LES FIGURATIONS : ECRIT INTERMEDIAIRE POUR PROBLEMATISER

Sylvie GRAU
Professeure de mathématiques, ESPE NANTES
Laboratoire CREN
sylvie.grau@univ-nantes.fr

Résumé
En classe, la mise en commun suite à une résolution de problème complexe est un moment délicat. Pour nous, l'enjeu est de donner accès aux élèves à un savoir problématisé, c'est-à-dire qu'ils sachent non seulement pourquoi la solution est ce qu'elle est, mais aussi pourquoi elle ne peut pas être autrement (Orange, 2012). Or, les élèves ont des représentations très différentes d'un même problème, ils n'ont pas toujours les outils sémiotiques pour formaliser ces représentations. C'est pourquoi nous proposons aux élèves de critiquer des « figurations » (Grau, 2017a), une figuration étant une sorte de caricature d'une procédure de résolution, afin de les aider à formaliser la manière dont ils construisent le problème, c'est-à-dire comment ils mettent en tension leurs connaissances, leurs représentations, dont certaines sont souvent implicites, avec les données du problème (Fabre, 2011). A partir d'exemples en cycle 3 autour de problèmes numériques, nous montrerons en quoi ces figurations peuvent être une aide aux élèves en difficultés, par le fait qu'elles donnent à voir l'organisation de la pensée mais aussi parce qu'elles permettent de travailler les conversions de registres (Duval, 2006).

Professeure de mathématiques, formatrice et doctorante en sciences de l'éducation au sein du laboratoire du CREN de l'université de Nantes, je m'intéresse à la place des problèmes dans l'apprentissage et en particulier au processus d'institutionnalisation. Si ma recherche est centrée sur un élément de savoir, les résultats de mes travaux peuvent avoir une portée plus générale sur l'analyse du processus de problématisation chez les élèves. Je vais présenter le cadre de la problématisation et ses enjeux potentiels pour l'apprentissage des mathématiques. Je vais essayer de montrer en quoi la reprise de textes est essentielle et je présenterai ce que j'appelle une *figuration*. Enfin j'analyserai quelques exemples pour montrer en quoi cette approche pourrait modifier l'enseignement et l'apprentissage autour de la résolution de problèmes.

I - LA PLACE DU PROBLEME DANS L'APPRENTISSAGE

1 La problématisation : un cadre pour penser l'apprentissage

Si les mathématiques sont ancrées dans la résolution de problèmes, la diversité des contextes, des objectifs, des compétences mobilisées, rend cette activité très floue. Si nous reprenons les textes officiels, le socle met bien en évidence dès le cycle 2 un processus qui reprend l'épistémologie de Piaget (cité par Legendre, 2006). En effet, dans l'extrait : « La pratique du calcul, l'acquisition du sens des opérations et la résolution de problèmes élémentaires en mathématiques permettent l'observation, suscitent des questionnements et la recherche de réponses, donnent du sens aux notions abordées et participent à la compréhension de quelques éléments du monde. », on retrouve la triade « contempler, opérer, transformer » que Piaget a identifiée aussi bien dans la psychogenèse historique que la psychogenèse individuelle. En d'autres mots, l'apprentissage de concepts mathématiques passe de l'observation d'objets dont la réalité leur est propre, à une phase d'opérations sur ces objets (classer, relier, calculer …) par la manipulation de symboles, pour arriver au stade où les objets sont incorporés dans une théorie qui les englobe et permet de les interpréter en son sein.

Il est précisé dans le programme du cycle 2 que « la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer. Les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements ». Nous avons déjà trois facettes de l'activité : apprendre à chercher un problème (ce qui est précisé ensuite dans le texte : « On veillera à proposer aux élèves dès le CP des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas de simples problèmes d'application à une ou plusieurs opérations mais nécessitent des recherches avec tâtonnements. »), résoudre un problème, poser un problème.

Fabre (2011) utilise un losange pour représenter la problématisation (cf. schéma 1).

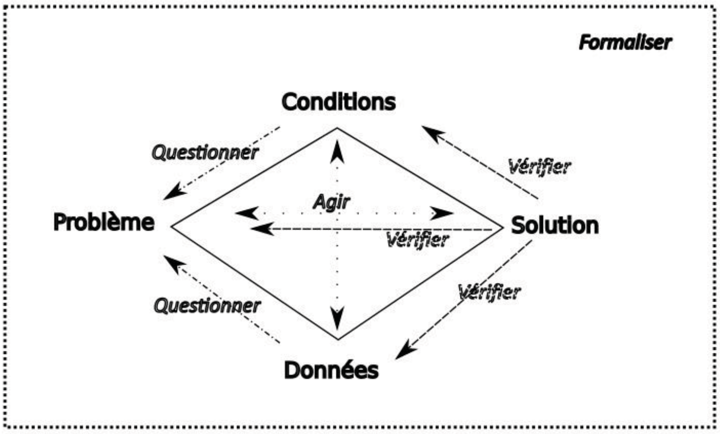


Schéma 1. Losange de problématisation et rôles

Un des sommets désigne le problème, la question qui est posée ; un autre désigne les données qui sont les contraintes internes au problème ; un troisième désigne les conditions qui sont les contraintes externes au problème et qui regroupent les savoirs, savoir-faire, représentations, modèles, expériences dont dispose l'élève pour traiter les données ; et enfin le dernier sommet désigne la solution du problème. Poser le problème amène à s'intéresser à la question. Résoudre le problème consiste à aller de la question à la solution ; si les techniques nécessaires sont disponibles et les données nécessaires déjà construites, l'élève peut résoudre un problème sans problématiser. Construire un problème correspond à la mise en tension des données et des conditions. Les compétences mathématiques du programme de mathématiques de 2015 sont en fait les différentes manières de mettre en relation les sommets de notre losange. Ainsi, « chercher » amène à un traitement des données, à poser la question, à mettre au travail des conditions, compétence nécessaire pour « modéliser » et « représenter » qui correspondent à la mise en tension des données et des conditions, « raisonner » peut être orienté vers la solution tout comme « calculer » et « communiquer » et amène à deux fonctions : décrire (plutôt du côté de la question) et argumenter (plutôt du côté des conditions). Raisonner peut aussi partir de la solution pour aller vers les données ou les conditions dans le cas du raisonnement inductif.

On comprend alors que la résolution du problème n'aura pas la même place dans l'apprentissage suivant le statut des conditions. Les conditions sont-elles à découvrir ? Dans ce cas, le problème est une situation problème (Astolfi, 1993), un problème initial. Sont-elles construites et déjà mobilisables voire disponibles (Robert & Rogalski, 2002) ? Dans ce cas, le problème est un problème d'application si les données sont de même nature que celles déjà rencontrées, ou de réinvestissement si le contexte est différent, voire un problème ouvert si le problème est à construire. Travaille-t-on sur la mise en tension entre données et conditions ? Dans ce cas, le problème peut être un « problème pour chercher » ou un problème ouvert (Charnay, 1992). Dans les programmes du cycle 3, le texte précise que l'activité « contribue à enrichir la culture scientifique des élèves » par la mise en perspective historique des connaissances. C'est-à-dire par l'explicitation de la manière dont les hommes ont construit les problèmes à différentes époques en fonction de l'évolution des savoirs, des contextes, des besoins… donc des conditions.

