# MATH & MANIPS : MANIPULER POUR CONSTRUIRE LA NOTION DE VOLUME

**Marie-France GUISSARD**
Directrice de recherche, CREM asbl
Belgique
mf.guissard@crem.be

**Pauline LAMBRECHT**
Chercheur, CREM asbl
Belgique
pauline.lambrecht@crem.be

**Résumé**
Lors du 38e colloque COPIRELEM, une équipe du CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) a présenté un atelier décrivant plusieurs activités d'une recherche consacrée à l'introduction des manipulations dans l'apprentissage des mathématiques (Henry V. & Lambrecht P., 2012). Ces activités, appelées *Math & Manips* (Guissard M.-F. & al., 2014), ont été conçues pour provoquer chez les élèves des conflits entre ce qu'ils pensent et ce qu'ils découvrent lors des manipulations. La présente communication propose une analyse en profondeur d'une séquence mise au point ultérieurement, suite à des échanges avec des enseignants et des chercheurs. Cette activité, dédiée à l'acquisition de la notion de volume par des enfants de 10 à 12 ans, propose différentes expériences (remplissage de boîtes de formes variées et immersion de solides de masses et formes diverses, ...) qui favorisent la construction d'images mentales variées dont la cohérence est progressivement installée. En particulier, la distinction entre les notions de volume d'un objet plein ou creux nous a semblé fondamentale. Cette activité prépare le terrain pour aborder la séquence suivante (dont une version provisoire avait été succinctement présentée lors de l'atelier mentionné) qui construit la formule du volume du parallélépipède rectangle par remplissage de boîtes au moyen de cubes de différentes dimensions et se termine par un retour vers les expériences initiales à la lumière de cette formule.

## I - INTRODUCTION

Le CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) s'est dernièrement consacré à une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves (Guissard & al., 2014). Ces activités, appelées *Math & Manips,* sont conçues pour mettre l'élève en situation de conflit cognitif. Les élèves sont confrontés par le milieu à des phénomènes interpellants, qui sont organisés en une suite d'épisodes pour lesquels le recours à l'expérimentation avec divers matériels pédagogiques est propice à une meilleure compréhension. L'activité expérimentale a pour but d'ancrer un nouveau concept dans la réalité.

Une *Math & Manip* doit pousser les élèves à se poser des questions et, pour les plus âgés, les amener à entrer dans des démarches de modélisation. Elle doit donner du sens aux concepts qu'elle introduit et aux outils qu'elle mobilise et, par là même, rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés par l'aspect théorique et abstrait des mathématiques.

Dans l'esprit de précédents travaux du CREM, la recherche envisage la scolarité dans son ensemble, depuis le début de l'école (petite section) jusqu'à la fin du secondaire.

La publication (Guissard & al., 2014) à destination des enseignants décrivant l'ensemble des activités est disponible sur le site du CREM (www.crem.be). La méthodologie permettant à chaque enseignant de s'approprier les séquences y est détaillée. S'y trouve également la description du matériel facile à se procurer et à utiliser.

Tout comme les autres activités de cette recherche, celles présentées dans ce compte-rendu ont été testées dans les classes et proposées aux enseignants lors de divers colloques ou formations continuées. Les réflexions qui en ont découlé ont donné lieu à des remaniements successifs. Le texte ci-dessous[1] rend compte de la version finalisée des séquences d'apprentissage destinées aux élèves de 10-12 ans.

## II - CONSTRUCTION DE LA NOTION DE VOLUME

C'est au cours de la mise au point d'une séquence d'apprentissage visant la construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle que s'est posée la question du concept même de volume. Comment l'expliquer aux élèves, quelles conceptions s'en forgent-ils dans leur vie quotidienne et dans leur parcours scolaire ?

La séquence d'apprentissage proposée ici est une tentative de réponse à ces questions ; elle nous semble de nature à donner aux élèves des images mentales variées du concept, à diversifier les approches et surtout à ne pas réduire le volume d'un objet à une formule.

Pour trouver le volume d'un objet creux[2], il est possible de le remplir par exemple de riz, de sable ou d'eau. Si cet objet est de forme parallélépipédique, le remplir de cubes permet une approche du calcul de la mesure du volume qui, par la suite, amènera une formule. Nous développons cette idée dans la section III de ce texte.

Lorsque l'objet est plein, rechercher son volume par remplissage est impossible. Dans ce cas, le volume est défini comme la place qu'occupe l'objet dans l'espace. Il est cependant plus facile de déterminer la place que prend un objet lorsqu'il est immergé dans un liquide car, contrairement à l'air, le déplacement du liquide est visible et mesurable.

