SITUATIONS, INTERPRÉTATION, STRATÉGIES ET CONCEPTUALISATION. LE CAS DES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES

Rémi BRISSIAUD
MC honoraire de psychologie cognitive
Équipe CRAC, laboratoire Paragraphe, EA 349, Université Paris 8
remi.brissiaud@univ-paris8.fr

Résumé
Les recherches récentes concernant la résolution de problèmes arithmétiques n'ont que peu influé le contenu des nouveaux programmes pour l'école. Pourtant, des progrès décisifs ont été effectués concernant le type de représentations mentales qui sont construites et, surtout, les travaux menés à l'université Paris 8 depuis le début des années 1990 permettent aujourd'hui de mieux comprendre comment le progrès en résolution de problèmes arithmétiques et le progrès dans la conceptualisation des opérations arithmétiques s'articulent. Ils permettent même de penser de manière raisonnée des progressions pédagogiques.

Aussi loin que l'on remonte dans le temps, les recherches en psychologie et en didactique, portant sur la résolution de problèmes à l'école, soulignent une discordance : alors que les élèves développent des compétences en calcul dans le contexte où ceux-ci se présentent d'emblée sous une forme symbolique spécialisée (écritures chiffrées, signes opératoires), ils échouent très souvent à utiliser ces connaissances en situation de résolution de problèmes énoncés verbalement (Verschaffel, Greer, De Corte, 2000). Dans ce texte[1], nous allons avancer un cadre théorique qui permet de mieux comprendre cette difficulté et de mieux l'aborder d'un point de vue didactique

I - LES DEUX FACES DE LA CONCEPTUALISATION DES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES

1 Une première face, la face « catégorisation » des situations : une même opération permet de traiter des situations très différentes

La compréhension d'une opération arithmétique se traduit par son usage dans des situations variées. La soustraction, par exemple, peut être utilisée dans la situation d'un autocar ayant 83 voyageurs et qui se vide de 27 d'entre eux (recherche d'un reste), que dans celle d'un autocar ayant 27 voyageurs qui se remplit jusqu'à en avoir 83 (recherche d'un complément). Le premier énoncé parle d'un retrait, le second d'un ajout, et, pourtant, la même opération arithmétique permet de répondre à la question posée.

Les deux situations ne doivent évidemment pas être mises sur le même plan : utiliser la soustraction pour chercher un reste, c'est en faire un usage banal. Dans le langage quotidien, en effet, les verbes « soustraire » et « retirer » sont synonymes et la propriété prioritairement attachée à une action est le résultat qu'elle produit : ici, un reste. En revanche, penser à utiliser la soustraction dans une situation de recherche d'un complément qui, elle, est décrite en parlant d'un ajout, ne relève plus d'un usage banal du retrait. Comprendre le fonctionnement de l'opération arithmétique soustraction, c'est aller au-delà de l'usage qui va de soi et, donc, c'est notamment comprendre qu'on peut l'utiliser pour résoudre un problème de complément. Remarquons enfin que, lorsque les enseignants évoquent les deux situations précédentes, qu'on nommera Reste et Complément dans la suite de ce texte, ils parlent souvent de deux « sens » différents de la soustraction, le mot « sens » pouvant aussi bien renvoyer à des significations

[1] Ce texte est proche de celui rédigé en hommage à Jean-François Richard, dans le Bulletin de Psychologie 2016/6, **546**, 423-431.

différentes de cette opération qu'à des directions différentes (retrait, ajout) de l'action décrite dans l'énoncé.

La même analyse vaut pour la division, les deux grandes classes de situations qu'elle permet de traiter sont celles dites respectivement de quotition : l'énoncé peut se reformuler sous la forme « En *a*, combien de fois *b* ? » et de partition : l'énoncé peut se reformuler sous la forme « *a*, c'est *b* fois combien ? ». Là encore, le mot « diviser » fonctionnant dans le langage quotidien comme synonyme de « partager », le sens banal est celui de la partition, notamment lorsque l'énoncé parle explicitement d'un partage dont on cherche le résultat : la valeur d'une part.

