Salin (2001) ainsi que Salin (2014), la confrontation de l'apprenant à des actions effectives sur le milieu sensible joue un rôle déterminant du point de vue de la construction des concepts géométriques, c'est ce que nous nous efforcerons d'expliciter dans le paragraphe suivant.

Selon la nature de l'espace sensible avec lequel le sujet est en interaction, ce dernier développe des modèles conceptuels différents. Ces modèles définissent selon Brousseau (2000) trois types d'espaces : le micro-espace, le méso-espace et le macro-espace.

Brousseau (2000) explicite les modèles conceptuels développés par le sujet en interaction avec chaque type d'espace de la façon suivante :

Concernant le macro-espace, les situations où un sujet doit prendre des décisions relatives à un territoire beaucoup trop grand pour qu'il puisse l'embrasser d'un regard, lui posent des problèmes, entre autres de recollement de cartes et d'incrustation. Pour identifier et retrouver un lieu, établir un trajet, déterminer la forme d'un territoire etc., il est nécessaire de développer des concepts et des moyens spécifiques. Les solutions sont d'ailleurs différentes suivant qu'il s'agit de la terre entière ou d'une zone urbaine, rurale, sylvestre, souterraine, maritime ou aérienne.

A l'opposé, le micro-espace est le milieu de l'élaboration et de la conceptualisation du mouvement des objets autres que l'observateur. L'enfant construit ses premières connaissances spatiales dans la manipulation de petits objets. Par le toucher avec ses mains ou sa bouche autant que par la vue, par les mouvements qu'il fait subir aux objets, il identifie leur consistance, leur forme solide, leurs positions relatives et leurs propriétés. Un objet est perçu dans sa globalité.

Enfin, par confrontation au méso-espace, assimilable à l'espace environnant, le sujet développe des modèles conceptuels différents des précédents. En effet lorsqu'il se déplace dans un territoire placé sous le contrôle de la vue (comme la salle de classe ou la cour de récréation), un élève est confronté à différentes perspectives présentant des parties communes. La coordination de ces multiples représentations lui permet d'accéder à une conception globale de ce méso-espace auquel il est confronté.

1.2 Classification des démarches de modélisation

Dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques, Berthelot et Salin (1992) utilisent le terme de démarche de modélisation car le passage de l'expérimentation à la théorisation en constitue le principe. Suivant la nature du problème de géométrie, Berthelot et Salin (1992) distinguent trois problématiques :

- Une problématique pratique dans laquelle les objets sur lesquels on travaille sont des objets physiques (en particulier des dessins) : la validation se fait dans l'espace sensible ;

- Une problématique géométrique dans laquelle les objets ne sont plus des objets physiques : la validation sa fait par un raisonnement qui s'appuie uniquement sur des connaissances géométriques ;

- Une problématique de modélisation dans laquelle on travaille sur des objets physiques : la validation se fait dans l'espace sensible, comme dans la problématique pratique, mais la démarche de résolution est totalement différente puisqu'elle s'appuie sur des propriétés géométriques.

Berthelot et Salin (1992) nomment spatio-géométrique la modélisation de l'espace par des connaissances issues du savoir géométrique.

Comme l'exposent Pressiat et Combier (2003), la résolution de ces situations de modélisation est finalisée par la recherche d'une solution reproductible qui doit être communicable à d'autres en s'appuyant sur un modèle explicatif.

Notre étude s'inscrit dans le cadre de la problématique de modélisation définie précédemment et vise l'étude d'une situation de modélisation. Celle-ci doit conduire à l'élaboration de solutions reproductibles qui pourront être explicitées aux autres élèves, en vue d'une part de développer la dialectique action-formulation, d'autre part de faciliter la transition entre géométrie instrumentée et géométrie déductive.

1.3 Définition et caractéristiques des situations adidactiques en Théorie des Situations Didactiques

Dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques, Brousseau caractérise les situations adidactiques comme étant des situations que l'on peut associer à l'enseignement d'une connaissance ou d'un savoir (clairement identifié€ par l'enseignant), dans laquelle l'intention d'enseigner est effacée pour laisser à l'élève le plus d'initiative possible et lui permettre d'agir, réfléchir, prendre des décisions, de lui-même.

Parmi les situations adidactiques, les situations d'action nous intéressent plus particulièrement. Elles consistent à placer l'enfant devant une situation, telle que : d'une part elle pose à l'élève un problème dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est la connaissance à enseigner, d'autre part il puisse agir sur elle et cette dernière lui renvoie de l'information sur son action.

Lors d'une situation d'action, un véritable dialogue s'instaure entre l'élève et la situation. Cette dialectique de l'action lui permet donc de se créer un modèle implicite, c'est-à-dire d'avoir des réactions qu'il ne peut pas encore formuler, ni encore organiser en théorie.

Le milieu délimite ainsi les possibilités de décision du sujet. Il est non anticipateur car ses réactions sont indépendantes d'intentions ou de finalités. De plus, les éléments qui y sont modélisés ne sont pas uniquement des objets matériels. Ce peut être par exemple, des contraintes immatérielles comme des savoirs et/ou des connaissances stabilisées du sujet.

En situation de formulation, l'élève est amené à adopter une attitude réflexive quant aux connaissances et aux savoirs qu'il a choisi de mobiliser en situation d'action. Les conditions qui définissent la situation de formulation l'amènent à prendre en compte non seulement les actions qu'il a effectuées sur les objets, par confrontation au milieu, mais également les conditions dans lesquelles il a effectué les actions (Gibel, 2018).

Cette prise en compte des conditions dans lesquelles l'élève a élaboré ses actions nous apparait essentielle car dans le cadre de notre étude, cela devrait permettre aux élèves de justifier leurs actions dans l'espace environnant en lien étroit avec les propriétés géométriques des objets. L'ingénierie que nous allons construire vise principalement à permettre de favoriser une dialectique action-formulation.

Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles l'enseignant fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir. Une fois construite et validée, la nouvelle connaissance va faire partie du *répertoire didactique* de la classe. Après cette dernière dialectique, la connaissance est étiquetée comme quelque chose que tous les élèves sont censés savoir et peuvent appliquer.

1.4 Présentation d'éléments d'ordre méthodologique

Nous souhaitons à présent déterminer la méthodologie appropriée pour étudier les connaissances spatiales et géométriques mobilisées par les élèves en situation d'action, lors de la reproduction de quadrilatères dans le méso-espace, puis en situation de formulation, c'est-à-dire lorsqu'ils sont conduits à verbaliser et à justifier leur(s) procédure(s).

La situation de reproduction de figures géométriques dans le méso-espace est assimilable à une situation d'action. En effet les élèves vont devoir prendre des informations sur la figure à reproduire en mobilisant et en articulant différentes procédures (pliage, mesure des côtés, mesure des angles, etc.) à l'aide des instruments non conventionnels à disposition (tasseaux de bois, ficelle, gabarit d'angle, etc.). Ils vont ensuite à l'aide de ces mêmes instruments s'efforcer de reproduire, sur une parcelle éloignée, la figure modèle par la mise en œuvre d'une procédure originale. Compte-tenu de leur possible variété, liée à l'usage d'instruments non conventionnels dans l'espace sensible (méso-espace), l'analyse didactique des procédures nécessitera une analyse approfondie des raisonnements qui les sous-tendent.

Lors de la phase de présentation des procédures, assimilable à une situation de formulation, les élèves devront expliciter leur démarche en justifiant l'adéquation de leurs actions dans le méso-espace. Pour cela, ils devront se référer aux connaissances spatiales et géométriques qui justifient la validité de leur procédure. Par conséquent notre étude devra prendre en compte d'une part leurs actions effectives sur le milieu, d'autre part les connaissances et les savoirs énoncés par les élèves en situation de formulation. Pour réaliser cette analyse didactique, nous nous attacherons à étudier les différentes formes de raisonnements produits par les élèves en spécifiant leurs différentes fonctions, en lien avec les conditions de leurs productions.

Nous allons donc dans la partie suivante préciser ce que nous entendons par « raisonnement », définir les différentes fonctions du raisonnement et indiquer les moyens mobilisés afin d'identifier les différentes formes de raisonnements susceptibles d'être produites en situation.

2 Enjeux et spécificités du modèle d'analyse des raisonnements

2.1 Identification et classification des raisonnements

En classe de mathématiques, à l'école primaire, le terme raisonnement tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons adopté la définition du raisonnement proposée par Oléron (1977, p.10) comme pouvant être un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations qui respectent des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduit en fonction d'un but.

Pour pouvoir déterminer et analyser objectivement les raisonnements produits pas les élèves, le chercheur doit montrer que tel raisonnement complet, dont il ne perçoit parfois qu'une partie ou que des indices, est bien celui qu'il convient d'attribuer à son auteur. Pour cela il s'assure que le supposé raisonnement vérifie quatre conditions (Brousseau et Gibel, 2005). Tout d'abord, il pourrait être explicité par le sujet ou, au moins, la connaissance, utilisée implicitement ou explicitement appartient au répertoire didactique de la classe. Ensuite, il est utile dans le sens où il réduit une incertitude car une autre connaissance aurait pu être mobilisée par le sujet. Il est l'instrument d'une modification de son environnement qui lui parait favorable. Enfin, le raisonnement est motivé par des raisons objectives, qui lui sont propres : arguments de pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation, qui justifient ce raisonnement.

Ainsi, un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, par le rôle qu'il y joue. Les différentes fonctions que peut avoir un raisonnement sont par exemple : décider d'une action à effectuer, informer, convaincre, expliquer. Elles sont caractérisées par des modèles de situations mathématiques (situation d'action, situation de formulation, situation de validation) généraux mais différents. Pour une présentation plus détaillée des concepts de la Théorie des Situations Didactiques nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Brousseau (1998).

Afin de pouvoir étudier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer les raisonnements apparaissant dans les productions des élèves, Gibel (2015) définit ce qui est assimilable à un raisonnement. Pour identifier un raisonnement il faut tout d'abord identifier des observables (textes, gestes, paroles, dessins, etc.) produits par un élève, par plusieurs élèves en interaction ou par l'enseignant. Ensuite il est nécessaire de relier ces observables par une relation rationnelle telle que cette relation s'exprime dans le langage du chercheur, différent a priori de celui des protagonistes. Dans le cas où la relation est

assimilable à une hypothèse, il convient d'établir qu'elle est valide, en montrant, éventuellement à l'aide d'autres indices, qu'elle est la moins improbable des explications.

Il est à noter que parmi les raisonnements détectés par le chercheur, certains d'entre eux peuvent être attribués à un ou à plusieurs des protagonistes bien que ce(s) dernier(s) ne les ai(en)t pas nécessairement identifiés comme tels.

2.2 La Théorie des Situations Didactiques comme fondement de notre modèle

Un postulat de notre travail est que la Théorie des Situations Didactiques fournit un cadre privilégié pour cette étude, et notamment que l'analyse des fonctions du raisonnement dans les niveaux de milieux permet une catégorisation des raisonnements. Ce cadre doit cependant être nécessairement complété par des outils d'analyse locale, et par une analyse des fonctions des raisonnements (Gibel, 2004) et des signes, formels et langagiers, qui le soutiennent. Pour cette dernière fonction nous utilisons les outils d'analyse issus de la sémiotique peircienne (Bloch et Gibel, 2011 ; Bloch, 2006) que nous allons nous attacher à justifier et à caractériser dans le paragraphe suivant.

2.3 Dimension sémiotique des raisonnements

Les raisonnements apparaissant en situation de classe peuvent se traduire sous des formes très diverses : éléments langagiers, scripturaux, graphiques que nous nous devons d'interpréter en référence à différents registres de représentation (Duval, 1996). Par conséquent l'analyse sémiotique constitue l'une des dimensions de notre modèle, complétant naturellement celles précédemment exposées : d'une part la fonction des raisonnements, d'autre part le niveau de milieu correspondant, autrement dit les conditions dans lesquelles le raisonnement a été élaboré.

Dans notre usage de la sémiotique Peircienne nous utiliserons les trois désignations : icône, indice et symbole-argument. Par exemple dans la séquence étudiée, un tracé peut être assimilé à une icône, elle traduit et manifeste une action du sujet confronté à la situation d'action ; un indice est de l'ordre d'une proposition, par exemple la mise en place d'un codage spécifique (de l'angle droit par exemple) ; un symbole-argument est de l'ordre d'une justification sous tendue par une ou des propriétés géométriques. Comme le souligne Evraert-Desmedt (1990), l'interprétation d'un signe par un interprétant est étroitement liée à l'expérience, formée par d'autres signes toujours antécédents.

Par conséquent l'analyse sémiotique nécessite de prendre en compte les signes en lien avec les connaissances et les savoirs antérieurs, c'est la raison pour laquelle nous allons définir, dans la suite, les notions de répertoire didactique et de répertoire de représentation.

Le répertoire didactique de la classe désigne aussi l'ensemble des moyens qui sont susceptibles de permettre à l'élève, confronté à une situation didactique ou adidactique, de générer de nouvelles connaissances à partir de ses connaissances antérieures.

Le répertoire de représentation (Gibel, 2015), de la classe et de chaque élève, est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures ; nous y incluons également les outils et leur(s) usage(s). Il convient également d'y adjoindre les éléments langagiers (énoncés oraux et/ou écrits), permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.

Le répertoire de représentation comporte deux composantes liées à la chronogenèse pour la première et au milieu de la situation pour la seconde :

- La composante liée au répertoire antérieur c'est-à-dire les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures ;

- Une composante qui apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire didactique. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations, liées à la situation, à partir des éléments de représentation dont il dispose.

D'après Berthelot et Salin (1992, p. 41) les représentations symboliques de l'espace, éléments du répertoire de représentation, relèvent de trois catégories différentes. En premier lieu, ces représentations peuvent être langagières avec un énoncé écrit ou oral. On distingue alors les formulations qui relèvent

du langage spatial et celles qui sont issues du langage géométrique spécifique. Les représentations infra-langagières sont liées à l'utilisation d'une gestuelle qui permet de communiquer des informations spatiales. C'est le langage du corps. Pour finir les représentations spatiales offrent la possibilité d'une mise en correspondance analogique avec le milieu de référence comme les dessins, les schémas, les croquis, les pliages pour produire un gabarit d'angle.

Notre étude repose principalement sur l'étude détaillée des différentes formes de raisonnements qui sous-tendent les procédures formulées par les élèves. Par la mise en œuvre de cette méthodologie nous souhaitons apporter des éléments de réponses aux questions suivantes :

En quoi les activités de reproduction des quadrilatères dans le méso-espace peuvent-elles être efficientes pour générer une grande variété de raisonnements reposant principalement sur les propriétés géométriques des quadrilatères ?

En quoi l'étude détaillée des raisonnements qui sous-tendent les procédures mises en œuvre et formulées par les élèves permet-elle d'identifier précisément les propriétés géométriques sous-jacentes mobilisées par les élèves ?

III - MÉTHODOLOGIE

1 Sujets

L'étude a été menée dans une classe à double niveau correspondant aux cours moyens première et deuxième année (Élèves de 9-10 ans). L'école de trois classes est située en périphérie d'une petite ville au sein d'un département rural de faible densité démographique. L'enseignant décrit les élèves comme étant issus d'une population fluctuante avec des départs et arrivées d'élèves en cours d'année fréquents ainsi que des difficultés sociales perceptibles. L'enseignant s'est porté volontaire pour l'expérimentation, il n'a pas de formation particulière dans le domaine des mathématiques. On peut par conséquent considérer que l'expérimentation se déroule dans une classe « ordinaire ».

L'enseignant a choisi pour l'année scolaire considérée, de construire lui-même ses séquences et séances d'apprentissage en prenant appui sur les instructions officielles, le travail d'une collègue, quelques manuels et ressources en ligne. Quinze élèves sont inscrits en cours moyen deuxième année, et six élèves en cours moyen première année dont un élève dyspraxique qui bénéficie à ce titre d'un plan de travail aménagé.

2 Instrumentation

Afin de déterminer en quoi la confrontation des élèves à des situations d'apprentissage dans le méso-espace favorise l'élaboration de raisonnements pertinents à partir de connaissances spatio-géométriques, nous avons procédé à l'étude clinique d'une séance de classe au cours de laquelle les élèves ont été confrontés à une situation adidactique dans le méso-espace.

2.1 La séance objet d'étude

La situation retenue est une situation de reproduction de losanges de dimensions variées découpés dans un papier résistant et souple afin de conserver la trace des pliages effectués. (tableau 1)

Losange	1	2	3	4	5	6
Mesure des côtés (en cm)	68	68	75	68	75	68
Mesure des angles aigus (en degré)	60	70	70	60	70	70

Tableau 1 Dimensions des figures à reproduire

La séance est structurée en trois temps : après une phase de dévolution de l'activité, les élèves sont mis en situation d'action pendant une vingtaine de minutes. Enfin ils sont regroupés pour valider leurs productions et formuler leurs procédures.

Pour la situation d'action, la consigne donnée aux élèves est : « Le travail que vous allez réaliser va se passer sous le préau. Vous allez travailler par groupes. Chaque groupe aura une figure géométrique qui

sera collée sur le mur du préau. Il devra la reproduire sur le sol du préau le plus précisément possible. Vous aurez réussi si l'écart entre la figure modèle et la figure reproduite n'excède pas 1 cm. Chaque groupe devra tracer la figure dans la parcelle qui lui est réservée. Les figures à reproduire peuvent être détachées du mur mais ne doivent pas quitter l'espace initial délimité par des bancs. »

« Les instruments et outils mis à votre disposition sont : ficelle, ciseaux, un tasseau de bois de 2 m par groupe, équerres en carton, feutres, craies de différentes couleurs et brosses pour effacer. »

« Après avoir effectué la reproduction de votre figure, à tour de rôle, chaque groupe exposera à l'ensemble de la classe et au professeur comment il a procédé pour effectuer le tracé. »

Les objectifs généraux de l'enseignant sont donc d'une part d'amener les élèves à élaborer, dans le méso-espace, des procédures de reproduction de quadrilatères « originales » et s'appuyant sur l'utilisation d'instruments inhabituels définis précédemment, d'autre part de conduire les élèves à formuler leurs procédures en justifiant le choix des instruments et des procédures en liens avec les connaissances et les savoirs spatiaux et géométriques sous-jacents.

2.2 Les données recueillies avant et après sa mise en œuvre

Les données recueillies avant l'expérimentation ont pour objectif de définir le répertoire didactique de la classe. Un entretien semi-directif a eu lieu avec l'enseignant durant lequel il a explicité ses choix didactiques en géométrie. Cet entretien a été enregistré puis retranscrit. Nous avons également collecté pour chacun des niveaux la progression annuelle, un cahier d'élève avec les évaluations correspondantes ainsi que les affichages temporaires ou permanents utilisés par l'enseignant.

Lors de la mise en œuvre de la séance, deux caméras mobiles nous ont permis de recueillir des enregistrements vidéos. Ainsi nous avons pu filmer l'intégralité de la phase de dévolution puis chaque groupe pendant une partie de la phase d'action et enfin tous les groupes au moment de la formulation de leur procédure. Ces prises de vue ont été complétées par des photographies des figures tracées au sol.

2.3 Déroulement et analyse a priori de la séquence

2.3.1 La séance dans la séquence, place dans la progression

Après une première prise de contact avec l'enseignant qui nous a permis de collecter les données citées précédemment, nous lui avons communiqué la situation de reproduction de losanges dans le méso-espace. Il a choisi d'intégrer cette séance dans sa progression, fin mai, en semaine 31 de l'année scolaire. Les quadrilatères avaient été étudiés, par le biais d'activités proposées dans le micro-espace, en milieu d'année scolaire (semaines 15 à 18) et la symétrie axiale juste avant (semaines 27 à 30). Nous avons fourni à l'enseignant le matériel spécifique nécessaire à la mise en œuvre de la séquence, puis il a préparé seul son projet de séance. De notre côté nous avons effectué une analyse *a priori* de la situation en tenant compte du répertoire didactique de la classe. Cette analyse *a priori* que nous présentons en Annexe comporte les réponses attendues, les procédures envisagées puis présente une analyse didactique de la séance.

2.3.2 Analyse a priori de la situation

L'analyse a priori de cette situation a été initialement présentée de façon détaillée dans Ennassef, Gibel et Henry (2013).

2.3.3 Déroulement effectif

Le déroulement effectif est conforme au déroulement prévu. Les caméras mobiles ont permis de filmer les groupes d'élèves en action et de les suivre dans leurs déplacements. Lors de la phase de mise en commun chaque groupe a été filmé et enregistré quand il explicitait ses procédures.

Immédiatement après la séance, en recoupant nos observations avec les enregistrements effectués par les deux caméras pendant la phase d'action, nous avons recensé les procédures mises en œuvre par chaque groupe ainsi que le matériel utilisé.

Dans un deuxième temps nous avons analysé les films enregistrés pendant la phase de formulation. Nous avons complété la transcription des dialogues par la description des gestes porteurs d'une

signification en lien avec les mathématiques, les « gestes mathématiques » comme définis par Petitfour (2015). Pour finir nous avons complété les transcriptions par des images, extraites des vidéos, illustrant les gestes mathématiques les plus emblématiques.

3 Méthode d'analyse des données

Nous souhaitons analyser les raisonnements produits par les élèves lors de la séquence en mettant en œuvre le modèle d'analyse des raisonnements (Bloch et Gibel, 2011) et (Gibel, 2015), que nous présentons ci-dessous.

3.1 Outillage théorique : le modèle d'analyse des raisonnements

Le modèle de structuration du milieu utilisé, lors de l'élaboration du modèle d'analyse des raisonnements, est celui de Bloch (2006), issu précédemment du modèle de Margolinas (1994), modifié afin de tenir compte du rôle du professeur dans les niveaux adidactiques de milieux. Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse des fonctionnalités des différents niveaux de milieux et aux résultats de la mise en œuvre dans la contingence (Bloch, 2006).

Le tableau 1 résume les niveaux de milieux du milieu didactique au milieu matériel – correspondants à la situation *expérimentale*. Les niveaux associés aux indices strictement négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions i.e. l'apparition de différentes formes de raisonnement dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999). En effet c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif et le milieu de référence que nous nous attendons à voir apparaître et se développer les raisonnements attendus.

Comme indiqué précédemment, la dialectique action-formulation est au centre de nos préoccupations dans cette étude. Par conséquent il nous apparait nécessaire d'étudier, lors de la phase de verbalisation des procédures, les allers-retours entre la situation d'action et la situation de formulation, cette dernière visant à favoriser chez l'élève l'adoption d'une posture réflexive basée sur une justification de ses actions.

Niveau de milieu	Position de l'élève	Position du professeur	Situation	
M1 Milieu didactique	E1 E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet	didactique
M0 Milieu d'apprentissage : institutionnalisation	E0 E-Elève	P0 : Professeur enseignant	S0 : situation didactique	
M-1 Milieu de référence : situation de formulation & situation de validation	E-1 E-apprenant	P-1 : P régulateur	S-1: situation d'apprentissage	adidactique
M-2 Milieu objectif : **situation d'action** Milieu heuristique	E-2 E-agissant	P-2 : P dévolueur observateur	S-2: situation de référence	
M-3 Milieu matériel	E-3 E-objectif		S-3: situation objective	

Tableau 2. Le schéma de la structuration du milieu (Bloch, 2006)

Dans la structure précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration ; le passage à un milieu de référence pour justifier la validité des méthodes et établir le caractère de nécessité des propriétés utilisées plus ou moins implicitement. En situation d'apprentissage Les interventions de l'enseignant sont destinées à maintenir le caractère adidactique de la situation. Ainsi, il amène les élèves à préciser leur formulation par un éventuel appui sur les étapes de construction ou par la demande d'une explication nécessaire à la justification d'une proposition. Bloch (1999), dans son article sur l'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève, précise que lorsque le milieu de la situation n'assure pas de façon suffisamment adidactique la production de connaissances, il convient d'analyser l'activité du professeur et les connaissances qu'il met en œuvre pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l'élève.

Dans Bloch et Gibel (2011), puis Gibel (2015 ; 2018) nous avons été amenés à retenir trois axes qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment. Ces axes réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieux ou modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.

Le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension adidactique[189], les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent.

Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.

Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. L'analyse des signes est réalisée au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'auteur du raisonnement. Il s'agit de prendre pour objet d'étude l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation. Ainsi nous pourrons analyser *a priori* les connaissances et les savoirs, valides ou erronés, susceptibles d'être produits et déterminer ceux que l'enseignant pourra institutionnaliser, en regard de chacun des niveaux de milieu.

Ces trois axes apparaissent nécessaires et complémentaires pour effectuer une analyse très précise des différentes formes de raisonnements qui sont susceptibles d'être produits en regard de leur(s) fonction(s) et des conditions de leur production par les élèves (et/ou par l'enseignant au niveau M0). Ils constituent les dimensions de notre modèle d'analyse des raisonnements.

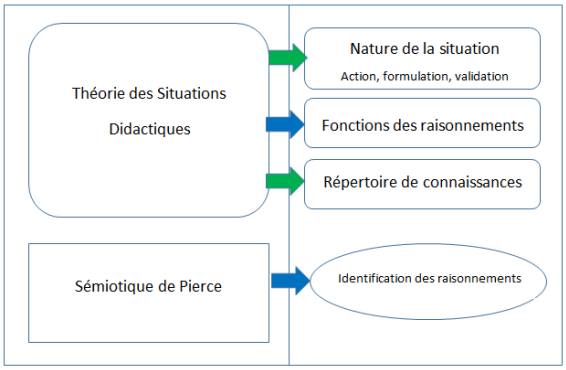


Figure 1. Schéma du modèle d'analyse des raisonnements (Gibel et Blanquart, 2017)

[189] ou à dimension adidactique

3.2 *Mise en œuvre du modèle d'analyse des raisonnements*

Pour analyser les raisonnements produits par les élèves lors de la séance étudiée, nous nous appuierons sur l'analyse *a priori* réalisée ainsi que sur le déroulement prévu. Ce dernier est basé initialement sur la confrontation des élèves au milieu heuristique (situation d'action) et ensuite, lors de la phase de mise en commun, sur la formulation et la justification des procédures mises en œuvre (milieu de référence). Il s'agit là d'une confrontation au milieu de référence. Nous nous attacherons tout particulièrement à analyser les raisonnements produits dans les milieux objectifs et de référence, pour mettre en évidence les formes et les fonctions des raisonnements élaborés par les élèves.

Nous présentons, pour chaque niveau de milieu, d'une part les fonctions des raisonnements, d'autre part les connaissances et les savoirs mobilisés en identifiant les répertoires correspondants. L'analyse détaillée de différents épisodes sera facilitée par l'utilisation du tableau ci-dessous permettant ainsi d'anticiper sur la forme, la nature et la fonction des raisonnements produits en situation d'action.

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - intuition - conjectures ponctuelles - prise d'informations - identification de caractéristiques (propriétés des milieux, symétrie(s), angles droits, égalité de longueurs, égalité de mesures d'angles) - décision du choix d'instruments pour reproduire et construire (des objets géométriques non matérialisés initialement : angles, diagonales) - procédés de construction - interprétation des rétro-actions	R1.2 SEM/SYNT - formulation d'une caractéristique et sa validation par une preuve pragmatique. -Explicitation de l'organisation des tâches (raisonnement d'organisation) - Justifications explicites ou en partie implicites des tracés en lien avec les propriétés et les caractéristiques de la figure. -Formulation et interprétation des niveaux de rétro-actions	R1.3 SYNT - Explications, justifications visant à définir les propriétés mathématiques qui sous-tendent et justifient le raisonnement pour une classe de formes
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions, modèle implicite d'action,…) Infra-langagier	R2.2 SEM/SYNT Indices de la mise en œuvre de propriétés. Symboles-arguments « locaux » ou génériques.	R2.3 SYNT Symboles-arguments formels
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique :	R3.2 SEM/SYNT Procédures conduisant à un enrichissement du répertoire Enrichissement des énoncés au niveau argumentaire.	R3.3 SYNT Institutionnalisation de procédures Formulation de preuves syntaxiques.

Tableau 3. Les différentes dimensions du modèle d'analyse des raisonnements (Gibel et Blanquart, 2017)

SEM désigne la dimension sémantique et SYNT désigne la dimension syntaxique

IV - LES RÉSULTATS EXPERIMENTAUX

Parmi les six groupes d'élèves, deux ont utilisé une procédure qui prend appui sur la reproduction d'angles. Nous présentons l'analyse détaillée de la démarche élaborée par l'un de ces deux groupes.

Analyse de l'action d'un groupe d'élèves

Après avoir réalisé le tracé demandé, le groupe d'élèves dont nous allons analyser la phase d'action, a nommé A, B, C et D les sommets du losange dessiné au sol. Par souci de clarté nous utiliserons ces dénominations pour décrire leurs actions. Le modèle qu'ils avaient à disposition ne contenait lui aucune indication. Ses sommets n'étaient pas nommés.

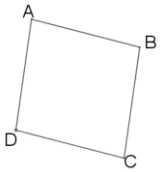


Figure 2. Le losange à reproduire

La phase d'action se décompose en une succession d'étapes qui alternent prises d'informations sur le modèle et tracé au sol. Notre analyse se base sur les actions des élèves et leurs verbalisations (dans l'action), quand elles sont audibles et en rapport avec l'activité mathématique.

	Prise d'informations sur le modèle
1	Les élèves reportent la longueur L_1 d'un côté du modèle [AD] sur la ficelle. Le repère se fait par la position des doigts sur la ficelle.
2	Les élèves reportent ensuite la longueur de la ficelle sur le tasseau, ils gardent la ficelle tendue pendant le déplacement.
3	Un élève fait une marque sur le côté du modèle dont la longueur vient d'être reportée sur le tasseau. « On l'a déjà fait celui- là »

Les étapes 1 à 3 se déroulent au niveau (M-2). Les raisonnements produits ont pour fonction d'organiser l'action, d'initier un procédé de construction.