La suite d'expériences proposée ci-dessous amène à comparer les volumes d'objets creux, que l'on peut remplir, et d'objets pleins que l'on peut immerger. Notre choix s'est porté sur des objets creux dont les parois sont suffisamment fines pour être négligeables car nous ne souhaitions pas travailler explicitement la distinction entre « volume intérieur » et « volume extérieur » d'un objet.

Ces activités sont menées avec la classe entière en interaction avec l'enseignant. En général, c'est un élève qui expérimente face à ses condisciples. Lors des manipulations, il est important d'aborder les problèmes d'approximation liés au processus expérimental.

### 1 Comparaison d'objets creux

*Figure 1*

Deux boîtes de formes très différentes, une boîte de conserve de forme cylindrique et une boîte parallélépipédique (figure 1), sont présentées à la classe. La seconde boîte a été construite de même volume que la première, à l'insu des élèves. Ceux-ci doivent indiquer, sans utiliser de matériel supplémentaire, la boîte qui peut contenir le plus de riz quand elle est remplie « à ras bord ».

Une première étape d'estimation à vue, avant toute manipulation, débouche sur des avis partagés car la seule perception visuelle ne permet pas d'affirmer qu'une boîte peut contenir plus ou moins de riz que l'autre. Certains élèves se basent sur des propriétés de l'objet telles la hauteur ou la « largeur ». L'estimation a justement pour objectif de faire émerger ces premières conceptions.

Les élèves s'engagent ensuite dans une démarche de comparaison avec le riz mis à leur disposition. La solution la plus évidente consiste à remplir de riz « à ras bord » une première boîte, à transvaser ensuite ce riz dans la seconde pour constater que la seconde boîte est également remplie à ras bord. Il arrive

[1] Le texte de la partie II est très proche du texte publié dans la revue *Grand N* (Guissard & al., 2015), présentant l'activité dans sa version aboutie.

[2] Le « volume » d'un objet creux est parfois nommé « contenance » ou « capacité ». Pour la suite de notre activité, il est important d'introduire également ici le mot « volume ».

cependant que des élèves remplissent les deux boîtes puis réalisent que ces remplissages ne permettent pas de comparaison sans autre matériel.

Ceci permet de conclure que les deux boîtes contiennent la même quantité de riz et de définir ainsi la caractéristique *avoir même volume*. Cette expérience permet d'associer le volume d'un objet creux à la quantité de matière qu'il peut contenir et de montrer aux élèves que *des objets de formes différentes peuvent avoir le même volume.*

## 2 Comparaison d'objets pleins

Cette séquence vise à multiplier les expériences pour analyser les liens entre la taille, la forme et la masse d'un objet avec son volume.

### 2.1 Objets pleins identiques

Deux boules identiques[3] en pâte à modeler (figure 2) sont présentées aux élèves. Comme ces objets ne peuvent être remplis, leurs volumes seront comparés en immergeant chaque boule l'une après l'autre, dans une quantité d'eau suffisante pour minimiser les erreurs expérimentales. Les élèves doivent prévoir laquelle de ces deux boules déplacera le plus d'eau.

*Figure 2*

Les boules étant identiques, les élèves pensent, à juste titre, qu'elles déplacent la même quantité d'eau. L'objectif est surtout ici de mettre en place la procédure expérimentale qui exige de faire exactement la même expérience avec chacune des deux boules, ce qui implique de retirer la première avant de plonger la seconde dans l'eau.

Sur la paroi d'un récipient contenant de l'eau, un élève, chargé de mener l'expérience devant la classe, colle un morceau d'adhésif transparent sur lequel seront notés par un trait les différents niveaux d'eau. Il note d'un trait bleu le niveau initial de l'eau, immerge ensuite la première boule et note d'un trait rouge le niveau alors atteint par l'eau. La différence entre les deux traits permet de représenter hauteur de la quantité d'eau déplacée. En effet si, pour chacune des deux boules, le niveau atteint par l'eau est le même, le volume d'eau déplacé par chaque boule est le même. La comparaison des niveaux permet ainsi de comparer les volumes des deux boules, mais pas de les mesurer.

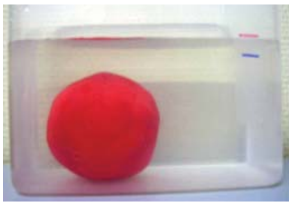

*Figure 3*

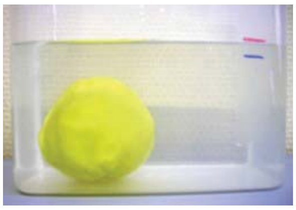

*Figure 4*

On constate, à l'issue de l'expérience, que les déplacements d'eau provoqués par chaque boule et les différences de niveau qu'ils engendrent sont identiques (figures 3 et 4). L'expérience confirme que deux boules identiques déplacent la même quantité d'eau. L'enseignant dégage une première approche de la notion de volume d'un objet plein : *deux objets qui, plongés dans l'eau, déplacent la même quantité d'eau ont le même volume*.