2 Différents aspects à prendre en compte

Ceci nous amène à préciser un autre aspect théorique de la problématisation. Tall (2006) définit trois mondes mathématiques : les mathématiques « pratiques », théoriques et formelles. Il démontre que ces trois mondes sont emboîtés et qu'un concept évolue dans ces trois mondes. Il donne l'exemple de l'addition. Dans le monde des mathématiques pratiques, 2+3 est égal à 3+2 parce que je le vois en comparant des collections par exemple. Dans le monde des mathématiques théoriques, 2+3 et égal à 3+2 parce que je peux le calculer. Dans celui des mathématiques formelles, 2+3=3+2 parce que l'addition est commutative. Nous retrouvons la triade de Piaget : je vois que 2+3 est égal à 3+2, j'opère et je constate que 2+3=3+2, je transforme en démontrant l'égalité à partir des propriétés de l'opération dans N. Cela rejoint aussi l'idée que, en mathématiques comme en sciences, l'activité de l'élève est régie par trois types de registres (Orange, 2012) : le registre empirique qui est celui des faits, des expériences ; le registre des modèles qui est celui des mondes des idées, des explications ; et le registre explicatif (REX) qui est le cadre scientifique. En mathématique, le REX peut être considéré comme un cadre (Douady, 1986). Si on a longtemps considéré le processus comme étant une progression linéaire du pratique vers le formel, les recherches de Tall (Tall, 2006) sur les neurosciences et sur le rôle des émotions ont permis de démontrer que ce n'était pas le cas et que cette progression ne pouvait pas être en quelque sorte « élémentée » pour être enseignée. Toute activité, toute production de l'élève résulte de la mise en cohérence de ces trois registres. Les faits sont-ils cohérents avec les idées émises, ces idées sont-elles cohérentes avec la théorie, les faits viennent-ils conforter la théorie, la théorie permet-elle d'anticiper des faits ? Ainsi, face à un problème numérique, les élèves ont des idées et des modèles construits dans un cadre théorique (arithmétique, grandeurs et mesures, géométrie…), ils peuvent être amenés à effectuer des traitements sur les données (calculs, comparaison, tri…) qui produisent de nouvelles données empiriques. Cependant le registre des modèles peut incorporer des idées qui relèvent de différentes cultures : la culture mathématique scientifique, la culture scolaire, la culture sociale. Ainsi lorsque certains élèves ont à évaluer la pertinence d'une procédure, ils peuvent utiliser des arguments mathématiques (faits, techniques, propriétés, définitions…) tout aussi bien que des arguments scolaires (on a toujours fait comme ça, pour résoudre il faut calculer, il faut utiliser ce qu'on vient d'apprendre, on ne peut pas faire 2–3…) ou des arguments sociaux (tel élève trouve toujours la bonne réponse, la dernière affiche est toujours la solution attendue, on n'écrit pas tant qu'on est pas sûr, je suis mauvais en mathématiques…). Nous voyons qu'ici certains arguments relèvent du contrat didactique avec différentes facettes, la facette épistémologique et la facette sociale (Hersant, 2014) et ce à différents niveaux (mathématiques, classe, contexte précis).

Une autre triade est décrite par Piaget (Piaget & Garcia, 1983), il s'agit de la triade « intra, inter, trans ». Nous pouvons reprendre cette triade pour caractériser la manière dont les données sont traitées. Une donnée peut suffire à donner l'interprétation générale de la situation (intra), plusieurs données peuvent être mises en relation pour donner le sens (inter), une idée générale extérieure à la situation peut en donner le sens (trans). Prenons un texte de problème mathématique, l'expression « de plus » peut suffire pour suggérer qu'il faut effectuer une addition (intra), identifier plusieurs prix dans le texte peut induire une procédure additive (inter), avoir l'idée qu'il s'agit d'un problème additif peut permettre de sélectionner les données pertinentes dans le texte (trans).

L'enseignement doit prendre en compte ces différents aspects de l'apprentissage :

- l'aspect cognitif, pour amener les élèves à passer du contempler à l'opérer puis au transformer et à passer de l'« intra » au « trans »;
- les registres, pour amener les élèves à identifier le monde mathématique dans lequel le problème est posé, celui dans lequel il peut être résolu, et la validité de cette solution suivant le monde mathématique considéré ;
- l'aspect langagier, pour amener les élèves d'un genre premier à un genre second, c'est-à-dire à passer de l' « ici et maintenant » à un discours plus général ou à un autre contexte.

3 Caractériser les problèmes par leur fonction dans l'apprentissage

Pour résumer, nous pouvons rencontrer dans la chronogenèse du savoir des problèmes qui interviennent à différents moments avec des caractéristiques différentes. Il peut s'agir d'un :

- problème initial : la question doit amener un besoin (limite d'un outil, ou caractérisation d'une nouvelle condition), on va de l'observer à l'opérer ;
- problème d'application : automatisation d'une technique ou d'une procédure ;

- problème de réinvestissement, ouvert ou pour chercher : permet des transferts, des liens, des changements de cadres, des conversions. Le but est de limiter le domaine de validité ou d'action d'un savoir. On vise le monde des mathématiques formelles par la mise en évidence de nécessités liées à des contraintes théoriques, pour aller vers la preuve ;
- problème d'évaluation : doit attester la disponibilité du savoir visé, demande de reconnaître une situation et d'adapter les outils au contexte.

Chaque type de situation amène à travailler dans le losange d'une manière différente et donc demande à l'enseignant de définir le type d'étayage adapté à ce travail ainsi que ce qui doit être institutionnalisé. La difficulté est que, dans les pratiques usuelles, ces types de problèmes sont confondus, l'objectif d'apprentissage n'est pas clair et les interventions de l'enseignant agissent sur tous les niveaux. Le programme demande d'amener les élèves à savoir construire des problèmes, c'est-à-dire savoir sélectionner les données et les conditions en fonction d'une solution attendue à une question que l'élève se pose lui même dans un contexte inédit. Cela pose la question du processus d'institutionnalisation. Quelles compétences faut-il développer chez les élèves et comment ?

II - LA MISE EN COMMUN : UNE ETAPE DELICATE

1 Des conditions qui favorisent la problématisation par les élèves

Dans les pratiques usuelles, les élèves ont un problème à résoudre, ils cherchent d'abord seuls puis en groupe. Une solution ou une ébauche de solution est proposée par chaque groupe et une mise en commun à l'oral permet de comparer les productions. Un débat peut amener à valider des procédures et des solutions. L'enseignant par une construction dialoguée met en évidence les éléments de savoir qui lui semblent pertinents. L'ensemble se fait sur une ou deux séances.

Lors de la transcription des échanges dans des débats mathématiques en classe entière, la construction des losanges de problématisation montre qu'au fur et à mesure des échanges, différents problèmes sont posés, et que si globalement l'avancée permet de problématiser, tous les élèves ne participent pas également au même niveau de problématisation (Grau, 2017).

Par ailleurs en analysant les inter-actions verbales dans les groupes d'élèves, on a plus de chance d'obtenir une problématisation lorsque les élèves prennent tous alternativement différents rôles : questionner, agir, vérifier, formaliser. Ces rôles correspondent à une prise en compte différente des éléments du problème.

