

PREMIERS PAS VERS LA CONSTRUCTION D'UN REGARD GEOMETRIQUE SUR LES FORMES A LA TRANSITION CYCLE 1 - CYCLE 2

Marie Geourjon

Professeur des écoles, école de la Monne, Saint-Saturnin
IREM de Clermont-Ferrand
marie.geourjon@ac-clermont.fr

Rémi CANIVENQ

Professeur des écoles, école George Sand, Thiers
IREM de Clermont-Ferrand
remi.canivenq@ac-clermont.fr

Résumé

Dans le cadre d'une réflexion autour de la continuité de l'enseignement de la géométrie du cycle 1 au cycle 3, nous avons entrepris un travail d'élaboration de progressions et de situations visant à accompagner nos élèves de Grande Section et de CP dans un premier mouvement de déconstruction dimensionnelle de formes, premier pas vers la géométrie (Duval et Godin (2005), Perrin-Glorian, Leclerc et Mathé (2013)). Nous présentons dans ce texte des éléments de ces progressions. Celles-ci articulent travail sur des solides et reproduction d'assemblages de formes par juxtaposition puis superposition, via des situations d'action, un jeu sur les instruments à disposition et des situations de formulation (Brousseau, 98).

Enseignants dans le premier degré, nous avons des difficultés à faire progresser nos élèves en géométrie. Nous nous sentions démunis pour choisir ou construire des activités riches et variées favorables aux apprentissages, comme c'est aussi le cas pour beaucoup de collègues. Le groupe IREM de Clermont-Ferrand, Université Clermont-Ferrand Auvergne-Rhône-Alpes, nous a donné un cadre pour réfléchir autour de la continuité de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Nous avons mené un travail collaboratif entre enseignants du premier degré et du second degré en appui sur des échanges avec des didacticiens des mathématiques. Les éléments théoriques du groupe de Lille nous ont permis de mieux comprendre des enjeux de l'enseignement de géométrie et nous ont livré des premières pistes didactiques.

L'objectif général de notre travail s'inscrit dans une volonté de penser un enseignement cohérent de la géométrie de la première année de maternelle au cours moyen deuxième année. Plus particulièrement, nous centrant sur les niveaux auxquels nous enseignons (Grande Section et Cours Préparatoire), nous avons voulu interroger la manière dont nous pouvions repenser, parfois réorganiser, enrichir, le travail sur les formes proposées à nos élèves de fin du cycle 1 et début du cycle 2 afin de faire de celui-ci un premier pas vers la géométrie des cycles 2 et 3. Nous avons donc pensé une progression de la géométrie en GS/CP, en commençant par un travail sur les solides jusqu'à une analyse des figures planes en termes de bords et de lignes. Ce sont des éléments de cette progression que nous avons souhaité présenter lors de ce colloque à travers un poster (Annexe 1). Nous présentons une progression que nous avons mise en place dans nos deux classes avec quelques variantes. Pour certaines activités, les variables didactiques nous ont permis de différencier le travail proposé. Par exemple, la nature et le nombre de formes à disposition pour réaliser les assemblages étaient différents. Nous n'avons pas eu les mêmes exigences concernant les formulations orales pour décrire les solides et les formes.

Dans un premier temps, nous nous efforcerons de mettre en évidence la manière dont l'étude théorique nous a permis non seulement de penser, de concevoir et d'articuler des progressions pour nos situations de classe mais aussi de nous donner les moyens de les analyser. Dans un second temps nous développerons l'analyse a priori de situations de classe permettant le passage de la juxtaposition de formes à la superposition de formes. Cette partie sera suivie d'une analyse a posteriori sur le travail

effectivement réalisé avec nos élèves. Nous ferons enfin le bilan de notre pratique de l'enseignement de la géométrie.