Certains élèves sont tentés de plonger la deuxième boule sans retirer la première. Dans ce cas, chaque boule déplace bien la même quantité d'eau, mais les différences de niveau provoquées par ces déplacements dépendent de la forme du récipient. Ce processus ne permet la comparaison que lorsque le récipient est à section constante. Cette discussion nous est apparue prématurée dans une phase de construction de la notion de volume avec des élèves encore très jeunes. C'est pourquoi nous avons imposé la procédure où les boules sont immergées successivement. Cette réduction de la part de liberté dans l'activité dévolue aux élèves nous a semblé inévitable, à ce stade de la construction du concept, pour atteindre les objectifs que nous nous étions fixés.

---

[3] Pour la suite de l'activité, il est impératif que ces deux boules soient de même volume que la boule de pétanque choisie pour l'expérience « Objets de masses différentes ».

### 2.2 Objets pleins de tailles différentes

*Figure 5*

Cette fois deux boules de pâte à modeler de tailles visiblement différentes (figure 5) sont proposées. Avant toute manipulation, les élèves doivent prévoir quelle boule déplacera le plus d'eau.

Généralement, les élèves voient qu'une boule prend plus de place que l'autre et prévoient spontanément que les déplacements d'eau ne seront pas égaux et que la boule la plus grosse déplacera le plus d'eau.

Ils confirment leurs observations en réalisant l'expérience, sur le même modèle que la précédente. Cette expérimentation montre que le déplacement d'eau varie bien quand le volume varie. Elle complète la première approche de la notion de volume. Elle amène l'enseignant à préciser que *la quantité d'eau déplacée correspond au volume de l'objet* et que *plus le volume de l'objet est important, plus la quantité d'eau déplacée est importante*.

### 2.3 Objets pleins de formes différentes

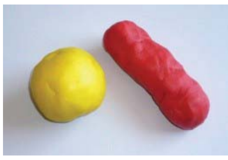

*Figure 6*

Les deux boules identiques en pâte à modeler de la figure 2 dont on a déjà constaté qu'elles avaient le même volume, sont réutilisées. L'une, ici jaune, est conservée et, devant les élèves, l'enseignant transforme l'autre (ici rouge) en un objet de forme très différente, par exemple un « donut » ou un « colombin » (figure 6), ou même plusieurs boules plus petites disjointes. Les élèves relèvent les caractéristiques de l'objet déformé : il est plus long (ou plus haut) mais plus fin, il contient la même quantité de pâte à modeler, …

Ils formulent ensuite, oralement ou par écrit, leur prévision quant aux déplacements d'eau provoqués par l'immersion de chacun des deux objets. Lors des expérimentations dans les classes, nous constatons que les élèves qui pensent, au préalable, que les déplacements d'eau seront différents, le justifient en expliquant, par exemple, qu'un objet long et fin ou haut et mince prend davantage de place qu'une boule. Ceux qui pensent que le niveau de l'eau va rester le même expliquent qu'on n'a ni ajouté ni enlevé de pâte à modeler.

Ensuite, l'expérience est réalisée en rappelant que, lorsque les déplacements d'eau provoqués par deux objets immergés tour à tour sont identiques, on dit que ces deux objets ont le même volume. Cette expérience montre que *lorsqu'on modifie la forme d'un objet plein, il garde le même volume*. C'est l'acquisition de la conservation du volume qui est contrôlée au cours de cette expérience.

### 2.4 Objets pleins de masses différentes

*Figure 7*

Pour l'expérience suivante, deux boules de même diamètre, mais de masses très différentes[4] sont présentées. Dans notre exemple, nous avons choisi une boule de pétanque en acier et une boule en pâte à modeler (figure 7). Les élèves doivent prévoir laquelle de ces deux boules déplace le plus d'eau.

Comme la boule en acier est bien plus lourde que la boule en pâte à modeler, certains élèves pensent qu'en les immergeant, la boule la plus lourde déplacera plus d'eau. Face à l'expérience, les élèves voient que les quantités d'eau déplacées par les deux boules sont identiques. Prenant appui sur les conclusions précédentes, ils déduisent que ces deux boules ont le même volume.

Les élèves découvrent, via cette expérience, que *deux objets de masses différentes peuvent avoir le même volume*.