Et pour ce qui touche à la multiplication ? Cette opération, le plus fréquemment, permet de résoudre des problèmes dont l'énoncé demande de chercher le résultat d'un ajout itéré, et nous verrons dans la suite de ce texte que le « sens » banal de cette opération est, évidemment, celui du déroulement temporel de cet ajout.

Envisagée selon cette première face, la conceptualisation d'une opération arithmétique permet à un élève de réduire la diversité de ses comportements face à des situations décrites en langage naturel : il effectue une soustraction dans une situation qui est décrite en parlant d'un ajout, il effectue une multiplication quel que soit le déroulement temporel de l'ajout itéré, il effectue une division dans une situation qui est décrite très différemment d'un partage, par exemple.

2 Une seconde face, la face « stratégique » : une même opération se calcule selon des stratégies différentes

La principale façon d'organiser les différentes stratégies de calcul d'une soustraction quand cette opération se présente d'emblée sous forme symbolique : « $a - b = ?$ » consiste à distinguer deux grandes classes de stratégies (de manière récente, voir par exemple : Torbeyns, Ghesquière, Verschaffel, 2009) : celles par retraits successifs, afin de déterminer le reste, et celles par ajouts successifs, afin d'obtenir le complément au plus petit des deux nombres (il est fréquent de parler d'« addition indirecte » ou d'« addition à trou »). S'il s'agit de calculer 71 - 29, par exemple, il est possible d'effectuer successivement les retraits : 71 - 20 = 51, puis : 51 - 9 = 42. Mais il est également possible de calculer par ajouts successifs afin d'obtenir le complément : 29 + 1 = 30, puis : 30 + 41 = 71, la réponse, 42, étant la somme des nombres ajoutés. Peters et coll. (2013) ont montré que des élèves de CM1, CM2 et 6e choisissent de façon stratégique l'une ou l'autre de ces procédures en s'adaptant à la taille des nombres : ils calculent plus fréquemment 71 - 8 (retirer « peu ») par retraits successifs, et 71 - 68 (retirer « beaucoup ») par ajouts successifs, par exemple. Chez de jeunes adultes, cet usage stratégique a été mis en évidence avec des nombres à 3 chiffres (Torbeyns et coll., 2009).

La même analyse peut être menée sur la multiplication, opération dont la commutativité implique de manière évidente des stratégies différentes selon le calcul proposé : 14 × 2, par exemple, sera calculé comme 2 fois 14 (on considère que le multiplicateur est le nombre de droite) alors que 3 × 25 sera calculé comme 3 fois 25 (on considère que le multiplicateur est le nombre de gauche). Concernant la division, il n'y a pas de recherches équivalentes à celles portant sur la soustraction, mais on peut considérer que diviser par un petit nombre : 732 ÷ 3 par exemple, conduit plutôt à chercher : « 3 fois combien font 732 ? », ou à partager successivement les centaines, dizaines et unités, ce qui dans les deux cas correspond à une stratégie de partition, alors que diviser par un grand nombre : 732 ÷ 285 par exemple, conduit à chercher : « combien de fois 285 est-il contenu dans 732 ? », ce qui correspond à une stratégie de quotition. Les observations de Ambrose, Baek et Carpenter (2003), par exemple, sont cohérentes avec cela.

Envisagée selon cette seconde face, la conceptualisation d'une opération arithmétique permet à un élève de s'adapter aux caractéristiques numériques du calcul symbolique qui lui est proposé, et d'avoir un comportement flexible, stratégique (Baroody, Dowker, 2003).

3 Comment étudier le processus de conceptualisation des opérations arithmétiques

Étudier le processus de conceptualisation d'une opération donnée nécessite :

1° d'étudier comment les enfants apprennent à résoudre les problèmes correspondant aux différents sens de cette opération, lorsque ces problèmes sont énoncés en langage naturel, c'est-à-dire l'étude de la face catégorisation de l'opération ;

2° d'étudier la façon dont le signe opératoire et, plus généralement, le symbolisme arithmétique (les signes +, –, ×, ÷, =) est présenté aux élèves et la façon dont ceux-ci s'approprient la face stratégique de cette opération ; et

3° d'étudier la façon dont le progrès sur chacune des deux faces interagit avec celui sur l'autre face.