I - DES ELEMENTS THEORIQUES POUR ELABORER UNE PROGRESSION POSSIBLE EN GEOMETRIE PLANE A L'ECOLE

Duval et Godin (2005) et Perrin-Glorian, Mathé, Leclercq (2013) ont montré qu'il existe plusieurs manières de voir et d'analyser une figure. De manière générale, l'analyse d'une figure ou d'un assemblage de figures attendue à partir du cycle 3 passe par la connaissance des propriétés géométriques de ces figures. Or ces différentes propriétés géométriques portent essentiellement sur des relations entre les lignes et les points : égalité de longueurs de segments, perpendicularité, parallélisme de droites... La manière de voir et d'analyser la figure doit donc évoluer d'une vision en termes de surfaces vers une vision en termes de lignes et de points. « Entrer dans la géométrie nécessite donc de modifier de manière profonde son rapport aux figures et la nature des sous-éléments des figures à prendre en compte, d'objets de dimension 2 (2D-surfaces) à des relations entre objets de dimension 1 (1D-lignes), voire de dimension 0 (0D - points). C'est le principe de la déconstruction dimensionnelle. » (Duval et Godin, 2005, p. 7). Ces trois visions ne sont pas cloisonnées. Une articulation et un va-et-vient entre elles sont nécessaires pour permettre à l'élève de cycle 3 d'analyser une figure dans le cadre de la géométrie.

Une analyse des programmes de l'école de 2015, à la lumière des éléments théoriques précédents, nous permet d'envisager des enjeux généraux de l'enseignement de la géométrie pour chaque cycle. Ainsi, dès le cycle 1, l'élève travaillerait la vision de surfaces et son passage à la vision de lignes. Au cycle 2, il retravaillerait ce passage de la vision de surfaces à la vision de lignes vues comme des bords de surfaces. Puis l'élève serait amené à passer à la vision de lignes proprement dite en segmentant les bords des surfaces, en repérant des prolongements possibles de segments (en segments et en droites), en percevant des alignements de segments et de points. Au cycle 3, l'élève, tout en poursuivant le travail sur la vision de lignes, passerait de cette vision de lignes à la vision de points. C'est bien en termes de mobilité du regard que nous envisageons cet enseignement. À la fin de la scolarité à l'école primaire, l'élève doit être capable d'utiliser ces différentes visions pour lui permettre d'analyser de manière géométrique une figure, non seulement en termes de surfaces mais aussi en termes de réseaux de lignes et de points. Il doit pouvoir voir et utiliser les objets, leurs propriétés et les relations entre eux, essentiels dans les activités de démonstration proposées au collège.

Forts de ces éclairages, notre travail a consisté à (re)penser la progression générale que nous proposons à nos élèves de fin de cycle 1 et de début de cycle 2.

Une première séquence porte sur les solides, dans le but de travailler la reconnaissance d'objets en trois dimensions (3D) via la reconnaissance globale de formes (2D), jusqu'à la capacité à décrire des solides et nommer les formes composant leurs faces. Ce travail est suivi d'une séquence visant l'analyse de figures complexes en termes d'assemblages de formes juxtaposées. Cette séquence se centrerait sur des activités de pavage ou de reproduction de figures complexes, à l'aide de gabarits. Les gabarits utilisés étaient des formes transparentes. Ces gabarits étaient des instruments qui permettaient à la fois de mobiliser des informations sur des formes (2D) et de tracer les contours. Ainsi cette séquence visait à amener les élèves à passer d'un regard porté sur les formes (2D) à un regard porté sur leurs contours (ligne 1D, frontières de surfaces). Une troisième séquence visait à enrichir le regard des élèves sur ces figures complexes, en leur apprenant à analyser ces figures en termes d'assemblages de formes qui se chevauchent. Cet enrichissement de l'analyse des figures complexes et l'introduction de la superposition constitue pour nous un premier pas vers l'identification de prolongements de lignes et les propriétés d'alignement de segments. Nous nous centrerons dans ce texte sur cette séquence, et plus précisément sur la première séance de cette séquence, séance d'introduction de la superposition.