L'objectif pourrait donc être d'amener chaque élève à tenir tous les rôles au travers d'un « débat intérieur » lui permettant d'être autonome, en faisant fonctionner les dualités automatismes/inhibition et ouverture de possibles/validation dans un cadre pertinent.

Les expérimentations montrent que certaines conditions s'avèrent particulièrement favorables à cet échange de rôles :

- la sécurité affective est assurée ;
- aucun élève n'est en position de surplomb ;
- les élèves entrent dans le jeu de l'autre (empathie, écoute) ;
- les élèves osent questionner, le statut de l'erreur permet ce questionnement ;
- les élèves partagent des tâches, agissent conjointement ou en parallèle ;
- le contrat didactique est explicitement posé dans un cadre, un monde mathématique.

Pour amener les élèves à prendre ces différents rôles, la situation peut elle-même jouer un rôle et la consigne attribuer un autre rôle à l'élève ou au groupe. Par exemple la situation peut prendre en charge l'action et il peut être demandé à l'élève de vérifier, la situation peut prendre en charge la question et il peut être demandé à l'élève de formaliser etc.

2 Les figurations et leurs fonctions

Si on étudie à un niveau plus individuel ce qui se passe lors des échanges dans les groupes d'élèves, on voit que le niveau de problématisation peut être très différent d'un élève à l'autre et que les élèves peuvent travailler dans des mondes mathématiques différents, mobiliser des registres différents, avoir des registres de modèles très différents. Il devient alors très difficile pour l'enseignant d'amener les élèves à une même communauté de savoir sur le temps relativement court d'un débat en classe entière. Comme le langage est essentiel dans le processus, il peut être intéressant de proposer aux élèves de faire un travail réflexif sur les productions en petits groupes ou individuellement, les amenant à rédiger cette réflexion. Pour éviter que les arguments ne portent sur des aspects sociaux liés à la place des élèves dans le groupe ou dans la communauté, les productions travaillées doivent être anonymes. J'appelle figuration l'aménagement des productions des élèves par l'enseignant pour en faire un support d'analyse destiné aux élèves. Si l'objectif est de prendre conscience des caractéristiques de la situation, les figurations doivent montrer explicitement ce qui doit être débattu. C'est pourquoi certains éléments sont amplifiés ou symbolisés pour rendre explicite le raisonnement des élèves. La figuration a en fait trois fonctions :

- une fonction épistémique : elle vise la construction d'un savoir précis, la figuration est une épure du savoir visé ;
- une fonction argumentative : elle vise la preuve ou la critique, la figuration attire le regard sur les données sélectionnées, c'est un filtre ;
- une fonction cognitive : la figuration active des connaissances (des automatismes, des schèmes d'action, des analogies, des découpages en sous-buts), la figuration amplifie ce qui peut amener une reconnaissance d'objets ou de procédures.

Les élèves doivent produire un nouvel écrit à partir des figurations, ce qui doit les amener à préciser les nécessités. Ce travail s'intéresse plus à la construction du problème qu'à sa résolution, l'enseignant peut donc valider certains aspects.

La construction des figurations par l'enseignant lui permet de prendre du recul pour analyser les productions des élèves et organiser la suite du travail. Lorsqu'un débat suit immédiatement la recherche, l'enseignant a rarement le temps et le recul nécessaire pour tenir compte d'un maximum de paramètres. C'est en particulier le cas pour les problèmes ouverts car les élèves peuvent très bien utiliser des procédures que l'enseignant n'avait pas anticipées.

Par ailleurs, la figuration autorise l'usage de symboles non conventionnels mais qui permettent d'organiser la réflexion. A l'écoute d'enregistrements d'échanges entre élèves ou entre élèves et enseignant pendant la résolution de problèmes, on retrouve de nombreux indices déictiques : des indices personnels (je, tu, nous sans qu'on puisse savoir qui est le locuteur et à qui il s'adresse), des indices spatio-temporels (avant, après, ici, à côté, au-dessus… sans qu'on puisse savoir à quoi ils réfèrent), des indices de monstration (ce, cette, celle-là…). L'oral peut très bien se contenter de ces indices, l'écrit demande de passer à genre plus second (au sens de Jaubert & Rebière, 2001). Pourtant l'utilisation de symboles et de conventions mathématiques peut gêner la compréhension du raisonnement.

Nous allons voir sur des exemples en quoi peut consister une figuration.

III - LES EXEMPLES

Exemple 1 : un problème pour introduire un nouveau savoir en CM1

Un problème de durée a été posé à des élèves de CM1 (Figure 1) :

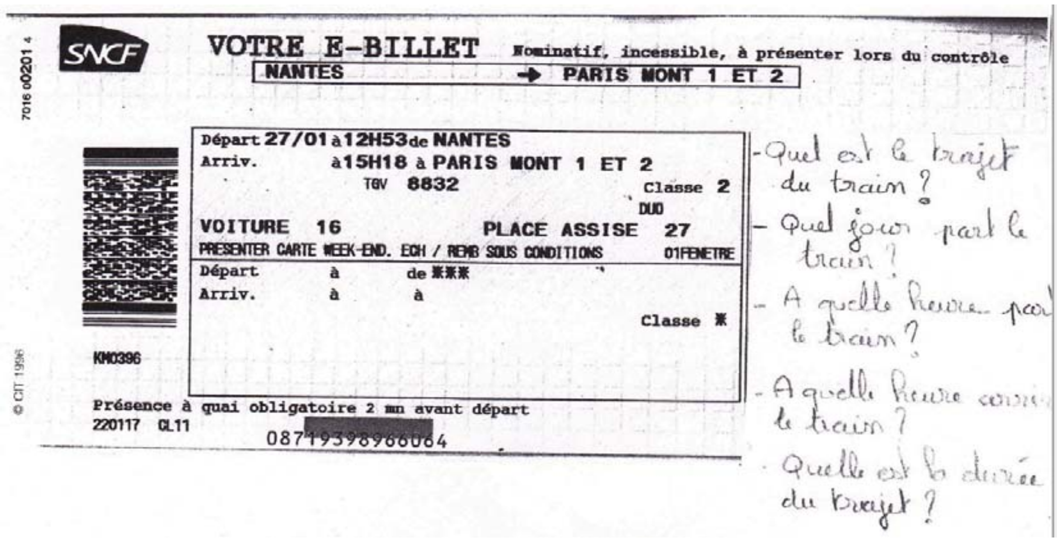


Figure 1. Problème de durée [1]

Prenons l’exemple de l’élève qui produit cet écrit (Figure 2) :

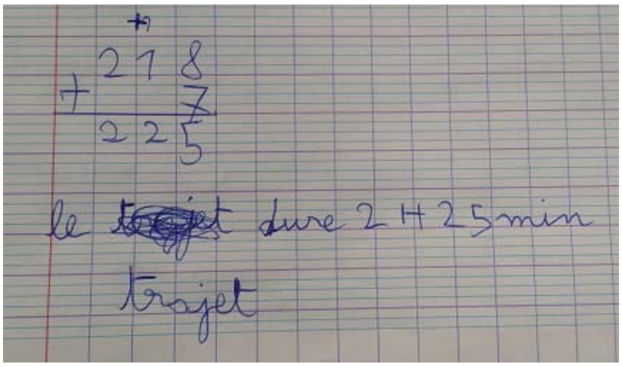


Figure 2. Réponse écrite de l'élève A de CM1 au problème de durée

Si l’enseignant demande à l’élève d’expliciter son écrit, il va montrer du doigt, faire référence au billet, ou utiliser des formulations du type « j’ai fait ça moins ça. » Dans l’action et en présentiel, ce type de formulation est suffisant pour se comprendre.