Les signes produits témoignent de la mise en œuvre d'un modèle implicite d'action (M.I.A) visant à conserver une longueur de segment afin de le reproduire (à distance). Le raisonnement qui sous-tend ce M.I.A s'appuie sur des décisions quant aux choix des instruments pour reproduire la figure modèle.

Des connaissances anciennes sont mobilisées dans l'action :

- Pour reproduire une figure on commence par reproduire un côté ;
- Pour reproduire un côté il faut garder la mémoire de sa longueur ;
- La ficelle tendue permet de garder la mémoire d'une longueur ;
- Une marque sur le tasseau permet de garder la mémoire d'une longueur.

Les élèves utilisent les deux artefacts mis à disposition par contrat implicite (on nous donne deux artefacts donc il faut utiliser les deux) ou bien par aspect pratique (la ficelle est plus facile à manier que le tasseau pour mesurer un segment). Le report de la longueur sur le tasseau permet le tracé au sol.

	Tracé
4	Les élèves tracent un segment de la longueur L_1 sur le sol à l'aide du tasseau. Marie et Gaëtan tiennent le tasseau. Paul effectue le tracé en une seule action. Gaëtan annonce en se levant : « *On va chercher l'autre* »

L'activité se situe toujours au niveau (M-2). Le tasseau porte, comme la règle graduée, la direction et la longueur du segment ce qui conduit à un tracé en une seule action.

	Prise d'informations sur le modèle
5	Paul montre sur le modèle le côté [CD] qui est adjacent au côté [AD] déjà repéré : « *celui-là, celui-là* ».
6	Marie s'apprête à reporter la longueur de ce côté [CD] sur la ficelle. Gaëtan intervient en désignant le côté [AB]: « *Non Marie ce côté plutôt. Heu…Non vas-y, vas-y.* »
7	Marie et Paul tendent la ficelle au-dessus du côté [CD].
8	Gaëtan : « prends la corde, garde la mesure »
9	Les élèves reportent la longueur L_2 d'un côté du modèle sur la ficelle. Le repérage de la longueur se fait par la position des doigts sur la ficelle.
10	Les trois élèves reportent la longueur de la ficelle sur le tasseau. Paul et Gaëtan tiennent la ficelle tendue, Marie fait une marque sur le tasseau.
11	Marie fait une marque sur le côté du modèle dont la longueur vient d'être reportée sur le tasseau.

L'action se situe au niveau (M-2). Le raisonnement mis en œuvre est similaire à celui produit lors du tracé du précédent segment, mais cette fois, la ficelle n'est pas gardée tendue pendant le report de longueur. Il y a implicitement actualisation du répertoire d'action. Il s'agit d'une instrumentalisation de la ficelle pour garder la mémoire d'une longueur.

	Tracé
12	Les élèves veulent tracer le second segment adjacent au premier tracé. Ils s'arrêtent avant de réaliser leur action.
13	Gaëtan s'adresse au groupe : « Il *fallait mesurer le …le truc de l'équerre. L'équerre.* »
14	Paul prend le gabarit d'angle droit au sol.

En (12), un raisonnement est produit, il se situe au niveau (M-2) : les élèves perçoivent le caractère erroné de leur raisonnement initial. Ils prennent conscience qu'il leur manque une information concernant la position relative des deux côtés consécutifs du quadrilatère. Cette prise de conscience (anticipation sur le résultat du tracé du second côté) s'appuie sur des connaissances spatiales implicites. L'intervention de Gaëtan (11) se situe en (M-1) : il parvient à anticiper la rétroaction du milieu.

Du point de vue de l'analyse sémiotique, la formulation de Gaëtan (13) constitue un indice de l'énoncé de la propriété géométrique sous-jacente « La reproduction d'un triangle à partir des mesures de 2 segments consécutifs nécessite de déterminer la mesure de l'angle qu'ils forment sur la figure modèle ».

Il s'agit d'une intuition quant à l'utilisation de l'équerre (cet outil pourrait permettre de conserver la mémoire d'un angle).

	Prise d'informations sur le modèle
14	Gaëtan superpose le gabarit sur le modèle. Il fait coïncider un côté du gabarit soit avec un côté du modèle soit avec le pli marquant la diagonale.
15	Un angle du gabarit correspond à l'angle entre un côté du modèle et la diagonale marquée par le pli.

Le raisonnement produit au niveau (M-2) a pour fonction de prendre une information. Il y a adaptation des schèmes d'usage de l'artefact et donc instrumentalisation, ainsi qu'un enrichissement au niveau heuristique.

	Tracé	
16	Gaëtan pose le gabarit le long du segment déjà tracé et indique :« *Donc là, on a la moitié* »	
17	Il repère le sommet de l'angle droit du gabarit.	
18	Gaëtan cherche à positionner « l'équerre » pour tracer le deuxième côté, il formule : « *Donc c'est le double de l'équerre* ».	
19	Gaëtan remet « l'équerre » dans la position initiale : « ah voilà comme ça »	
20	Retourne « l'équerre »	
21	Superpose le tasseau à un côté de « l'équerre » pour tracer le deuxième côté.	

Gaëtan produit un raisonnement qui articule la formulation et l'interprétation des rétroactions (niveau (M-2)) avec la justification en partie implicite des propriétés et caractéristiques de la figure (M-1). Ce raisonnement a pour fonction de reporter un angle.

Au niveau du répertoire il y a mise en œuvre de connaissances sur la symétrie. Le repérage du sommet de l'angle droit du gabarit permet de matérialiser l'axe de symétrie avant la construction du symétrique de l'angle. L'axe de symétrie n'est pas tracé mais il est repéré par deux points.

Les signes produits sont un indice du repérage de la symétrie. Pour aider à placer le gabarit, Paul fait coïncider deux sommets avec les repères placés au sol. Chaque sommet est maintenu en place par un de ses index.

A ce stade de la construction, les élèves disposent de la direction du côté qu'ils veulent tracer. Il leur reste à déterminer sa longueur.	
22	Gaëtan : « On *l'a pris du mauvais côté, mais c'est pas grave.* » Paul : « C'est *pas grave* » Marie : « *Tu as besoin de faire qu'une marque à mon avis c'est tout de la même longueur.// C'est tout de la même longueur* »
23	Les trois élèves coopèrent pour tracer un segment de même longueur que le premier.
24	Après s'être relevée Marie regarde le tracé : « *C'est tout de la même longueur* ».

Les élèves n'ont pas positionné le tasseau correctement. La marque qui repère la longueur du côté à reproduire correspond à la longueur du premier côté. Marie conjecture que tous les côtés ont la même longueur et donc que cela n'a pas d'importance. Elle formule au niveau (M-1) un raisonnement qui permet de justifier le tracé en lien avec une propriété conjecturée du modèle.

Le groupe n'a pas été filmé en continu. Pour la partie manquante de la vidéo (étapes 25 et 26) nous reconstituons les actions effectuées à partir des formulations des élèves recueillies au moment de la mise en commun. Nous nous appuyons également sur les tracés encore présents au sol qu'ils soient conservés par le groupe ou mal effacés.

	Tracé
25	Les élèves tracent un troisième côté suivant le même principe (même angle, même longueur). Ils se rendent compte visuellement que le dessin produit ne correspond pas à l'attendu et décident d'utiliser la diagonale pour compléter leur dessin.

	Prise d'informations sur le modèle
26	Les élèves reportent sur le tasseau, la longueur de la grande diagonale du modèle.

	Tracé	
27	Les élèves placent le tasseau au sol le long des deux points qui ont servi à reporter l'angle (en 17), à savoir un sommet du losange et un point de la grande diagonale.	
28	Paul trace la diagonale « en une fois ».	
29	Les élèves se relaient pour effectuer les derniers tracés qui consistent à relier l'extrémité de la diagonale aux extrémités des côtés déjà construits.	
30	Après le dernier tracé Marie se relève et observe le dessin : « *Là c'est ça, ouais, là c'est bon* »	

On constate l'alternance de vérifications « à l'œil » (qui mobilise des connaissances spatiales) et de l'utilisation instruments.

Les élèves identifient le concept d'angle avec l'instrument « équerre » (ils font d'une certaine manière l'amalgame), puis s'en détachent progressivement, en effet ils formulent le terme d'« angle » lors de la mise en commun.

Gaëtan se positionne à plusieurs reprises au niveau (M-1), en effet non seulement il décrit les actions sur les objets et leur but mais encore il fait référence aux propriétés géométriques et aux caractéristiques de la figure autrement dit, il prend en compte les conditions des actions sur les objets.

Les trois élèves observés coopèrent, on perçoit très nettement l'importance des échanges entre eux. Pour le tracé des segments, deux d'entre eux tiennent le tasseau, le troisième effectue le tracé à la craie.

On constate le rôle des essais, l'importance des raisonnements erronés qui sont invalidés par le groupe. Ces étapes n'apparaissent pas spontanément dans les formulations ultérieures. Il revient à l'enseignant d'amener les élèves à expliciter leur cheminement. Dans cette démarche les connaissances spatiales sont essentielles. La situation est telle que les seules connaissances spatiales des élèves sont insuffisantes pour réussir la tâche. Par contre, elles sont essentielles dans la phase de recherche pour invalider des actions.

On observe des fonctionnements différents entre les trois élèves : Gaëtan formule en même temps qu'il effectue l'action. Marie fait souvent des commentaires après s'être relevée, quand elle observe le modèle ou le tracé « de haut ». Paul reformule souvent à l'identique les propos de ses camarades. C'est un élève dyspraxique qui travaille pour la première fois sans son AVS. Il coopère aisément avec ses camarades et participe pleinement aux actions du groupe. Cela contraste avec les difficultés qu'il rencontre quand il travaille dans le micro-espace.

V - CONCLUSION

A travers l'analyse clinique de cette situation de reproduction de figures planes dans le méso-espace, mise en œuvre dans une classe de fin de primaire, nous avons cherché à déterminer en quoi la confrontation des élèves à des situations d'apprentissage adidactiques dans le méso-espace favorise l'élaboration de raisonnements variés et la construction de concepts géométriques. L'étude détaillée des raisonnements élaborés lors des phases d'action a été rendue possible par la mise en œuvre de notre modèle d'analyse des raisonnements. Ce dernier a contribué à réaliser une étude approfondie des différentes formes de raisonnements, en privilégiant trois dimensions : la fonction des raisonnements, la situation associée en lien avec le niveau de milieu correspondant et l'identification des connaissances en jeu, nécessitant dans certains cas le recours à une analyse sémiotique.

Nous avons ainsi établi que faire vivre aux élèves des situations dans le méso-espace associant la prise de décisions, l'utilisation des instruments et la manipulation de figures (rotation, translation, pliage) favorise la construction d'un répertoire de connaissances et de savoirs dans le domaine spatio-géométrique. Cependant il est également nécessaire que la situation autorise des modes de validation des productions afin que l'élève puisse obtenir, suite à ses actions, des rétroactions signifiantes lui permettant de mesurer l'écart entre sa réalisation et l'attendu. Celles-ci lui permettent alors de prendre conscience de la validité ou de la non validité de son raisonnement et éventuellement d'envisager la mise en œuvre d'une nouvelle procédure.

Par ailleurs nous avons établi (Gibel et Blanquart, 2017) qu'au cours de cette même séquence les phases de formulation des procédures contribuent à générer une dialectique action-formulation particulièrement propice à une explicitation des connaissances et des savoirs géométriques qui sous-tendent les raisonnements des élèves. Cette dialectique conduit à un enrichissement du répertoire didactique de la classe. L'analyse didactique permet aussi de rendre compte de la variété des propriétés géométriques mobilisées pouvant faciliter le passage d'une géométrie instrumentée à une géométrie déductive.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Berthelot, R., et Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans le cycle obligatoire* (Thèse de doctorat). Université Bordeaux 1, Bordeaux.

Berthelot, R. (2000.) *Quelques moyens pour placer l'espace au centre de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et pour préparer tant l'enseignement technique de l'espace que l'enseignement mathématique du premier cycle*. Actes du XXVIIème colloque COPIRELEM. IREM Grenoble, France.

Berthelot, R. et Salin, M.-H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x*, (56), 5-34.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 135-193.

Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.* Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7, Paris.

Bloch, I. et Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 31(2), 191-228.

Bloch, I. et Osel, C. (2009). *L'apprentissage de la géométrie à l'école primaire : analyse d'une progression centrée sur les problèmes spatio-géométriques et leurs représentations.* Actes du XXXVIème Colloque COPIRELEM. IREM Toulouse, France

Bloch, I et Pressiat, A. (2008), L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège : situations et connaissances in Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques, Actes de la XIV École d'Été : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Bloch, I. et Salin, M.-H. (2004). *Espace et géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège*, Actes du XXXVIème Colloque COPIRELEM. IREM Marseille, France.

Brousseau, G. (2000). Espace et géométrie. Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques du Département des Sciences de l'éducation de l'Université de Crète à Réthymnon.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. and Gibel, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics* (59), 13-58.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 16(3), 349-382.

Everaert-Desmedt N. (1990). *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de CS Peirce.* Liège, Belgique : Mardaga.

Gibel, P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement en classes de mathématiques à l'école primaire* (Thèse de doctorat). Université Bordeaux 2-Victor Segalen, Bordeaux.

Gibel, P. (2008). Analyse en Théorie des Situations Didactiques d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, (13), 5-39.

Gibel, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et Didactique*, 9(2), 51-72.Gibel, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. Note de synthèse de l'Habilitation à Diriger les Recherches soutenue à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour le 28 mars 2018.

Gibel, P., Blanquart-Henry S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : Étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace, *Revue des Sciences de l'Education*, 43-1, 37-84.

Henry, S. (2014) *Analyse didactique d'une situation de communication en géométrie plane.* (Mémoire de master non diffusé), Université de Bordeaux, Bordeaux.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, (11), 175-193.

Oléron, P. (1977). *Le raisonnement*. Paris, France: Presses universitaires de France.

Pierce, C.S. (1995). *Le raisonnement et la logique des choses* (Trad. par Chauviré C., Thibaud).

Petitfour, E. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème* (Thèse de doctorat) Université Paris-Diderot, Paris.

Salin, M.H. (2014). Que peut-nous apprendre l'observation d'élèves de 11 ans confrontés à un problème «spatio-géométrique ? *Math-école,* (222), 2-7.

VII - ANNEXE

Analyse a priori de la situation d'apprentissage

1. Sur le plan mathématique

- La réponse attendue est :
  - La vérification de la nature de la figure modèle.
  - L'organisation des prises d'informations et tracés et la réalisation de la figure demandée conformément au contrat didactique.
  - La formulation des étapes de construction avec l'explicitation et la justification des procédures utilisées.
- Procédures attendues (idoines) présentées de façon détaillée et construites à partir du répertoire didactique de la classe :

Première partie : procédures attendues pour les prises d'informations sur la figure initiale.

Report ou comparaison de longueurs : utilisation de la ficelle ou du tasseau, pliage.

Report d'angle : fabrication d'un gabarit d'angle.

Détermination du milieu des diagonales : pliage de la figure modèle, tracé de ses diagonales ou utilisation de la ficelle pliée en deux.

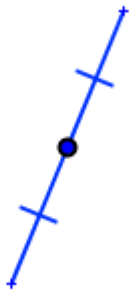
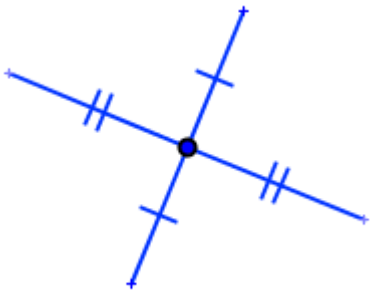
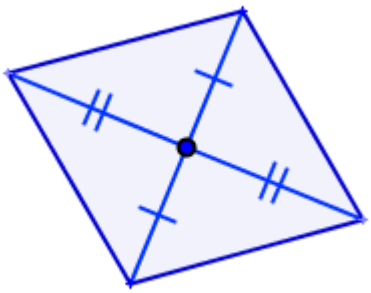
Deuxième partie : procédure attendue pour vérifier la nature de la figure

Comparaison des longueurs des côtés du quadrilatère à l'aide de la ficelle, du tasseau ou par double pliage.

Troisième partie : procédures attendues pour l'organisation du tracé.

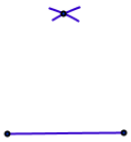
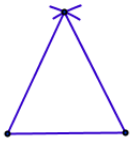
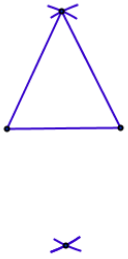
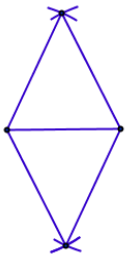
Procédure 1 : par utilisation en acte des propriétés des diagonales d'un losange.

- Tracé d'une diagonale et de son milieu.
- Tracé de la deuxième diagonale perpendiculaire et de même milieu.
- Tracé des côtés du losange.

		
Etape 1	Etape 2	Etape 3

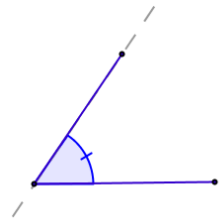
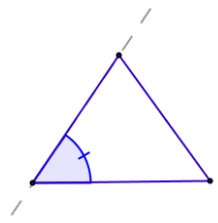
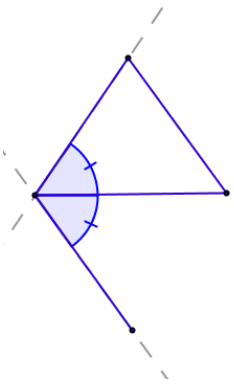
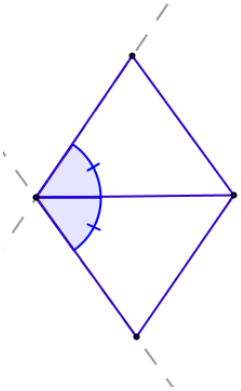
Procédure 2 : décomposition du losange en deux triangles isocèles isométriques de même base et report de longueurs.

- Tracé d'une diagonale
- Tracé d'un triangle isocèle ayant cette diagonale pour base en utilisant la ficelle pour reporter les longueurs.

				
Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5

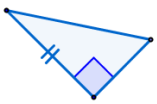
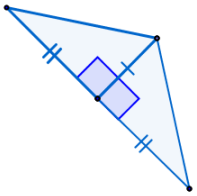
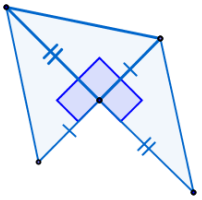
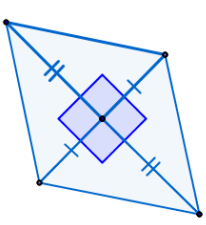
Procédure 2 bis : décomposition du losange en deux triangles isocèles isométriques de même base et report d'un angle.

- Tracé d'un côté d'un des deux triangles isocèles.
- Tracé d'un second côté par report d'un angle.
- Tracé du troisième côté de ce triangle.

				
Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5

Procédure 2 ter : décomposition du losange en deux triangles équilatéraux ayant un côté commun (dans le cas d'un losange dont les angles aigus ont pour mesure 60°)

Procédure 3 : décomposition du losange en quatre triangles rectangles

			
Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4

2. Sur le plan didactique

a) Les élève sont confrontés initialement à une situation d'action permettant différents niveaux de rétroaction et ensuite lors de la mise en commun à une situation de communication visant à formuler la démarche de réalisation.

b) Les principales variables didactiques sont :

- Les dimensions des losanges à reproduire : d'une part la longueur des côtés et d'autre part la valeur des angles.
- La nature du support qui permet ou non d'avoir recours à une procédure de pliage. Nous avons fait le choix d'une matière (tissu) qui permet d'effectuer des pliages et d'en conserver la trace.
- Les outils mis à disposition des élèves et en particulier le rapport entre la longueur des tasseaux et la longueur des diagonales, le type de gabarit d'angle droit fourni (équerre « cassée », feuille de papier à plier…).
- La présence ou non d'une trace de pli (axe de symétrie) sur les figures à reproduire.

c) Scénario envisagé : dans cette situation les élèves travaillent en groupes hétérogènes, mixtes (CM1/CM2) de 3 à 4 élèves.

- Dévolution de l'activité : en classe le maître donne la consigne, la fait reformuler et présente le matériel qui n'est pas familier en le nommant (les tasseaux). Il précise la composition des groupes qui est affichée au tableau.
- Mise en situation d'action : sous le préau les élèves sont répartis par groupes. Chaque groupe prend connaissance de la figure à reproduire et de l'espace attribué à cet effet. Les instruments et outils sont mis à disposition de tous les élèves. Après reformulation de la consigne les groupes sont mis en activité pour une durée de 20 minutes.
- Mise en commun et validation : à l'issue de la phase d'action chaque groupe présente son tracé à l'ensemble de la classe et explicite sa démarche en précisant les étapes de construction et les outils utilisés. Le groupe valide ensuite en effectuant la superposition avec la figure modèle. Si l'écart entre la figure modèle et le tracé réalisé est inférieur à 1 cm la production est déclarée valide par l'ensemble de la classe.
- Institutionnalisation : de retour dans la classe une synthèse est faite des différentes procédures utilisées et du rôle de chaque outil.

d) Les difficultés prévisibles sont :

- Le maniement des tasseaux auquel les élèves ne sont pas familiarisés.
- La gestion des repères sur le tasseau (oubli de l'origine, confusion entre les différentes marques inscrites sur le tasseau)
- Le manque de précision dans le report des longueurs, en particulier lors de l'usage de la ficelle.
- La nécessité d'effectuer de nombreux allers retours entre le modèle et la figure reproduite par manque d'anticipation et d'organisation de l'action. La durée de l'activité étant limitée.
- Le non transfert des connaissances acquises dans le micro-espace dans un espace de travail nouveau.
- Le manque de coordination au sein du groupe pour organiser les prises d'information et les tracés.
- La difficulté à prendre des décisions quant aux choix des informations à prendre sur la figure modèle.

e) Aides et différenciations envisagées

- La figure en papier peut avoir été pliée pour marquer une ou les deux diagonales.
- Des questions peuvent être posées aux groupes en difficulté : de quelle information avez-vous besoin ? Quel outil pourrait vous être utile ?
- Si un groupe a terminé son tracé avant les autres il sera invité à rédiger par écrit les procédures utilisées pour la reproduction de la figure.

f) la validation est faite par les élèves par superposition de la figure modèle sur la figure reproduite.

QUAND SOIXANTE ETUDIANTS MANIPULENT POUR APPREHENDER L'UNIVERS DES GRANDEURS ET SES ASPECTS DIDACTIQUES…

Céline MOUSSET
Maître-assistante, HELHa
moussetc@helha.be

Résumé

Nous présentons un dispositif avec artefacts vécu par les étudiants en début de formation d'instituteur primaire (Belgique). L'ambition principale de ce dispositif est de parcourir l'ensemble des aspects de l'apprentissage d'une grandeur pour les enfants de 3 à 12 ans, en mettant l'accent sur l'importance de la pratique des gestes de mesurage et l'intérêt de l'élaboration de représentations mentales, depuis les activités de sériation jusqu'à la construction et l'utilisation des abaques. Nous en proposons différents niveaux d'analyse en lien avec la littérature mais également en référence à un sondage mené auprès des étudiants. Nous tentons d'identifier son impact au niveau de leur pratique professionnelle et de leur prise de conscience des enjeux didactiques du domaine.

I - CONTEXTE DU DISPOSITIF

Avant de décrire le dispositif en lui-même, commençons par identifier à qui il est destiné, dans quel cadre et avec quels objectifs.

1 Pour qui ?

Le dispositif relaté ici fait partie du programme des étudiants de Bloc 1 (1ère année) instituteur primaire proposé à la HELHa (Haute Ecole Louvain en Hainaut), dans l'implantation de Mons. En Belgique, le public qui s'inscrit en formation initiale d'instituteur primaire est extrêmement varié. Etudiants au parcours « sans faute » ou ayant connu l'échec scolaire (et parfois de façon répétée), émanant de filières générales, techniques ou professionnelles, fraichement en possession de leur diplôme d'études secondaires (équivalent du bac français) ou adultes plus âgés en reprise d'étude, encore préservés de la gestion quotidienne des contingences matérielles ou parents responsables des besoins d'une famille… Il va de soi que leur passé mathématique et leur relation à celles-ci présente un vaste panel de cas, plus souvent souffrants que glorieux. Et pourtant, il s'agit de tous les accompagner dans la formation au métier, dans un temps qui nous paraît très court, à nous, didacticiens.

Beaucoup d'étudiants conçoivent au départ l'enseignement comme un acte de transmission pure de savoirs, accompagné de bienveillance : ils disent régulièrement aimer l'animation et le contact avec les enfants. Quant à l'apprentissage des grandeurs, il est souvent réduit, dans leurs représentations, au fait d'effectuer des conversions dans des abaques. C'est donc dès les premières semaines de formation que nous choisissons de placer les étudiants en situation de manipulation, d'expérimentation, de réflexion.

2 Quel cadre ? Quels objectifs ?

Les activités auxquelles s'intéressent ce texte se déroulent dans le cadre des Ateliers de Formation Professionnelle (AFP) qui ont pour but de fournir aux étudiants des outils pratiques accompagnés d'un recul pédagogique et didactique, en vue d'un transfert dans des classes d'écoles primaires. A cet effet, chaque AFP est cogéré par un didacticien, un psychopédagogue et un instituteur primaire partiellement détaché de sa classe, appelé Maître de Formation Pratique (MFP). Ceci assure un triple regard sur les thématiques développées. L'évaluation de l'ensemble des AFP prend la forme de la présentation orale

d'un portfolio collectant le travail réalisé au fil de l'année, des traces de transfert et des apports personnels en lien avec les didactiques et les disciplines.

Nos objectifs spécifiques à l'atelier « grandeurs » vont encore au-delà : nous souhaitons réellement bousculer les étudiants dans leurs représentations de l'enseignement en général, des grandeurs en particulier, les engager dans un chemin réflexif par rapport aux pratiques d'enseignement et, enjeu de taille, commencer à réparer leur relation aux mathématiques.

II - PRESENTATION DU DISPOSITIF

Trois temps majeurs peuvent être identifiés, qui constituent les étapes-clés du dispositif de formation qui nous occupe : un temps d'expérimentation de tâches transférables à l'école primaire, un temps de prise de recul sur ce qui a été vécu et enfin un temps de transfert où les étudiants en formation passent eux-mêmes à l'action dans des classes, avec des enfants.

1 Les ateliers

Le jour de l'AFP « Grandeurs », neuf ateliers autour des longueurs, masses et capacités attendent les étudiants répartis en groupes de cinq à six personnes. Ils proposent de manipuler et d'expérimenter (en accord avec le sens accordé à ces termes dans Dias, 2017) de façon qualitative et quantitative autour des axes suivants.

- Approche qualitative
    - Atelier 1 : invariance (conservation)
    - Atelier 2 : rangement (sériation)
- Approche quantitative, étalons non conventionnels
    - Atelier 3 : choisir l'étalon
    - Atelier 4 : mesurer avec des étalons non conventionnels
    - Atelier 5 : systèmes d'étalons non conventionnels
    - Atelier 6 : limite des étalons non conventionnels…
- Approche quantitative, unités conventionnelles
    - … et découverte d'une unité conventionnelle de base
    - Atelier 7 : fractions du kilogramme
    - Atelier 8 : sous-multiples du litre, rapports décimaux
    - Atelier 9 : sous-multiples du gramme

L'annexe 1 reprend une description sommaire de ces neuf ateliers.

Sur la demi-journée (3h45) que dure cette partie du dispositif de formation, chaque étudiant est invité à compléter un carnet de bord personnel contenant les consignes des expérimentations ainsi que des questions l'amenant à s'interroger tantôt sur les difficultés sous-jacentes aux tâches vécues, tantôt sur les démarches de résolution, sur l'intérêt des activités voire leur transfert.

Les neuf ateliers de notre AFP ont émergé d'idées glanées au fil de nos lectures, de formations suivies, d'observations dans les classes. Pointons cependant trois sources qui nous ont donné des repères majeurs : Guéritte-Hess et al. (2005), Lucas et al. (2013) et, dans une moindre mesure, Roegiers (2011).

2 Prise de recul

Dans les deux semaines qui suivent l'AFP, une activité d'analyse et de structuration a lieu. Les étudiants reçoivent, par trois ou quatre, une collection de bandelettes de deux types, toutes mélangées. Certaines reprennent les axes spécifiques travaillés dans les ateliers :

- « Approche qualitative »
- « Choix/utilisation d'un étalon pour mesurer »
- « Unité conventionnelle de base »
- …

D'autres énoncent de façon succincte des tâches similaires à celles vécues dans les ateliers mais transférées à une autre grandeur. Par exemple, dans l'atelier 2, la sensibilisation à la question de

l'invariance se fait autour des capacités ; et parmi les bandelettes, on retrouve cette proposition : « La longueur d'une ficelle ne dépend pas de sa position ou des déformations qu'on peut lui faire subir (tendue, en zig-zag, ...) ». L'exercice qui consiste en la réorganisation des bandelettes est loin d'être évident pour eux. Ils n'identifient pas immédiatement la similarité avec les activités qu'ils connaissent, ils sont en difficulté pour dégager l'axe travaillé par chaque tâche. Le recours au carnet de bord soutient leur prise de recul, via la reconnexion à leur vécu et la structure du carnet lui-même.