L'élaboration générale de nos séquences s'est appuyée sur le cadre que nous livre la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998). Des situations d'action ont été pensées pour permettre l'émergence de connaissances comme outils pour résoudre des problèmes portant sur des formes et des dessins (par exemple paver ou reproduire une forme). Nous avons porté une attention particulière aux

moments de verbalisation pour expliciter des connaissances d'action. Le coloriage des formes fait apparaître les surfaces (2D) alors que les traits au crayon à papier rendaient compte des contours (1D). Par ces situations de formulation, orale ou écrite, nous avons ensuite rendu nécessaires la désignation des objets géométriques. Nous avons aussi bien sûr pris soin de penser des phases d'institutionnalisation, permettant de transformer ces connaissances géométriques en savoirs géométriques.

II - FOCUS SUR L'ANALYSE DE FIGURES COMPLEXES EN TERMES D'ASSEMBLAGES DE FORMES QUI SE JUXTAPOSENT ET QUI SE CHEVAUCHENT

Nous présentons dans la suite du texte la séance d'introduction de la superposition, dans nos classes de Grande Section de maternelle et de CP. L'activité proposée aux élèves consiste à décomposer une forme en assemblages de formes. Nous rendons compte dans ce texte d'éléments de l'analyse a priori puis a posteriori de cette séance.

1 Présentation et analyse a priori de la situation

La tâche de l'élève consiste à décomposer une forme dont on donne le contour en un assemblage de formes, à l'aide de gabarits de formes géométriques transparentes (figure 1).

Les élèves utilisent des gabarits de formes transparentes. Ils avaient à disposition les formes dont ils pouvaient avoir besoin (losange, triangles équilatéraux petit et grand, trapèze) pour reproduire les assemblages plus deux autres (rectangle, carré). La nature, le nombre et la présentation des formes (mêlées ou triées) sont des variables didactiques.



Figure 1

1.1 Phase 1 : Décomposer la forme en un assemblage de formes juxtaposées

Dans un premier temps, les élèves sont invités à utiliser les gabarits pour paver la forme (c'est à dire la recouvrir sans chevauchement ni espace).

Notre objectif est d'amener les élèves à prendre conscience qu'il existe une multitude de manières possibles de décomposer une forme, et donc de l'analyser et de la voir.

1.2 Phase 2 : Décomposer la forme en un assemblage de formes qui se chevauchent : un premier pas vers le prolongement de bords

Dans un second temps, nous choisissons un assemblage par juxtaposition (figure 2 à gauche). Les élèves reproduisent cet assemblage (figure 2 à droite).

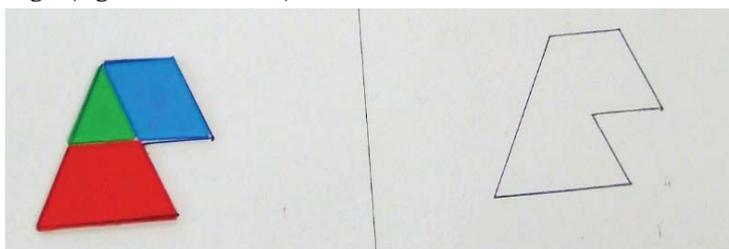


Figure 2

La consigne est maintenant la suivante : « Vous allez devoir recouvrir la même forme, à droite sur votre fiche, de façon à faire apparaître les mêmes traits intérieurs, mais avec seulement deux gabarits : un grand triangle et un trapèze. La seule solution au problème posé est la suivante (figure 3).



Figure 3

Notre objectif consiste donc à amener les élèves à passer d’une analyse en termes de formes juxtaposées à une analyse en termes de formes qui se chevauchent.

Positionner le triangle nécessite de considérer que l’on peut prolonger un des bords de la forme initiale pour former ce triangle (figure 4a). De même, positionner le trapèze amène à visualiser la possibilité de prolonger un bord de la forme pour créer une nouvelle forme (figure 4b).