Si maintenant on demande à l’élève d’enregistrer son commentaire pour le faire écouter à un autre moment à un autre élève, il modifie son propos :

2.2481	Alors,
5.35347	***<u>Là</u>*** en fait y a 12 heures 53, **<u>le train il part à 12 heures 53</u>**.
11.4326	On garde, on met, le train il heu, il s'arr... il est heu... maintenant **<u>on rajoute</u>** 7 minutes.
23.8841	**<u>Là on est</u>** à 13 heures pile.
28.0944	*silence*
31.428	**<u>Le train il s'arrête à 15 heures 18.</u>**

[1] Questions sur le billet de train : Quel est le trajet du train ? Quel jour part le train ? A quelle heure part le train ? A quelle heure arrive le train ? Quelle est la durée du trajet ?

35.4041	13 plus 2 ça fait 15 et on rajoute 18.
41.8121	Du coup **là j'ai** calculé heu 218 plus 7 et **j'ai** trouvé 225.

Tableau 1. Transcription des propos de l'élève A

On trouve encore de nombreux indices déictiques (là, je, on) dans cette transcription, mais aussi deux formulations explicites qui sont en fait les données du problèmes (« Le train part à 12h53 », « Le train il s'arrête à 15h18 ») qui peuvent venir des réponses aux questions préliminaires posées par l'enseignante (A quelle heure part le train ? A quelle heure il arrive?). Par contre, pour ce qui est des opérations, les formulations sont incomplètes (« on rajoute 7 minutes » mais à quoi ?) et surtout les calculs ne sont pas expliqués ou justifiés. Si pour le premier calcul, l'unité est présente (« 7 minutes »), elle ne l'est plus dans la suite (« 13 plus 2 ça fait 15 ») et l'écriture 218 symbolise en fait 2h18min.

Cette reformulation orale permet à l'élève de conscientiser les opérations effectuées mentalement qui ne figurent pas sur la trace écrite. On note aussi que l'élève ne fait pas de retour sur la situation pour répondre explicitement à la question.

On peut voir sur cet autre exemple que la stratégie est la même (Figure 3).

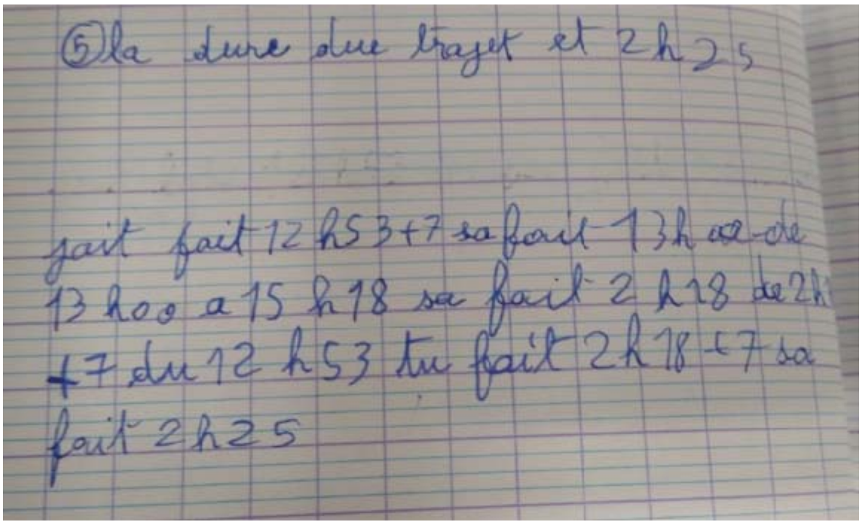


Figure 3. Réponse écrite de l'élève B de CM1 au problème de durée

Dans la production qui suit (Figure 4), la procédure n'est pas donnée mais on a une représentation symbolique de la durée par une double flèche courbée entre l'heure de départ et l'heure d'arrivée.

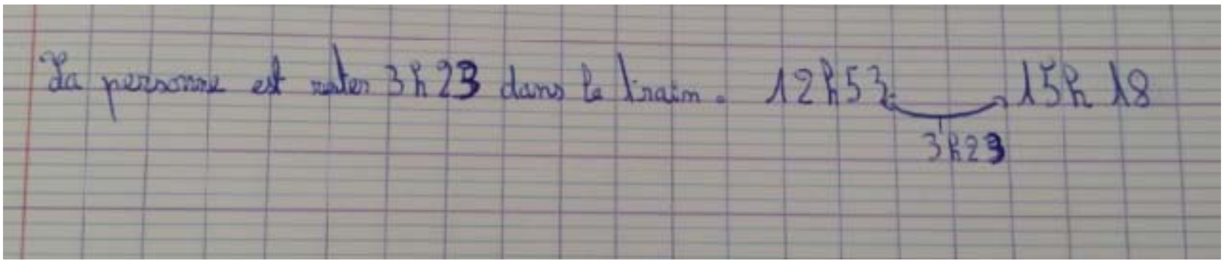


Figure 4. Réponse écrite de l'élève C de CM1 au problème de durée

Revenons au losange de problématisation, il s'agit dans ce problème de déterminer une durée sachant l'heure de départ et l'heure d'arrivée. Les élèves disposent de conditions relativement communes dans la classe de CM1 : une heure dure 60 minutes, on ne peut pas opérer sur les heures et les minutes en même temps, on peut calculer sur les nombres comme on le fait habituellement.

Quel est l'obstacle ? Que faut-il que l'élève apprenne ?

Une première difficulté est de construire le concept de durée. Pour reprendre l’épistémologie de Piaget (Piaget & Garcia, 1983), comment peut-on contempler une durée ? C’est possible de deux manières : sur un cadran d’horloge ou sur une ligne du temps.

La différence entre les élèves se fait déjà à ce niveau, qu’est-ce qui rend nécessaire l’utilisation de l’une ou de l’autre des représentations ? Le cadran ne permet pas de visualiser des durées supérieures à une heure. Il s’agirait donc de faire verbaliser les élèves sur la nécessité d’utiliser une représentation mentale d’une ligne du temps dès que la durée est estimée dépasser une heure. Ce qui suppose donc une première analyse des données pour comparer la durée à 60 minutes.

Ensuite pour opérer sur la ligne du temps, on procède par comparaison et découpage en unités de temps. Ici encore deux choix sont possibles, avancer d’heure en heure jusqu’à ce que ce ne soit plus possible ou avancer en s’appuyant sur des nombres « ronds ». Le choix se fait dès lors qu’on compare le nombre de minutes, si celui de l’heure d’arrivée est supérieur à celui de l’heure de départ, les deux procédures sont équivalentes. Sinon, s’appuyer sur des nombres « ronds » est plus efficace.

Amener les élèves à apprendre à résoudre un problème de calcul de durée ne peut donc pas se résumer à apprendre une procédure mais bien à mettre en évidence les nécessités liées au contexte.