Cependant, en amont, un enfant ne peut pas comprendre une opération arithmétique s'il ne comprend pas les situations qui la fondent, c'est-à-dire, notamment, les situations de recherche du résultat d'un retrait et d'un complément pour la soustraction, la situation d'ajout réitéré pour la multiplication et les situations de partition et de quotition pour la division. Le point de départ de l'étude de la conceptualisation des opérations arithmétiques doit donc être l'étude de la compréhension de ces situations.

II - DIFFÉRENCIER LA COMPRÉHENSION DES SITUATIONS ET CELLE DE L'OPÉRATION : LE PARADIGME SI-PROBLÈMES *VS*. CC-PROBLÈMES

1 Le paradigme Si-problèmes versus CC-problèmes : présentation

Considérons le problème suivant : « *Luc a 27 euros dans sa tirelire. Il met d'autres euros dans sa tirelire. Maintenant il a 31 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il mis d'euros dans sa tirelire ?* » Du fait que 27 et 31 sont proches, pour trouver la solution il suffit de simuler mentalement l'ajout soit à l'aide d'un double-comptage : 27, 28 (1), 29 (2), 30 (3), 31 (4), soit en complétant l'addition dont le second terme est inconnu : 27 + ? = 31. Dans les deux cas, la solution s'obtient sans recourir à la soustraction. C'est un tel problème que nous appellerons un Si-problème (le préfixe Si renvoie à Situation ou à Simulation) : il suffit de simuler mentalement l'action décrite dans l'énoncé pour obtenir sa solution, ou encore : une stratégie basée sur la situation, ici une stratégie de complément, donne la solution numérique de façon économique. Ainsi, un Si-problème de recherche d'un complément est un pseudo-problème de soustraction parce qu'il n'y a nul besoin de faire usage de cette opération pour en obtenir la solution numérique. En revanche, la réussite à un tel Si-problème atteste de la compréhension de la situation telle qu'elle a été énoncée (cette compréhension peut évidemment être améliorée en variant la façon d'énoncer le problème : oral ou écrit, avec ou sans représentation imagée, etc.)

Considérons, en revanche, ce problème, dont l'énoncé utilise les mêmes mots : « *Marie a 4 euros dans sa tirelire. Elle met d'autres euros dans sa tirelire. Maintenant elle a 31 euros dans sa tirelire. Combien a-t-elle mis d'euros dans sa tirelire ?* » Pour trouver la solution, la simulation mentale de l'ajout décrit dans l'énoncé est cognitivement coûteuse. L'enfant qui chercherait à résoudre ce problème par un double-comptage : 4, 5(1), 6(2), 7(3), 8(4)… jusqu'à 31(27) a peu de chance de mener à bien une telle procédure. Dans un tel cas, seul le calcul de la soustraction 31 - 4 permet d'obtenir la solution. C'est un tel problème que nous appellerons un CC-problème (le préfixe CC renvoie à Connaissances Conceptuelles) : la simulation mentale de l'action décrite dans l'énoncé ne permettant pas d'en obtenir la solution, la résolution de ce problème nécessite la mobilisation de Connaissances Conceptuelles : celles qui autorisent l'usage de la soustraction dans une situation qui parle d'un ajout[2].

Ainsi, alors que la réussite à un Si-problème atteste seulement de la compréhension de la situation, celle à un CC-problème atteste, à la fois, de la compréhension de la situation et de celle de l'opération.

[2] Dans Brissiaud (1994) et Brissiaud (2002), on parlait de « Concordance vs. Discordance entre la représentation initiale et l'économie du calcul », dans Brissiaud et Sander (2010) les CC-problèmes sont appelés MA-problèmes où MA signifie Mental Arithmetical.