Nous reprenons alors chaque atelier de façon plus systématique. Nous en dégageons ensemble les contenus disciplinaires et didactiques. Le débat est alimenté par les notes réflexives prises par chacun dans son carnet de bord et est structuré par un document de synthèse assez étoffé vers lequel les étudiants sont orientés pour une appropriation personnelle plus approfondie.

Deux séances de deux heures sont nécessaires pour effectuer correctement cette phase de prise de recul. Parfois, les contraintes horaires nous obligent à une condensation de l'activité sur une seule séance ; la priorité est alors mise sur le travail d'organisation et de premiers transferts autour des bandelettes et le partage de quelques traces réflexives, la synthèse fournie devenant alors le référent principal pour une structuration individuelle ultérieure des éléments de didactique.

3 Transfert pratique

A notre demande, lors des premières séances qu'ils gèrent en classe de stage, un bon nombre d'étudiants se voient confier une leçon de grandeur en lien avec les domaines et les axes envisagés en AFP. C'est l'occasion rêvée pour eux de s'essayer à la pratique dans des conditions sécurisantes en implémentant, à la lettre ou sous une forme adaptée, l'une des démarches proposées. C'est aussi pour nous une opportunité en or de vérifier le transfert qu'ils peuvent faire de l'AFP qui nous occupe. Ce transfert est accompagné lors de séances de préparation en petits groupes puis dans un dispositif de « micro-enseignement », au cours duquel les étudiants mettent en situation un groupe composé d'un didacticien, un psychopédagogue et quelques autres étudiants ; une discussion s'en suit sur la démarche à l'essai, qui mène à des aménagements de la proposition initiale pour plus de pertinence et d'efficacité.

III - ANALYSE DU DISPOSITIF

En quoi ce dispositif est-il pertinent dans le cadre de la formation initiale des instituteurs primaires ? Nous collectons, de façon non exhaustive, quelques éléments de réponses issus de points de vue variés.

1 Des arguments pédagogiques

Meirieux (2015) parle du *principe d'isomorphisme si fondamental et encore trop souvent oublié : on sait, en effet, depuis des travaux effectués dans les années 1960 et largement confirmés depuis, que « les enseignants ne font jamais avec leurs élèves ce qu'on leur a dit de faire, mais ce que l'on a fait avec eux »… (…) Cela suppose de passer, quand on veut former des professionnels, d'une logique de l'enseignement (qui reste la matrice de l'université) à une logique de la formation qui articule lucidement différents moments pédagogiques avec le souci de l'appropriation des connaissances, mais aussi de leur « unification » et de leur transfert dans des situations nouvelles.* Nous nous plaçons dans cette perspective. Contraints par les réalités horaires de la formation, nous choisissons d'aller à ce qui nous semble être un essentiel négligé au niveau de l'apprentissage des grandeurs : l'expérimentation au service de l'acquisition de gestes de mesurage raisonnés et de l'élaboration de représentations mentales. Ces essentiels sont réellement vécus par les enseignants en formation, comme, nous l'espérons, ceux-ci les feront vivre par les enfants dans leurs classes.

Pour affiner l'analyse, nous nous référons à Danse & Faulx (2015) qui précisent les concepts d'isomorphisme réfléchi et d'isomorphisme réflexif. L'isomorphisme réfléchi consiste à faire vivre en formation des activités similaires à celles à proposer aux enfants mais dans un timing adapté et avec quelques questions spécifiques pour enseignants. C'est le cas des neuf ateliers : comme précisé sur les documents reçus par les étudiants, chaque atelier travaille autour d'un axe, une compétence, un savoir, qui mérite à lui seul un bien plus large développement avec les enfants. Par ailleurs, dans des dispositifs en isomorphisme réflexif, on retrouve des temps de prise de recul, des moments de synthèse, une organisation structurée des activités, du transfert : notre propre dispositif y correspond donc pleinement.

Marcel Lebrun (dans Ludoviamagazine, 2013) parle du principe de cohérence, que ce dispositif met un point d'honneur à respecter. Il s'agit de veiller à un alignement entre les finalités, l'évaluation et les moyens. Dans le cas qui nous occupe, on peut identifier comme finalité l'acquisition de connaissances théoriques et didactiques au niveau des étapes de l'apprentissage des grandeurs, en vue d'un transfert pertinent dans des situations d'apprentissage en classe. Pour rappel, l'évaluation a lieu sur base d'un portfolio documenté avec apports personnels, dont des leçons données en stage, que l'étudiant sera capable de mettre en lien avec l'AFP (aspects théoriques et didactiques). Les moyens mis en œuvre et qui permettent l'alignement pédagogique sont le vécu d'activités et leur analyse pour les situer au niveau des apprentissages et en déceler la pertinence d'un point de vue didactique.

Toujours dans Ludoviamagazine (2013), Lebrun évoque la classe inversée (ou flipped classroom). Il rappelle qu'elle correspond au choix d'un apprentissage en présence alors que l'enseignement sera plutôt à distance : la partie « ex cathedra » est expulsée hors du lieu pour pouvoir faire autre chose en présentiel. Notre choix évoqué plus haut au niveau de la prise de recul s'inscrit dans ce principe pédagogique.

2 Des arguments méthodologiques

Situons l'AFP par rapport à dix principes méthodologiques issus de Lucas et al. (2013), dont l'esprit nous a largement inspirée. Pour ce faire, nous reprenons chacun de ces principes et nous relevons quelques-unes de leurs manifestations dans les ateliers.

2.1 Découvrir les grandeurs par le corps

L'ensemble du dispositif constitue un vécu physique pour les étudiants qui le suivent. Pointons notamment le fait que, par la suite, la seule désignation du coin du local dans lequel telle expérience a eu lieu suffit à les reconnecter à cette expérience.

Pour être par la suite confrontés avec la limite des étalons non conventionnels, les étudiants arpentent le couloir en pas, graduent leur pas en pieds, leur pied en pouces, bref, mesurent avec leur corps.

2.2 Recourir à beaucoup de matériel de cycle en cycle

Toutes les activités s'appuient sur un support matériel varié, dans les domaines des longueurs, masses et capacités. Balances de différents types (à plateaux, à fléau, peson, simple cintre), objets du quotidien pouvant servir d'étalons (objets allongés, petits récipients variés, collections de sucres, de billes, …) ou de sujets à mesurer (couloir, bouteilles, aliments, …) éveillent la curiosité et jouent parfois un rôle détourné par rapport à leur usage commun.

2.3 S'attarder sur l'approche qualitative des grandeurs

Deux activités sont caractéristiques de ce point. L'une d'elles sensibilise à l'invariance, dont les étudiants sont peu ou pas conscients. L'autre, via un simple travail d'organisation d'objets par ordre croissant de poids/masse, est une occasion d'aborder la complexité de cette structure logico-mathématique de base qu'est la sériation. Nous en profitons également pour éveiller la conscience des étudiants sur les gestes qui permettent de soupeser un objet, de comparer des poids, d'imiter les mouvements de la balance, de les interpréter.

2.4 Explorer le mesurage dans toute sa complexité

Utiliser un étalon ou un système d'étalons, transvaser, reporter, équilibrer, graduer sont autant de gestes expérimentés lors des activités. Les questions posées dans le carnet de bord veillent à faire expliciter les démarches et émerger ce qu'elles ont de complexe.

2.5 Se construire des repères dans les systèmes conventionnels

Les quatre derniers ateliers offrent l'occasion d'engranger des repères pour le mètre, le kilogramme et ses fractions, le litre et ses sous-multiples, le gramme et ses sous-multiples.

2.6 Ancrer les formules dans les expériences manipulatoires

Dans le cas qui nous occupe, ce principe méthodologique ferait plutôt références à la matérialisation des rapports décimaux existant entre les unités conventionnelles de mesure d'une grandeur via des expériences manipulatoires. En particulier, le constat, par graduation, qu'on peut remplir une bouteille d'un litre en y reportant dix fois un récipient donné confère un statut particulier à ce récipient, celui de décilitre (dixième de litre) et ancre dans un vécu le rapport de dix qui est imposé par le système métrique. Par la suite, c'est en utilisant la signification désormais connue du préfixe déci que l'enfant construit un décigramme de papier, via la résolution d'un problème de proportionnalité.

2.7 Tester la pertinence des démarches pour les mobiliser à bon escient

Lors d'une activité de pesage d'objets avec trois étalons non conventionnels différents, le carnet de bord invite les étudiants à se questionner sur la façon la plus efficace de peser la collection d'objets avec chacun des trois étalons.

2.8 Découvrir, par les grandeurs, l'ici et l'ailleurs, l'aujourd'hui et l'hier

Des tablettes sont à la disposition des étudiants pour deux recherches sur internet. L'une d'elles concerne l'invariance et nécessite de visionner des petites vidéos permettant de se familiariser avec les points de vue de Piaget et de Olivier Houdé (2009) à ce niveau (conservation versus inhibition). L'autre les met en recherche par rapport à Roberval et sa balance. Par ailleurs, les étudiants découvrent l'histoire du mètre par la lecture d'un texte de Denis Guedj (1995).

2.9 Découvrir, développer un vocabulaire particulièrement riche, précis, rigoureux

Ce principe méthodologique est travaillé via l'explicitation d'anciennes unités de mesure de longueur : pouce, paume, empan, pas, coudée, brassée. En outre, de la précision est attendue dans l'expression des réponses aux questions du carnet de bord. Cette exigence n'est malheureusement pas assez soutenue à cause de la taille du groupe et du dispositif, et par conséquent de notre incapacité à nous trouver partout à chaque instant pour relancer, faire expliciter, corriger, préciser. En rehaussant son niveau de langage, tout enseignant rehausse celui des apprenants : nous y veillons lors de la prise de recul.

2.10 Pratiquer de l'interdisciplinarité en lien avec les grandeurs

Le dispositif décrit ici n'ambitionne pas de travail en interdisciplinarité.

En conclusion, si l'on adhère aux dix principes méthodologiques prônés dans Lucas et al. (2013), il semble que les neuf ateliers dont parle cet article soient de bonnes occasions de les vivre de près ou de loin. Les amener à la conscience des étudiants est un autre travail que, pour le moment, nous n'avons jamais entrepris explicitement : à faire à l'avenir ?

3 Sondage auprès des étudiants

En mai 2018, nous avons mené l'enquête auprès des étudiants encore en formation initiale. Notre volonté était de tenter de cerner l'impact qu'avait eu le dispositif « grandeurs » sur leurs conceptions de l'enseignement des mathématiques. Cent-deux étudiants de Bloc 1, Bloc 2 et Bloc 3 ont répondu à un questionnaire. Voici leur répartition en fonction de l'année civile au cours de laquelle ils ont vécu l'AFP.

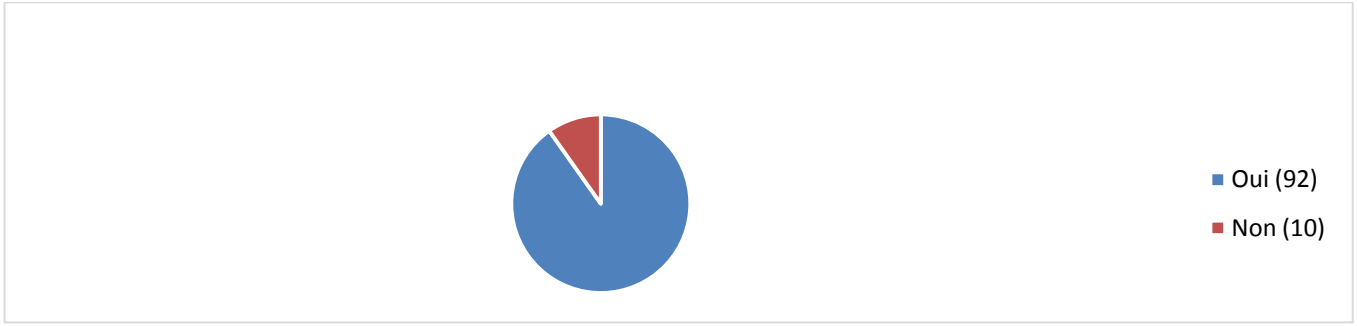


Figure 1. Répartition des étudiants en fonction de l'année de suivi de l'AFP

A la question « Ce dispositif a-t-il changé votre représentation du métier d'instituteur au niveau du travail des grandeurs avec les enfants ? », 92[190] étudiants sur 102 répondent « oui ». Parmi les réponses « non », 5 étudiants mentionnent qu'ils ont eux-mêmes vécu des approches similaires à l'école primaire.

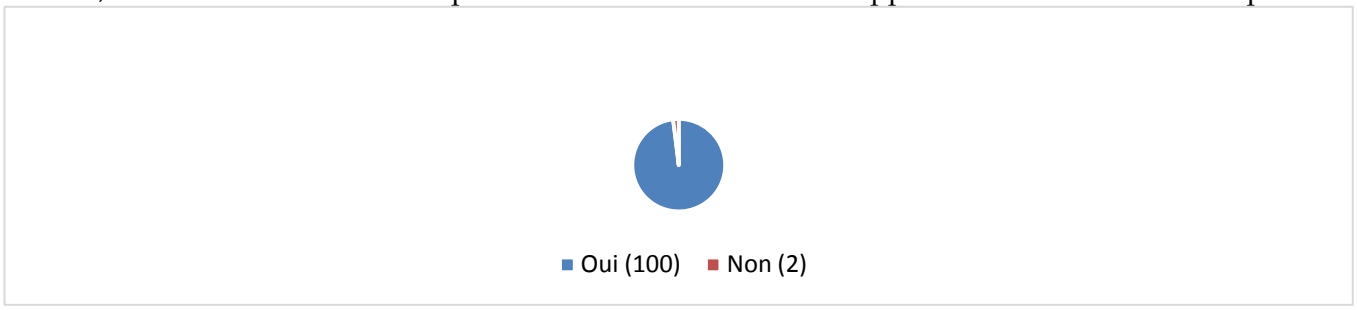


Figure 2. Modification des représentations du travail des grandeurs

Si l'on approfondit le contenu des 87 réponses positives argumentées, 36 soulignent le côté ludique des activités. Notre première réaction pourrait être du découragement : un tiers des étudiants n'auraient-ils pas perçu que les ateliers étaient des occasions d'apprendre, et pas de jouer ? En relisant attentivement les réponses, ce résultat s'avère en fait une forme de succès : il est bien le signe que les étudiants ont pris du plaisir en travaillant et que leur relation aux mathématiques a amorcé son processus guérison, nous ne pouvons que nous en réjouir !

51 répondants disent avoir pris conscience de l'existence d'une autre façon de faire des mathématiques, en faisant manipuler les enfants, en les rendant acteurs dans leurs apprentissages, en travaillant sur des objets de la vie de tous les jours ; 24 parlent de l'importance de la construction d'images mentales ; 4 soulignent le fait de construire du sens. La pratique d'isomorphisme semble avoir porté ses fruits : nous avons « fait autrement » avec eux et ils réalisent qu'eux aussi peuvent « faire autrement » avec les enfants.

Au niveau des contenus d'apprentissage, 8 étudiants relèvent le fait qu'ils ne se rendaient pas compte de ce qui se cachait derrière les grandeurs, que ça les a éclairés sur la question. 3 disent avoir pu se mettre à la place des enfants et percevoir ainsi les enjeux, 2 évoquent le fait d'avoir consolidé leurs propres apprentissages.

Le fait de vivre activement les ateliers plutôt que, par exemple, en prendre connaissance via un exposé ou un écrit méthodologique, semble incontestablement impacter les étudiants. Pour 100 d'entre eux, cela permet d'identifier plus facilement les contenus (savoirs et savoir-faire) ; un seul mentionne que « c'est facile puisque c'est de la matière du primaire ». Pour 99 répondants, le vécu engendre une meilleure identification des difficultés possibles des enfants.

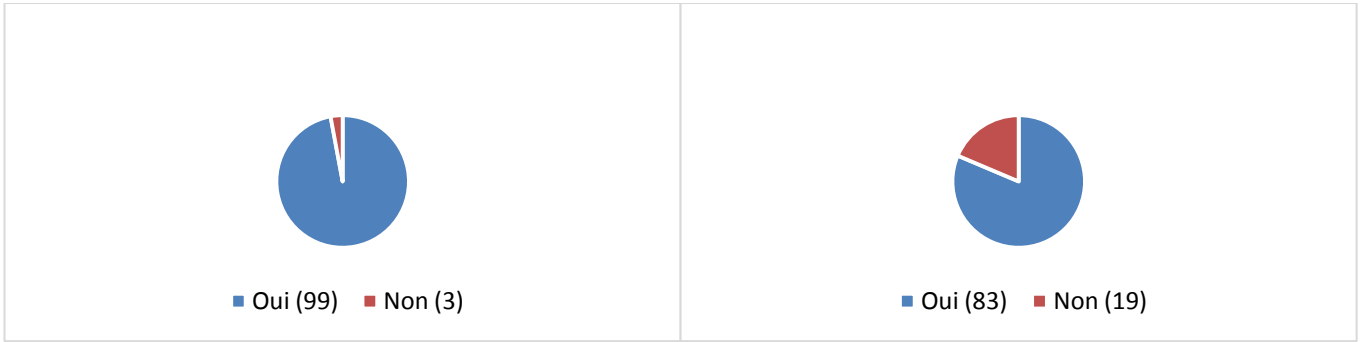


Figure 3. Impact du vécu des ateliers sur l'identification des contenus et des difficultés possibles des enfants

190 Afin de fluidifier la lecture des résultats de l'enquête, nous écrivons dans cette partie les nombres en chiffres.

Les ateliers qui les marquent le plus sont, loin devant, celui où ils doivent choisir le bon étalon (atelier 3), puis, à notre grand étonnement, la sensibilisation à l'invariance, qui constitue une découverte pour beaucoup. Ensuite, le travail autour des fractions du kilogramme et de la découverte du décilitre leur fait percevoir des enjeux dont ils n'étaient pas conscients.

83 participants disent que l'AFP leur a permis d'améliorer leurs propres savoirs et savoir-faire autour des grandeurs. 87 identifient un bénéfice au niveau de leurs représentations mentales de l'acte de mesurage avec un étalon.



Figure 4. Impact du vécu des ateliers sur l'amélioration des savoirs et représentations mentales des étudiants

Parmi les réponses « non », 3 étudiants disent avoir progressé en méthodologie et didactique mais déjà maîtriser les contenus avant. 1 avoue avoir de grosses difficultés en grandeurs, et « n'avoir pas tout compris » ; on peut supposer que le niveau de complexité et de densité du dispositif ne l'a pas permis d'avancer.

4 Conclusion

La présente analyse nous révèle un dispositif global en isomorphisme réfléchi et réflexif, contenant un peu de classe inversée. Il respecte le principe de cohérence, prônant l'alignement pédagogique entre les finalités, l'évaluation et les moyens. Les démarches méthodologiques qu'on peut y identifier sont en phase avec les principes identifiés dans Lucas et al. (2013), auxquels nous adhérons. Le sondage semble montrer que les étudiants y retrouvent du plaisir à faire des mathématiques, y apprennent des démarches méthodologiques qui modifient leur conception de l'enseignement des grandeurs, y améliorent leurs propres savoirs et savoir-faire.

Mais…

IV - LIMITES ET PERSPECTIVES

Voyons les limites de ce dispositif jusqu'ici présenté de façon idyllique et tentons d'envisager des pistes d'amélioration.

1 Réalité du transfert

Le sondage révèle que seuls 62 étudiants sur 102 ont déjà personnellement utilisé le contenu de l'AFP dans leurs stages. C'est à la fois beaucoup et peu. Même si l'on peut se réjouir de l'impact réel non négligeable de l'activité, notamment via l'adaptation de parties du carnet de bord que nous retrouvons à l'occasion dans les préparations de leçons de stage, nous aimerions que chaque étudiant ait l'occasion de s'essayer au transfert. La proximité temporelle entre leur propre vécu et leurs essais sur le terrain pourrait donner une meilleure chance au travail mené de porter ses fruits, tout en assurant une régulation des productions des étudiants dans les temps d'accompagnement des stages. Le risque existe que, non mis en pratique, les acquis en construction tombent dans l'oubli.

Comment se fait-il que tous les étudiants n'aient pas la possibilité de donner une leçon de grandeurs ? En réalité, ils vivent en réalité deux AFP de mathématiques, l'autre étant organisé de manière similaire autour de la construction de la numération décimale. Les maitres de stage se voient donc suggérer une liste de sujets liés aux deux thématiques. Ils n'ont, pour le moment, pas d'obligation de proposer aux stagiaires un travail autour des grandeurs. Un resserrage des contraintes pourrait paraitre la solution

toute désignée. Pourtant, les choses ne sont pas si simples. En Belgique, les maitres de stage qui accueillent dans leur classe les étudiants de Bloc 1 ne sont pas rémunérés. Il est parfois difficile d'en trouver en suffisance compte tenu du nombre d'étudiants. Dès lors, nous sommes déjà très heureux s'ils acceptent d'attribuer à leurs stagiaires au moins un sujet soit de grandeurs, soit de numération… Etant entendu que, malheureusement, ce n'est pas toujours le cas, et que nous n'avons, à vrai dire, aucun moyen de leur imposer réellement. Veiller à améliorer la communication avec les maitres de stage reste donc un point d'attention permanent.

Nous constatons également, sur le terrain, qu'il est vraiment difficile pour les étudiants de centrer leur séquence d'apprentissage sur un seul objectif. Souvent, nous les voyons « papillonner » autour de plusieurs compétences plutôt que de développer, d'approfondir une direction consciencieusement choisie. Est-ce une dérive du fait qu'eux-mêmes ont résolu de multiples défis avec de multiples objectifs en parallèle ? Notre discours est pourtant clair à ce sujet, mais dans les faits la prégnance de leur vécu semble prendre le dessus. On peut également noter, dans certains cas, une confusion des maitres de stage eux-mêmes à ce niveau. A ce jour, nous ne percevons pas de moyen de limiter ce biais du dispositif, si ce n'est, une fois encore, via une meilleure information des maitres de stage. Il est à noter qu'actuellement, en Belgique, les maîtres de stage ne reçoivent aucune formation spécifique, leur acceptation d'un stagiaire suffisant à leur conférer leur statut.

2 Tensions

Il est incontestable que s'impliquer dans neuf ateliers en une demi-journée représente un défi énorme pour des étudiants, encore plus en début de formation. La quantité d'information nouvelle à rencontrer, à intégrer, le nombre de tâches dans lesquelles nous leur demandons de s'investir, de se poser des questions, de se mettre en recherche, de verbaliser, de déduire, d'argumenter, génèrent une fatigue intellectuelle certaine et une saturation cognitive plus ou moins rapide selon les capacités et la volonté des étudiants. Dans l'enquête, seize étudiants soulignent cette densité de contenu dans un timing serré. Le risque existe donc que pour certains, la difficulté d'investir chaque tâche en profondeur puisse engendrer une perte de sens et un décrochage. Nous sommes bien conscients de ce phénomène, mais nous l'assumons pour le moment. En effet, nous apprécions la richesse de la vue d'ensemble donnée par la collection d'activités, offrant une belle cohérence verticale au niveau des apprentissages dans l'univers des grandeurs et se prêtant à une prise de recul. C'est l'occasion de souligner auprès de ces futurs enseignants l'importance d'avoir une conscience du sens global de ses pratiques et de la place des contenus qu'elles construisent dans l'ensemble du cursus.

Autre point de tension : le caractère précoce du dispositif dans la formation. Certains étudiants pourraient ne pas se sentir concernés par le propos puisqu'à ce stade, ils n'ont pas encore eu de stage. On pourrait voir une forme de gaspillage à faire vivre ce dispositif trop tôt ; c'est un peu l'avis de vingt-quatre étudiants, notamment de Bloc 3, qui jugent le timing prématuré. Néanmoins, on pourrait aussi avancer que, lorsque viendra le temps de s'essayer sur le terrain, les étudiants seront déjà en possession de méthodologies à essayer, dès le premier stage. Les documents en soutien au dispositif seront alors de précieuses ressources pour un retour vers les éléments manqués, oubliés, mal compris. Soulignons que septante-huit étudiants apprécient le timing proposé. Pour ceux-là, c'est une victoire par rapport à notre objectif de les bousculer au plus tôt dans leurs représentations du métier et des leçons de grandeurs. Il est amusant de voir que cet aspect n'est à la conscience que des étudiants de Bloc 1, les autres ayant surtout retenu le côté « outil pour leurs stages ».

3 Manque de temps

L'éternelle frustration de tout formateur, c'est le temps, toujours trop court. Pour le cas qui nous occupe, incontestablement, il serait facile de construire un module de formation d'une vingtaine d'heures autour de ces ateliers et de leur contenu. Le maigre débriefing que nous en faisons permet-il une prise de recul satisfaisante ? Rien n'est moins sûr, en tout cas pas pour chaque étudiant. Il est par exemple interpellant de constater que les ateliers les moins cités dans l'enquête sont précisément ceux face auxquels les étudiants sont eux-mêmes le plus en difficulté. Ceux-là nécessiteraient, à coup sûr, une attention particulière, un développement plus long, un réinvestissement que nous ne pouvons pas nous permettre

actuellement. Néanmoins, nous avons la chance de travailler en équipe et de pouvoir proposer un enseignement spiralaire sur les trois années que dure la formation d'instituteur primaire. En Bloc 2 par exemple, les axes méthodologiques envisagés pour l'apprentissage d'une grandeur sont revisités pour les aires et volumes. Et en Bloc 3, nous proposons un focus sur les contenus propres à la première primaire (CP) en vue de leur stage dans ce niveau d'enseignement. Ces regards multiples sur le sujet, à différents niveaux de maturité professionnelle des étudiants, nous apaisent quant au développement suffisant de leur expertise dans ce domaine.

4 Soixante étudiants, une enseignante

Être seule pour gérer neuf ateliers dans lesquels tournent soixante étudiants, c'est possible ! Cela nécessite évidemment une solide préparation matérielle et une organisation bien rôdée. L'outil essentiel à la réussite de l'activité dans son ensemble est sans conteste le carnet de bord. Au fil des ans, les consignes y sont devenues de plus en plus précises, les espaces prévus pour les traces de plus en plus adaptés, les tâches d'ordre métacognitif de plus en plus présentes. Les groupes d'étudiants investis et concentrés pourraient sans problème vivre le tout sans nous. Toutefois, force est de constater que notre présence change la donne. Lorsque nous parvenons à être au bon endroit, au bon moment, telle question posée force à approfondir une réponse un peu légère, telle relance permet d'avancer dans une recherche, tel trait d'humour invite à se remettre au travail lorsque la fatigue commence à s'installer. Sur une activité d'une telle ampleur, beaucoup d'étudiants, à ce stade précoce de formation, ont besoin d'étayage. Pour nous-même aussi, les interactions sont une richesse, notamment pour percevoir où les apprenants en sont dans leurs apprentissages et mesurer la pertinence des activités proposées. Le fait de ne pas pouvoir être davantage présente déforce la qualité de leur verbalisation, étape pourtant nécessaire à des apprentissages bien construits. Nous nous consolons en mettant une attention toute particulière à travailler de manière récurrente et transversale cette verbalisation tout au long de la formation. En outre, l'étudiant désireux d'analyser scrupuleusement chaque atelier reçoit, via les notes de synthèse et les références complémentaires, des armes pour y parvenir.

5 Le mot de la fin

À ce jour, l'ensemble des limites que nous avons identifiées ici ne suffit pas à nous décourager : les bénéfices multiples et durables nous paraissent largement justifier la mise en place de ce dispositif exigeant mais généreux.

V - BIBLIOGRAPHIE

Danse, C., & Faulx, D. (2015). *Comment favoriser l'apprentissage et la formation des adultes ?* Louvain-La-Neuve, Belgique : De Boeck Supérieur.

Dias, T. (2017). *Manipuler et représenter en mathématiques.* Paris : Magnard.

Guedj, D. (1995). Maître mètre depuis deux cents ans : la création du mètre étalon. Repéré à https://www.liberation.fr/sciences/1995/05/23/maitre-metre-depuis-deux-cents-ans-la-creation-du-metre-etalon_132602

Guéritte-Hess, B. et al. (2005). *Les maths à toutes les sauces. Pour aider les enfants à apprivoiser les systèmes numérique et métrique.* Paris : Le Pommier.

Houdé, O. (2009). *Le cerveau apprend en inhibant* [Vidéo en ligne]. Repéré à https://www.youtube.com/watch?v=KHf1dyvbv6A

Lucas, F. et al. (2013). *Explorer les grandeurs, se donner des repères.* Bruxelles : De Boeck.

Ludoviamagazine. (4 juin 2013). *Les compétences au cœur du dispositif pédagogique* [Vidéo en ligne]. Repéré à https://www.youtube.com/watch?v=BF7E6u6RIj0

Ludoviamagazine. (11 juin 2013). *La « flipped taxonomie » ou l'inversion de la taxonomie des compétences* [Vidéo en ligne]. Repéré à https://www.youtube.com/watch?v=BF7E6u6RIj0

Philippe Meirieu, P. (2015). Former les enseignants en établissement : un impératif. Repéré à http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2015/04/03042015Article635636383758830418.aspx

Roegiers, X. (2011). *Les mathématiques à l'école primaire. Tome 2.* Bruxelles : De Boeck.

VI - ANNEXE 1 : DESCRIPTION SOMMAIRE DES ATELIERS

Atelier 1. Sérier des objets par ordre croissant de poids/masse en soupesant, puis avec une balance de Roberval.

Atelier 2. Pouvoir affirmer qu'une quantité de liquide est conservée malgré le transfert d'un récipient à un autre ; argumenter.