L’enseignant doit donc attirer l’attention de l’élève sur la représentation mentale de la ligne du temps et au découpage de la durée en s’appuyant sur les nombres « ronds ». Cette procédure a l’avantage de permettre de trouver le résultat dans tous les cas.

L’étape suivante est d’additionner des durées et pour cela, il faut mobiliser deux cadres mathématiques qui portent chacun des nécessités :

- dans le cadre des mesures de grandeurs, on ne peut opérer que sur des mesures exprimées dans la même unité ;

- dans le cadre de l’arithmétique, il s’agit de calculer dans deux bases différentes (la base 60 pour les minutes et la base 24 pour les heures).

L’obstacle est la mise en relation des deux unités. Il s’agirait donc d’amener les élèves à formaliser les nécessités liées à cette prise en compte simultanée des durées en heures et des durées en minutes. Cet obstacle peut être dépassé en écrivant les unités à l’intérieur des calculs.

Dans la production suivante (Figure 5) on peut repérer les nécessités qui sont identifiées : la durée est symbolisée par le trajet entre les deux gares signalées par leur nom et par les flèches courbes entre nombres qui peuvent être comprises comme un symbole fonctionnel, les heures et les minutes sont traitées séparément, la durée globale est obtenue par addition des durées calculées sur les heures et sur les minutes.

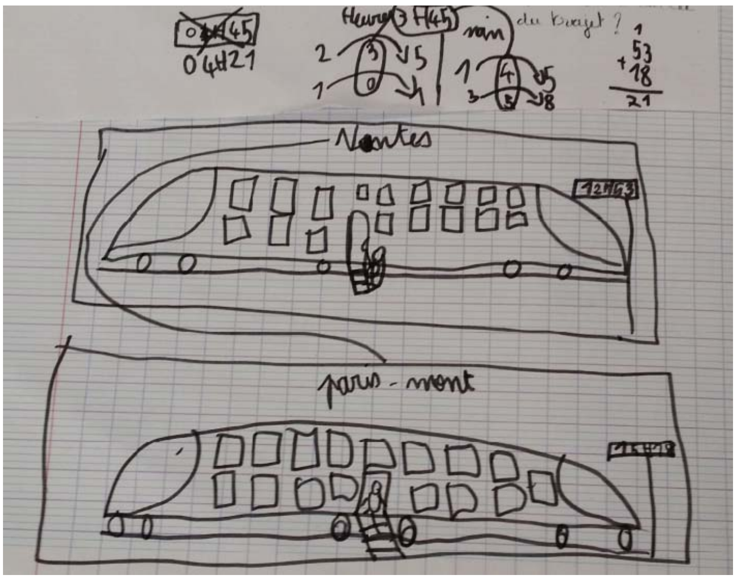


Figure 5. Réponse écrite de l'élève D de CM1 au problème de durée

En quoi pourrait consister une figuration dans notre cas ? La dernière production (Figure 5) présente plusieurs erreurs. En particulier l'écart entre 53 et 18 est calculé séparément entre unités et dizaines ce qui amène une erreur alors que la même technique amène au bon résultat pour le calcul sur les heures. L'élève D calcule l'écart entre 1 et 5 d'une part et entre 3 et 8 d'autre part. Comme il cherche la distance entre les nombres, il calcule 4 d'une part et 5 de l'autre, ce qui lui donne 45. Au cours de la mise en commun, le risque, en partant des travaux des élèves, est de travailler différentes notions, ou de se perdre dans des considérations sans intérêt par rapport à l'objectif d'apprentissage (ici le dessin). En faisant une figuration, il devient possible de concentrer l'attention sur une question seulement, celle qui permet de travailler le savoir visé pour l'apprentissage. Il est aussi possible d'ajouter des éléments qui ne sont pas apparus dans les productions écrites mais qui ont été évoqués à l'oral. Ici par exemple, les élèves ont demandé à l'enseignante s'ils pouvaient utiliser l'horloge pour se représenter le problème, les écrits n'en gardent pas trace.

On peut alors proposer aux élèves différentes représentations symboliques du problème et donner la solution (voir annexe 1). La question posée aux élèves est alors non plus de résoudre le problème mais d'expliquer comment on peut trouver cette réponse. Le fait de proposer différents schémas a pour objectif de faire parler les élèves autour des représentations symboliques et par la comparaison de ces représentations, d'interroger sur les automatismes qui peuvent être à inhiber.

Dans l'idée de choisir pour soi la représentation qui semble la plus efficace, il est aussi important de signifier pourquoi cette représentation peut être différente d'un élève à l'autre.

Une autre pratique peut consister à donner une « astuce » comme celle donnée en annexe 2 trouvée sur l'internet. On peut cependant s'interroger sur la nature des connaissances construites par les élèves avec ce type de support. En quoi la technique apporte-t-elle des connaissances sur les objets mathématiques ? Le discours autour de cette technique évoque-t-il une théorie mathématique quelconque ?

On peut encore choisir de proposer un texte de savoir comme celui proposé par Cap Maths des éditions Hatier (voir annexe 3). Plusieurs procédures sont expliquées sur des exemples. Cependant, la difficulté pour l'élève est de savoir quand il doit choisir telle ou telle procédure. C'est pourquoi il est important que le texte de savoir garde une trace de ces nécessités, ce qui n'est pas le cas dans cet extrait, même si les différentes représentations des durées sont proposées.

Exemple 2 : un problème de réinvestissement

Concernant les problèmes numériques plus classiques, la question est souvent de justifier la validité d'un résultat ou d'une procédure. Les figurations peuvent avoir pour but d'amener les élèves à justifier les liens entre ces procédures et les nécessités associées à une classe de problèmes identifiée.

Prenons l'exemple d'un problème posé en classe de CE1. Il s'agit d'un problème multiplicatif proposé en janvier à une période où les élèves n'ont pas automatisé la technique de la multiplication.

Les différentes productions présentées dans l'exemple précédent montrent que les élèves utilisent des symboles qui ne sont pas toujours conventionnels (par exemple, la flèche courbée pour indiquer les durées qui est proche de la flèche fonctionnelle). En effet, suivant le niveau de scolarité, les symboles désignant certains concepts, certaines notions ou même certaines opérations, ne sont pas enseignés. On peut s'interroger sur ce manque d'outils symboliques puisque nous avons vu que le passage par les symboles est indispensable pour lier le monde des mathématiques « pratiques » à celui des mathématiques formelles. Il s'agit donc de donner ou de permettre aux élèves d'inventer un registre sémiotique permettant de décrire puis d'opérer sur les objets mathématiques rencontrés.

A partir des procédures présentées en annexe 4, on peut imaginer la mise en commun sous forme de débat ou de discussion collective d'une procédure, amenant à proposer des alternatives. Pourtant l'important n'est pas que les élèves sachent quelle est la procédure la plus efficace mais qu'ils sachent choisir celle qui est efficiente pour eux. Pour cela la validation du résultat doit permettre aux élèves de se concentrer sur les raisons. Si on ne veut pas disperser l'attention, la figuration éliminera par exemple les erreurs de calcul liées à la technique, pour se focaliser sur la manière dont le problème est posé.