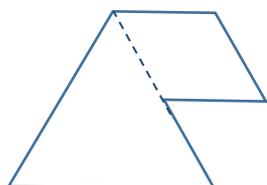


Figure 4a

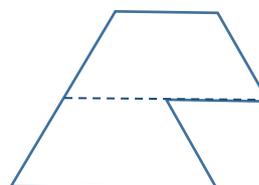


Figure 4b

1.3 Formulation écrite

Nous demandons ensuite aux élèves de dessiner leurs assemblages, pour garder mémoire des assemblages réalisés. Les élèves disposent toujours du contour de la forme initiale, des gabarits, de crayons de papier et de crayons de couleurs. Le dessin demandé doit être fait sur le contour de la forme initiale. Les traits intérieurs sont des prolongements des contours des formes utilisées, cela rend compte d’une vision de lignes (1D). Le coloriage des formes permet de voir si l’assemblage est juxtaposé ou superposé, il rend compte de la vision de surface (2D).

Dans cette phase, les gabarits deviennent des instruments de tracés (de contours de formes), centrant l’activité des élèves vers une analyse de la figure portant sur des lignes, vues comme frontières de surfaces.

1.4 Mise en commun et verbalisation

Une phase de mise en commun et de verbalisation doit permettre de mettre en évidence qu’un même réseau de lignes peut être le résultat d’un assemblage par juxtaposition ou d’un assemblage par superposition. Nous avons prévu de projeter une photo des deux assemblages (par juxtaposition puis par superposition) au tableau, de demander à un élève de tracer le contour des formes, sur les deux assemblages. En éteignant le vidéoprojecteur, nous observerons sur le tableau la même figure (figure 5). Nous pourrions alors verbaliser le fait que cette figure peut être vue de différentes manières : soit comme une juxtaposition de formes, soit comme une superposition de formes. Le retour au contour initial pourra enfin mettre en évidence que l’on peut prolonger des bords pour former le triangle, ou le trapèze.

Nous le voyons à travers cette brève description, cette séance a pour but d’articuler à la fois un travail sur les surfaces et un travail sur les contours de ces surfaces pour enfin faire un premier pas vers la perception de prolongement de bords.



Figure 5

2 Éléments d'analyse a posteriori de la séance

2.1 Les difficultés à percevoir, de manière spontanée, le prolongement de bord et les formes superposées

Les élèves n'ont pas eu de difficulté à juxtaposer les formes, ils ont trouvé de nombreuses possibilités de décomposition. Cependant superposer deux formes a été beaucoup plus difficile. À cela trois raisons majeures. D'abord, le contrat didactique change dans cette situation. Depuis le début du travail en géométrie, il est demandé aux élèves de juxtaposer des pièces pour paver des figures (à l'instar des puzzles). Un élève dit : « On n'a pas le droit comme ça ! » en montrant la superposition d'un camarade. La situation les contraint cependant à utiliser le chevauchement pour résoudre le problème. Ils vont apprendre à définir la superposition par rapport à la juxtaposition. Ensuite, certains élèves posent les pièces en alignant le bord des pièces au contour de la figure (figure 6). Les rétroactions du milieu leur permettent de prendre conscience de leur échec, car la forme dépasse du contour. Ainsi l'élève cherche d'autres solutions en tournant la pièce mais tout en essayant de faire coïncider tous les bords des pièces avec les contours de la figure.