Atelier 3. Une mesure étant donnée pour la longueur d'un personnage de papier, déterminer, parmi une collection d'objets présents, l'étalon avec lequel la mesure a été effectuée.

Atelier 4. Peser des objets en piles, en sucres, en billes.

Atelier 5. Marquer trois récipients étalons de façon à ce qu'ils soient organisés en système de base trois ; les utiliser ensuite pour mesurer des capacités.

Atelier 6. Mesurer le couloir en pas ; constater que la mesure diffère d'une personne à l'autre. Ensuite, prendre acte de ce qu'est le mètre et se construire des repères par rapport au mètre.

Atelier 7. Etablir, grâce à une balance à fléau suspendu, l'arbre des fractions du kilogramme avec représentations mentales et association d'écritures équivalentes en fractions du kg et poids exprimés en g.

Atelier 8. Transvaser un litre d'eau dans des petits récipients identiques à remplir jusqu'au trait ; graduer un litre grâce à ce même petit récipient imposé. Il va dix fois dans le litre : on va l'appeler décilitre.

Atelier 9. Connaissant le grammage des feuilles présentes sur la table, construire 1 g de papier, puis 1 dg, 1 cg, 1 mg.

VII - ANNEXE 2 : QUESTIONNAIRE SOUMIS AUX ETUDIANTS

Ce questionnaire a été mis en ligne avec l'outil Forms.

Les questions fermées nécessitaient obligatoirement une réponse pour pouvoir passer à la question suivante. Grâce à un système de ramifications, les questions d'explicitations étaient liées à la réponse donnée à une question fermée ; les répondants étaient en outre libres de les compléter ou pas.

Votre avis sur l'AFP "Grandeurs"

En Bloc 1, vous avez vécu 9 ateliers autour des grandeurs, puis vous les avez analysés a posteriori dans le cadre du cours de Mathématiques. Certains d'entre vous ont ensuite eu l'occasion de transférer certains acquis en enseignant une leçon sur le sujet dans leur (pré)-stage. Nous aimerions avoir votre avis sur l'ensemble de ce dispositif.

Les réponses seront traitées de façon anonyme. Vous aurez à répondre à maximum 23 questions.

Les résultats issus de ce questionnaire seront utilisés en juin 2018 lors d'un colloque à Blois, ayant pour thème "MANIPULER, REPRÉSENTER, COMMUNIQUER : Quelle place pour les artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?".

Merci d'avance de votre collaboration !

Céline Mousset

1. Vous avez vécu l'AFP "Grandeurs" et son analyse en automne...
    - 2017
    - 2016
    - 2015
    - 2014
    - 2013
2. Ce dispositif a-t-il changé votre représentation du métier d'instituteur au niveau du travail des grandeurs avec les enfants ?
    - Oui
    - Non
3. Si oui, en quoi ?
4. Si non, pour quelle raison ?
5. Selon vous, l'identification des contenus matière (savoirs et savoir-faire) liés aux ateliers est-elle facilitée par le fait de les vivre activement ?
    - Oui
    - Non
6. Si oui, pouvez-vous citer un atelier qui vous a particulièrement marqué au niveau de l'identification de son contenu et expliquer pourquoi ?
7. Si non, pour quelle raison ?
8. Le fait de manipuler réellement dans des ateliers vécus plutôt que d'entendre parler de manipulations hypothétiques facilite-t-il l'identification des difficultés possibles des enfants ?
    - Oui
    - Non
9. Si oui, pouvez-vous citer un atelier qui vous a particulièrement marqué à ce niveau et expliquer pourquoi ?
10. Si non, souhaitez-vous faire un commentaire à ce sujet ?
11. Pensez-vous avoir amélioré vos propres savoirs et savoir-faire liés aux grandeurs en vivant activement les ateliers ?
    - Oui
    - Non
12. Si oui, pouvez-vous citer un atelier qui vous a particulièrement marqué à ce niveau et expliquer pourquoi ?
13. Si non, souhaitez-vous faire un commentaire à ce sujet ?

14. Avez-vous l'impression que le vécu des ateliers ait amélioré vos propres représentations mentales de ce qu'est l'acte de mesurage avec un étalon ?
    - Oui
    - Non
15. Si oui, pouvez-vous citer un atelier qui vous a particulièrement marqué à ce niveau et expliquer pourquoi ?
16. Si non, souhaitez-vous faire un commentaire à ce sujet ?
17. Le fait de manipuler réellement dans des ateliers vécus a-t-il amélioré vos propres représentations mentales des unités conventionnelles de longueur, masse, capacité ?
    - Oui
    - Non
18. Si oui, pouvez-vous citer un atelier qui vous a particulièrement marqué à ce niveau et expliquer pourquoi ?
19. Si non, souhaitez-vous faire un commentaire à ce sujet ?
20. Ce dispositif vous a-t-il permis d'acquérir une vision globale des différents aspects à travailler pour construire les savoirs et savoir-faire liés aux longueurs, masses, capacités à l'école élémentaire ?
    - Oui
    - Non
21. Si oui, pouvez-vous citer quelques aspects ?
22. Si non, souhaitez-vous faire un commentaire à ce sujet ?
23. Selon vous, l'analyse des ateliers a posteriori a-t-elle été déterminante au niveau de l'identification de cette vision globale des différents aspects ?
    - Oui
    - Non
24. Pourquoi ?
25. Avez-vous déjà personnellement utilisé le contenu de ce dispositif lors de vos stages ?
    - Oui
    - Non
26. Si non, souhaitez-vous faire un commentaire à ce sujet ?
27. Si oui, avez-vous réutilisé le carnet d'activités ("carnet de bord") ?
    - Oui
    - Non
28. Avez-vous réutilisé les notes de didactique ?
    - Oui
    - Non
29. Quel est votre niveau de satisfaction de la leçon que vous avez donnée sur base de ce dispositif autour des grandeurs ?
30. Avez-vous des améliorations à proposer à l'ensemble du dispositif ?
31. Diriez-vous que le moment où a lieu ce module (Q1 du Bloc1) est pertinent ou prématuré dans la formation ? Pourquoi ?

COMMUNICATION C28

LES GRANDS NOMBRES AU CYCLE 3 : PROPOSITION DE QUELQUES PISTES DE TRAVAIL

Frédérick TEMPIER
LDAR, Université de Cergy-Pontoise
ESPE de Versailles, COPIRELEM
frederick.tempier@u-cergy.fr

Résumé

L'apprentissage de la numération des grands nombres entiers pose certaines difficultés aux élèves de cycle 3 (Chesné et Fisher, 2015). Des travaux de didactique (Mercier, 1997 ; Ligozat et Leutenegger, 2004 ; Chambris, Tempier & Allard, 2017) ont pointé des manques de savoir de référence pour cet enseignement. La compréhension des règles d'écriture des grands nombres entiers peut permettre de généraliser les connaissances de numération acquises en cycle 2 et de préparer l'apprentissage des décimaux. Après la conception d'une première ressource (Tempier, 2013) visant à enrichir l'enseignement de la numération en fin de cycle 2, nous avons étendu cette réflexion pour concevoir une ressource sur les grands nombres en cycle 3. Les analyses (mathématiques, épistémologiques et didactiques) menées pour concevoir cette ressource nous ont amené à proposer des pistes de travail pour l'enseignement des grands nombres.

I. ÉTAT DES LIEUX, QUESTIONS ET MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

Pour l'apprentissage des nombres entiers, dans les dernières années de l'école primaire et le début du collège, l'enjeu principal annoncé par les programmes actuels (MEN, 2015) et plus anciens est la compréhension des « grands nombres », c'est-à-dire supérieurs à dix-mille et inférieurs à un billion. Dans beaucoup de manuels, le travail sur les grands nombres est souvent centré sur l'apprentissage de la lecture et de l'écriture en chiffres de ces nombres (associer l'écriture en chiffres et l'écriture en lettres), même si cette compétence n'est plus citée dans les programmes actuels. Pourtant, Chesné et Fischer (2015) rappellent que « un quart des élèves (respectivement un tiers) arrivant en sixième hors éducation prioritaire (respectivement en éducation prioritaire) ne savent pas écrire un grand nombre ». Les deux auteurs évoquent ces résultats en relation avec l'item d'écriture en chiffres de « un-million-six-cent-mille » de l'évaluation nationale en sixième de 2008 qui est réussi par 76% des élèves, alors que presque tous les élèves réussissent à écrire un nombre plus petit comme « trois mille-trois » (96% de réussite).

En proposant nous-même une évaluation en fin de sixième auprès de 151 élèves (dont 41 en REP), nous avons constaté que la difficulté à écrire « un-million-six-cent-mille » est moins importante à ce moment de la scolarité pour notre échantillon (89% de réussite) mais que l'écriture d'un nombre comme « dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit » était toutefois encore un obstacle pour beaucoup d'élèves : 69% de réussite au total, 59% pour les élèves de REP (Chambris, Tempier et Allard, 2017). Cela semble bien évidemment lié à la difficulté de l'écriture des 0 dans l'écriture chiffrée qui ne s'entendent pas à l'oral (les « zéros muets »). Cette évaluation montre également le peu de connaissance des relations entre unités des grands nombres en fin de cycle 3 : la moitié des élèves environ ne savent pas convertir 4 millions en centaines de milliers ou 3 millions en milliers. C'est ce qui nous amène à penser, comme Chesné et Fischer (2015), que la conceptualisation des nombres entiers est insuffisante pour beaucoup d'élèves de cycle 3, ce qui peut avoir des conséquences sur leur compréhension des nombres décimaux.

On retrouve aussi ces difficultés dans des études proposant des analyses de séances de numération sur les grands nombres dans des classes de cycle 3 (Blanchard-Laville, 1997 ; Ligozat et Leutenegger, 2004). Ces travaux pointent surtout les difficultés auxquelles sont confrontés des enseignants dans le passage

du système de numération parlé au système de numération écrit. Par exemple, Mercier (cité dans Blanchard-Laville, 1997) montre que, quand il s'agit d'écrire un nombre en chiffres (« dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit »), face à certaines erreurs d'élèves (17 2000 58, 17 2 58, 017 200 058), « l'enseignante se retrouve dans une impasse au moment où elle doit invalider » ces propositions. Selon Mercier (*ibidem*), ces difficultés du côté des élèves et de l'enseignante s'interprètent comme un « manque à savoir institutionnel », c'est-à-dire que le manque de textes de référence sur la question des grands nombres rend ces savoirs transparents pour les enseignants. L'enseignante observée fait alors comme s'il n'y avait rien à savoir pour écrire un nombre en chiffres, comme si cela allait de soi.

Une étude plus récente (Chambris, Tempier et Allard, 2017) vient confirmer et préciser ces résultats, dans le cas d'une enseignante de CM1 ayant pourtant participé à un travail approfondi sur les nombres entiers inférieurs à 10 000. L'enseignante réinvestit l'idée d'un travail sur les relations entre unités[191] (un enjeu important dans le travail réalisé sur le millier) en termes de relations entre unités, milliers et millions, autrement dit sur les relations entre unités de base 1000. Cependant, elle ne semble pas faire des relations entre les unités consécutives (par exemple dizaines de milliers, centaines de milliers et millions), un enjeu d'apprentissage pour les grands nombres. De plus, à plusieurs moments de la séance, l'enseignante semble démunie face à certaines difficultés éprouvées par ses élèves. Par exemple, face à un élève qui n'arrive pas à écrire « douze-mille-cinq-cent » ou à un autre qui écrit 34.20 pour « trente-quatre-mille-vingt », elle semble ne pas mettre en relation ses connaissances de numération, en particulier sur la valeur des chiffres dans l'écriture positionnelle, avec ces difficultés. Ceci peut s'interpréter par le fait qu'elle ne prend en compte que le fonctionnement de la numération parlée comme savoir de référence. Elle s'attache, par exemple, à écrire des points entre les classes pour marquer les positions des millions et des milliers, ce qui ne semble pas adapté pour aider les élèves à comprendre la nécessité d'écrire les 0 muets. Finalement, le principe de position (par rangs) est remplacé par un principe de position par classes, sans que le lien entre rangs et classes ne soit explicite. Cet enseignement n'est pas suffisant pour permettre aux élèves de renforcer leurs connaissances de la numération écrite alors que les programmes actuels promeuvent la compréhension des règles de la numération pour les grands nombres, les compositions et décompositions en appui sur une connaissance des unités de numération et de leurs relations, etc. (MEN, 2015). Cette dernière étude laisse aussi penser qu'il ne suffit pas d'outiller et d'accompagner les enseignants sur les nombres inférieurs à 10 000 pour leur permettre d'être suffisamment armés pour enseigner les grands nombres. Il y a des caractéristiques particulières du savoir en jeu qui nécessitent certains apports spécifiques.

C'est l'objet de cette recherche en cours (commencée depuis trois ans) de clarifier les savoirs mathématiques sur les grands nombres dont on vise l'apprentissage et ceux qui sont utiles à maîtriser pour les enseigner. À cette fin, il pourrait être utile de proposer aux enseignants des ressources pour les outiller « par l'apport de savoirs mathématiques, didactiques et épistémologiques » comme les « traités » (Margolinas et Wozniak, 2010). Ce n'est pas tout à fait notre choix : nous faisons l'hypothèse que l'appropriation de ces savoirs pourrait être facilitée avec une ressource proposant des situations d'enseignement à mettre en place dans leur classe. Cela s'inscrit dans le postulat que font Goigoux et Cèbe (2009) : « la prise en main de […] nouveaux outils est le vecteur de la transformation de leur pouvoir d'agir, donc de leur développement professionnel ». Il s'agit alors, selon les mêmes auteurs, de proposer « aux enseignants de nouveaux outils cohérents avec les résultats de la recherche (le « souhaitable ») mais aussi compatibles avec leurs pratiques habituelles (le « raisonnable ») ». L'objectif d'enrichir les apprentissages des élèves sur les grands nombres est donc associé à celui de permettre aux enseignants de se former sur cette question, notamment en s'appropriant les savoirs mathématiques associés et leur organisation, dont on a montré que les manques pouvaient entraîner des difficultés à interpréter les erreurs des élèves, intervenir face à une difficulté, etc. Comme nous l'avons déjà fait dans

[191] Ceci est d'ailleurs conforme aux programmes actuels mais pourrait ne pas être un enjeu dans les manuels actuels. Paillard (2017) conclut de son analyse de six manuels scolaires : « Les mots « mille » et « millions » sont ajoutés au lexique déjà connu ou fréquenté de la numération, sans donner lieu à un travail spécifique soulignant leur fonction de bases auxiliaires pour l'oral (base 1000) ».

un travail précédent (Tempier, 2013), pour concevoir cette ressource, nous nous appuyons sur l'ingénierie didactique de développement (Perrin-Glorian, 2011) qui est une méthodologie compatible avec cette approche puisqu'elle permet d'étudier, d'une part, les choix fondamentaux de la séquence, d'autre part, les choix de conception pour avoir une ressource qui soit utilisable dans l'enseignement ordinaire par des enseignants n'ayant pas reçu de formation spécifique. Cette méthodologie utilise des cycles de conception et d'expérimentation dans les classes (fig.1).

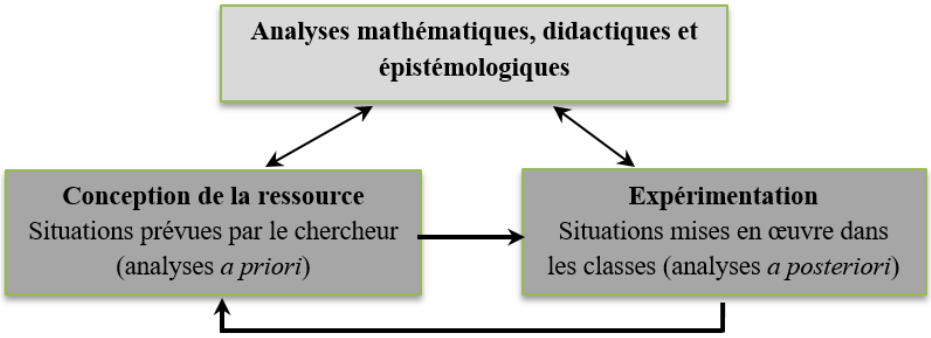


Figure 1. Schéma général de la méthodologie de cette recherche.

La première année a permis la conception d'un prototype de ressource suite à l'observation d'une enseignante de CM1 et a donné lieu à la conception d'un parcours m@gistère[192]. La deuxième année a permis d'expérimenter ce prototype dans une recherche-action, menée avec Pascale Masselot : un petit groupe d'enseignants et de formateurs a testé la ressource avec des retours réguliers afin de construire une première version, qui a été expérimentée l'année suivante dans deux classes de REP+ avec des observations régulières de la mise en œuvre.

La version actuelle de la ressource[193] comprend une présentation des enjeux de la séquence, une description détaillée des séances, des fiches photocopiables et une évaluation initiale à proposer avant de tester la ressource. Les déroulements des séances sont décrits de manière assez détaillée : on peut parler d'une ressource « clé en main » où l'on cherche à proposer des supports directement utilisables dans la classe et à limiter le travail de préparation de l'enseignant. La séquence est composée de 4 étapes de 2 séances chacune, avec des prolongements possibles (cf. annexe 2). Nous avons cherché à limiter la taille de la séquence pour éviter un surinvestissement du travail sur les grands nombres qui pourrait se faire au détriment d'autres notions mathématiques. Le nombre de séances proposées semble compatible avec le temps qu'un enseignant de cycle 3 peut raisonnablement accorder à cette notion.

L'objet de ce texte n'est pas la présentation de cette ressource mais de certains choix qui ont guidé cette conception et qui ont été enrichis par les allers-retours entre analyses et expérimentations dans les classes. Nous considérons que ces choix peuvent constituer des pistes de travail sur les grands nombres pour enrichir l'enseignement actuel. Ils seront illustrés par des exemples extraits de la ressource que nous concevons mais ils visent à avoir une portée plus large pour servir de point d'appui à des concepteurs de ressources diverses ou pour la formation des enseignants.

Nous commencerons par montrer en quoi le concept d'unité constitue un fondement mathématique, épistémologique et didactique avant de présenter certaines spécificités des systèmes de numération écrits et parlés pour les grands nombres (supérieurs à 10 000). Cela nous amènera ensuite à présenter des pistes de travail pour enseigner les grands nombres que ces analyses nous ont permis d'identifier.

[192] Parcours m@gistère intitulé « Enrichir l'apprentissage des nombres entiers en fin de cycle 2 et en cycle 3 » (CANOPE)

[193] La ressource est disponible en se rendant à l'adresse http://numerationdecimale.free.fr, puis en cliquant sur l'onglet « grands nombres » (cf. annexe 1).

II. UN FONDEMENT MATHÉMATIQUE, ÉPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE : LE CONCEPT D'UNITÉ

1 Le concept d'unité

Keller (2016) rappelle que, pour un signe graphique comme celui-ci,

I I I I I

on peut considérer un bâton comme étant une unité et on reconnait alors le signe du nombre 5, mais on peut aussi considérer chaque extrémité de ces bâtons et reconnaître alors le nombre 10 ou encore considérer ce signe tout entier comme étant une chose et reconnaître alors le nombre 1. L'unité n'est donc pas donnée par l'objet lui-même ou la collection mais est à construire par la pensée.

Les anglo-saxons nomment « unitizing » la capacité à considérer une pluralité d'objets comme une entité individuelle[194] :

> *Unitizing these ten things as one thing – one group – requires almost negating their original idea of number. It is a huge shift in thinking for children, and in fact, was a huge shift in mathematics, taking centuries to develop. (Fosnot & Dolk 2001)*

Quand on utilise le mot unité dans le contexte des systèmes de numération, cela peut donc faire référence soit à l'unité simple soit à une notion plus générale d'unité, suggérée par cette idée d'unitizing. En français c'est le même mot utilisé pour ces deux sens alors que les anglo-saxons utilisent le terme « ones » pour unités simples et « unit » pour unité.

Pour faire le lien entre ce concept et la compréhension de l'écriture chiffrée, Brissiaud (2005) rappelle que :

> *Comprendre la numération décimale, c'est comprendre des « changements d'unités de comptes » […] : l'écriture chiffrée 347 par exemple, doit être considérée comme le symbole de l'équivalence entre les deux procédures suivantes. Pour construire une collection ayant 347 objets, il est évidemment possible de les « compter 1 à 1 », mais ce sera long ! Mieux vaut « changer d'unités » et commencer par « compter des cents » plutôt que de compter des uns : « 1 cent, 2 cents, 3 cents ». Ce faisant, on compte les « grandes unités » que sont les cents comme on compterait n'importe quelle autre unité ! Et lorsqu'il ne reste plus assez d'objets pour compter des cents, plutôt que de « compter des uns », mieux vaut continuer en « comptant des dix ».*

Les unités (unités simples, dizaines, centaines…) sont en relations entre elles, ce qui produit une complexification croissante des relations entre les différentes unités. Les travaux de Fuson et *al*. (1997), repris ensuite par Thanheiser (2009), montrent les différentes interprétations qui en découlent pour chaque unité (décrit dans Tempier, 2016). Si on considère l'exemple de l'unité « centaine », il est possible de considérer la centaine comme cent unités, dix dizaines ou une centaine.

Dans Tempier (2016), nous avons rappelé que la flexibilité dans l'interprétation possible de la centaine (et des autres unités) en lien avec l'écriture chiffrée permet une compréhension profonde de la numération, c'est-à-dire comme *système d'unités*.

Baturo (2000) considère ce système d'unités comme un réseau de relations multiplicatives. Dès le travail sur les nombres entiers, on peut considérer des relations allant à la fois dans le sens des multiplications et des divisions par 10 : 10 dizaines font 1 centaine mais 1 centaine c'est aussi composé de 10 dizaines. Ces relations peuvent être étendues vers la gauche pour définir de nouvelles unités, ce sera l'objet du travail sur les grands nombres. Et pour un nombre décimal, les principes d'écriture se prolongent aux unités inférieures : dixièmes, centièmes, millièmes, etc. qui sont obtenues par des fractionnements de

[194] Traduction : « Unitiser ces dix choses comme une chose, un groupe, demande déjà de rejeter leur notion originale de nombre. C'est une immense évolution dans la pensée des élèves et en fait cela a été une immense évolution dans les mathématiques, qui a pris des siècles à se développer ».

l'unité en dix. On obtient alors une multiplicité de relations en jeu dans l'écriture décimale, comme illustré dans la Figure 2 pour le nombre 3208,107 (représentation empruntée à Baturo, 2000).

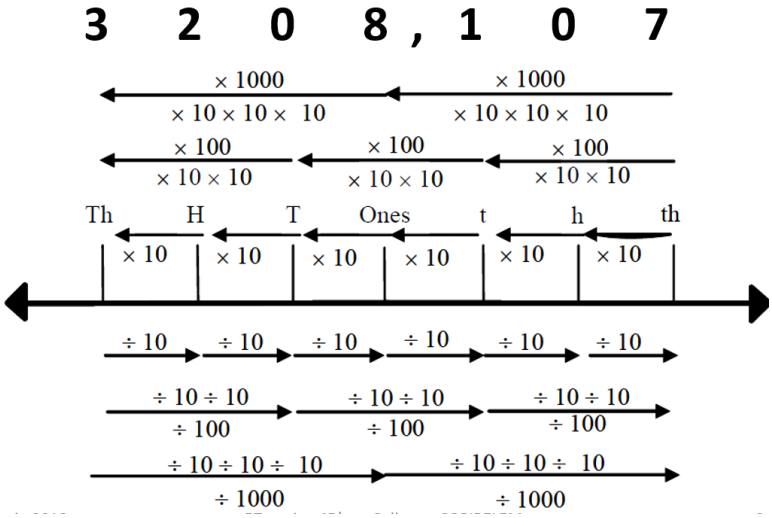


Figure 2. Le réseau de relations multiplicatives sous-jacent à l'écriture en chiffres.

Possibilité d'une « théorie » de la numération basée sur les unités

Du point de vue historique, la notion d'unité est le principe de base de l'invention des systèmes de numération. Les travaux d'Ifrah (1981) montrent que le fait de considérer dix (pour les systèmes décimaux) comme une unité et de réitérer ce processus permet la constitution d'un système de numération décimal selon un principe itératif : dix unités d'un certain ordre font une unité de l'ordre supérieur. Dans les systèmes additifs on représente chacune des unités utilisées par des signes juxtaposés (comme le système inventé par les égyptiens dans l'antiquité), en utilisant des chiffres pour les nombres de un à neuf on obtient un système hybride[195] (comme le système chinois, utilisé encore actuellement). Dans un système positionnel comme celui qui est aujourd'hui utilisé de façon universelle, les unités sont repérées par la position des chiffres dans l'écriture ; elles ne sont donc pas codées par un symbole comme dans les systèmes précédents. C'est ce qui permet une économie d'écriture et la possibilité d'écrire tous les nombres avec seulement 10 symboles. La nécessité d'utiliser le symbole 0 apparaît dans ce système positionnel pour marquer l'absence d'unités à certaines positions. Ce système de numération s'appuie sur ces deux principes indissociables :

- Le principe décimal, qui correspond à l'organisation du système d'unités utilisés qui obéit à une règle itérative : 10 unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur.
- Le principe de position permet lui de définir la position de chaque unité dans l'écriture en chiffres : unités simples au premier rang à partir de la droite, dizaines au deuxième rang, etc.

Chambris (2008) a montré qu'il est possible de décrire les savoirs de la numération avec les unités pour l'enseignement. Elle a rappelé l'existence d'une théorie mathématique de la numération qui s'appuie sur les unités, comme c'est le cas dans de traités anciens tels que celui de Condorcet (1799) ou celui de Bezout et Reynaud qui ont constitué des références pour l'enseignement avant les mathématiques modernes. Elle se différencie de la théorie « moderne » où « l'écriture chiffrée d'un nombre est la suite des coefficients dans la décomposition polynomiale d'un entier dans une base » et semble plus adaptée, en termes de savoirs à mobiliser, pour l'enseignement de la numération à l'école primaire (Chambris, *ibidem*). Voici un exemple de la définition du millier dans le livre de Condorcet (1988, p.38) :

> *Si l'on suit la même démarche, et que l'on place un quatrième chiffre à la gauche de ceux qui indiquent des centaines, il indiquera autant de dixaines de centaines, ou autant de mille, qu'il auroit désigné de centaines,*

[195] Le lecteur intéressé trouvera dans l'ouvrage d'Ifrah (1981) une présentation détaillée des exemples de systèmes additifs et hybrides cités ici ainsi que de bien d'autres.

s'il avoit été moins avancé d'un rang ; […] ainsi, 6452, indique six mille quatre centaines cinq dixaines et deux unités, exprime le nombre six mille quatre cent cinquante-deux.

Des formulations plus actuelles et accessibles de ces savoirs sont proposées dans Tempier (2013, pp.22-30) et peuvent constituer des points d'appui pour une explicitation des savoirs en jeu auprès des enseignants.

2 Un troisième système pour dire et écrire un nombre

Les unités fournissent aussi un moyen de désigner les nombres qui apparaît comme une alternative notamment pour dire un nombre (par exemple 123 : une centaine deux dizaines trois unités) sans utiliser la numération parlée (et ses irrégularités). De plus, un nombre peut être écrit (ou lu) de plusieurs manières. Par exemple 123 peut être lu ou écrit comme 1 centaine 2 dizaines, 3 unités ou 12 dizaines, 3 unités ou 1 centaine 23 unités, etc. Dans Houdement et Tempier (2018) nous considérons cette désignation des nombres avec les unités comme un troisième système pour désigner un nombre qui peut être mis en relation avec les systèmes écrits et parlés et qui permet de proposer une variante didactique du modèle du triple-code de Dehaene (1992).

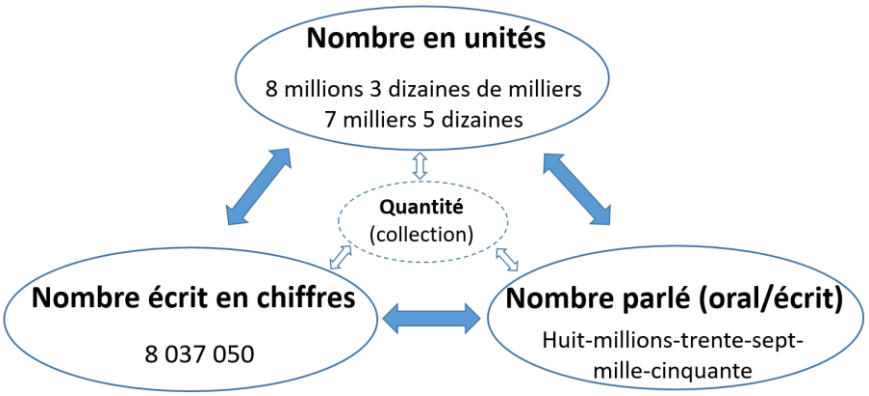


Figure 3. Trois systèmes pour représenter les nombres

Nous considérons qu'il est essentiel de mettre en relation ces trois systèmes pour l'apprentissage de la numération, mais aussi pour celui des opérations posées, des nombres décimaux (Houdement et Tempier, *ibidem*). De plus cela peut servir de point d'appui pour l'apprentissage des unités de mesure (Chambris, 2008).