### 2.5 Objets pleins de formes et de masses différentes

*Figure 8*

Pour terminer, il s'agit de comparer, d'une part, le volume du colombin provenant de la déformation d'une boule en pâte à modeler et d'autre part le volume de la boule de pétanque (figure 8). Il est demandé aux élèves ce qu'ils peuvent dire du volume de

[4] La différence de masse est telle qu'il est inutile d'utiliser un instrument pour peser les boules.

ces deux objets. Remarquons que c'est la première fois que le mot volume est utilisé dans la question.

Dans ce cas, il est d'abord fait appel à la seule réflexion des élèves. Ils ne réaliseront l'expérience que dans une seconde phase, pour valider les propositions ou s'ils en éprouvent le besoin. Le colombin a le même volume que la boule en pâte à modeler, la boule d'acier a également le même volume que la boule en pâte à modeler, donc le volume du colombin est le même que le volume de la boule d'acier. Les élèves rencontrent ici, en actes, une propriété fondamentale de l'égalité : la transitivité de l'égalité.

On amène les élèves à en déduire que *deux objets de masses et de formes différentes peuvent avoir le même volume*.

## 3 Remplissage et immersion

La première expérience a montré comment comparer le volume de deux objets creux par remplissage, les suivantes ont donné une méthode pour comparer les volumes d'objets pleins, la procédure par immersion dans un même récipient et comparaison des niveaux d'eau. Il semble naturel de s'intéresser à la question suivante : Est-il possible de comparer le volume d'un objet plein à celui d'un objet creux, par exemple celui de la boule de pétanque à celui d'une boîte en carton ?

Pour établir un lien entre les deux méthodes de comparaison, un objet creux qui peut être soit rempli, soit immergé, peut être proposé. Au début du collège, à ce moment de l'activité, il est envisageable de laisser les élèves proposer eux-mêmes des expériences qui mettraient ces liens en évidence. Pour réaliser la suite de l'activité, nous avons choisi un cube en plexiglas avec un couvercle qui permet de l'ouvrir ou de le fermer hermétiquement. Le niveau initial de l'eau est noté d'un trait sur la paroi du récipient contenant l'eau. Le cube est tout d'abord lesté en y plaçant des pièces de monnaie. Une variante consiste à lester avec de l'eau (éventuellement colorée). Cette proposition a été contestée auparavant par des enseignants du fondamental[5] par crainte d'une confusion entre eau du grand récipient et eau du petit cube[6]. L'enseignant pose alors la question de l'impact de la modification de la masse sur le volume. Les élèves peuvent évoquer l'expérience avec la boule de pétanque pour se convaincre que l'ajout des pièces de monnaie est sans influence sur la quantité d'eau déplacée. Si ce n'est pas le cas, l'expérience peut être renouvelée.

Le cube est ensuite fermé puis immergé, et le niveau atteint par l'eau est noté (figure 9). Dans un second temps, le cube lesté est retiré et vidé des pièces de monnaie puis remplit « à ras bord » avec de l'eau (ne provenant pas du récipient). Enfin, le cube rempli d'eau est vidé dans le récipient (figure 10).

*Figure 9*

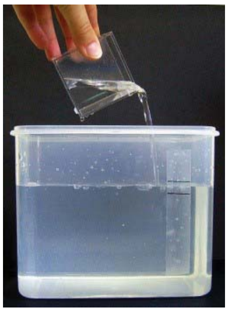

*Figure 10*

Constat : Le niveau atteint par l'eau correspond à celui noté précédemment. Les élèves sont amenés à formuler la conclusion. Celle qui est attendue est du type : *la quantité d'eau que contient un objet correspond à la quantité d'eau qu'il déplace lors de son immersion*.

Une autre expérience mène à la même conclusion. Il s'agit d'immerger le cube en plexiglas dans un récipient rempli d'eau à ras bord et placé dans un bac plus grand. L'eau qui déborde lors de l'immersion du cube est récupérée et transvasée dans le cube.

Constat : Cette quantité d'eau permet de remplir exactement le cube.

Une seule de ces deux expériences peut suffire mais il est utile d'explorer les deux manières de faire pour permettre à un maximum d'élèves de créer des liens entre les différentes images mentales construites précédemment.

Ces manipulations fournissent des pistes pour imaginer des expériences permettant de comparer, par exemple, le volume d'une boîte en carton et celui d'une boule de pâte à modeler, mais cela se

[5] L'enseignement fondamental en Belgique regroupe les enseignements maternel et primaire.

[6] Pour éviter ces manipulations qui pourraient perturber le raisonnement des élèves, il est désormais possible de créer, avec l'aide des imprimantes 3D, un cube qui ne nécessite plus d'être lesté. Il faut alors que son couvercle soit muni d'une longue tige qui permette à l'expérimentateur de maintenir le cube dans l'eau, sans avoir à y plonger ses doigts.

complexifie de plus en plus. Le processus expérimental montre ici ses limites, il devient nécessaire de trouver un moyen de « mesurer » le volume pour établir des comparaisons plus aisément.