2 Le paradigme Si-problèmes *versus* CC-problèmes : ses fondements empiriques

L'étude la plus complète utilisant ce paradigme est une étude longitudinale des taux de réussite en début et en fin de CE1 des versions Si et CC de cinq catégories de problèmes : recherche d'un reste, d'un complément, recherche du résultat d'un ajout réitéré, résolution d'un problème de partition et d'un problème de quotition. Par ailleurs, les mêmes problèmes ont été proposés à des élèves entrant au CE2 en leur demandant d'expliciter la procédure qu'ils ont utilisée (Brissiaud, Sander, 2010). Voici des exemples de problèmes proposés :

— Si-Reste : *Nicolas va en récréation avec ses 41 billes. Pendant la récréation, il perd 3 billes. Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant ?*

— CC-Reste : *Nicolas va en récréation avec ses 41 billes. Pendant la récréation, il perd 38 billes. Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant ?*

— Si-Addition Itérée : *Combien y a-t-il de bonbons en tout dans 4 paquets de 10 bonbons ?*

— CC-Addition Itérée : *Combien y a-t-il de bonbons en tout dans 10 paquets de 4 bonbons ?*

— Si-Partition : *Madame Durand a 30 images. Elle partage ces images entre 3 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien d'images chaque enfant va-t-il recevoir ?*

— CC-Partition : *Monsieur Dupont a 30 images. Il partage ces images entre 10 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien d'images chaque enfant va-t-il recevoir ?*

— Si-Quotition : *Madame Lebris a 40 gâteaux. Elle fait des paquets de 10 gâteaux. Combien de paquets peut-elle faire ?*

— CC-Quotition : *Monsieur Dulac a 40 gâteaux. Il fait des paquets de 4 gâteaux. Combien de paquets peut-il faire ?*

Dans chacune des trois études (début CE1, fin CE1, début CE2), les Si-problèmes sont mieux réussis que les CC-problèmes, et ceci alors que, parfois, les nombres utilisés par les CC-problèmes sont plus grands. Ainsi, à l'entrée au CE1, le taux de réussite au problème de type Si-Complément qui utilise les nombres 27 et 31 (solution 4) est de 0,49 alors qu'il n'est que de 0,22 au problème CC-Complément qui utilise les nombres 4 et 31 (solution 27). De plus, les CC-problèmes, contrairement aux Si-problèmes, nécessitent l'usage de l'opération arithmétique. Ainsi, au début du CE2, 95 % des élèves qui explicitent la stratégie qu'ils ont utilisée pour résoudre le problème du type Si-Complément énoncé avec 27 et 31, disent qu'ils ont calculé 27 + 4 = 31 alors qu'avec le problème CC-Complément énoncé avec 4 et 31, ils ne sont que 30 % à dire qu'ils ont calculé 4 + 27 = 31. Très majoritairement, 60 % des élèves disent avoir calculé la soustraction 31 – 27 = 4. Pour le problème du type Si-Addition itérée (3 groupes de 10), 60 % des élèves disent avoir calculé 10 + 10 + 10 = 30 alors qu'avec le problème CC-Addition itérée (10 groupes de 3), ils ne sont que 22 % à dire qu'ils ont calculé : 3 + 3 +… + 3 = 30. Très majoritairement, 67 % des élèves disent avoir fait usage de la multiplication.

L'ensemble des résultats de cette étude sont donc cohérents avec l'hypothèse faite : les Si-problèmes nécessitent seulement de comprendre la situation, ils ne nécessitent pas de faire usage de l'opération, alors que les CC-problèmes nécessitent les deux. D'autres recherches dont les résultats sont également cohérents avec cette hypothèse, avaient précédé celle-ci. L'étude y concernait une seule des opérations précédentes : la soustraction, dans Brissiaud (1994) et la multiplication, dans Schliemann et coll. (1998). Signalons également une analyse et des résultats qui montrent que la compréhension des fractions peut être étudiée à l'aide d'un tel paradigme (Brissiaud, 2002).