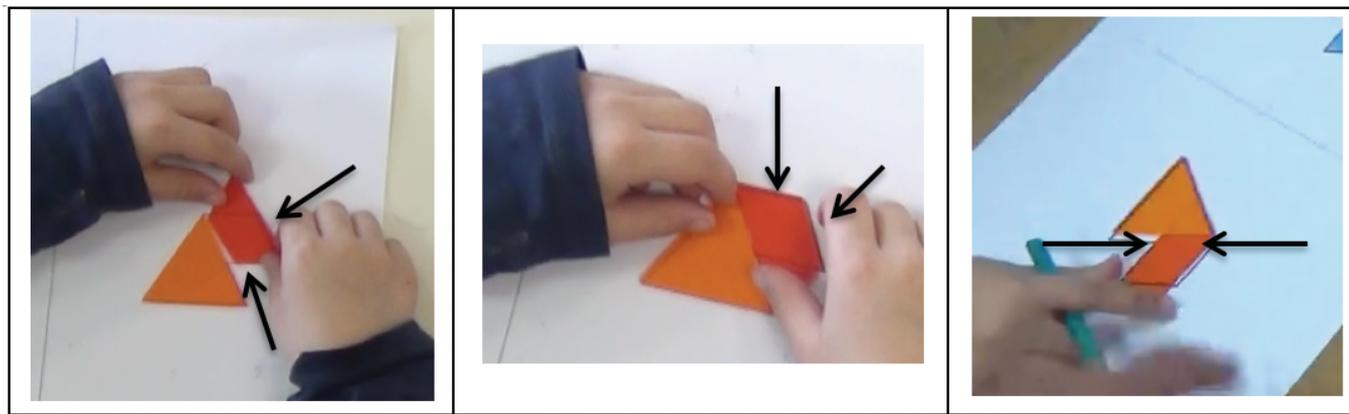


Figure 6

Enfin, positionner le triangle et le trapèze, on l'a vu, nécessite de visualiser des prolongements de bords, ce qui s'avère ne pas être évident.

Ces procédures montrent que les élèves tentent de respecter les alignements de bords de pièces sur le contour de la figure, ils ne voient pas seulement la figure en termes de surfaces mais la voient aussi en termes de contour (comme le suggère la présentation de la forme). Toutefois, ils éprouvent des difficultés à voir à quoi peuvent correspondre le triangle et le trapèze sur la forme donnée et ne se sont pas immédiatement aidés des traits intérieurs de la figure 2 (juxtaposition).

2.2 Le dessin des assemblages

La reproduction des assemblages montre trois manières de tracer les traits intérieurs de la figure : uniquement à main levée (figure 7), à main levée et avec les gabarits (figure 8), ou uniquement avec des gabarits (figure 9).

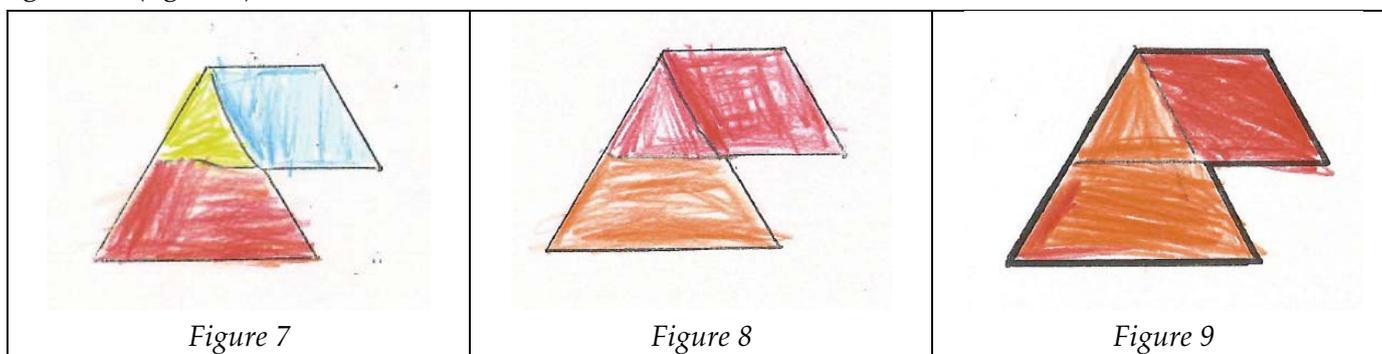


Figure 7

Figure 8

Figure 9

Le coloriage des formes nous montre deux procédures : soit les élèves superposent les couleurs et elles se mélangent (figure 8), soit ils colorient une des deux formes (surtout le trapèze) entièrement. Les élèves

ont eu des difficultés à mélanger les couleurs (figure 9), pourtant nécessaire pour rendre compte de l'information : juxtaposées ou superposées. Nous pensons que le mélange des couleurs, au même titre que la superposition des formes, n'est pas une habitude scolaire.