## III - BOÎTES PARALLÉLÉPIPÉDIQUES

Cette section est consacrée à la construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle. Des liens entre diverses mesures d’un même volume seront établis, ainsi que des rapports entre unités de volume. Ce type d’activités étant plus courant, nous soulignerons uniquement les éléments importants de la ligne directrice de la séquence. La description complète se trouve dans l’ouvrage du CREM (Guissard & al., 2014, https://www.crem.be/publications).

### 1 Construction d’un solide en cubes

*Figure 11*

Après avoir distribué des paquets de six cubes emboîtables, les élèves sont amenés, dans un premier temps, à construire un solide différent de celui qui leur est présenté, constitué également de six cubes (figure 11). Cette consigne a pour but d’engager les élèves dans l’activité mais l’intention est également d’attirer l’attention sur le mot « volume » de la deuxième consigne : « construisez un solide de volume différent du mien en utilisant tous les cubes ».

Des élèves, persuadés qu’un tel solide n’existe pas mais souhaitant se conformer à la consigne, retirent et cachent un cube afin de présenter un solide qui réponde partiellement à la consigne. Cette seconde consigne vise à faire prendre conscience aux élèves que *le volume d’un objet ne varie pas si on utilise le même nombre de cubes*.

### 2 Comparaison du volume de boîtes parallélépipédiques

*Figure 12*

L’enseignant présente les trois boîtes parallélépipédiques de la figure ci-contre[7] (figure 12) et met à disposition 38 cubes en bois de 2 cm d’arête. La première question posée aux élèves est : « Quelle est la boîte la plus grande ? ». Cette question amène évidemment à des réponses différentes selon qu’ils s’attachent à la hauteur, à la longueur, … ou au volume des boîtes. Les élèves remarquent qu’il est nécessaire de préciser la question. Il leur est alors demandé d’identifier la boîte de plus grand volume et d’expliquer comment s’y prendre pour répondre. Après proposition des élèves, l’un d’entre eux est chargé de remplir chacune des boîtes avec des cubes qui sont dénombrés.

Il est établi que pour comparer le volume des boîtes, il suffit de comparer le nombre de cubes qu’elles contiennent, ce nombre de cubes peut donc servir à mesurer le volume. À partir de cette mise au point, le volume des boîtes de la section suivante pourra s’exprimer en nombre de cubes.

### 3 Construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle

#### *3.1 Boîtes en carton*


*Figure 13*

Des groupes d’élèves sont constitués ; chaque groupe reçoit 38 cubes en bois de 2 cm d’arête afin de l’aider à trouver le volume (en nombre de cubes en bois) des quatre boîtes de la figure ci-contre[8], distribuées une à une au fil de l’activité.

Le volume de chaque boîte doit être exprimé en nombre de cubes. Les boîtes ont été

---

[7] Les trois boîtes sont construites comme suit : une boîte cubique d’arête 6 cm, une boîte parallélépipède rectangle à base carrée de côté 4 cm et de hauteur 12 cm, et une boîte parallélépipède rectangle de longueur 10 cm, de largeur 6 cm et de hauteur 4 cm.

[8] Les quatre boîtes parallélépipédiques à construire ont les dimensions suivantes :
– boîte 1 : longueur 6 cm, largeur 4 cm, hauteur 8 cm ;
– boîte 2 : longueur 12 cm, largeur 8 cm, hauteur 4 cm ;
– boîte 3 : longueur 14 cm, largeur 10 cm, hauteur 6 cm ;
– boîte 4 : longueur 16 cm, largeur 12 cm, hauteur 8 cm.

conçues de manière à obliger les élèves à faire évoluer leur démarche pour déterminer la mesure du volume d'un parallélépipède rectangle. La première boîte peut être remplie entièrement, on trouve son volume par dénombrement de cubes. La base de la deuxième boîte peut être couverte mais la deuxième couche de cubes, nécessaire pour remplir la boîte, reste incomplète. Les élèves dénombrent alors les cubes manquants ou multiplient le nombre de cubes présents dans la première couche par deux. Pour calculer le volume de la troisième boîte, il est nécessaire que les élèves remarquent qu'il faut trois couches pour la remplir. Pour la quatrième boîte, il n'est même plus possible de couvrir la base avec les 38 cubes. Les élèves doivent procéder à un calcul pour déterminer le nombre de cubes de la couche couvrant la base, avant de calculer le volume de la boîte.