Enfin, l'intérêt de s'appuyer sur des quantités organisées dans l'apprentissage des nombres, notamment les matériels de numération, est largement admis (Fuson et *al.*, 1997) mais ne fait pas forcément consensus. Selon Wagner et Davis (2010), cet appui sur des collections peut permettre d'enrichir la compréhension des nombres en développant un certains « sens des quantités ». Pour d'autres, l'usage de collections (réelles ou représentées) n'a pourtant toujours pas les effets espérés. Brissiaud (2005), par exemple, met en garde contre certains usages des représentations figurées de matériels de numération : l'élève peut ne pas faire le lien entre le matériel représenté et les groupements par 10 qui en sont à l'origine. Nous faisons l'hypothèse (Houdement et Tempier, *ibidem*) que l'utilisation de collections organisées peut permettre de donner du sens aux unités de numération. Ces dernières peuvent alors servir de point d'appui pour mettre en relation les quantités et les écritures chiffrées.

Nous allons maintenant présenter quelques spécificités des systèmes de numération écrits et parlés pour les grands nombres, c'est-à-dire supérieurs à 10 000.

III. QUELQUES SPÉCIFICITÉS DES SYSTÈMES DE NUMÉRATION POUR LES GRANDS NOMBRES

1 Désignation des grands nombres avec les systèmes écrits et parlés

Actuellement, nous utilisons deux systèmes principaux pour désigner les nombres : le système de numération écrit en chiffres et le système de numération parlé (à l'oral ou à l'écrit en lettres). Cela n'a pas toujours été le cas. Pendant longtemps, le système de numération parlée a été utilisé avec la numération romaine pour écrire les nombres et l'abaque pour faire des calculs. Comme le rappelle Mounier (2016) :

> *Historiquement pour les langues indo-européennes la numération positionnelle chiffrée n'est devenue que tardivement le système écrit utilisé en parallèle du système parlé.*

La numération de position s'est installée plus tardivement et a mis plusieurs siècles pour être véritablement acceptée. Selon Scharlig (2010), il a fallu cinq siècles, et même au bout de ces cinq siècles son occupation n'était que partielle :

> *Commencée dès la première moitié du 12ème siècle, et achevée vers la fin du 16ème, cette conquête de l'Europe par les chiffres arabes s'est étalée de notre point de vue de narrateur, sur cinq siècles. Mais en fait, leur occupation du territoire occidental n'a été que partielle, même après ces cinq siècles.*

Puisque ces deux systèmes n'ont pas été conçus à l'origine pour être utilisés ensemble, on peut alors se demander quelles sont les spécificités de chacun et comment ils s'articulent.

Notre système de numération écrit, qui est un système décimal de position, est régulier : quelle que soit la taille des nombres, les principes de position et de décimalité s'appliquent toujours, même si le nom de certaines unités se construit à partir du nom d'unités plus petites (« dizaines » de « milliers » par exemple). Ainsi dix milliers font une dizaine de milliers qui s'écrit au 5ème rang, dix dizaines de milliers font une centaine de milliers qui s'écrit au 6ème rang, etc. (fig.4). Pour décrire le fonctionnement de ce système écrit il n'est donc pas nécessaire d'utiliser la notion de « classes » (tranche de trois chiffres), même pour les grands nombres.

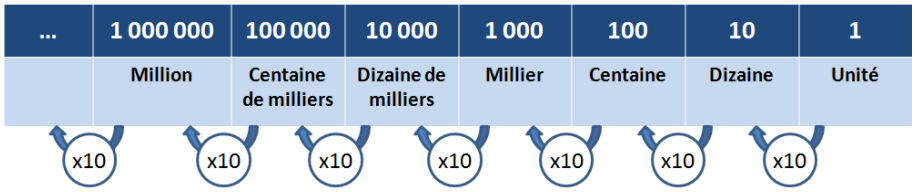


Figure 4. Extension des principes de la numération écrite pour les grands nombres.

Les classes et les irrégularités pour les grands nombres proviennent du système parlé. Notre système de numération parlée est un système hybride hérité de la langue latine. L'énonciation des nombres correspond à une addition de multiples de puissances de dix. Il s'appuie en fait sur plusieurs systèmes d'unités imbriqués :

- en base dix, avec les irrégularités bien connues sur les nombres inférieurs à cent (Mounier 2016) ; par exemple 3 dizaines se dit « trente » et non « trois dix »,
- en base mille, qui amène à utiliser le nom des nombres inférieurs à mille associé aux mots mille, million et milliard,
- et en base un million[196], pour dire les très grands nombres en appui sur les mots billion, trillion, etc.

Ainsi, comme le rappelle Salin (1997) :

> *Les trois premières puissances de dix ont un nom différent : dix, cent, mille, à l'aide desquels on peut fabriquer les noms de tous les nombres jusqu'à 9 999. Si la même « logique » était appliquée aux nombres à*

[196] Officiellement c'est le système proposé par Chuquet au 15ème siècle qui est utilisé en France pour la lecture des grands nombres comme cela a été proposé par la conférence des poids et mesures de 1949. Le mot « billion » correspond à 1012 et non à 109 comme c'est le cas par exemple aux Etats-Unis où c'est l'échelle courte qui est utilisée (base mille).

partir du successeur de 9 999, il faudrait un nom pour 10 000, un pour 100 000, etc. Ce n'est pas la solution retenue par notre numération orale, qui utilise pour les nombres compris entre 10 000 et 1 000 000 la décomposition en base mille du nombre dont le nom est recherché : « abcdef » décomposé en base mille a pour nombre des unités « def » et pour nombre de mille « abc ». Son nom est donc donné par la suite : « nom de abc (exprimé en base dix) mille nom de def.

Ce fonctionnement de la numération parlée a des conséquences sur la numération écrite : c'est lui qui amène à écrire un espace entre les groupes de trois chiffres pour mettre en évidence la décomposition selon les puissances de mille. Il s'agit bien d'une spécificité de notre numération parlée. Pour d'autres numérations parlées, il y a d'autres façons de « découper » l'écriture chiffrée pour lire les grands nombres. Par exemple, dans le système de numération parlé chinois c'est 10 000 qui sert de base auxiliaire[197] : le nombre cent-mille s'exprime alors comme dix dizaines de milliers, le nombre un-million comme cent dizaines de milliers, et dix-millions comme mille dizaines de milliers ; ensuite il y a un nouveau nom pour dix-mille dix-milliers, etc. (fig.5). Lorsqu'ils utilisent aussi l'écriture chiffrée positionnelle, les Chinois utilisent un séparateur (la virgule, qui est l'équivalent de notre espace de séparation) pour écrire les nombres par tranches de 4 chiffres. Cela permet d'avoir une cohérence entre la façon de lire et d'écrire les nombres (fig.5).

Le nom des premières puissances de dix

Numerals	Characters	Pinyin
1,000,000,000	十亿	shí yì
100,000,000	亿	yì
10,000,000	千万	qiān wàn
1,000,000	百万	bǎi wàn
100,000	十万	shí wàn
10,000	万	wàn
1,000	千	qiān
100	百	bǎi
10	十	shí
1	一	yī

Exemple de noms de grands nombres

Typical split	Chinese split	Characters	Pinyin
10,000	1,0000	一万	yīwàn
12,000	1,2000	一万二	yīwàn èr
13,200	1,3200	一万三千两百	yīwàn sānqiān liǎngbǎi
56,700	5,6700	五万六千七百	wǔwàn liùqiān qībǎi

Figure 5. Nom des grands nombres dans le système chinois, extrait de :
https://resources.allsetlearning.com/chinese/grammar/Big_numbers_in_Chinese

Il a également existé au moins un système de numération parlée ne faisant pas intervenir de base autre que la base 10, donc sans base auxiliaire (Figure 6). C'est le cas d'un système indien présenté par Ifrah (1981) où il existe un nom de nombre différent pour chaque puissance de la base dix. Il n'y a pas de relation entre le nom de 1000 par exemple et celui de 10 000 ou de 100 000, etc. L'auteur explique qu'ensuite on en est venu à supprimer le nom des puissances de dix. Par exemple, le nombre neuf cent trente et un se dirait un, trois, neuf (on les dit dans le sens inverse de notre numération parlée). Il parle alors d'une numération parlée de base dix fondée sur le principe de position[198].

[197] On retrouve ce type de découpage en Grèce Antique avec les myriades (104) et les myriades de myriades…

[198] Ifrah (1981) fait un lien entre l'intérêt des savants indiens pour les grands nombres et l'invention du système positionnel. La volonté d'avoir une désignation efficace des grands nombres a pu être un moteur de l'invention du système positionnel.

ORDRE D'UNITÉ	NOM CORRESPONDANT	VALEUR NUMÉRIQUE	PUISSANCE DE DIX
1	*eka	1	1
2	*daśhan	10	10
3	*śhata	100	10^2
4	*sahasra	1 000	10^3
5	*ayuta	10 000	10^4
6	*laksha	100 000	10^5
7	*prayuta	1 000 000	10^6
8	*koti	10 000 000	10^7
9	*vyarbuda	100 000 000	10^8
10	*padma	1 000 000 000	10^9
11	*kharva	10 000 000 000	10^{10}
12	*nikharva	100 000 000 000	10^{11}
13	*mahâpadma	1 000 000 000 000	10^{12}
14	*śhankha	10 000 000 000 000	10^{13}
15	*samudra	100 000 000 000 000	10^{14}
16	*madhya	1 000 000 000 000 000	10^{15}
17	*antya	10 000 000 000 000 000	10^{16}
18	*parârdha	100 000 000 000 000 000	10^{17}

Figure 6. Nom des puissances de dix dans la numération sanskrite, extrait de Ifrah (1981).

Ces deux exemples de systèmes de numération parlées permettent de mettre en lumière les spécificités de notre propre système de numération parlée présentées au-dessus et de son lien avec la numération écrite.

2 Le double système d'unités : base dix, base mille

Si on se limite aux nombres jusqu'au milliard, comme le font actuellement les programmes de cycle 3, il y a un double système d'unités en jeu dans l'étude des nombres : en base dix et en base mille, ce qui correspond à une lecture en « rangs » et « en classes » de l'écriture chiffrée. A l'intérieur de chaque classe on retrouve un système en base dix avec les unités, dizaines et centaines (fig.7).

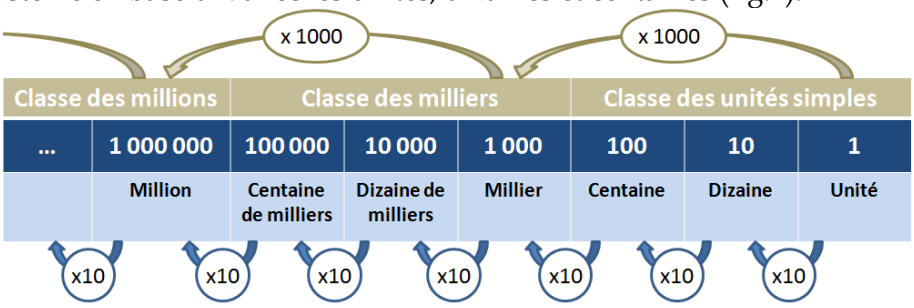


Figure 7. Le double système d'unités base dix – base mille

La prise en compte de ce double système dans l'enseignement des grands nombres peut permettre, à la fois d'enrichir la compréhension de la numération écrite en mettant en avant la régularité du système écrit selon la base dix et de s'approprier les noms des grands nombres en les mettant en relation avec l'écriture chiffrée. L'appui sur ce double système pourrait favoriser la compréhension des ordres de grandeurs des grands nombres. Par exemple comprendre le million met en jeu la relation avec des nombres plus petits : un million c'est « dix fois cent-mille » ainsi que « mille fois mille ».
La désignation d'un nombre avec les unités permet de produire des écritures (ou lectures) variées et notamment selon la base dix et la base mille (voir l'exemple de la Figure 8). Le passage d'une désignation selon la base dix à la base mille se fait à l'aide de conversions d'unités. Cette désignation en unités est un système de désignation intermédiaire entre la numération écrite et parlée qui fournit un moyen de justifier l'écriture en chiffres d'une désignation orale (ou écrite en lettres) et notamment de l'écriture des zéros qui ne s'entendent pas.

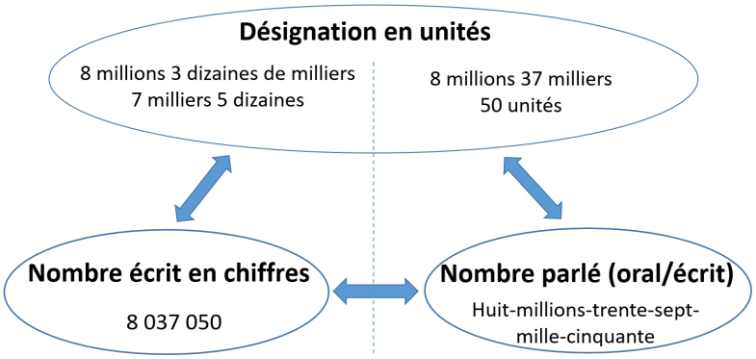


Figure 8. Liens entre trois désignations des nombres

Considérons l'exemple de l'écriture en chiffres de « huit-millions-trente-sept-mille-cinquante » (fig.8). Ce nombre peut s'écrire (ou se dire) avec les unités de numération « 8 millions 37 milliers 50 unités ». Il peut aussi s'écrire (ou se dire) « 8 millions 3 dizaines de milliers 7 milliers 5 dizaines » par la conversion de 37 milliers en 3 dizaines de milliers et 7 milliers qui s'appuie sur des connaissances relevant des nombres inférieurs à mille (37 = 3 dizaines 7 unités). Le nombre obtenu peut alors s'écrire 8, 0, 3, 7, 0, 5, 0 par le principe de position de la numération écrite (le chiffre des millions s'écrit au 7ème rang, celui des centaines de milliers au 6ème rang, etc.) et l'écriture de 0 pour marquer l'absence de certaines unités. Ce type de justification est un savoir important pour l'enseignant. C'est un savoir de référence qui peut permettre de combler certains manques pointés dans les travaux de Mercier (1997) et Ligozat &t Leutenegger (2004).

Pour un nombre donné, deux types de décompositions sont essentielles :

- la première est celle qui est liée à la numération écrite, selon les unités de base 10 (pour l'exemple ci-dessus : 8 millions 3 dizaines de milliers, 7 milliers, 5 dizaines)
- la deuxième est celle liée à la numération parlée et à la base 1000 (pour l'exemple ci-dessus : 8 millions 37 milliers 50 unités).

Cette dernière s'articule aisément avec le nom du nombre (par exemple : « huit-millions-trente-sept-mille-cinquante »).

Les analyses présentées dans ces deux dernières parties constituent des points d'appui pour la conception d'une ressource. Les allers-retours entre ces analyses et les expérimentations réalisées dans les classes (fig.1) ont permis d'identifier de nouvelles pistes de travail sur les grands nombres.

IV. PROPOSITION DE PISTES DE TRAVAIL POUR ENSEIGNER LES GRANDS NOMBRES

À travers les propositions que nous faisons dans cette partie, nous ne cherchons pas à bouleverser l'enseignement actuel mais à identifier certaines conditions essentielles pour son amélioration. Ces pistes de travail visent à combler certains manques que nous avons pointés dans les analyses des parties précédentes. Nous les illustrerons par des exemples issus de la ressource que nous avons conçue.

1. Développer la perception des quantités associées aux grands nombres

Selon Wagner et Davis (2010,) il est important de développer une compréhension des nombres (compréhension de la numération et du calcul) en étroite relation avec un « sens des quantités », que ce soit pour les petits nombres mais aussi pour les plus grands. Pour cela l'appui sur des (grandes) collections ou d'autres grandeurs, comme les longueurs, les aires, les volumes, peuvent permettre de rendre les élèves plus conscients de la signification des nombres. En effet, d'après (Wagner et Davis 2010), on peut souvent observer dans l'enseignement que :

> *Alors que le nombre est doucement mais sûrement abstrait des contextes, les élèves deviennent insensibles à la signification des symboles numériques qu'ils apprennent à manipuler.*

De plus, comme cela a déjà été indiqué, nous faisons l'hypothèse que l'utilisation de collections organisées peut permettre de donner du sens aux unités de numération (Houdement & Tempier, 2018).

Ainsi, lors du travail sur les grands nombres, il nous paraît utile de **proposer aux élèves des occasions de rencontrer de grandes quantités (ou d'autres grandeurs comme les longueurs, les aires ou les volumes) pour développer la perception des quantités (ou grandeurs) associées à ces grands nombres.**

Wagner et Davis (*ibidem*) proposent différents exemples de problèmes, inspirés des problèmes de Fermi, visant à développer une perception des grands nombres, comme par exemple de trouver le nombre approximatif de grains de riz dans un récipient donné. Les stratégies utilisées par les élèves sont très diverses : faire des tas approximatifs de 100 par exemple, utiliser un instrument de mesure de capacité comme un capuchon de stylo, utiliser les calculs d'aires, etc. Après avoir trouvé le résultat (environ 10 000 à plus ou moins 1500 près), ils poursuivre le problème avec des questions mettant en jeu des plus grands nombres, comme par exemple : quelle capacité devrait avoir un récipient pour contenir 1 000 000 de grains de riz ? Et pour 1 000 000 000 ? Dans ces activités les élèves sont amenés à mettre en relation des expériences sur les quantités avec leurs capacités de calcul. Selon les auteurs Wagner et Davis (2010), c'est cette mise en relation des connaissances arithmétiques et du sens des quantités qui permet de donner plus de signification au travail sur les nombres.

Dans la ressource, nous commençons la séquence par un problème permettant de travailler sur une grande collection. Nous proposons en effet le dénombrement exact des carreaux d'une feuille de papier millimétré. L'organisation des carreaux sur le papier millimétré permet d'identifier différents types de groupements, notamment par 100. Les élèves peuvent alors mobiliser des procédures de numération, par exemple en comptant les groupes de 100, 1000…, ou de calcul, par exemple en utilisant les groupes de 25 carreaux de 100 qui sont mis en évidence sur le papier ou encore en multipliant le nombre de carreaux de chaque ligne par le nombre de carreaux de chaque colonne (dont le comptage de 10 en 10 est facilité par l'organisation de la feuille). Ainsi, conformément aux propositions de Wagner et Davis (*ibidem*) les élèves sont amenés à mettre en relation leur perception des quantités avec leurs connaissances sur les nombres (numération et calcul). De plus, dans la ressource cette situation permet d'introduire les unités de numération comme unités possibles pour le comptage de cette grande collection puis de faire le lien entre ces unités et l'écriture en chiffres.

2. Des moments de travail spécifique sur la numération écrite

Nous avons montré (partie 3) certaines spécificités des systèmes de numération écrits et parlés. Or, il nous semble que dans l'enseignement actuel les caractéristiques de la numération parlée « écrasent » celles de la numération écrite (partie 1). Nous avons, par exemple, rappelé le cas d'une enseignante qui souhaite introduire tout de suite les relations de base mille et le découpage par tranches de trois chiffres (Chambris, Tempier et Allard 2017).

Il est important de réserver des moments spécifiques d'étude la numération écrite pour comprendre la régularité du système de numération écrit (base 10), la position des unités et le rôle du 0.

Pour cela il est nécessaire d'**introduire et travailler ensemble la dizaine de millier, la centaine de millier et le million.**

Dans la ressource le choix a été fait de commencer par travailler l'écriture en chiffres sans dire les mots-nombres. C'est alors le lien entre l'écriture en chiffres et les unités de numération qui est sollicité et ce sont uniquement les relations de base dix entre les unités qui sont en jeu (Figure 9).

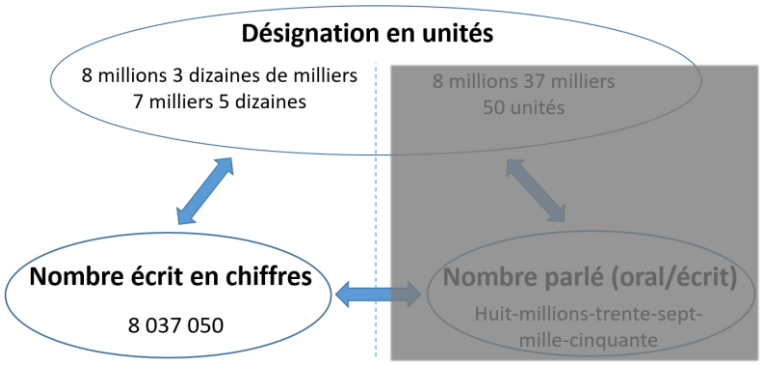


Figure 9. Liens entre trois désignations des nombres

Pour dire les nombres à l'oral, on privilégie alors : la lecture de chacun des chiffres dans l'ordre (« huit », « zéro », « trois », etc.) ou l'utilisation des unités (« huit millions trois dizaines de mille … »). Il ne s'agit pas d'interdire aux élèves de dire les nombres selon la manière conventionnelle (en utilisant la numération parlée) si certains savent déjà le faire, mais cet apprentissage ne se fera que dans une étape suivante de la séquence.

La séquence proposée dans la ressource commence par un problème de dénombrement de carreaux de feuilles de papier millimétré visant d'une part à installer un premier ordre de grandeur du million et à introduire les nouvelles unités (dizaine de milliers, centaine de milliers et million) ainsi que leur position dans l'écriture en chiffres :

M̄	CM	DM	M	C	D	U

Il est à noter que dans l'enseignement usuel des grands nombres les tableaux de numération de ce type, c'est-à-dire sans les classes, est peu courant. Ce tableau met en avant la régularité du système de numération écrit.

Nous proposons ensuite des exercices de dénombrements de carreaux de papier millimétré où les carreaux ne sont plus donnés mais leur quantité est décrite en unité, comme par exemple : 8 centaines de milliers,

4 unités 2 centaines 9 milliers 1 centaine de milliers et 7 millions, 5 millions 8 dizaines de milliers, etc.

C'est le principe de position et le rôle du 0 dans l'écriture en chiffre qui est principalement en jeu ici. Comme pour le travail sur le millier (Tempier, 2013), les dénombrements sans conversions permettent de s'approprier la position de chacune des unités dans l'écriture en chiffres. Les variations sur l'ordre de présentation des unités, l'absence d'unités de certains ordres, la taille du nombre à trouver peuvent permettre de s'assurer d'une bonne compréhension de ces savoirs par les élèves. Des activités rituelles complémentaires comme le « furet des unités » (qui consiste à réciter à tour de rôle le nom de l'unité « suivante » ou « précédente ») sont aussi proposées aux élèves pour faciliter la mémorisation du nom des unités et de leur ordre.

3. Des moments de travail sur les décompositions en unités selon les bases dix et mille pour préparer la lecture et l'écriture des grands nombres

Les études de séances sur l'écriture de grands nombres en chiffres (Mercier, 1997 ; Chambris, Tempier & Allard, 2017), rappelées dans la partie 1, semblent montrer que l'enseignant peut se retrouver dans des impasses quand il est confronté à certaines difficultés ou erreurs de ses élèves. Or, nous avons montré (partie 2) que, pour articuler la désignation en chiffres et la désignation orale (ou en lettres), les unités de numération peuvent constituer un point d'appui et permettent des justifications mathématiques adaptées aux connaissances des élèves de cycle 3. Du côté des élèves nous avons déjà rappelé les difficultés relatives aux connaissances des relations entre unités, même pour les grands nombres (Chambris, Tempier & Allard, *ibidem*) : seulement la moitié des élèves environ savent convertir 4 millions en centaines de milliers (relation de base dix) ou 3 millions en milliers (relation de base mille). Le travail sur les décompositions doit se faire en lien étroit avec la connaissance de ces relations entre les unités.

Il est important de réserver des moments de travail sur les décompositions en unités selon la base dix et selon la base mille. Cela permet de préparer la lecture et l'écriture de grands nombres (associer la désignation en chiffres à la désignation orale ou en lettres) et le travail sur les relations entre les nombres.

Dans la ressource, le choix a été fait d'une reprise de la situation de « commande » d'une collection, avec jeu sur le stock du « marchand » comme dans la séquence sur le millier (Tempier, 2013). Il s'agit, par exemple, de commander :

- 2400600 carreaux avec la contrainte « pas de carrés par millions » (réinvestissement des relations entre unités de base 10 : 10 centaines de milliers = 1 million) ;

- 403012068 carreaux avec la contrainte « seulement des unités, milliers et millions de disponibles ».

Les contraintes sur le stock visent à amener les élèves à utiliser les deux décompositions de référence, selon la base dix et selon la base mille (fig.10), ainsi qu'à mobiliser des relations « simples entre les unités (1 million = 10 centaines de milliers par exemple).

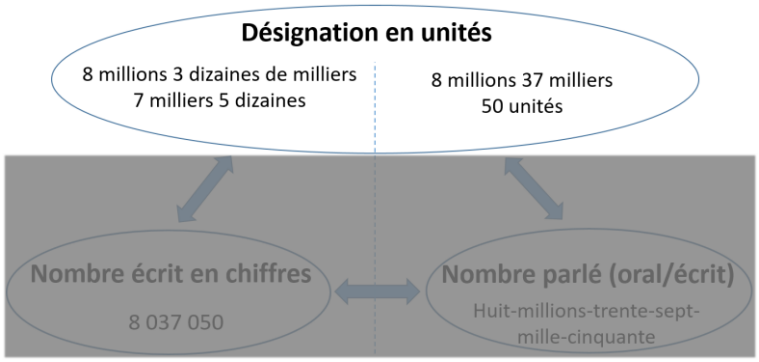


Figure 10. Deux types de désignation en unités (selon la base dix et selon la base mille).

Dans le premier exemple ci-dessus (2400600 carreaux), les élèves vont pouvoir commander 24 centaines de millions, ce qui permet de réinvestir la relation entre 10 centaines de milliers et 1 million. Dans le deuxième exemple (403012068), la contrainte « seulement des unités, milliers et millions de disponibles » permet de faire des décompositions selon la base mille et de préparer l'introduction de la numération parlée. On peut, par exemple, commencer à mettre en évidence le lien entre ces décompositions et le découpage par tranches de trois chiffres :

C$\bar{M}$	D$\bar{M}$	$\bar{M}$	CM	DM	M	C	D	U
4	0	3	0	1	2	0	6	8
		403 **millions**			12 **mille**			68 **unités**

La lecture et l'écriture des grands nombres sont introduites seulement après ce travail sur ces deux décompositions de référence. Cette approche nous semble à même de remettre des mathématiques dans le travail de lecture/écriture des nombres. Ce n'est qu'au moment du travail sur la lecture/écriture des grands nombres que sont introduits des espaces entre les classes dans l'écriture chiffrée. Jusque-là, dans la séquence proposée dans la ressource, les nombres étaient systématiquement écrits sans aucun signe particulier pour repérer les tranches de trois chiffres. Les élèves devaient donc apprendre, par exemple, qu'après le million il y a 6 chiffres (ou que le million correspond au 7ème chiffre) pour repérer la valeur du chiffre des millions. Au moment de l'apprentissage de la lecture/écriture des grands nombres l'espace entre les classes (tranches de trois chiffres) est alors amené comme moyen de faciliter cette lecture/écriture.

Dans la ressource, pour faire apprendre l'écriture des grands nombres nous proposons une situation de communication. Un nombre est écrit en chiffres derrière le tableau. Un élève vient le lire à haute voix. Les autres l'écrivent en chiffres sur leur ardoise. L'enseignant organise alors une phase collective de discussion sur la validité des réponses proposées par les élèves. Il faut se mettre d'accord sur une seule écriture. La vérification finale se fait en ouvrant le tableau et en comparant au nombre trouvé par la classe. Le choix des nombres est important : ce sont les cas où il y a des zéros qui ne s'entendent pas qui sont à privilégier (exemples : 1 002 054, 47 080 309, 651 000 004). Les phases de discussions permettent de réinvestir les savoirs sur les décompositions et sur la position des unités dans l'écriture chiffrée.

4. Viser la connaissance de relations entre les nombres dans des contextes variés.

Les élèves semblent avoir un déficit de connaissances des relations entre unités (millions, centaines de millier et milliers). Au-delà de l'aspect « compréhension des systèmes de numérations » que cette difficulté témoigne, on peut considérer également que cela pourrait être une manifestation plus générale d'un manque de connaissances des grands nombres et de leurs ordres de grandeur. Connaître le million c'est, notamment, savoir qu'un million c'est dix fois cent-mille et aussi mille fois mille. Le

réinvestissement des connaissances sur les grands nombres dans des contextes variés doit prendre en compte cet objectif.

Nous considérons qu'il faut viser la connaissance des relations entre les nombres « repères » de la numération (1, 10, 100, 1 000, 10 000,…), sans toutefois chercher à atteindre une connaissance exhaustive des relations entre ces nombres. Par exemple, pour un-million, viser la connaissance des relations entre un-million et cent-mille et entre un-million et mille est un objectif essentiel mais raisonnable. Par contre, connaître la relation entre un-million et cent n'est pas nécessaire. Cela peut être retrouvé par un calcul ou un raisonnement sur les unités.

Prévoir des moments visant la connaissance de relations entre les nombres dans des contextes variés : quantités, mesures de grandeurs continues, droite graduée, calcul.

Dans la ressource, le choix a été fait de développer la connaissance des grands nombres et de leur ordre de grandeur dans des activités de calcul mental ainsi que dans des situations de placements exacts et approchés sur une demi-droite graduée.

Le calcul mental sur les grands nombres est utilisé pour des multiplications et divisions par 10, 100, 1000. L'activité proposée est un jeu de rapidité : les élèves devront être plus rapides qu'un élève qui fera le même calcul avec la calculatrice. Voici quelques exemples de calculs :

- dix fois trois-cent-mille,
- six-millions divisé par dix,
- trois-millions-huit-mille fois dix,
- mille fois huit-mille,
- mille fois soixante-cinq-mille,
- deux-cent-cinquante-mille fois cent, etc.