2.3 Mise en commun et phase de verbalisation

La comparaison entre les dessins des assemblages juxtaposés et superposés a permis de mettre en exergue la différence entre les deux procédures et donc de les définir. Pendant l'analyse des formulations écrites, les interventions de l'enseignant permettent aux élèves de verbaliser et donc de conscientiser leurs actions. Ils explicitent leur procédure pour mettre en évidence les critères de réussite de la reproduction des assemblages. Ils comprennent que le coloriage et le tracé permettent de voir les formes utilisées. Pour être plus précis, le coloriage rend compte de la procédure utilisée : « quand la couleur est par-dessus » ou « que les couleurs se mélangent. », les formes ont une partie qui se superpose ; « quand les couleurs ne se mélangent pas », les formes ont été juxtaposées.

3 Prolongements

Cette séance est la première séance d'une séquence dans laquelle les élèves s'entraînent ensuite à décomposer et reproduire des formes, en les analysant en termes d'assemblages juxtaposés ou superposés. Cette dernière procédure leur permet de percevoir puis d'expliciter des prolongements de bords (segments) en d'autres bords et à matérialiser, de façon encore plus ou moins explicite, des propriétés d'alignement de sommets avec des bords.

Globalement, la comparaison des productions de nos élèves réalisées au cours des situations proposées montre leurs progrès. Ils dessinent mieux leurs assemblages. Ils tracent dans la plupart des cas tous les traits des contours intérieurs des formes utilisées. Quand les tracés des formes à l'aide des gabarits sont incomplets, il leur arrive fréquemment de prolonger les bords à main levée. Ils superposent plus volontiers les couleurs pour rendre compte de la superposition.

Sur la totalité de nos deux classes, seulement deux élèves utilisaient encore le double trait à la fin de la séquence (figure 10). Ces derniers sont dans la vision de surfaces. Les autres n'ont tracé que les traits intérieurs manquants en s'aidant du gabarit. Ils ont prolongé les bords de surfaces et sont plutôt dans une vision de ligne.

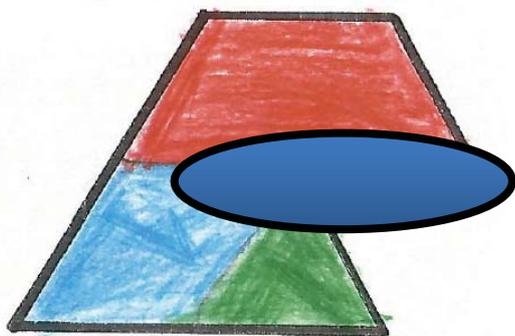


Figure 10

S'ils se rendaient compte qu'ils avaient oublié des traits, ils le complétaient le plus souvent à main levée. Cette procédure met en évidence leur capacité à tracer des traits pour prolonger des bords de formes.

Analyser une figure en termes de surfaces superposées est donc une compétence qui n'est pas innée. A l'instar du groupe de Lille, ce travail nous paraît pourtant essentiel pour faire du travail sur les formes un premier pas vers l'analyse géométrique de figures et accompagner progressivement les élèves d'un travail sur des surfaces à un travail sur des droites, des segments et des points. Cette compétence demande

donc d'être enseignée et exercée. Manipuler des formes pour les assembler en les juxtaposant et en les superposant aiguise le regard des élèves sur les figures. Dessiner ces assemblages pour les reproduire, leur permet d'enrichir leur analyse des figures et de percevoir les premières propriétés de prolongement et d'alignement de lignes (segments).

III - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DUVAL R. & GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C. & LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments, *Repères IREM*, **90**, 5-14

IV - ANNEXE : POSTER

La déconstruction dimensionnelle au service des apprentissages en géométrie à l'école

Objectifs :
 À partir des éléments théoriques du groupe de Lille, nous avons repensé notre travail en géométrie dans nos classes de GS et CP et enrichi la réflexion dans nos équipes d'école pour améliorer la continuité de l'enseignement de la géométrie du cycle 1 au cycle 3.