Différentes stratégies apparaissent dans les groupes, notamment car il est également possible de remarquer des rapports entre les dimensions de certaines boîtes. Pour chaque boîte, il est demandé aux élèves de décrire la procédure qu'ils ont appliquée pour calculer la mesure de son volume. Ceci permet à l'enseignant de détecter l'évolution des raisonnements au sein de chaque groupe d'élèves, et d'identifier la construction mentale, menant à la découverte de la formule.

### 3.2 Boîtes dessinées

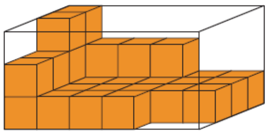

*Figure 14*

L'activité se poursuit par un travail papier-crayon sur la recherche du volume de boîtes parallélépipédiques auxquelles l'élève n'a plus accès physiquement mais dont il a une représentation en deux dimensions comme sur la figure 14.

Si certains élèves ne parviennent pas à se représenter le solide en trois dimensions, nous suggérons de les laisser reconstruire l'objet avec des cubes en bois. C'est une démarche naturelle d'utiliser les cubes en bois restés accessibles, il faut laisser l'élève y recourir aussi longtemps que nécessaire.

### 3.3 Boîtes imaginaires

Les situations suivantes demandent à l'élève une démarche d'abstraction supplémentaire puisqu'il n'a plus la boîte représentée devant lui. Une première question est posée : « Dans une boîte, je couvre la base avec 12 cubes et je place 5 cubes dans la hauteur. Quel est son volume ? ». Après avoir donné une réponse à cette question, il est demandé aux élèves de représenter cette boîte à l'aide de cubes. Les solides auront même volumes mais ne seront sans doute pas tous identiques car il y a trois dispositions possibles pour une base composée de 12 cubes (3 sur 4, 2 sur 6 et 1 sur 12).

L'exercice se poursuit en proposant un énoncé dans lequel une donnée est parasite : « Pour recouvrir la base d'une boîte, il faut 14 cubes. Sa hauteur est composée de 5 cubes et sa longueur de 7 cubes. Quel est le volume de cette boîte ? ». Une telle question permet d'identifier des élèves qui multiplient les trois nombres sans comprendre la formule.

Une question de synthèse : « Comment faire pour trouver le volume (en nombre de cubes) d'une boîte de forme parallélépipédique ? » est ensuite posée. Pour avoir réalisé la manipulation, les élèves mettent en évidence que, dans toutes les recherches précédentes, ils ont calculé le produit du nombre de cubes qu'on peut placer sur la base par le nombre de cubes que l'on peut empiler pour atteindre la hauteur indiquée. Si le nombre de cubes que l'on peut placer sur la base (aire de la base) n'est pas connu, ils le calculent en multipliant les nombres de cubes que l'on peut mettre en longueur et en largeur.

## 4 Calcul du volume du parallélépipède rectangle en cm³

*Figure 15*

Les boîtes 1 à 3 de la section « boîtes en carton » sont à nouveau distribuées aux groupes d'élèves, accompagnées cette fois de 50 petits cubes de 1 cm d'arête et de deux cubes en bois de 2 cm d'arête. Ces trois boîtes doivent à présent être remplies avec des petits cubes et il est demandé aux élèves d'identifier combien sont nécessaires pour remplir chaque boîte.

Les élèves cherchent soit par calculs, soit par remplissage partiel. Pour chaque boîte, ils ont suffisamment de cubes pour les aligner sur une longueur, une largeur et une hauteur. Il se peut que des élèves ne passent pas par l'utilisation des petits cubes mais se basent sur le fait que la longueur de l'arête d'un cube en bois est le double de celle d'un petit cube. De ce fait, ils peuvent être tentés de doubler le nombre de cubes en bois pour calculer le volume en petits cubes. Ces élèves obtiennent un résultat différent de celui des élèves ayant travaillé par remplissage partiel. La vérification par remplissage trouve alors tout son sens.

Le défi de trouver le volume (en petits cubes) de la boîte 4 sans l'avoir à leur disposition est ensuite proposé aux élèves. Le lien entre le nombre de cubes en bois et le nombre de petits cubes étant difficile à percevoir, l'enseignant peut proposer de comparer le petit cube avec le cube en bois, dans le cas où l'idée n'est pas venue d'un élève. Il faut 8 petits cubes pour reconstituer un cube en bois, ce qui permet de trouver à partir du nombre de cubes en bois, le nombre de petits cubes nécessaires pour remplir la boîte 4.

L'intérêt de cette activité est de montrer que, pour une même boîte, le nombre de petits cubes est différent du nombre de cubes en bois. Ces nombres sont des mesures du volume de la boîte. Ils diffèrent parce que l'on a utilisé des « cubes étalons » différents. Cette activité amène la nécessité du choix d'un étalon commun pour comparer des volumes en les mesurant. Le choix du centimètre cube comme étalon conventionnel est alors présenté aux élèves.