Dans cette activité, les nombres ne sont pas écrits en chiffres mais dictés ou écrits avec leur nom (à l'oral ou à l'écrit en lettres). En effet, avec l'écriture chiffrée pour faire ce type de calculs les élèves disposent déjà d'une procédure automatisée très efficace (règle des zéros). Son utilisation ne suffit pas pour construire une connaissance des relations entre les nombres. L'objectif est d'amener les élèves à raisonner avec le nom des nombres et en particulier avec les mots « mille » et « million ». Les élèves peuvent par exemple utiliser le fait que multiplier par dix revient à « passer » à l'unité immédiatement supérieure. Par exemple pour « dix fois deux-cent-mille » il est possible de « passer » de cent-mille à un-million (ou des centaines de milliers au million en utilisant les unités) par la multiplication par dix, ce qui permet d'obtenir le résultat deux-millions. Une autre procédure consiste à utiliser les milliers : « dix fois deux-cent-mille » c'est dix dois deux-cent fois mille, soit deux-mille fois mille : cette fois c'est la relation mille fois mille = un-million qui permet d'obtenir le résultat deux-millions. Ce sont ces types de raisonnements qui sont visés dans cette activité.

Les calculs de multiplication par 10 et par 1000 amènent à généraliser la règle de multiplication des nombres (écrits en chiffres) par 10, 100 ou 1000 en lien avec le décalage de chaque chiffre dans le tableau de numération (Figure 11). Dans la multiplication par 10, par exemple, la valeur de chaque chiffre est multipliée par dix ce qui revient à les décaler d'un rang vers la gauche. Cela permet de justifier la « règle des zéros » en mettant en relation l'écriture de zéros à droite avec ce décalage. Cela permet aussi de préparer le terrain pour les décimaux où le même type de justification pourra être utilisée.

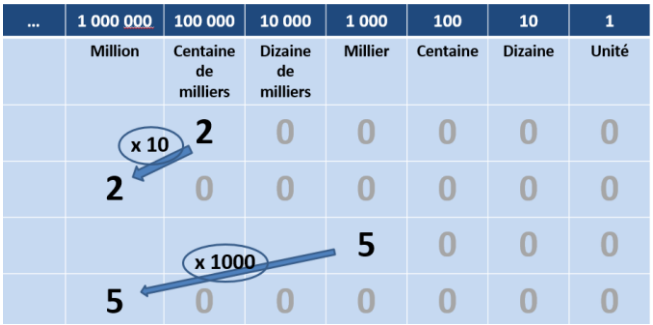
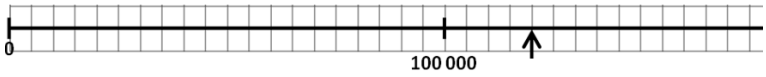


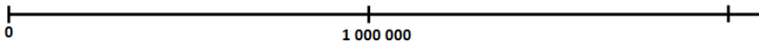
Figure 11. Une illustration du lien entre la multiplication par 10 (resp. par 1000) et le décalage des chiffres d'un rang (resp. trois rangs) vers la gauche.

Dans la ressource, la connaissance des relations entre les nombres est réinvestie dans des activités de repérage et de placement de nombres sur une demi-droite graduée où les élèves sont amenés à repérer le pas de graduation et à le diviser en dix de manière exacte ou approchée. Voici deux exemples :

- repérage de nombres sur une demi-droite graduée :

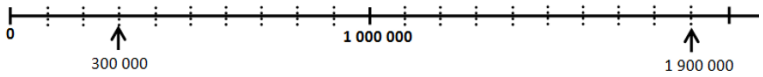


- placement approché de nombres sur une demi-droite graduée :



300 000 ? 1 900 000 ?

Ce deuxième exemple met en jeu un partage approximatif du pas de graduation en 10. Cela permet d'obtenir un pas de 100 000, pour placer les nombres 300 000 et 1 900 000. C'est notamment la relation entre 100 000 et 1 000 000 qui est à mobiliser ici :



D'autres procédures sont possibles (comme par le partage en deux, puis en quatre… du pas de graduation) mais pourraient être moins précises.

Ce travail sur les droites graduées est aussi un moyen de préparer ou de réinvestir le travail sur les fractions et nombres décimaux où ce type d'activité est souvent utilisé. Il est important, pour les entiers ou les décimaux, de faire travailler les élèves sur des sous-graduations qui ne sont pas données directement mais dont le pas peut être retrouvé en mobilisant les relations entre les nombres.

CONCLUSION

Les différentes études et analyses présentées dans les premières parties de ce texte nous ont amené à identifier de nouvelles pistes de travail sur les grands nombres. Selon nous, dans l'enseignement des grands nombres au cycle 3, il est utile de proposer aux élèves des occasions de rencontrer de grandes quantités (ou d'autres grandeurs) pour développer la perception des quantités (ou grandeurs) associées à ces grands nombres. Il est aussi important de réserver des moments :

- spécifiques d'étude la numération écrite pour comprendre la régularité du système de numération écrit (base dix), la position des unités et le rôle du 0 ;
- de travail sur les décompositions en unités selon la base dix et selon la base mille. Cela permet de préparer la lecture et l'écriture de grands nombres et le travail sur les relations entre les nombres ;
- visant la connaissance de relations entre les nombres dans des contextes variés : quantités, mesures de grandeurs continues, calcul, droite graduée...

Pour illustrer ces pistes, nous avons utilisé des exemples issus de la conception de notre ressource sur la numération. Plus généralement, nous espérons pouvoir ainsi outiller des concepteurs de ressources pour l'enseignement des mathématiques au cycle 3 (manuels, sites, logiciels, applications, etc.) afin d'enrichir l'offre actuelle. Enfin, de telles propositions peuvent également servir de point d'appui en formation pour amener les enseignants à prendre conscience des limites de l'enseignement actuel des grands nombres et envisager de nouvelles pistes.

BIBLIOGRAPHIE

Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J. Bana & A. Chapman (Eds.), In *Proceedings 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 95–103).

Bezout E., Reynaud A.A.L. (1784/1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, 9e édition*. Notes sur l'arithmétique de Bezout, par A.A.L Reynaud (1821).

Blanchard-Laville, C. (1997). *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »*, Paris : L'Harmattan.

Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation Orthophonique*, 223, 225–238.

Chambris C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de l'Université Paris Diderot.

Chambris, C., Tempier, F., Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège, *Repères-IREM*, *108*, 63-91.

Chambris, C., & Tempier, F. (2017). Dealing with large numbers: What is important for students and teachers to know? In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 245–252). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Chesné J.-F., Fischer J.-P. (2015). *Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire.* Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. CNESCO. Disponible en ligne : http://www.cnesco.fr/fr/numeration-acquis-des-eleves/ (consulté le 15/09/2018)

Condorcet (1988). Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité. Paris : ACL - Les éditions du Kangourou, 1ère édition : 1799.

Fosnot, C. T, & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 130–162.

Goigoux, R. & Cèbe, S. (2009). Un autre rapport entre recherche, pratique et formation. Les instruments didactiques comme vecteur de transformation des pratiques des enseignants confrontés aux difficultés d'apprentissage des élèves. *Conférence invitée en clôture du colloque du réseau international de Recherche en Education et Formation (REF)*, Université de Nantes, 19 juin 2009

Houdement, C., Tempier, F. (2018). Understanding place value with numeration units. *ZDM: the international journal on mathematics education.* Disponible en ligne : https://rdcu.be/4rWy (consulté le 15/09/2018)

Ifrah, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Editions Seghers.

Keller, O. (2016). *L'invention du nombre : Des mythes de création aux Eléments d'Euclide*. Paris : Editions Classiques Garnier.

Ligozat F., Leutenegger F. (2004). La bivalence mathématique et langagière dans les pratiques d'enseignement sur la numération. *Actes du 9ème colloque de l'AIRDF*. Québec, Canada.

Margolinas, C., Wozniak, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.233-249). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.

MEN (2015). Programmes de l'école primaire : BO Hors série n°11 du 26 novembre 2015. Disponible en ligne : http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/35/1/BO_SPE_11_26-11-2015_504351.pdf (consulté le 15/09/2018).

Mercier A. (1997). La relation didactique et ses effets. In C. Blanchard-Laville (Ed.), *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »* (pp. 259-312), Paris : L'Harmattan.

Mounier, E. (2017). Nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leur lien avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches en didactique des mathématiques*, *36*(3), 347–396.

Paillard, M. (2017). Les unités de masse, un support pour enseigner autrement la lecture et l'écriture des nombres supérieurs à 10 000 en 6e SEGPA, *Grand N*, 99, 51–68.

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57–78). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Scharlig, A. (2010). *Du zéro à la virgule. Les chiffres arabes à la conquête de l'Europe, 1143-1585*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

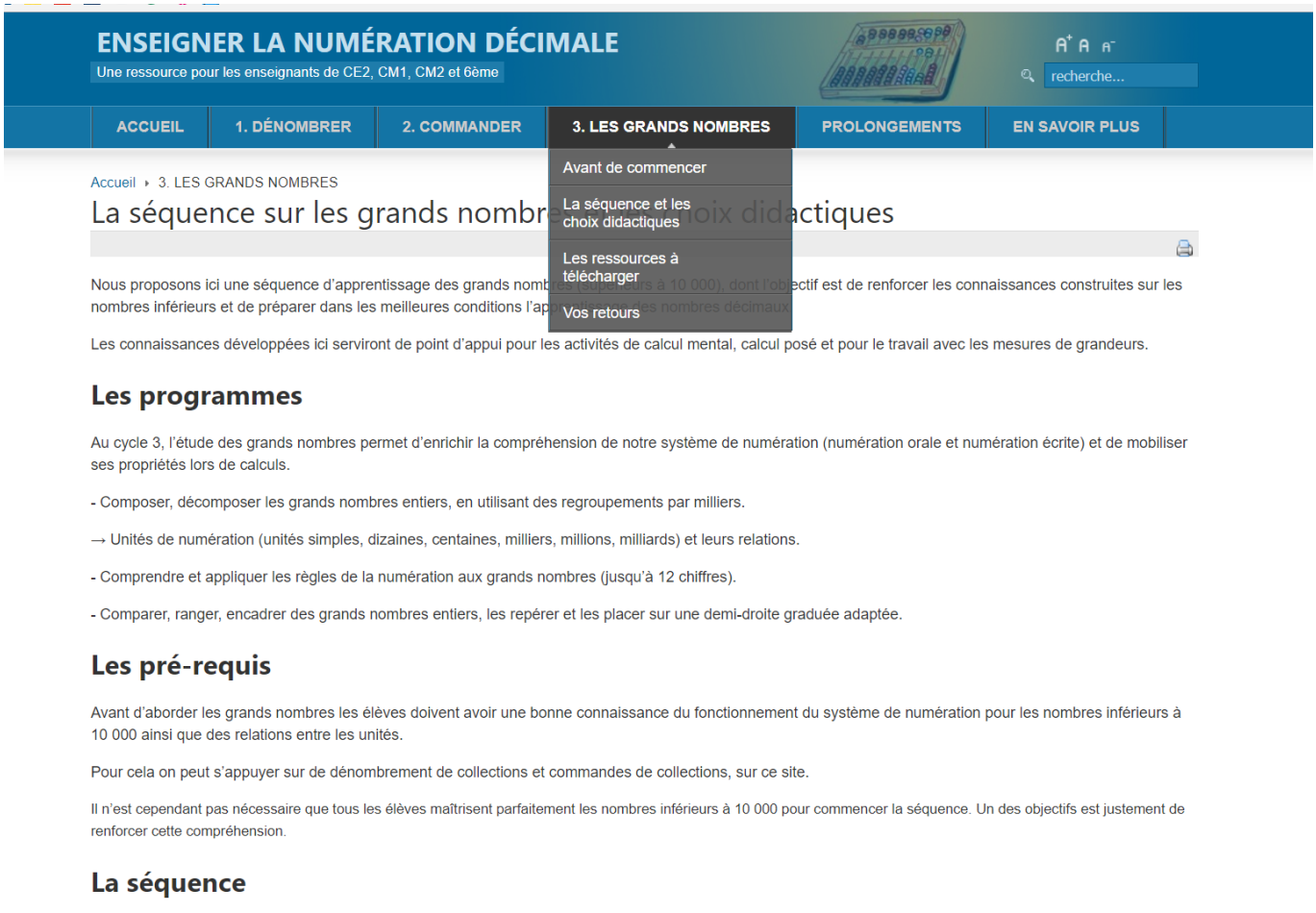
Tempier F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* Thèse de l'Université Paris Diderot, Paris 7.

Tempier F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, *98*, 67–90.

Thanheiser, E. (2009). Preservice Elementary School Teachers' Conceptions of Mutidigit Whole Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*, 251–281.

Wagner D., & Davis B. (2010). Feeling number: Grounding number in a sense of quantity. *Educational Studies in Mathematics*, *74*, 39–51.

ANNEXE 1 : UNE CAPTURE D'ÉCRAN DE LA RESSOURCE « ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE »



ANNEXE 2 : LA SÉQUENCE DE LA RESSOURCE « ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE » (PARTIE « GRANDS NOMBRES »)

Etape 1	Combien de carreaux ?
Activité d'introduction des grands nombres par le dénombrement d'une grande collection (carreaux d'une feuille de papier millimétré) pour donner un premier ordre de grandeur du million et comprendre la régularité du principe des groupements successifs par 10.	
Séance 1	Dénombrement et introduction de la dizaine de milliers, centaine de milliers et du million
Séance 2	Jeu du « qui est-ce ? »
Exercices de manuels	Convertir entre unités Composer un nombre Décomposer un nombre (de manière canonique)
Prolongements possibles	Dénombrement avec des conversions

Etape 2	Les millions. La classe !
Activités de décompositions variées de nombres suivies par la lecture et l'écriture de grands nombres en appui sur la décomposition en unités, milliers, millions, ...	
Séance 1	Décompositions variées
Séance 2	Lire et écrire les grands nombres
Exercices de manuels	Décomposer un nombre Lire et écrire des grands nombres
Prolongements possibles	Lire de très très grands nombres (CM2/6ème)

Etape 3	Pas de graduation ?
Activités de repérage et placement de nombres sur une demi-droite graduée (aspect ordinal du nombre) de manière exacte et approchée.	
Séance 1	Placement exact sur une demi-droite graduée
Séance 2	Placement approché sur une demi-droite graduée
Exercices de manuels	Placer un nombre sur une demi-droite graduée Comparer, ranger, encadrer des nombres
Prolongements possibles	Distances des planètes au soleil dans le système solaire (CM2/6ème) Frise chronologique

Etape 4	Calculateurs prodiges !
Activité de calcul mental qui vise à renforcer les connaissances des relations entre les nombres.	
Séance 1	Multiplications et divisions par 10
Séance 2	Multiplications et divisions par 100 et 1000
Prolongements possibles	Retrouver le calcul : réinvestissement des séances 1 et 2. Ordre de grandeur : retrouver le résultat d'un calcul en utilisant l'ordre de grandeur

COMMUNICATION C29

QUE NOUS APPRENNENT DES ÉVALUATIONS EN NUMÉRATION SUR LES ACQUIS DES ÉLÈVES EN REP DE CE1, CE2 ET CM1 ?

Nathalie PFAFF
PRAG maths, ESPE de Créteil
Nathalie.pfaff@u-pec.fr

Résumé

Le programme de 2015 au cycle 2 a accentué l'importance d'enseigner les unités de numération. De nombreuses recherches (Collet (2003), Fayol (2015), Mounier (2017)) mettent en évidence l'intérêt de cet apprentissage mais aussi la difficulté que cela occasionne aux élèves. La numération décimale est longue à acquérir.
Nous avons proposé des évaluations individuelles ciblées sur la compréhension des unités de numération à des élèves de REP (réseau d'éducation prioritaire) et REP+ de CE1 et CE2. Les résultats confirment que les unités de numération sont peu acquises en cycle 2 mais surtout que les élèves ne progressent pas entre le CE1 et le CE2. Une évaluation départementale en début de CM1 en REP et REP+ confirme qu'un grand nombre d'élèves ont une connaissance très limitée de la signification de l'écriture chiffrée.
La communication est centrée sur l'analyse de tous ces résultats aux évaluations et sur l'exploitation de cette analyse en formation continue.

INTRODUCTION

En Seine-Saint-Denis, en 2016-17 et 2017-18, les professeurs d'école (PE) affectés en tant que maîtres supplémentaires dans une école grâce au dispositif Plus de maîtres que de classes (PDMQDC), reçoivent une formation à l'ESPE en français et en mathématiques (18h dans chaque discipline). Pour aider ces enseignants à comprendre les difficultés des élèves dans la compréhension de l'écriture chiffrée, nous leur avons demandé d'effectuer une évaluation sur quelques élèves de CE1 et CE2. L'analyse de ces résultats, basée sur les procédures utilisées par les élèves dans une tâche de dénombrement, met en évidence une conception limitée de l'écriture chiffrée chez certains élèves. Parallèlement, les élèves de CM1 du département ont été évalués en novembre et deux exercices étaient centrés sur la signification de l'écriture chiffrée. Les résultats à cette évaluation permettent de compléter l'analyse issue de l'évaluation en cycle 2.

Dans une première partie, nous analysons l'évaluation et les résultats de cycle 2. Dans une deuxième partie, nous présentons quelques résultats de l'évaluation en CM1. Enfin, dans la troisième partie, nous montrons comment nous utilisons ces résultats en formation continue pour que les PE prennent conscience d'une insuffisance dans leur enseignement, ce qui les motive à modifier leurs pratiques.

I - EVALUATION EN CE1 ET CE2

1 Présentation de l'évaluation

1.1 L'enjeu de l'évaluation

Beaucoup de chercheurs tels que, entre autres, Chambris (2012), Collet (2003), Mounier (2016), Tempier (2010 et 2016) et Mounier et Pfaff (2012) ont révélé que les deux aspects de la numération écrite chiffrée, aspects positionnel et décimal, ne sont souvent pas acquis par les élèves de cycle 2. Tempier (2016) montre que la compréhension des unités de numération dans un nombre telle qu'elle est préconisée dans les programmes (56 signifie 5 dizaines et 6 unités ou 56 unités ou 4 dizaines et 16 unités ou 6 unités et 5 dizaines, etc.) est très limitée en début de CE2. Le passage d'une écriture en unités de numération à une écriture en chiffres n'est très bien réussi que dans le cas le plus simple où l'écriture en unités de numération est « 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités » (91% de réussite). Pour « 7 unités + 4 centaines », le pourcentage de réussite diminue (63%) et l'écriture en chiffres de « 21 dizaines + 3 centaines » est massivement échouée (21% de réussite). Les résultats présentés par Mounier (2016) sur des élèves de fin de CP ayant suivi un même itinéraire d'enseignement expérimental issue d'une ingénierie didactique montrent que les élèves n'utilisent pas le groupement par 10 pour dénombrer une collection non organisée d'une cinquantaine d'éléments et qu'ils sont encore nombreux à compter de un en un une collection organisée en groupes de 10. L'évaluation présentée ici vise à étudier ce dernier point. Quelles procédures les élèves utilisent-ils pour réaliser une collection dont la quantité est indiquée avec une écriture chiffrée sachant que le matériel disponible pour créer la collection est composé d'éléments déjà groupés par 10 et d'éléments isolés ?

1.2 Conditions de l'évaluation

L'évaluation a été proposée, individuellement à des élèves de CE1 et de CE2 en octobre par le PDMQDC de la classe. Cet enseignant intervient en binôme avec l'enseignant titulaire de la classe pendant des séances de français et de mathématiques. Ce test a été proposé, à nouveau, en juin à des élèves de CE1 ayant travaillé les unités de numération pendant l'année avec le PDMQDC. Les élèves sont testés individuellement par le PDMQDC afin qu'il puisse observer la procédure utilisée par l'élève. Si besoin, il demande des explicitations à l'élève pour identifier la procédure.

Le matériel utilisé pour l'évaluation est celui avec lequel les élèves travaillent lors des séances de numération en classe. Par la suite, nous parlerons de cubes emboîtables mais quelques PDMQDC ont pris un autre matériel tel que des bouchons et des sacs de dix bouchons.

L'évaluation a été proposée à un nombre d'élèves multiple de 3 en prenant, pour chaque trinôme, un élève estimé par le PE titulaire comme « bon » en numération, un « moyen » et un « en difficulté ».

421 élèves de CE1 ont été testés et 114 en CE2. Ces derniers ne sont pas des élèves ayant bénéficié d'un PDMQDC l'année précédente. La répartition identique des groupes d'élèves testés en CE1 et CE2 (1/3 « bon », 1/3 « moyen » et 1/3 « en difficulté ») permet de comparer les élèves de CE1 et CE2 même avec des effectifs différents pour ces deux cohortes. Cette répartition a été conservée en juin avec les CE1, ce qui permet de comparer les résultats même si le nombre d'élèves est plus faible (128 élèves faisant partie des 421 testés en début d'année).

1.3 Les épreuves de l'évaluation

Construire des groupes de dix

Pour commencer, il est demandé aux élèves de fabriquer six barres de dix cubes en emboitant les cubes les uns au-dessus des autres (ou six paquets de dix objets pour ceux qui utilisent un autre matériel type allumette ou bouchon ou autres).

Il est important que ce soit les élèves qui construisent ces barres afin qu'ils soient sûrs qu'il y a dix cubes dans chacune d'elles.

À l'issue de ces constructions, les élèves disposent de six barres de dix cubes et il leur reste vingt cubes isolés.

Cette 1re partie n'est pas évaluée. Il s'agit de constituer le matériel qui va servir pour la suite. Si un élève se trompe en construisant les barres de dix cubes, le PE le corrige afin que l'élève débute le test avec le matériel adéquat.

Réaliser une collection de quantité donnée avec son écriture chiffrée

Le PDMQDC montre à l'élève un papier sur lequel est écrit « 49 » (uniquement l'écriture chiffrée), sans prononcer sa désignation orale. Il demande de mettre, dans une barquette, la quantité de cubes indiquée sur le papier. On sait que la plupart des élèves savent lire ce nombre en début de CE1 mais la désignation orale du nombre aurait pu favoriser une procédure basée sur cette désignation. En effet, certaines procédures n'utilisent pas cette désignation.

Procédures utilisant la désignation orale :

- Lire le nombre écrit en chiffres : « quarante-neuf ». Compter les cubes de un en un soit en les détachant, soit sur les barres jusqu'à quarante-neuf.
- Lire le nombre écrit en chiffres : « quarante-neuf ». Compter de dix en dix en prenant les barres puis de un en un : « dix, vingt, trente, quarante, quarante-et-un, quarante-deux… ». Cette procédure ne repose pas sur la prise en compte du nombre de dizaines et d'unités. Le 4 de l'écriture chiffrée n'est pas nécessairement traduit comme signifiant 4 dizaines.
- Lire le nombre écrit en chiffres : « quarante-neuf ». Compter de dix en dix en prenant les barres jusqu'à cinquante. Savoir que quarante-neuf précède cinquante et retirer un cube.

Procédures n'utilisant pas la désignation orale :

- Compter 4 barres puis 9 cubes : cette procédure utilise la signification de l'écriture chiffrée à savoir la prise en compte du nombre indiquant les dizaines et de celui indiquant les unités restantes. Elle ne nécessite pas de traduire le nombre en désignation orale. On voit la différence entre cette procédure et celle basée sur la désignation orale puisque l'élève compte les dizaines de 1 en 1 : « un, deux, trois, quatre » et non de 10 en 10 : « dix, vingt, trente, quarante ». Cela se voit aussi dans le comptage des cubes isolés. Le comptage s'effectue de 1 en 1 jusqu'à neuf et non de quarante à quarante-neuf.
- Compter 5 barres afin de prendre 5 dizaines et retirer un cube à une dizaine pour n'avoir que 4 dizaines et 9 unités.

Des erreurs peuvent survenir en utilisant une de ces procédures mais d'autres erreurs sont possibles comme prendre 4 cubes isolés puis 9 autres cubes.

Deux codages sont attendus :

- un pour la réussite (code 1) ou l'échec (code 0)
- un autre pour la procédure utilisée
  - code 1 pour le comptage de un en un,
  - code 10 pour le comptage de dix en dix (soit en comptant jusqu'à quarante puis de un en un jusqu'à quarante-neuf, soit en comptant de dix en dix jusqu'à cinquante et en retirant un cube),
  - code d pour l'utilisation des chiffres dizaine, unité (soit en prenant 4 barres et 9 cubes, soit en prenant 5 barres et en retirant un cube),
  - code a pour une autre procédure.

Ajouter dix cubes et écrire le nombre total de cubes

Lorsque l'élève a mis les cubes dans la barquette (quel que soit le nombre mis), l'enseignant lui demande d'ajouter dix cubes puis d'écrire, sur une feuille, le nombre de cubes dans la barquette.

Deux procédures sont possibles pour ajouter dix cubes : soit prendre dix cubes isolés en les comptant de un en un (code 1), soit prendre une barre de dix cubes (code d).

L'écriture du nombre total est codée par deux fois : le premier codage concerne la réussite (code 1) ou l'échec (code 0) et l'autre considère la procédure pour écrire le nombre.

Les élèves peuvent :

- recompter le tout de un en un (code t) ;
- surcompter de un en un à partir de 49 (code 1) ;
- ajouter dix à quarante-neuf pour obtenir cinquante-neuf et transcrire cette désignation orale en écriture chiffrée (code 10) ;
- écrire le nombre en comptant 5 barres et 9 cubes ou en ajoutant 1 à 4 dizaines sans recompter les barres (code d).

3 Résultats à l'évaluation en octobre en CE1 et CE2 et en juin en CE1

2.1 Réaliser une collection de quantité donnée avec son écriture chiffrée (49)

Résultat global

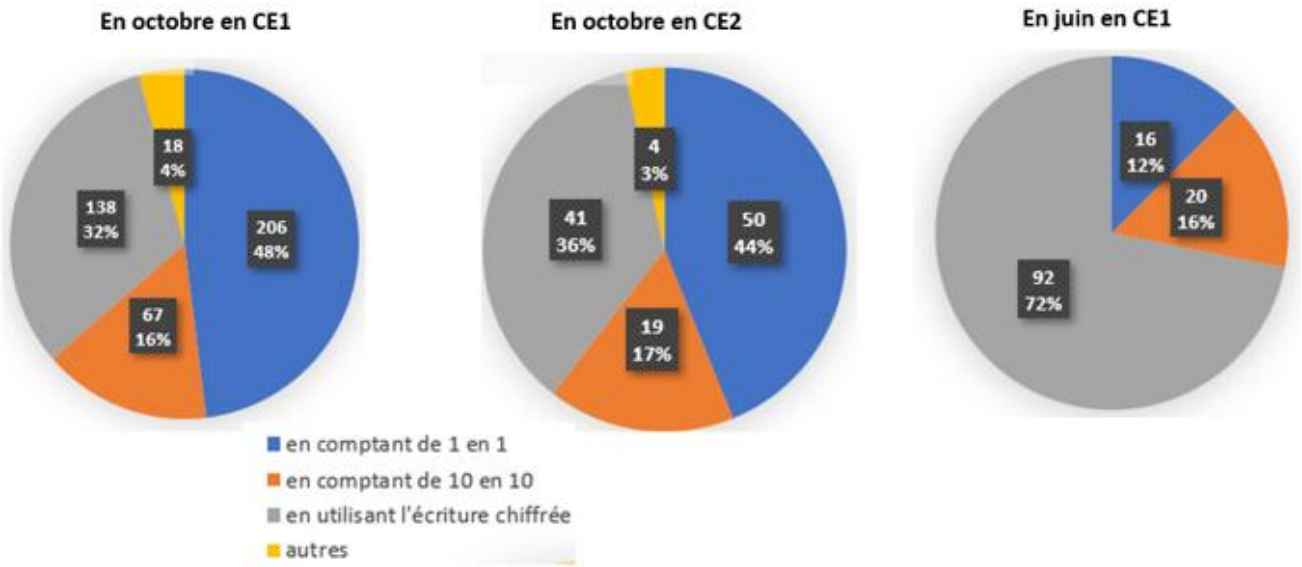
Le premier constat sur cet item est l'échec important et comparable entre le début d'année CE1 et début d'année CE2. Les progrès sont notables en fin de CE1 après un apprentissage centré sur les unités de numération. Les élèves de fin de CE1 ayant suivi un apprentissage PDMQDC ont une réussite supérieure à ceux de CE2 (13% d'écart).

Pourcentage de réussite en octobre en CE1 (429 élèves)	Pourcentage de réussite en octobre en CE2 (114 élèves)	Pourcentage de réussite en juin en CE1 (128 élèves)
72%	79%	92%

Tableau 1. Réussite à prendre 49 cubes

28% des élèves de début CE1 (122 sur 440) échouent à prendre 49 cubes et ils sont encore 21% en début CE2. Bien sûr, on peut lire positivement le résultat en considérant que plus des trois quarts des élèves réussissent cet item mais le nombre appartient à un domaine numérique travaillé depuis le CP et il ne soulève pas des difficultés particulières à lire.

Le second constat concerne les procédures utilisées et la non évolution de ces procédures du CE1 au CE2 avec un apprentissage « classique »[199]. Comme le montre le graphique 1, les élèves utilisent majoritairement le comptage de 1 en 1 : 48% en CE1 et 44% en CE2.



Graphique 1. Procédures utilisées pour prendre 49 cubes

[199] Le terme « classique » signifie que les élèves testés en CE2 n'ont pas bénéficié, en CE1, d'un PDMQDC.

Environ, une moitié des élèves de début CE1 ou de début CE2 ne se sert pas des barres de dix qu'ils ont pourtant construites et certains en mettant beaucoup de temps. Au contraire, ils les défont ce qui leur demande, à nouveau, beaucoup de temps.