Éléments de progression				
Cycles	Objectifs	Instruments	Langage	Vision de la figure
Cycle 1	Reconnaissance, reproduction de solides (assemblage de formes) et d'assemblage de solides, d'un point de vue global	Solides et solides à construire empreintes de solides	Des mots pour décrire l'action, les solides, les faces des solides, les assemblages de solides	Volume (3D) Surface (2D)
	Reconnaissance, reproduction de formes isolées, d'un point de vue global	Gabarit Pochoir Crayon	Réinvestir le nom des formes, Connaissances pour l'action, Des mots pour décrire l'action.	Surface (2D) Contour (1D)
Cycle 2	Reconnaissance, reproduction d'assemblage de formes juxtaposées, d'un point de vue global	Gabarit Pochoir Crayon	Noms des formes et des polygones Nombre de côtés Bords droits et arrondis Juxtaposition	Surface (2D) Contour (1D)
	Reconnaissance, reproduction de formes superposées	Gabarit Pochoir Crayon	Noms des formes et des polygones Nombre de côtés Bords droits et arrondis Juxtaposition et Superposition	Surface (2D) Contour (1D) Prolongement de bords (1D)
Cycle 3	Reproduire des figures ou assemblages de figures en identifiant des propriétés géométriques portant sur les bords des formes ou sur des « coins » particuliers	Règle Informable Instruments de report de longueur Équerre	Alignement de bords Prolongement des bords pour trouver le sommet. Deux lignes qui se coupent forment un point.	Surfaces (2D) Bords (contour, segments) (1D) « Coin » (2D)
	Reproduire des figures ou assemblages de figures en identifiant des propriétés géométriques portant sur des segments, des droites, des points.	Règle Informable Instruments de report de longueur (compas) Équerre	Alignement de bords Prolongement des bords pour trouver le sommet. Deux lignes qui se coupent forment un point. Perpendicularité / Parallélisme	Réseaux segments, droites (1D), points (0D) (Intersection de lignes).

Les solides : passage de 3D à 2D

Activité 1 : Fabriquer le plus possible de solides différents.
Activité 2 : Faire les empreintes des solides.
Activité 3 : Appairer les solides et leurs empreintes.




L'élève perçoit le solide, objet de dimension 3, comme constitué de plusieurs faces, objets de dimension 2. Il nomme les solides et les faces.

Les formes juxtaposées : passage de la 2D à la 1D

Activité : À la manière d'un défi : trouver le plus possible de façons différentes de paver le carré violet à l'aide des formes et garder une trace des solutions.




L'élève apprend à décomposer une surface en un assemblage de surfaces juxtaposées et prend conscience de différentes manières possibles de voir et de décomposer une forme.

De la juxtaposition à la superposition : un premier pas vers les prolongements de lignes et les propriétés d'alignement

<p>Activités</p> <p>Étape 1 : Les élèves doivent paver (juxtaposition) des formes à l'aide de 3 pièces et la dessiner.</p> <p>Étape 2 : Ils doivent remplir des formes avec seulement 2 pièces (superposition) et la dessiner pour permettre à quelqu'un de retrouver l'assemblage produit.</p> <p>Étape 3 : mise en commun et verbalisation.</p>	<p>Étape 1 : la juxtaposition</p> 	<p>Étape 2 : la superposition</p> 	<p>Étape 3 : la verbalisation</p>  <p>Pour remplir le contour d'une figure, on peut le faire soit en juxtaposant des formes soit en superposant moins de formes tout en ayant les mêmes traits intérieurs.</p>
	<p>Activités</p> <p>Étape 1 : trouver une superposition possible de 3 formes à partir d'un contour de figure, sans passer par une juxtaposition et produire un message écrit (dessin) pour permettre à un camarade de retrouver l'assemblage créé.</p> <p>Étape 2 : reproduire un assemblage de formes à partir du dessin d'un camarade.</p> <p>Étape 3 : validation entre pairs et verbalisation.</p>	<p>4 contours :</p> 	<p>Étapes 1 et 2 :</p> 