Ainsi on peut proposer aux élèves de discuter des productions suivantes :

Solution 1	Solution 2	Solution 3	Solution 4	Solution 5
$6 \times 3 = 18$ $10 \times 3 = 30$ $20 \times 3 = 60$ $60 + 18 = 78$	$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 26 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 78 \end{array}$	⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗	$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 26 \\ +\ 26 \\ +\ 26 \\ \hline 78 \end{array}$	$26 \times 3 = 78$

La consigne peut alors être d'expliquer les procédures, de repérer ce qui est semblable, de justifier pourquoi toutes ces solutions sont valides, de choisir celle qui semble la plus efficace et de justifier, de critiquer (dans l'idée d'une critique positive)… L'important est de permettre aux élèves d'échanger oralement mais aussi de produire un écrit autour de cette figuration pour voir comment ils formulent les nécessités afin de reprendre ces formulations dans le texte de savoir. C'est aussi l'occasion de voir que la solution 3 n'est pas moins bonne que d'autres pour peu qu'elle permette de trouver la bonne solution et pour cela il faut savoir compter de trois en trois.

Une étape suivante peut justement consister à lister ce qu'il faut savoir pour utiliser telle ou telle procédure (connaître ses tables, la technique de la multiplication posée, la commutativité de la multiplication, des faits mathématiques comme 3 × 25 = 75, compter de 3 en 3 etc.) On peut alors montrer aux élèves que ce sont les connaissances de l'élève qui orientent son travail et donc que les erreurs sont plus souvent liées à une connaissance trop présente plutôt qu'à un manque de connaissances.

Exemple 3 : un problème pour chercher

Prenons un autre problème que je vais simplifier en disant qu'à partir d'un tableau qui met en correspondance la pluviométrie lue sur un site météorologique et la hauteur d'eau dans le pluviomètre de M.Legoff, la question est de savoir si pour une pluviométrie prévue le 21 mars de 9L/m², la hauteur d'eau dans le pluviomètre dépassera 130mm, hauteur à laquelle la cave de M.Legoff risque d'être inondée. Ce problème est analysé dans un article de la revue Repères Irem (Grau, 2017b).

Les élèves de 6ème sont par groupes et produisent des écrits. Examinons un exemple de production :

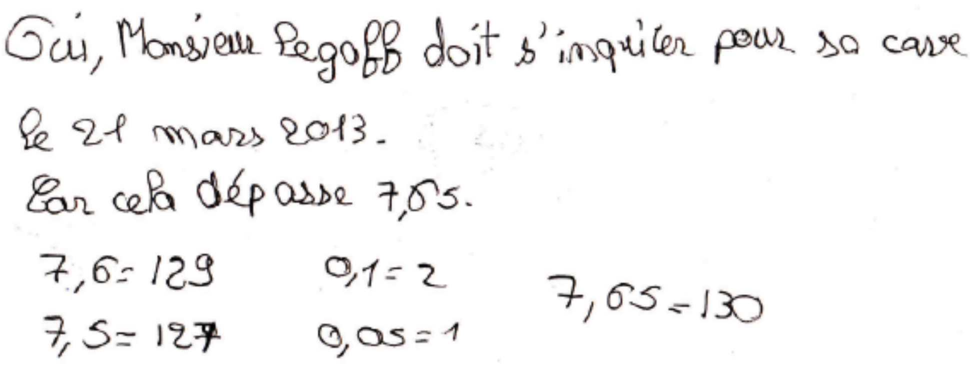


Figure 6. Réponse écrite du groupe E de 6ème au problème du pluviomètre

On remarque que les élèves utilisent ici le concept d'affinité sans avoir les outils pour l'expliquer. Ils associent à une grandeur x une grandeur y en écrivant $x = y$ (7,6=129 et 7,5=127) mais à côté, ils associent à une variation de x, la variation correspondante de y (0,1=2). Implicitement ils supposent que les variations sont proportionnelles (0,05=1), ce qui revient à faire une interpolation linéaire sur un intervalle pour conclure que 7,65=130.

Cet exemple n'est pas isolé et il atteste que les élèves peuvent utiliser des concepts outils sans avoir le formalisme pour les décrire ou les généraliser et ce très tôt dans la scolarité.

Par contre, certains automatismes, pour résoudre les problèmes de proportionnalité, comme par exemple par la technique du produit en croix, amènent les élèves à considérer que tous les problèmes présentés en tableaux ou mettant en jeu la covariation de deux grandeurs sont des problèmes de proportionnalité et à utiliser les techniques associées sans interroger leur pertinence.

IV - CONCLUSION

Le travail sur les figurations peut être l'occasion de questionner les symboles et de lever un peu le voile sur les automatismes, sur les indices qui appellent des schèmes d'action, sur les savoirs et compétences que mobilisent les élèves et qui peuvent être des obstacles à l'ouverture de nouveaux possibles. C'est l'occasion de montrer que, ne pas savoir résoudre un problème relève plus souvent d'un savoir qui entrave que d'un manque de savoir.

L'étayage doit permettre à chaque élève de résoudre le problème ou un problème similaire, de formaliser les caractéristiques des situations travaillées.

Pour l'enseignant, les figurations permettent d'orienter le travail autour des savoirs visés en prenant en compte les représentations des élèves et en faisant le choix des aspects qui ne seront pas pris en compte dans la suite du travail. Elles permettent d'introduire ou de mettre en commun des outils sémiotiques permettant d'opérer sur les objets mathématiques.

Bien sûr, un tel travail ne peut pas se faire systématiquement pour chaque notion, il peut être entrepris sur un temps long, régulièrement sur chaque période, pour des notions particulièrement difficiles car mobilisant différents cadres ou registres de représentations sémiotiques.

V - BIBLIOGRAPHIE

ASTOLFI, J.-P. (1993) Placer les élèves en « situations-problèmes » ? INRP. Paris.

CHARNAY, R. (1992) Problème ouvert, problème pour chercher. Grand N, (51), 77-83.

DOUADY, R. (1986) Jeu de cadres et dialectique outil/objet. Recherches en Didactique des Mathématiques, (7/2), 5-32.

DUVAL, R. (2006) La conversion des représentations : un des deux processus fondamental de la pensée. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

FABRE, M. (2011) Eduquer pour un monde problématique : la carte et la boussole. Paris: PUF.

GRAU, S. (2017a) Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines. Mémoire de doctorat en Sciences de l'Education, Laboratoire du CREN, Université de Nantes.

GRAU, S. (2017b). Modélisation : le cas des fonctions affines. Repères IREM, (108), 41-62.

HERSANT, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. Recherches en Didactique des Mathématiques, 34(1), 9-31.

LEGENDRE, M.-F. (2006). L'épistémologie de Piaget. Consulté le 06/09/2017, à l'adresse http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=323&IDMODULE=72 - s02

ORANGE, C. (2012). Enseigner les sciences : Problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe (Première Édition). Bruxelles: De Boeck.

PIAGET, J., & GARCIA, R. (1983). Psychogenèse et histoire des sciences. Paris: Flammarion.

ROBERT, A., & ROGALSKI, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de classe. Petit x, (60), 6-25.

TALL, D. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. Annales de didactique de Strasbourg, (11), 195-215.

ANNEXE 1 : EXEMPLE DE FIGURATIONS POUR L'EXEMPLE 1

Voici quatre représentations du problème. La solution est 2 heures et 25 minutes.
Choisis le schéma qui te semble le plus efficace pour trouver la solution.
Explique ton choix.