Une PDMQDC rapporte ce qu'elle a observé : « Tous les élèves, ayant compté de un en un, ont commencé par compter les vingt cubes isolés puis ont détruit les barres pour continuer le comptage de un en un. »

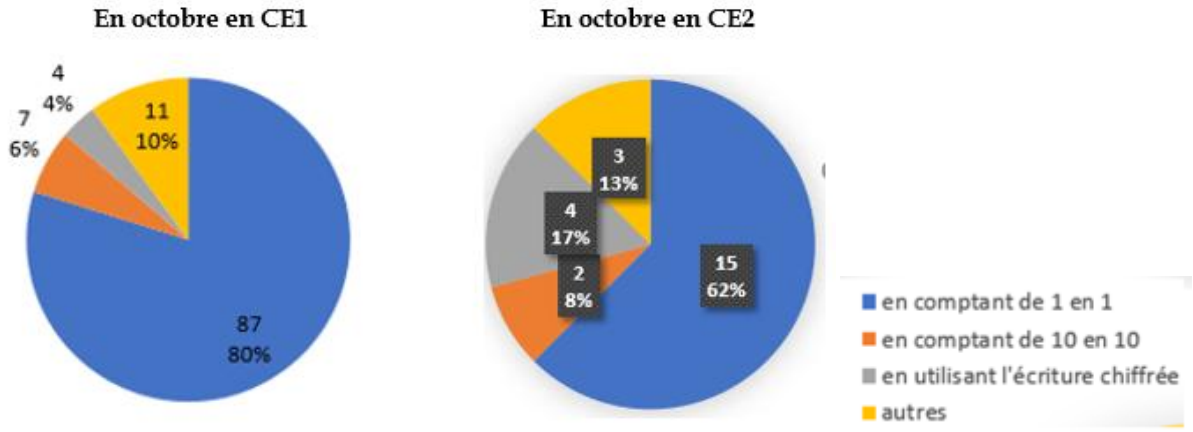
Le comptage de dix en dix se révèle être la procédure la moins utilisée (16% des élèves de début CE1 et 17% des élèves de début CE2 utilisent cette procédure). Ce résultat étonne vu que la construction des barres de dix cubes aurait pu la favoriser. La suite numérique orale de dix en dix est peut-être mal maîtrisée même si cela semble peu probable pour les élèves de CE2 qui n'utilisent pas plus cette procédure que les CE1. Le pourcentage d'élèves utilisant le comptage de dix en dix reste stable en fin de CE1 après un apprentissage ciblé sur les unités de numération. Le fait qu'un élève utilise cette procédure n'implique pas qu'il ne connaisse pas la signification de l'écriture chiffrée. Ce qui est intéressant de remarquer est la chute dans l'utilisation du comptage de un en un au profit de la procédure basée sur la signification de l'écriture chiffrée qui consiste à compter le nombre de dizaines puis le nombre d'unités restantes. En octobre, 48% des élèves de CE1 comptent de un en un et ils ne sont plus que 12% à le faire en juin. A contrario, le pourcentage d'élèves utilisant la signification de l'écriture chiffrée passe de 32 % en octobre à 72% en juin.

L'analyse des réussites et des échecs en fonction de la procédure utilisée permet d'affiner la compréhension des résultats.

Analyse des procédures utilisées par les élèves ayant échoué

L'étude des procédures utilisées par les élèves ayant échoué permet de comprendre ces échecs.

Sur les 28% des élèves de début de CE1 ayant échoué, 80 % ont essayé de compter les éléments de 1 en 1 et la plupart en défaisant ce qu'ils avaient fait précédemment à savoir les barres de dix. De même, sur les 21% des élèves de début de CE2 ayant échoué, la procédure utilisée massivement est le comptage de un en un (62%).



Graphique 2. Procédures utilisées par les élèves ayant échoué

Il n'est pas étonnant que la procédure majoritaire pour les élèves ayant échoué soit le comptage de un en un. C'est la procédure qui peut provoquer le plus d'erreurs parmi les trois procédures justes possibles (voir aussi Mounier, Pfaff (2012) qui établissaient déjà ce constat). Des erreurs sont possibles dans la suite numérique orale et dans l'énumération de la collection (voir Briand 1999).

Le comptage de dix en dix quand on connaît la suite numérique orale de dix en dix ne soulève pas les difficultés du comptage de un en un, en particulier, les difficultés dans l'énumération, d'autant plus qu'ici les dizaines sont déjà constituées.

La compréhension de la valeur des chiffres selon leur position dans le nombre rend la procédure basée sur cette signification des chiffres très sûre en termes de réussite. Il est donc logique que très peu d'élèves (4 sur 109 en CE1 et 3 sur 24 en CE2) échouent en utilisant cette procédure.

Nous n'effectuons pas la comparaison des procédures pour les élèves ayant échoué en juin en CE1 puisqu'ils ne sont que 10.

Si le comptage de un en un est la procédure largement majoritaire chez les élèves ayant échoué, qu'en est-il de ceux qui ont réussi ?

Analyse des procédures pour les élèves ayant réussi

Pour les élèves ayant réussi, les trois procédures justes possibles se répartissent de façon plus équilibrée.



Graphique 3. Procédures utilisées par les élèves ayant réussi à prendre 49 cubes

La signification de l'écriture chiffrée presqu'inexistante pour les élèves ayant échoué est beaucoup plus utilisée par ceux qui réussissent (43% des élèves de CE1 et 42% de CE2, qui réussissent, utilisent cette procédure). Mais, ici encore, il n'y a pas d'évolution entre le CE1 et le CE2 alors qu'elle est significative en fin d'année pour les CE1 ayant eu un apprentissage ciblé.

Des PE ont remarqué que quelques élèves de début CE1 ne savaient pas lire le nombre mais ont réussi à placer le nombre indiqué en utilisant la signification des chiffres.

« Ciblé comme un enfant "en difficulté", il a pris directement 4 barres de 10 puis ajouté 9 cubes. »

« Une élève a réussi à faire toutes les étapes sans être capable de lire les nombres 49 et 59. »

Le comptage de dix en dix est plus utilisé par les élèves qui réussissent que par ceux qui échouent mais en faible proportion (19% en CE1 contre 6% qui échouent et 19% en CE2 contre 8%).

Le comptage de un en un reste une procédure très utilisée par ceux qui réussissent puisque 38% des CE1 (en octobre) et 39% des CE2 ne se servent pas des barres de dix qu'ils ont pourtant construites. Au contraire, ils les cassent ce qui leur prend beaucoup de temps. On peut émettre l'hypothèse que ces élèves ne font pas la relation entre le 4 de l'écriture chiffrée 49 et les barres de dix qu'ils ont construites. Ils savent peut-être que 4 est le chiffre des dizaines de 49 mais les barres de dix cubes ne sont pas considérées en tant que dizaines. Pourtant, rappelons que le matériel utilisé dans l'évaluation est le matériel de numération habituel de la classe.

2.2 Ajouter dix cubes

Avant d'ajouter dix cubes, il reste une ou deux barres de dix à la très grande majorité d'élèves. Quelques-uns ont défait toutes les barres pour compter les quarante-neuf cubes mais ils sont très minoritaires.

Le tableau indique les pourcentages d'élèves ayant compté de un en un les cubes pour en ajouter 10 que ce soit en détachant les cubes ou en les comptant sur la barre.

En octobre en CE1	En octobre en CE2	En juin en CE1
57%	56%	40%

Tableau 2. Pourcentages d'élèves ayant compté de un en un pour ajouter 10 cubes

57% des élèves de CE1 (220 sur 389) et 56% de CE2 (60 sur 107) comptent de un en un pour ajouter dix cubes. Ils ne sont que 43% de CE1 et 44% de CE2 à ajouter une barre sans compter les cubes. Comment expliquer ce résultat ?

Il est possible que si la demande avait été d'ajouter une dizaine et non dix cubes, beaucoup plus d'élèves auraient ajouté une barre de dix cubes. Mais intentionnellement, il a été demandé d'ajouter dix cubes pour savoir si, dans le cadre de cette tâche, les dix cubes assemblés conservent le statut de dix cubes. Il apparait que la demande d'ajouter dix cubes incite les élèves à compter de un en un les cubes, y compris pour certains élèves qui utilisent l'écriture chiffrée pour constituer la collection. Les dix cubes assemblés ne semblent pas avoir le même statut que les dix cubes isolés.

C'est sur cet item que les progrès des CE1 après l'enseignement ciblé des PDMQDC sont les moins visibles puisqu'il reste 40% des élèves qui comptent les cubes de un en un.

Est-ce une sorte d'effet du contrat didactique ? Le travail sur les dizaines entraîne les élèves à compter de un en un pour former des groupes de dix. Ils ont donc cette habitude et la garde même quand le groupe de dix est déjà constitué. Ils peuvent aussi penser que le PE attend un comptage de leur part.

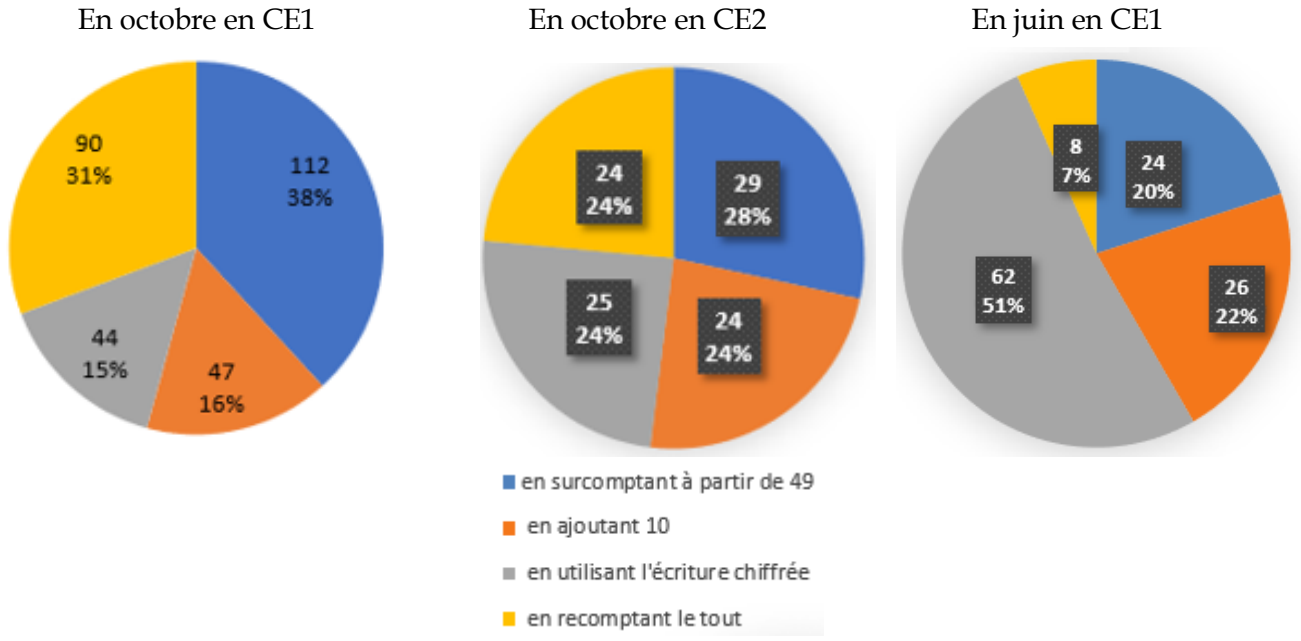
2.3 Écrire le nombre total de cubes après en avoir ajouté dix

C'est sur cet item que la différence entre les élèves de CE1 et de CE2 se voit. Comme le montre le tableau 3, 64% de CE1 réussissent cet item alors qu'ils ont 77% en CE2.

En octobre en CE1	En octobre en CE2	En juin en CE1
64%	77%	82%

Tableau 3. Pourcentages d'élèves ayant réussi à écrire 59 après avoir ajouté 10 cubes

La différence entre CE1 et CE2 se distingue aussi sur les procédures utilisées pour écrire le nombre de cubes après en avoir ajouté dix.



Graphique 3. Procédures utilisées pour écrire 59

Plus des deux tiers des élèves de CE1 (69%) recomptent le tout ou surcomptent de un en un à partir de 49. Ils ne sont plus qu'une moitié de CE2 (52%) à utiliser une de ces deux procédures. Malgré ce progrès, cela signifie quand même qu'un élève sur deux de CE2 utilise du comptage de un en un pour trouver le nombre de cubes après en avoir ajouté 10. Ces deux procédures diminuent fortement en juin en CE1 puisqu'elles ne sont employées que par un plus d'un quart d'élèves. L'utilisation de l'écriture chiffrée ou du calcul mental de l'addition de 10 à 49 progresse de 31% en octobre en CE1 à 73% en juin alors qu'il est de 48% en CE2.

4 Synthèse de l'analyse des résultats

Pour réaliser la collection de 49 cubes, presque la moitié des élèves comptent de un en un en détachant les cubes alors que la procédure est très longue et source d'erreurs. D'ailleurs cette procédure est majoritaire pour les élèves ayant échoué. Les procédures utilisées par les élèves de CE2 n'évoluent pas par rapport à celles des CE1.

Les résultats aux autres items confirment que la procédure de comptage de un en un est prégnante et qu'il y a très peu de différences entre les CE1 et CE2. Ce test permet de quantifier ce résultat et ainsi d'en faire prendre conscience aux PE.

L'évaluation départementale proposée en début de CM1 aux élèves relevant de l'éducation prioritaire (REP et REP+) confirme l'insuffisance de la compréhension des unités de numérations.

II - ÉVALUATION EN CM1

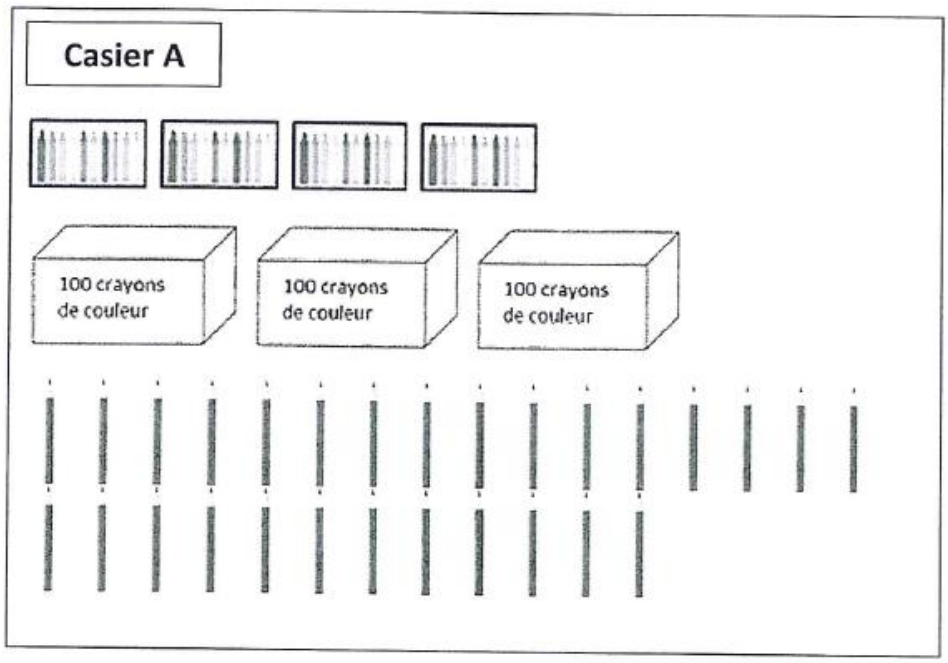
1 Présentation de l'évaluation

En Seine-Saint-Denis, une évaluation départementale en mathématiques des élèves de CM1 en éducation prioritaire a eu lieu en novembre. Les items de cette évaluation ont été rédigés par des IEN du département. Parmi tous les exercices proposés, deux concernent la signification de la numération de position.

Un exercice demande d'écrire, en chiffres, le nombre total d'une collection de crayons ; cette collection est organisée en paquets de 100, groupes de 10 et crayons isolés.

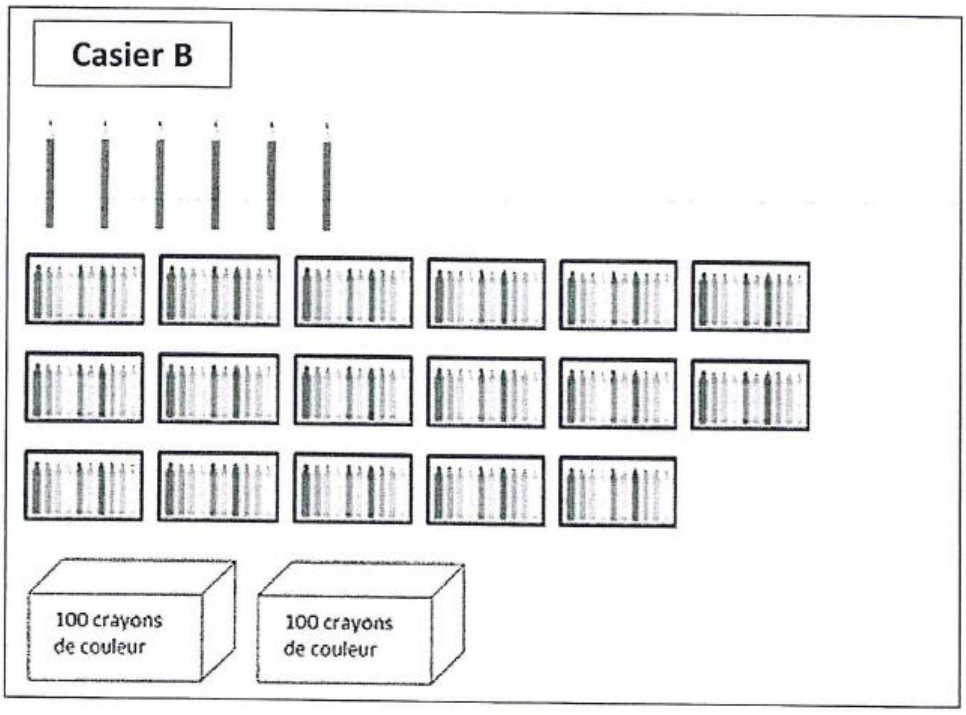
Consigne :

> *« Les crayons de couleur de la classe sont rangés dans des casiers. Certains crayons sont groupés par boîte de cent, d'autres par étui de dix et d'autres sont seuls.*
>
> *Combien de crayons y a-t-il dans chaque casier ? Complète les étiquettes de chaque casier. »*



Casier A

Il y a ..... crayons.

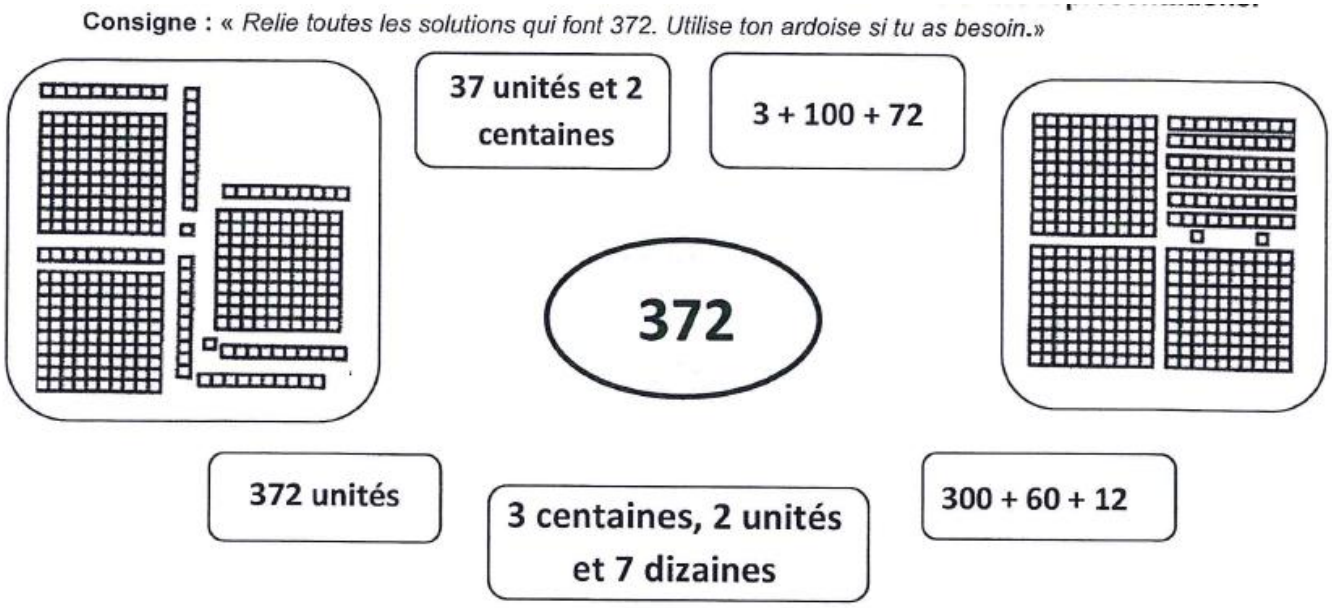


Casier B

Il y a ..... crayons.

Le comptage de un en un de toute la collection est impossible puisque les cent crayons ne sont pas visibles dans les boites. Cependant, les élèves peuvent compter de cent en cent et de dix en dix et de un en un puisqu'ils ont dix minutes pour faire l'exercice. La procédure la plus rapide est celle qui utilise les unités de numération et la signification de l'écriture chiffrée. Exemple pour le casier A : 4d 3c 28u c'est pareil que 6d 3c 8u qui s'écrit 368. Cette procédure peut s'effectuer directement sur les unités de numération ou en commençant par grouper par 10 les crayons isolés pour faire apparaitre les dizaines supplémentaires. D'après les programmes, les élèves de CM1 devraient avoir les connaissances pour disposer de cette procédure.

Un autre exercice concerne aussi l'écriture chiffrée puisqu'il demande de trouver les différentes représentations d'un nombre donné en écriture chiffrée.



Cet exercice peut être proposé en fin d'année en CE1. La représentation juste avec les carrés comporte un nombre de plaques de centaine, un nombre de barres de dizaine et un nombre de carrés isolés qui correspondent aux chiffres du nombre.

La représentation 300 + 60 + 12 correspond à la désignation orale du nombre « trois-cent-soixante-douze ».

Les deux représentations qui font appel aux unités de numération (3c 2u 7d et 372u) présentent, a priori, peu de difficultés. Pour 3c 2u 7d, la difficulté réside dans le nombre d'unités donné avant celui des dizaines. 372 est souvent traduit uniquement sous la forme 3c 7d 2u (surtout lorsque le tableau de numération est utilisé) ce qui peut rendre difficile la compréhension que 372 représente aussi 372u. Il aurait été intéressant de proposer d'autres écritures en unités de numération mais ici, nous analysons les résultats à ces items qui, rappelons-le, ont été rédigés par des IEN du département.

Les analyses proviennent des résultats codés par les enseignants sous la forme 1 (réussite), 9 (erreur) et 0 (absence de réponse). 2349 élèves de seine Saint-Denis. REP et REP + ont ainsi été évalués.

Pour compléter ces résultats qui ne permettent pas d'analyser en détail les erreurs, les livrets de 275 élèves ont été étudiés.

2 Résultats à l'évaluation

2.1 Résultats à l'exercice portant sur les collections de crayons

Le tableau 4 présente les résultats à cet exercice.

Réussite au casier A 4d 3c 28u	Réussite au casier B 6u 17d 2c	Réussite aux 2 items
53,8%	48,6%	37,5 %

Tableau 4. Résultats à écrire en chiffres le nombre de crayons

Environ un élève sur 2 échoue à dénombrer le nombre de crayons. Nous pouvons déduire des résultats que très peu d'élèves comprennent la logique des unités de numération à l'œuvre dans la numération écrite chiffrée (Comme l'indique Tempier (2016), le système de numération est à la fois positionnel (le premier rang à partir de la droite correspond aux unités, le deuxième rang aux dizaines, etc.) et décimal (10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, etc.)). Il n'y a que 37,5% d'élèves qui réussissent les deux exercices. Or si un élève utilise correctement les unités de numération, il y a peu de raison qu'il réussisse à l'un et échoue à l'autre. Dans le cas A, il y a une conversion de 28u en 2d 8u et dans le cas B, la conversion concerne 17d à écrire en 1c 7d.

L'erreur la plus fréquente est la non prise en compte des boites centaine ou des étuis de dizaines ou des crayons à l'unité. Plus d'un tiers des réponses fausses sont inférieures à 300 pour le 1er item où 3 boîtes de 100 sont représentées et inférieures à 200 pour le 2e où il y a 2 boîtes de 100. Cela signifie que ces élèves ne mettent pas en relation leur résultat et les boites de 100. Ils ne vérifient pas si leur résultat est un nombre à trois chiffres avec le nombre de centaines au moins égal au nombre de boites de 100.

Sur les 275 livrets étudiés, il n'y a que 32 élèves qui laissent des traces sur la feuille en plus de leur réponse. 25 d'entre eux posent des additions pour trouver la quantité du 1er item et 17 d'entre eux posent des additions ou une multiplication pour calculer le résultat du 2e item. Les autres ont donc soit calculé mentalement en comptant de 100 en 100, 10 en 10, 1 en 1, soit en utilisant les unités de numération mais cette dernière procédure est probablement peu utilisée. Sur les 275 livrets, il n'y a que 5 livrets sur lesquels on trouve une trace marquant les groupes de 10. Sur l'un d'entre eux, l'élève a écrit 10 au-dessus des boites de 10, 100 au-dessus des boites de 100 et 10 au-dessus des groupes qu'il a entourés. On peut supposer qu'il n'a pas utilisé les unités de numération mais un comptage.

Il n'y a qu'un livret sur lequel est inscrite une référence aux unités, dizaines et centaines et l'écrit est faux puisqu'il est indiqué 40d et 300c.

2.2 Résultats à l'exercice portant sur les différentes représentations du nombre 372

Le tableau 5 présente les résultats à cet exercice.

Réussite à la représentation en carrés	Réussite à 300+60+12	Réussite aux unités de numération
64,7%	64,1%	52,4%

Réussite aux 3 items
32,4 %

Tableau 5. Résultats à trouver les représentations de 372

Malgré la facilité de la représentation en carrés, plus d'un élève sur trois échoue à trouver la représentation en carrés.

La correspondance entre la désignation orale de 372 et la décomposition additive 300 + 60 + 12 n'est pas identifiée par plus d'un tiers des élèves.

Comme pour l'exercice précédent, il n'y a environ qu'un tiers des élèves qui réussisse tout l'exercice (les 3 items).

Erreur pour la représentation en carrés

La majorité des élèves qui se trompent ne relie 372 à aucune représentation en carrés. La durée de l'exercice étant de 7 minutes, cette erreur ne peut être attribuée au manque de temps que si les élèves ont essayé de compter de 1 en 1 tous les carrés. Il n'était pas précisé, dans l'énoncé, que les plaques sont constituées de 100 carrés et les barres de 10 carrés. L'absence de réponse est sûrement dû à cette non reconnaissance de la quantité de carrés dans une plaque et dans une barre. Pourtant, c'est une représentation que l'on trouve dans beaucoup de manuels de cycle 2. Mais si elle est fréquente en CP et CE1, elle l'est beaucoup moins en CE2. Il est possible que les élèves ne se souviennent plus de cette représentation.

Erreur pour la décomposition additive

La majorité d'élèves, qui échoue à cet exercice, relie 372 à 3 + 100 + 72. On voit que les élèves ne contrôlent pas la validité de leur réponse puisqu'un simple calcul mental aurait pu leur permettre de s'apercevoir que cette décomposition additive est fausse. Ils se fient à la lecture des nombres (au son des nombres) et non à la quantité ou à l'écriture chiffrée)

Erreur pour la représentation en unités de numération

La majorité des élèves, qui échoue, ne reconnait pas que 372 signifie 372 unités. Le tableau de numération utilisé fréquemment en classe pourrait renforcer l'idée que 372 c'est 3c 7d et 2u et non 372u (cela peut aussi empêcher de percevoir d'autres types de décompositions en unité de numération). Dans un tableau de numération, on n'inscrit qu'un chiffre dans la colonne unité. Un tiers des élèves échouant se trompe à cause de la décomposition 3c 2u 7d qui n'est pas dans l'ordre « traditionnel ». On retrouve les résultats donnés par Tempier (2016).

5 Synthèse de l'analyse des résultats

L'analyse de ces résultats confirme celle issue de l'évaluation en CE1 et CE2. La signification de l'écriture chiffrée en unités de numération (telle que définit par Tempier (2012) : valeurs positionnelle et décimale), même sur des nombres à 2 ou 3 chiffres, est très limitée par beaucoup d'élèves en fin de cycle 2.

Pourtant, les résultats des élèves en juin en CE1 montrent qu'un apprentissage ciblé sur les unités de numération (du type indiqué par le B.O., 56 signifie 5 dizaines et 6 unités ou 56 unités ou 4 dizaines et 16 unités ou 6 unités et 5 dizaines, etc) permet aux élèves de progresser dans la signification de l'écriture chiffrée. Il est donc nécessaire de faire prendre conscience aux enseignants le besoin de renforcer la signification de l'écriture chiffrée.

Nous allons décrire rapidement comment nous utilisons ces résultats en formation continue des professeurs d'école pour les inciter à faire évoluer leur enseignement.

III - UTILISATION DES RESULTATS DE L'EVALUATION EN FORMATION CONTINUE

1 Inventaire des procédures

En formation, nous présentons les différents items et les résultats de l'évaluation. Au lieu de donner la liste des procédures justes possibles pour réaliser la collection de 49 cubes, nous demandons aux enseignants de la trouver.