## 5 Une boîte particulière

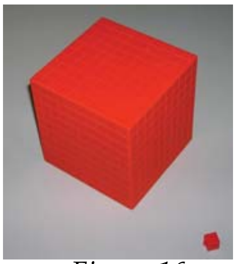

*Figure 16*

Une nouvelle boîte (figure 16) est proposée aux élèves, sans la nommer. Il s'agit d'un cube d'arête de mesure un décimètre. Après en avoir donné une estimation, il est demandé de chercher la mesure du volume de cette boîte en cm³ (nombre de cubes d'arête de mesure un centimètre). À moins d'avoir déjà manipulé cette boîte auparavant, les élèves donnent généralement des estimations très en deçà de la réalité (300 à 350 cm³).

Puisqu'il leur est possible de mesurer les dimensions de cette boîte, les élèves effectuent le calcul 10 × 10 × 10 qui font 1 000. On met donc 1 000 petits cubes de 1 centimètre d'arête dans le cube de 1 décimètre d'arête.

L'enseignant rappelle aux élèves que la mesure de chaque arête, exprimée en centimètres, peut aussi être exprimée en décimètres. La boîte que les élèves ont devant eux a une longueur, une largeur et une hauteur égales à 1 décimètre. L'enseignant amène les élèves à comparer cette boîte cubique au petit cube : *un centimètre cube est le volume d'un cube mesurant un centimètre d'arête, un décimètre cube est le volume d'un cube ayant 1 décimètre d'arête.*

## 6 Adéquation des unités

Pour terminer cette partie, les élèves doivent trouver le volume de boîtes dont les dimensions sont données les unes en centimètres, les autres en décimètres. Dans un premier temps, les mesures sont entières en décimètres et sont des multiples de dix en centimètres. Diverses réponses peuvent surgir parmi lesquelles deux sont solutions. L'une nécessite la conversion des mesures de longueur en centimètres, l'autre en décimètres. C'est une situation adéquate afin de réfléchir à l'équivalence des réponses exprimées en centimètres cubes et décimètres cubes. De plus, il est à observer que le nombre donnant la mesure du volume en dm³ est dans ce cas d'un ordre de grandeur plus facile à appréhender.

La recherche du volume de la boîte suivante légitime l'extension de la formule aux nombres décimaux. La question suivante est posée aux élèves : « Quel est le volume d'une boîte ayant 55 cm de longueur, 3,4 dm de largeur et 21 cm de hauteur ? Exprimez votre réponse en cm³ et en dm³. ». Après conversion des unités, les réponses obtenues sont 39 270 cm³ et 39,270 dm³ (ou 39,27 dm³). Cette dernière réponse est soit issue de l'équivalence entre 1 dm³ et 1000 cm³, soit du calcul 5,5 × 3,4 × 2,1 dm³. Comme le résultat est le même, le dernier calcul est reconnu comme légitime même si cette multiplication des trois nombres ne peut plus s'appuyer sur la démarche mentale de dénombrement de cubes.

Calculer le volume d'un solide dont les mesures sont exprimées en nombres décimaux amène les élèves à dépasser l'image mentale du volume qu'ils s'étaient construite à partir des manipulations.

# IV - CALCUL DU VOLUME D'UN OBJET

Cette section revient sur les expériences de mise en place de la notion de volume en étayant les comparaisons de volumes sans mesures, par des comparaisons de mesures en millilitres, ou des calculs de mesures de volume en cm³. Ces mesures valident d'une certaine manière les méthodes mises en place :

– pour les objets pleins : immersion et comparaison des quantités d'eau déplacée,

– pour les objets creux : comparaison des quantités contenues.

Ce retour aux expériences initiales permet de garder à l'esprit que le volume est une grandeur physique qu'il ne faudrait pas réduire à quelques formules. Ces activités permettent également un débat sur les valeurs approchées issues des résultats expérimentaux.

## 1 Objets pleins

Lorsqu'un objet est immergé dans un récipient, son volume correspond au volume de l'eau déplacée. Si le récipient est de forme parallélépipédique, le volume de l'eau déplacée est celui d'un parallélépipède rectangle qui peut être visualisé en entourant la boîte d'élastiques aux différents niveaux atteints par l'eau.

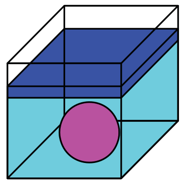

*Figure 17*

La longueur et la largeur de ce parallélépipède correspondent respectivement à la longueur et la largeur du récipient dans lequel l'objet est immergé. La hauteur correspond à la différence des niveaux de l'eau avant et après immersion (figure 17). La formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle nous donne un moyen de calculer le volume de l'objet immergé, quelle que soit sa forme.