Schéma 1

Schéma 2

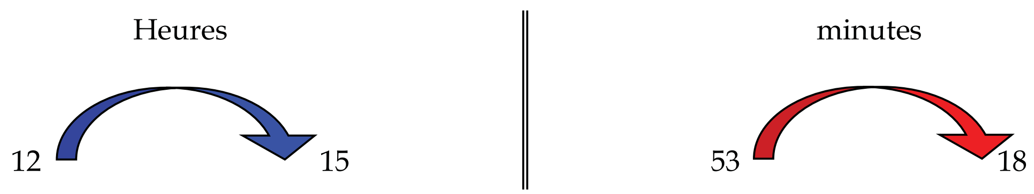


Schéma 3

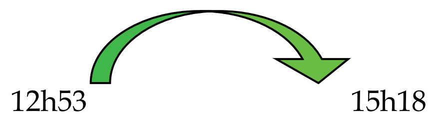
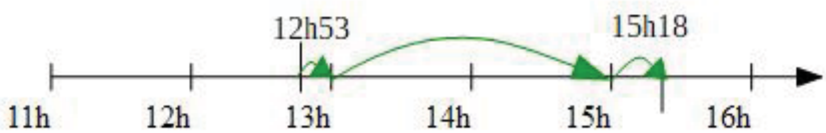
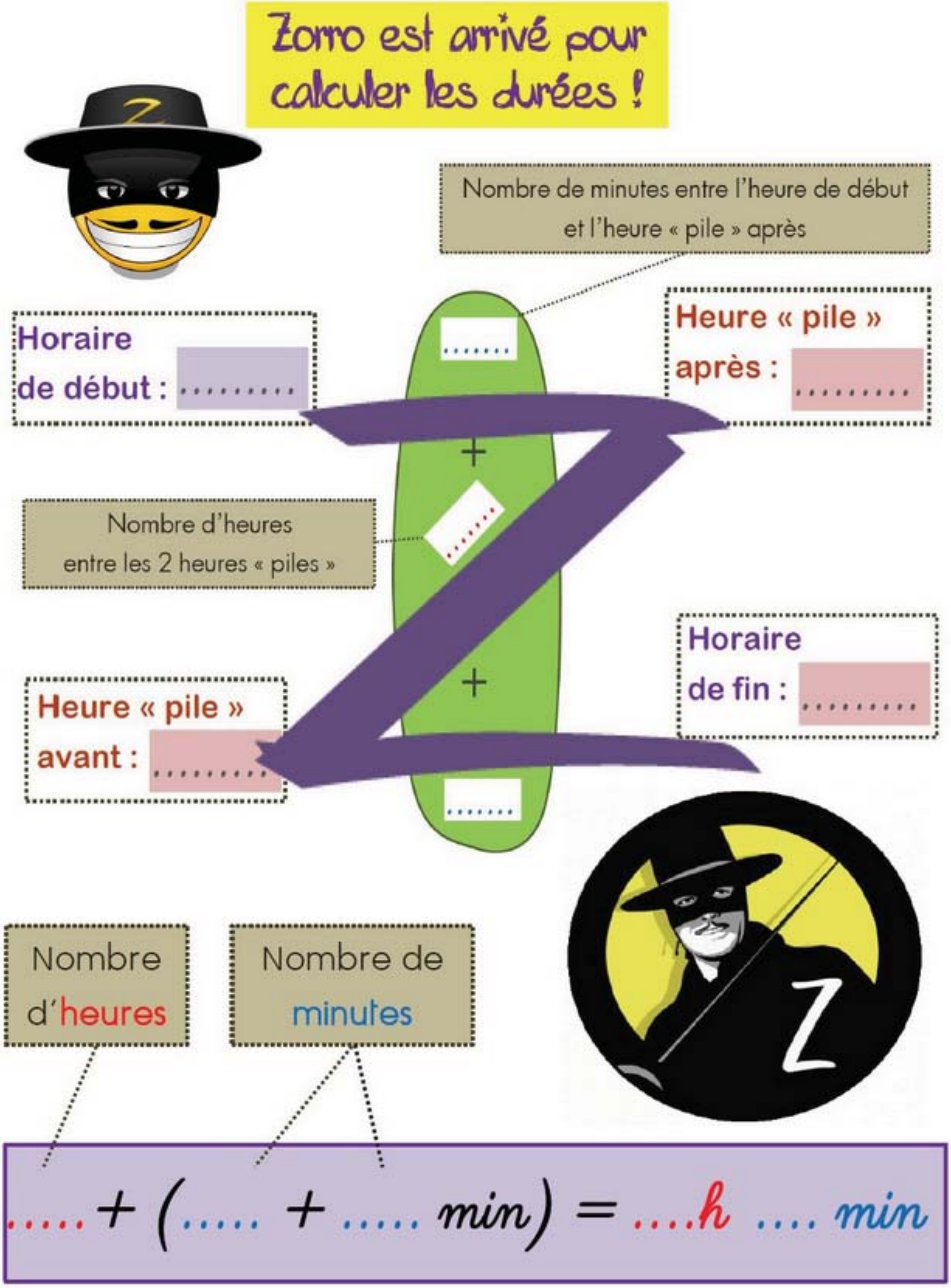


Schéma 4



ANNEXE 2 : EXEMPLE DE FCHE METHODE SUR L'INTERNET

http://mamaitressedecm1.fr/?p=60



ANNEXE 3 : EXEMPLE DANS UN MANUEL

Cap Maths Cycle 3 CM1 CM2 Editions Hatier 2017

– Tu peux t'aider d'une horloge ou d'une ligne du temps en t'appuyant sur des nombres ronds.

EXEMPLE : de 8 h 34 à 10 h 12,

$\boxed{\text{8 h 34}} \xrightarrow{\text{Il s'écoule 26 min}} \boxed{\text{9 h}} \xrightarrow{\text{Il s'écoule 1 h}} \boxed{\text{10 h}} \xrightarrow{\text{Il s'écoule 12 min}} \boxed{\text{10 h 12}}$

26 min + 1 h + 12 min = 1 h 38 min

Entre 8 h 34 et 10 h 12, il s'écoule **1 heure 38 minutes.**

– Tu peux utiliser les équivalences entre unités.

EXEMPLE 1 : Quelle est la durée totale de deux événements successifs de 40 min 25 s et de 35 min 45 s ?

40 min 25 s + 35 min 45 s

40 min + 35 min + 25 s + 45 s

75 min + 70 s

76 min + 10 s

= 60 min + 16 min + 10 s

La durée totale est de **1 h 16 min 10 s.**

EXEMPLE 2 : pour trouver la différence entre 40 min 15 s et 35 min 25 s :

→ Tu peux transformer 1 minute en 60 secondes.