Beaucoup d'enseignants ne distinguent pas la procédure de comptage de dix en dix jusqu'à quarante puis de un en un à partir de quarante jusqu'à quarante-neuf de la procédure consistant à prendre 4 dizaines (4 barres de dix cubes) puis 9 unités (9 cubes). Pour eux, compter les barres de cubes de dix en dix signifie que les élèves les considèrent comme des dizaines. Il n'est pas très simple de faire comprendre qu'il est possible que certains élèves conçoivent les barres de dix comme des dizaines en comptant de dix en dix mais qu'il est aussi possible que ce ne soit pas le cas. Le résultat des élèves de CE1 en juin permet de renforcer l'hypothèse que si les élèves utilisaient la signification de l'écriture chiffrée, ils ne compteraient pas de dix en dix (puisque cette procédure est peu employée en juin).

La non distinction chez les enseignants entre les deux procédures (comptage de dix en dix et prise en compte des dizaines et des unités) peut paraître surprenante mais l'étude de certains manuels permet de la comprendre. Dans la plupart des manuels que les PE en formation utilisent, les exercices travaillant sur l'écriture chiffrée associent la décomposition d'un nombre à deux chiffres en dizaines et unités avec la décomposition additive.

Exemple d'un texte extrait d'un fichier CP pour une séance dont l'objectif est « consolider la connaissance de la structure des nombres à deux chiffres en prenant appui sur les unités de numération » :

Dans 34, le 3 c'est 3 dizaines.

34 = 30 + 4.

Dans 43, le 3 c'est 3 unités.

43 = 40 + 3.

2 Réflexion des enseignants à propos des résultats à l'évaluation

Après avoir présenté les items de l'évaluation et avant de donner les résultats, nous demandons le pronostic des professeurs d'école sur le pourcentage de réussite, en début de CE1, pour la réalisation de la collection de 49 cubes. La majorité sous-estime la réussite. Les pronostics varient entre 30% et 75% mais le plus souvent entre 40% et 50%. S'ils sont surpris des résultats (72% de réussite en octobre en CE1), c'est parce qu'ils les considèrent comme très bons. Cependant, le résultat en début de CE2 les étonne et les interpelle puisqu'ils s'avèrent que les élèves ne progressent pas.

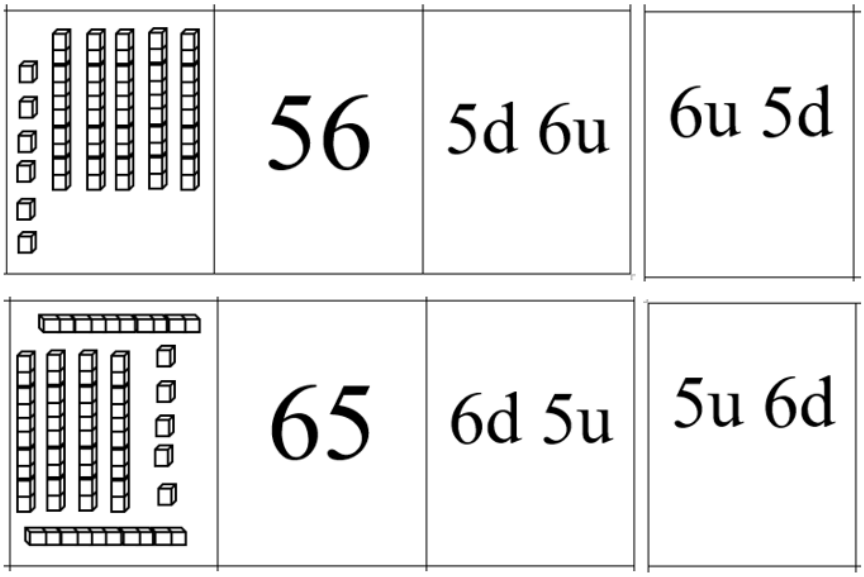
Les résultats relatifs aux procédures augmentent leur étonnement puisqu'ils ne s'attendent pas à ce que la procédure de comptage de un en un soit majoritaire et que les procédures n'évoluent pas entre le CE1 et le CE2.

Cette présentation de ces résultats et des résultats aux autres items permet aux enseignants de prendre conscience que l'enseignement « traditionnel » ne permet pas à tous les élèves de comprendre la signification de l'écriture chiffrée. La suite de la formation consiste à :

- trouver les raisons à cette incompréhension de la part des élèves en étudiant quelques exercices proposés dans les manuels ;
- construire des situations qui favorisent l'apprentissage de la signification de l'écriture chiffrée.

Les situations sont construites à partir de jeux qui sont proposés aux enseignants.

Exemple : Le jeu des familles.
Nous présentons les cartes du jeu et le but du jeu. Il s'agit de constituer des familles avec des cartes où figurent différentes représentations d'un même nombre.



Les enseignants réfléchissent sur la mise en place de ce jeu en modifiant les variables pour construire une progression avec ce jeu permettant de travailler les unités de numération.

La construction de la progression permet d'interroger la place de la manipulation dans cette progression et les différentes représentations du nombre qui sont intéressantes à proposer pour travailler le sens de l'écriture chiffrée.

IV - CONCLUSION

Des chercheurs comme Chambris (2012), Mounier (2016) et Tempier (2010) ont montré l'importance d'enseigner les unités de numération. Le programme 2015 et les ajustements du programme de 2018 pour le cycle 2 vont dans le même sens puisqu'ils indiquent d'« utiliser des écritures en unités de numération (5d 6u, mais aussi 4d 16u ou 6u 5d pour 56). Or, les résultats aux évaluations montrent que ce travail sur les unités de numération est insuffisant. Plus que les résultats en début de CE1, c'est surtout la non évolution de ces résultats qui questionne. Nos résultats concernent des élèves en éducation prioritaire et il est possible que nos conclusions ne se généralisent pas à l'ensemble des élèves. Mais ces résultats permettent aux enseignants en formation de questionner l'enseignement de la signification de l'écriture chiffrée et de les impliquer dans la construction de séances plus ciblées sur cette notion.

V - BIBLIOGRAPHIE

Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1). La Pensée Sauvage.

Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs : le système métrique peut-il être utile ? *Grand N,* 89. IREM Grenoble

Collet, M. (2003). Le développement du système en base 10 chez des élèves de 2ème et de 3ème année primaire, une étude exploratoire. *Education et francophonie*, 31(2).

Mounier, E. (2016). Nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leurs liens avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 36(3). La Pensée Sauvage.

Mounier, E., Pfaff, N. (2012). Quoi de neuf dans la numération au CP ? *Actes XXXVIII Colloque Copirelem*.

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2 *Grand N,* 86 IREM Grenoble.

Tempier, F. (2012). Quelle ressource pour enseigner la numération décimale ? Présentation d'un travail en cours. *Actes du colloque EMF2012.*

Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, 98. IREM Grenoble.

COMMUNICATION P1

LA NUMÉRATION *SÉCIMALE* EN FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRÉ

Annette BRACONNE-MICHOUX
Université de Montréal, Canada
annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Konstantinos NIKOLANTONAKIS
Université de Macédoine Ouest, Grèce
kostas_nikolan2000@yahoo.gr

Laurent VIVIER
Université Paris Diderot, France
Laboratoire de Didactique André Revuz
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Résumé

Les obstacles sont nombreux dans l'enseignement et l'apprentissage de la numération décimale alors que pour le futur professeur, il s'agit d'un acquis naturalisé, presque incarné. En formation initiale, le travail en base six, sans recourir à la base dix, permet de reprendre les principales connaissances sur les nombres : aspects ordinal et cardinal, numération orale, algorithmes des 4 opérations, critères de divisibilité, nombres *sécimaux* ou « *à virgule* », ainsi que sur les mesures des grandeurs, notamment longueur et aire.
Nous proposons, en formation initiale, dans un contexte de préparation aux métiers de l'enseignement en licence, une séquence longue sur la base six, proche de la base dix en français (*dix* et *six*) et en mathématiques (2×5 et 2×3).

I- INTRODUCTION

La numération décimale est une des notions clés de l'enseignement primaire, quel que soit le pays. Son enseignement s'étend sur l'ensemble du premier degré, y compris la maternelle, et même au collège. Du point de vue de l'apprentissage des élèves, les difficultés sont nombreuses, que ce soit dans le travail des nombres proprement dit ou bien dans leurs applications. Aussi, nous avons fait le choix de nous concentrer sur les notions qui nous semblent les plus importantes ou qui pourraient avoir le plus d'intérêt auprès de futurs enseignants : compréhension du codage, aspects ordinal et cardinal, numération orale, les techniques des quatre opérations de base, les critères de divisibilité, les rationnels (fractions et décimaux), les mesures de grandeurs (longueur, aire, volume, masse, capacité, etc.), les nombres réels et leurs approximations ($\sqrt{2}$ et π notamment), etc. Les travaux de Chambris (2010) ont permis de mettre en évidence l'importance des unités de numération, en lien avec le système métrique.

Tous ces points sont à travailler pour les futurs professeurs des écoles, les premières notions étant particulièrement cruciales étant donné qu'elles constituent un enjeu de l'apprentissage de toute première importance.

L'objet de cette étude est d'enrichir les connaissances sur la numération décimale des futurs professeurs d'école afin qu'ils puissent élaborer à leur tour des activités pour leurs élèves qui soient riches du point de vue mathématique. Nous faisons l'hypothèse que :

- La numération décimale est un fondement des mathématiques enseignées à l'école primaire alors que les futurs enseignants ne comprennent pas les enjeux et les difficultés relatives à ces connaissances du système décimal qu'ils ne voient plus.

- La grande proximité des étudiants avec le système décimal constitue un obstacle en formation et l'étude d'un système s'appuyant sur une base autre que dix permet de retravailler les connaissances visées en installant une distance cognitive.

Aussi nous avons fait le choix de faire travailler les étudiants en base six pour éviter le problème des bases supérieures à dix (Nikolantonakis & Vivier, 2013), tout en ayant un nombre raisonnable de chiffres et une proximité arithmétique : **dix**=2×5 et **six**=2×3 ont des propriétés arithmétiques similaires (voir ci-dessous).

II. LA SÉQUENCE LONGUE SUR LA NUMÉRATION SÉCIMALE

Tempier (2013) s'est appuyé sur les travaux de Chambris (2010) sur les unités de numération pour proposer une situation permettant de travailler, en CE2, la numération décimale des grands nombres. Nous avons repris cette situation en l'adaptant à la base sept (Nikolantonakis et Vivier, 2016) puis à la base six et, depuis plusieurs années, nous la proposons en France (en L3 MIASHS, parcours Professorat des Ecoles, de l'université Paris Diderot) et en Grèce (Faculté pédagogique de Florina, Université de Macédoine Ouest). De la situation de formation développée par Anselmo & Zucchetta (2013) qui repose aussi sur la numération en base six, nous n'avons pas gardé le travail sur les liens à faire entre la régularité de la numération écrite et l'irrégularité de la numération orale. En 2018, de janvier à avril, partant de la même situation en base six qui a fait ses preuves de robustesse depuis 2013, c'est toute une séquence de 8 séances de 3h qui a été proposée aux étudiants en formation initiale de la L3-PE. Les contenus ont balayé toutes les notions exposées ci-dessus :

- S1 : la situation de Tempier adaptée à la base six, codage, aspects ordinal et cardinal, unités de numération, additions de quantités (techniques personnelles) ;
- S2 : la numération orale en base six, résolution de problèmes additifs, avec une référence à (Vergnaud, 1990) pour un complément didactique ;
- S3 : les techniques de l'addition et de la soustraction en base six (les tables et leur exploitation dans l'algorithme de l'opération posée en colonne), résolution de problèmes multiplicatifs, avec une référence à (Vergnaud, 1990) pour un complément didactique ;
- S4 : *Evaluation 1* ; la multiplication et la division en base six (les tables) ;
- S5 : mesurer des longueurs, construction d'une droite numérique en base six avec des sous-multiples du mètre, nommer les multiples et sous-multiples en lien avec la numération orale ;
- S6 : mesurer/calculer des aires (carré, triangle, disque), approximations de $\sqrt{2}$ et π en base six, conversions de et vers la base dix ;
- S7 : *Evaluation 2*, différents types de représentations (dont la base de numération) des objets mathématiques, fractions ;
- S8 : arithmétique, nombres premiers (crible d'Ératosthène pour obtenir les nombres premiers inférieurs à 1000 = 6^3, PGCD, PPCM, ouverture sur les autres bases de numération ;
- *Evaluation finale.*

Le choix de la base six provient de plusieurs propriétés : la proximité phonétique entre six et dix qui permet d'introduire des mots comme *sizaine*, *sécimal*, sixième (encore que ce dernier existe) ; il n'y a pas besoin de nouveau chiffre pour coder (c'est une difficulté cognitive de premier ordre, Nikolantonakis et Vivier, 2013) ; six n'est pas trop *petit* (il n'y a pas une expansion rapide du nombre de chiffres comme en base 2 ou 3) ; et une « proximité mathématique » dans la mesure où la décomposition en facteur premier est du même type : six=2×3 et dix=2×5 (ainsi, le critère de divisibilité par 2 est le même en base six et dix, le critère de divisibilité par 3 en base six est similaire au critère de divisibilité par 5 en base dix et le

critère de divisibilité par 5 en base six est similaire au critère de divisibilité par neuf en base dix (prédécesseur de la base ; de même, $\frac{1}{2}$ s'écrit 0,5 en base dix et 0,3 en base six et 0,2 est codé $\frac{1}{5}$ en base dix et $\frac{1}{3}$ en base six).

Pour le futur professeur, la numération décimale est un acquis naturalisé, presque incarné (on associe directement 10 à « dix » et 12 à « douze » sans revenir aux dizaines et unités). Il est à noter que la séquence élaborée en formation ne repose en aucun cas sur la base dix. Même si les étudiants ont des connaissances en base dix (qu'ils utilisent), le contrat didactique instauré exclut jusqu'en S6 tout recours explicite à la base dix.

III- FOCUS SUR QUELQUES RÉPONSES

Il s'agit d'une première implémentation de cette séquence longue sur la numération sécimale. Les données recueillies sont : les observations et les notes de fin de séances par le formateur ainsi que les productions des trois évaluations. Dans cette section, nous commentons des réponses d'étudiants que l'on trouvera dans le poster, en annexe.

S1 –Avant de travailler une adaptation à la base six de la situation de Tempier (2013), on propose une tâche liée au codage et aux aspects ordinal et cardinal (Nikolantonakis & Vivier, 2016 ; Vivier, 2015). Il est demandé, en groupe, de compléter une table avec les vingt-deux premiers nombres écrits en base six (non dit) de manière à avoir tous les nombres entiers dans l'ordre croissant. Il est sans doute important de préciser qu'aucune indication sur la suite à donner à l'écriture des nombres n'est précisée (voir Annexe 1).

Comme chaque année, aucun groupe ne réussit à compléter la table de manière correcte. On voit apparaître des 60 ou bien 99, etc. De plus, la manière de le remplir fait souvent apparaître une procédure consistant à ajouter 4 (« faire +4 ») pour passer de 5 (cinq) à 10 (six) – cette dernière procédure, si elle donne le bon codage, ne permet pas d'avoir tous les nombres entiers puisque l'on passe d'un entier à son successeur par l'opération +1 et non pas +4. Une mise en commun est nécessaire afin de fixer les connaissances et le système de représentation sécimal en jeu – même si toute difficulté n'est pas éradiquée.

S2 –A la suite de la première séance, il est demandé une numération orale, en base six donc, afin de pouvoir dire les nombres et de ne pas les confondre avec ceux de la base dix. La proximité langagière entre le fait que le nombre « douze » et son écriture 20 en base six permet de donner une indication pour une possible numération orale calquant la numération usuelle. Le tableau en annexe donne les mots retenus pour cette numération. Ils sont le fruit des interactions dans la classe, seul le suffixe « ouze » a été suggéré par l'enseignant et les autres irrégularités orales que l'on pourrait imaginer ne seront pas reprises ici (Anselmo & Zucchetta, 2013).

Ainsi, les étudiants prennent en main cette numération qui sera la seule utilisée jusque S6 où on reparlera officiellement de la base dix. Cela fait des échanges un peu étranges dans la classe, mais une communauté se met clairement en place, on sait tous de quoi l'on parle (à l'exception d'une étudiante qui n'a manifestement pas compris, à aucun moment). On donne en annexe deux exemples de conversion entre la numération orale et écrite par deux étudiants à l'examen. On remarque une erreur dans le deuxième, « douze » ayant été interprété en base dix (on voit la nécessité d'avoir des mots différents et peut-être faudrait-il ne pas appeler douze le nombre 20).

Dans les séances **S2**, **S3** et **S4**, on s'intéresse aux techniques usuelles (institutionnalisées dans les classes) des quatre opérations (dispositions, retenues, justifications) avec les tables d'addition et de multiplication. On relève une prise de conscience des opérations cognitives en jeu (augmentation de la durée du processus, erreurs plus fréquentes). Le travail et la justification des critères de divisibilité par 2, 3, 5, 10 et 11 en base six permet de comprendre ces critères et l'influence de la base de numération : $2 \times 3 = 6$, donc on peut justifier que les critères associés aux nombres 2 et 3 en base six sont les mêmes que ceux associés aux nombres 2 et 5 en base dix ; 5 est le prédécesseur de la base six, donc il a le même statut que 9 en base dix ; idem pour le successeur 11, que ce soit en base six ou dix (même si les quantités

sont différentes : 11 code le nombre sept, |||||+|, en base six et le nombre onze,||||||||||+|, en base dix).

L'intérêt de la séance **S5** est de sortir du domaine des nombres pour faire de la géométrie et notamment de mesurer des longueurs et des aires ; on conserve les unités usuelles, dont le mètre (même si l'on sait que la définition du mètre est historiquement liée à la base dix). La première tâche est de fabriquer une règle graduée. Pour cela, on dispose d'une plaque carrée de 1 m de périmètre (voir l'annexe 1). Avec une ficelle, on reporte donc 1 m, et plus précisément $\frac{1}{3}$ de m en faisant trois replis à la corde. Ce gabarit de longueur, $\frac{1}{3}$ m, est donné à chaque groupe sur une feuille de format A3. La consigne donnée aux étudiants est la suivante : « Fabriquez un double *sécimètre* à partir de cette longueur de corde. Avec cette règle, vous mesurerez ensuite le côté de la plaque carrée. » On introduit ici la première sous-unité du mètre, le sécimètre qui est un sixième de mètre ; le double sécimètre mesure donc $\frac{1}{3}$ m, soit la longueur de la corde. On peut voir en annexe un double *sécimètre* (non à l'échelle sur le poster) construit par des étudiants avec un fractionnement utilisant le théorème de Thalès. Les mesures sont bien entendu approximatives, mais certaines sont proches. On a pu d'ailleurs quantifier cela car on peut avoir la mesure par le calcul puisqu'il s'agit de calculer $\frac{1}{4}$ de 1 m, soit 0,13 m ou encore 13 heximètres, où l'heximètre est le sixième du sécimètre, ou encore un hexième de mètre, soit $\frac{1}{100}$ de m (en base six !). A noter que, pour des raisons d'imprécision de leur règle graduée, certains étudiants ont resubdivisé les hexièmes pour obtenir l'hexilimètre (cf. le poster en annexe), qui est un hexilième de m, soit $\frac{1}{1000}$ m (en base six !).

En début de séance **S6,** on commence un travail sur l'aire de la plaque. Ce qui, par une extension, permet de retravailler les grandeurs et leurs mesures. A noter que l'approximation de $\sqrt{2}$ en base six ne pose pas de problème aux étudiants qui font leur recherche par approximations successives en réutilisant la technique posée de la multiplication. Après le carré, on s'intéresse au cercle, périmètre et aire. Rapidement, le nombre pi arrive dans la discussion. Mais si ce nombre vaut approximativement 3,14 en base dix, son écriture décimale en base six est inconnue. Et on ne peut pas raisonner comme pour $\sqrt{2}$, ce nombre est inaccessible pour ces étudiants. Le seul point de départ est donc 3,14. De nombreuses idées émergent pour obtenir les premières sécimales de pi. Elles sont toutes fausses, en particulier celle qui consiste à dire que c'est 3,22 car 3 c'est 3 et 14 en base dix s'écrit 22 en base six. Or, il s'agit de quatorze centièmes ! On retrouve ici, de manière tout à fait inattendue pour ces étudiants, la conception de deux entiers séparés par une virgule.

Enfin, on donne en annexe une production d'un étudiant, au contrôle continu, à cet exercice (où hlm est l'abréviation de hexilimètre, le $\frac{1}{1000}$ de mètre, et hcm est l'abréviation de hexcimètre[200], le $\frac{1}{100}$ de mètre) :

> ABC est un triangle rectangle en A. On donne AB = 23 hlm et AC = 12 hlm.
> 1) Tracer sur l'annexe 3 le triangle ABC.
> 2) Mesurer la longueur BC et vérifier par le calcul qu'il s'agit de la valeur exacte.
> 3) Calculer le périmètre de ce triangle en hcm.
> 4) Calculer l'aire de ce triangle en hcm².

On se rend compte que les constructions, l'usage du théorème de Pythagore et les calculs sont effectués sans difficulté dans le nouveau système, que ce soit la longueur du côté BC, le périmètre ou l'aire du triangle. Il est vrai que le fait que la mesure du côté BC soit un nombre entier dans les unités choisies (25 hlm) a considérablement favorisé la suite du travail. Mais on ne peut pas savoir si le nombre 25 provient d'une mesure sur la figure ou d'essais numériques.

[200] Le mot pour dire 1/100 a un peu fluctué, entre hexième et hexcième, hcm, ce dernier étant intéressant pour la référence au centimètre.

IV- CONCLUSION

L'idée originale de cette séquence n'est pas de travailler dans une base autre que dix, mais plutôt de pousser plus loin cette idée en proposant une reconstruction de connaissances mathématiques importantes pour l'école primaire avec une base autre que dix, connaissances qui sont pour la plupart naturalisées chez les étudiants. Ce qui en ressort est bien plus qu'une simple curiosité mathématique. On relève en particulier, et cela a fait l'objet d'une discussion en dernière séance avec les étudiants :

- une distinction entre les représentations sémiotiques et les objets représentés,
- une distinction des propriétés des objets mathématiques et de celles des représentations.

Notons enfin que d'autres choix de thèmes à développer sont possibles. En particulier, on pourrait penser à développer des stratégies de calculs réfléchis, à s'intéresser à certaines situations de probabilités (notamment avec un dé équilibré où chaque face a une probabilité de 0,1 en base six). Des questions de programmations pour automatiser les calculs pourraient aussi être intéressantes (comment faire une calculatrice ?), mais plutôt pour des enseignants du second degré.

V- BIBLIOGRAPHIE

Anselmo, B. & Zucchetta, H. (2013) Du comptage à la numération: une formation sur l'enseignement de la numération; *Grand N* **91,** 71-91, IREM de Grenoble.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30, 317–366.

Nikolantonakis, K. &Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA,* volume 30, número 54, 23-44.

Nikolantonakis, K. &Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis, *MENON: Journal of Educational Research*, Full article: issue 2a, 99-114

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*, Thèse de doctorat de l'université Paris VII.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, 133-170.

Vivier, L. (2015). Les analogies dans la découverte d'une autre base de numération - la base sept pour de futurs professeurs des écoles, Dans *Les Analogies*, Cahier du LDAR (15) 2015, 118-130.

Le système *sécimal* en formation initiale des enseignants du premier degré

Laurent Vivier
LDAR LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ | RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES SCIENCES
PARIS DIDEROT — UNIVERSITÉ DE ROUEN — UPEC — UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Annette Braconne-Michoux
Université de Montréal

Konstantinos Nikolantonakis
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
UNIVERSITY OF WESTERN MACEDONIA

Hypothèses et choix

- La numération décimale est un fondement des mathématiques enseignée à l'école primaire alors que les futurs enseignants ne comprennent pas les enjeux et les difficultés relatives à ces connaissances du système décimal qu'ils ne voient plus
- La grande proximité des étudiants avec le système décimal constitue un obstacle en formation et l'étude d'un système s'appuyant sur une base autre que dix permet de retravailler les connaissances visées en installant une distance cognitive

- Un choix de la base six pour éviter le problème des bases supérieures à dix (Nikolantonakis & Vivier, 2013), avoir un nombre raisonnable de chiffres et une proximité arithmétique : **dix**=2×5 et **six**=2×3 ont les des propriétés arithmétiques similaires

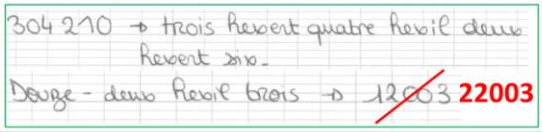
Un choix d'une séquence longue de 8 séances

S1 - Situation de Tempier (2013) adaptée à la base six, codage, aspects ordinal et cardinal (Nikolantonakis & Vivier, 2016)

1	2	3	4	5	10	11	12	13	14
15	20	21	22	23	24	25	30	31	32
33	34								
									etc.

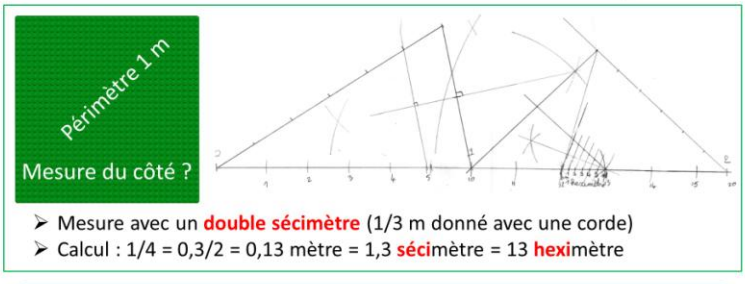
S2 - La numération orale en base six (une proximité langagière)

1	10	20	30	40	50	100	1000
un	six	douze	trouze	quatrouze	cinquouze	hexent	hexil
unité	sizaine					hexaine	hexilier

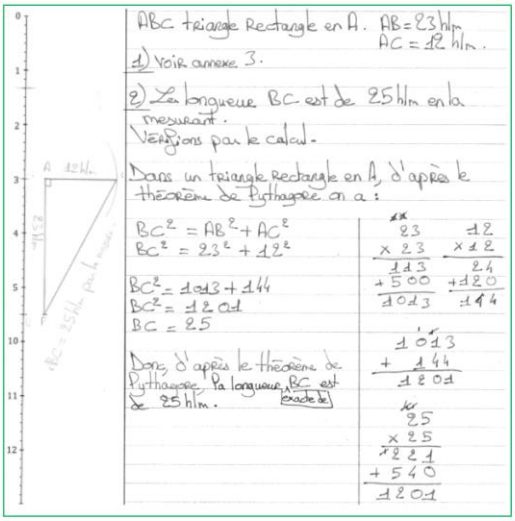


S2, **S3** et **S4** - Les techniques des quatre opérations avec les tables d'addition et de multiplication : une prise de conscience des opérations cognitives en jeu (augmentation de la durée du processus, erreurs plus fréquentes)
Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 10 et 11 : compréhension des critères et influence de la base de numération

S5 - Géométrie : mesurer des longueurs ; construire et justifier



- Mesure avec un **double sécimètre** (1/3 m donné avec une corde)
- Calcul : 1/4 = 0,3/2 = 0,13 mètre = 1,3 **séci**mètre = 13 **hexi**mètre



S6 - Mesurer/calculer aires (carré, triangle, disque) et grandeurs, $\sqrt{2}$ et π en base six, conversions en base dix : π *est* **3,14** donc **3,22** en base six !
Dans le changement d'unités **dixième**, **centième** en **sixième**, **hexième** on retrouve la conception de deux entiers séparés par une virgule

S7 - Fractions simples, **fractions sécimales**

S8 - Arithmétique : nombres premiers inférieurs à 1000=6^3 (crible d'Eratosthène), PGCD, PPCM, autres bases de numération

CONCLUSION

Une distinction entre les représentations sémiotiques et les objets représentés
Une distinction des propriétés des objets mathématiques et de celles des représentations
Une reconstruction de toutes les connaissances mathématiques avec une base autre que dix

Références

Anselmo, B. & Zucchetta, H. (2013) Du comptage à la numération: une formation sur l'enseignement de la numération; *Grand N* **91,** 71-91, IREM de Grenoble.
Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 30, 317–366.
Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA,* volume 30, número 54, 23-44.
Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis, *MENON: Journal of Educational Research,* Full article: Issue 2a, 99-114
Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource,* Thèse de doctorat de l'université Paris VII.
Vivier, L. (2015). *Sur la route des réels.* Habilitation à Diriger des Recherches de l'université Paris Diderot.

Titre : Actes du 45ème Colloque de la COPIRELEM
Blois les 12, 13 et 14 juin 2018
Manipuler, Représenter, Communiquer : Quelle place pour les artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?

Auteurs : Conférenciers, Orateurs de communication et animateurs d'atelier du Colloque, COPIRELEM

Mots clés : Formation des enseignants – Didactique des Mathématiques – Situations de formation – Artefacts - Manipulation

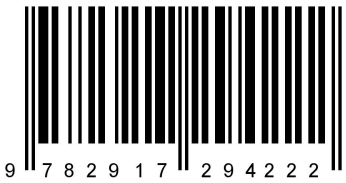
Dépôt légal : Juin 2019

Nombre de pages : 655

Éditeur : ARPEME

ISBN : 978-2-917294-22-2

EAN : 9782917294222



Public concerné : Formateurs de mathématiques chargés de la formation des professeurs des écoles

Résumé : Ce document contient les textes des conférences de Fabien EMPRIN, Valentina CELI, Sylvia COUTAT et Céline VENDEIRA, ainsi que les textes des ateliers et communications du colloque.