Éprouvons la méthode pour un objet dont le volume peut être obtenu soit par calcul direct, soit par immersion, par exemple le cube en plexiglas lesté de l'expérience « Remplissage et immersion » (figures 9 et 10). Nous le plongeons dans une boîte parallélépipédique transparente de 10 cm d'arête. Nous choisissons un parallélépipède car le calcul du volume du parallélépipède à partir de ses trois dimensions est connu.

Le parallélépipède virtuel formé par l'eau déplacée a une longueur et une largeur de 10 cm, une hauteur qui ne peut être déterminée avec précision mais située au mieux entre 1,5 cm et 1,6 cm. Le volume d'eau déplacée est donc compris entre $10 \times 10 \times 1{,}5$ cm³ soit 150 cm³ et $10 \times 10 \times 1{,}6$ cm³ soit 160 cm³. Ce procédé donne une valeur approximative du volume de l'objet. Et, dans notre exemple, une imprécision de lecture de 1 mm sur la hauteur donne une différence de volume de $0{,}1 \times 10 \times 10$ cm³, soit 10 cm³.

Comparons, pour ce même objet, le volume ainsi obtenu avec le volume calculé à l'aide de la formule. L'arête de ce cube mesure 5,4 cm, son volume est égal à $5{,}4 \times 5{,}4 \times 5{,}4$ cm³ soit 157 cm³. La mesure obtenue par la formule est bien comprise dans l'encadrement donné par l'expérience et valide d'une certaine façon la méthode par immersion. Notons que la mesure de l'arête du cube n'est pas non plus exempte d'erreur de mesure.

## 2 Objets creux

La manipulation réalisée pour la comparaison d'objets creux nous a montré que les boîtes proposées, parallélépipédique et cylindrique (figure 1), ont le même volume. Nous avons à présent d'autres outils pour le confirmer.

Pour calculer le volume de la boîte cylindrique, la remplir d'eau « à ras bord » ; cette quantité d'eau est ensuite versée dans un récipient gradué. Dans notre exemple, le niveau d'eau se situant à mi-chemin entre 800 mL et 900 mL, la valeur approchée du volume est comprise entre 800 cm³ et 900 cm³ (l'étiquette de la boîte indique 850 mL). Cette activité exploite la conversion des unités de capacité en unités de volume.

Pour calculer le volume de la boîte parallélépipédique, il suffit d'appliquer la formule, ce qui donne pour notre exemple $17 \times 10 \times 5$ cm³, soit 850 cm³. Cette fois encore, le résultat de l'expérience est confirmé par le calcul.

## V - CONCLUSION

La mise au point d'une séquence d'apprentissage sur le volume du parallélépipède rectangle et les expériences menées en classe dans ce cadre nous ont fait comprendre à quel point la notion de volume était délicate à circonscrire avec les élèves et, dans un même temps, combien il était nécessaire de poser des bases solides pour la compréhension de ce concept. L'impossibilité d'une définition rigoureuse et complète, à ce stade de l'enseignement, nous a amenés à mettre en place, dans cette séquence, une série d'expériences qui confrontent les préconceptions des élèves à la réalité de la situation et conduisent à la création d'images mentales diverses dont la cohérence est progressivement installée. En particulier, la distinction entre les notions de volume d'un objet plein ou creux nous a semblé fondamentale.

Le retour vers les expériences initiales, ne permettant que des comparaisons sans mesures, pour en réexploiter les démarches au moment où on dispose de moyens de calcul, nous a semblé essentiel pour tisser des liens entre la démarche expérimentale et le calcul théorique. Ce va-et-vient montre notamment l'intérêt de la démarche expérimentale pour déterminer la mesure d'un volume pour lequel aucune formule n'est disponible, mais attire aussi l'attention sur les limites de cette démarche, et sur les erreurs expérimentales qu'elle entraîne.

## BIBLIOGRAPHIE

GUISSARD M.-F., HENRY V., LAMBRECHT P., VAN GEET P., VANSIMPSEN S. & WETTENDORFF I. (2014). *Math & Manips - Des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques*. CREM https://www.crem.be/publications

GUISSARD M.-F., HENRY V., LAMBRECHT P., VAN GEET P. & VANSIMPSEN S. (2015). *Math* & *Manip* pour construire la notion de volume, *Grand N, n°* 96, pp. 35-44.

HENRY V. & LAMBRECHT P. (2012). *Math & Manips* : introduction de manipulations dans les classes pour favoriser la construction des apprentissages. *Actes du XXXVIIIe colloque COPIRELEM*, Dijon.