40 min = 39 min 60 s, donc 40 min 15 s = 39 min 75 s,

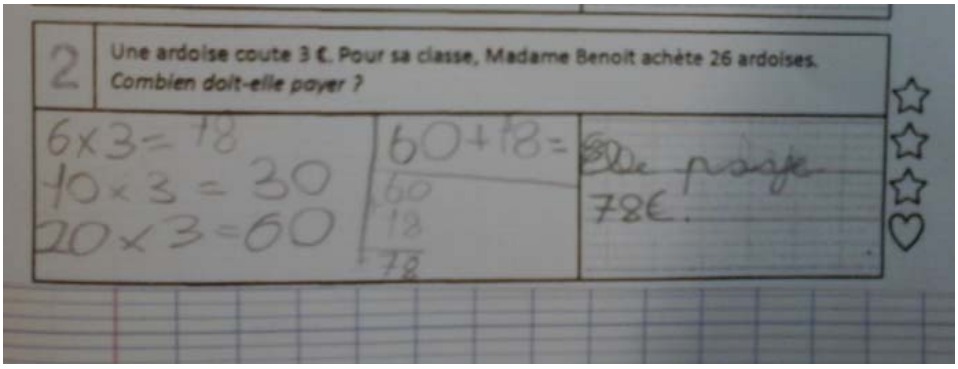
39 min 75 s – 35 min 25 s = 4 min 50 s.

→ Tu peux aussi faire un schéma :

$\boxed{\text{35 min 25 s}} \xrightarrow[\text{Il s'écoule 35 s}]{} \boxed{\text{36 min}} \xrightarrow[\text{Il s'écoule 4 min}]{} \boxed{\text{40 min}} \xrightarrow[\text{Il s'écoule 15 s}]{} \boxed{\text{40 min 15 s}}$

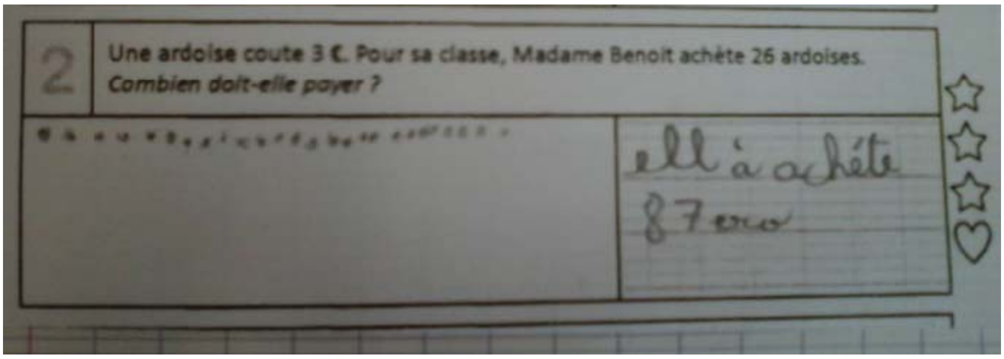
Donc la différence est de **4 min 50 s.**

ANNEXE 4 : PRODUCTIONS D’ELEVES POUR L’EXEMPLE 2



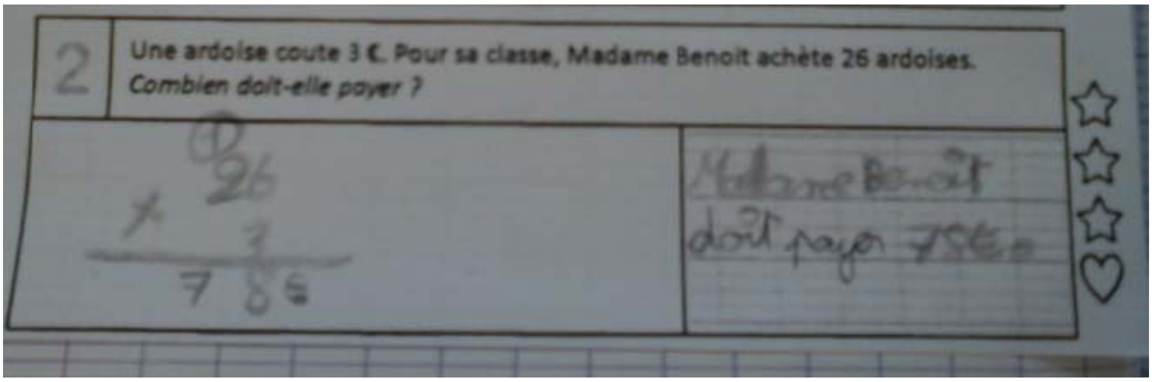
2 Une ardoise coute 3 €. Pour sa classe, Madame Benoit achète 26 ardoises.
Combien doit-elle payer ?

6×3=18
10×3=30
20×3=60
60+18=
60
18
78
Elle paye 78€.



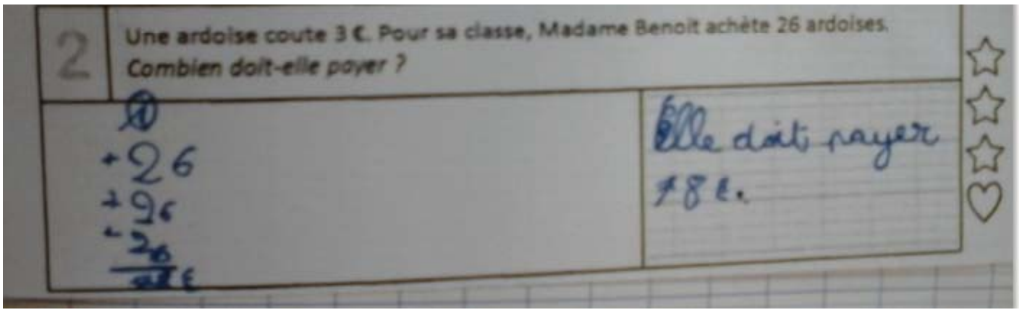
2 Une ardoise coute 3 €. Pour sa classe, Madame Benoit achète 26 ardoises.
Combien doit-elle payer ?

ell à achéte 87 euro



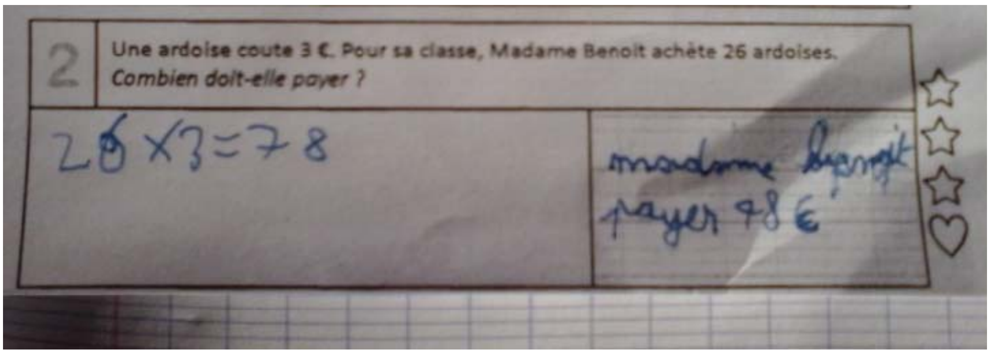
2 Une ardoise coute 3 €. Pour sa classe, Madame Benoit achète 26 ardoises.
Combien doit-elle payer ?

①
26
× 3
78€
Madame Benoit doit payer 78€.



2 Une ardoise coute 3 €. Pour sa classe, Madame Benoit achète 26 ardoises.
Combien doit-elle payer ?

①
+26
+26
+26
78€
Elle doit payer 78 €.



2 Une ardoise coute 3 €. Pour sa classe, Madame Benoit achète 26 ardoises.
Combien doit-elle payer ?

26×3=78
madame benoit payer 78 €