Par ailleurs, lorsqu'un problème de soustraction est d'emblée donné sous forme symbolique : $a - b = ?$, cette égalité est interprétée comme une forme sténographique de l'énoncé d'un problème de recherche du résultat d'un retrait, c'est-à-dire selon le sens banal de la soustraction (Sander, 2008). Ainsi, une égalité où l'on retire peu est interprétée comme un problème de type Si-Reste et une égalité où l'on retire beaucoup comme un problème de type CC-Reste. Par conséquent, tous les résultats étayant l'existence d'une face stratégique au calcul d'une soustraction (ceux de l'équipe de Lieven Verschaffel, notamment) peuvent être confrontés à ceux étayant le paradigme Si-problèmes vs. CC-Problèmes ; or, les stratégies observées par le premier courant de recherche sont très exactement celles qui sont prévues par le second.

Enfin, à un niveau plus général, Brissiaud et Sander (2010) ont utilisé ce paradigme afin d'étayer un modèle théorique de la résolution de problèmes à énoncé verbal : le modèle « Situation Strategy First ». La thèse avancée est la suivante : de nombreux travaux ont montré qu'avant toute scolarisation les enfants peuvent résoudre les problèmes arithmétiques envisagés ici en simulant l'action décrite avec du matériel ; selon le modèle « Situation Strategy First », un enfant qui a appris les opérations arithmétiques à l'école continue à avoir une représentation initiale du problème qui active une procédure basée sur la situation. Or, ce point de vue rejoint de nombreux travaux, dont ceux de Thevenot (2010), selon lesquels la représentation initiale d'un problème serait plutôt de type « modèle mental » que de type « schéma » (pour une revue de question, voir Thevenot, Barrouillet, 2015).

3 Des progressions didactiques fondées sur le paradigme Si-problèmes versus CC-problèmes

Un enfant ne peut pas comprendre une opération arithmétique s'il ne comprend pas les situations qui la fondent, avons-nous dit. Or, au début du CE1, le taux de réussite à un problème du type Si-Addition Itérée dont l'énoncé parle de 3 groupes de 10 est de 0,47 seulement. Ce type de problème ne nécessite aucune connaissance sur la multiplication et pourtant il est assez mal réussi en début de CE1. Il s'ensuit qu'à l'école, dans un premier temps, avant même d'amorcer l'étude d'une opération arithmétique, il est judicieux de proposer des Si-problèmes aux élèves afin d'améliorer leur compréhension de la situation qui fonde cette opération. Concernant la multiplication, donc, il est judicieux de proposer de nombreux problèmes du type Si-Addition Itérée, avec des contextes variés :

— *Combien y a-t-il d'enfants en tout dans 4 équipes de 10 enfants ?*

— *Combien y a-t-il de fleurs en tout dans 2 bouquets de 7 fleurs ?*

— *Combien y a-t-il de gâteaux en tout dans 3 paquets de 25 gâteaux ?*

— *On met bout à bout 3 règles de 50 cm. Quelle est la longueur totale ?*

Dans un deuxième temps, il convient d'enseigner l'opération, d'introduire son signe, ses propriétés conceptuelles et les diverses stratégies de calcul (c'est-à-dire travailler la face stratégique). Concernant la multiplication, par exemple, il s'agit pour l'essentiel d'enseigner la commutativité de cette opération dans le contexte des écritures symboliques : pour calculer $a \times b$, on peut calculer indifféremment calculer « a fois b » ou « b fois a ».

Dans un troisième temps, il est judicieux de s'assurer que les élèves savent utiliser les propriétés conceptuelles de l'opération pour résoudre des CC-problèmes. Concernant la multiplication, lors de la phase précédente la commutativité a été travaillée, pour l'essentiel, dans le contexte des écritures symboliques, et le fait de proposer des problèmes du type CC-Addition Itérée permet de s'assurer que les élèves savent utiliser cette propriété conceptuelle dans des situations de résolution de problèmes énoncés en langage naturel :

— *Combien y a-t-il d'enfants en tout dans 10 équipes de 4 enfants ?*

— *Combien y a-t-il de fleurs en tout dans 7 bouquets de 2 fleurs ?*

— *Combien y a-t-il de gâteaux en tout dans 25 paquets de 3 gâteaux ?*

— *On met bout à bout 50 réglettes de 3 cm. Quelle est la longueur totale ?*

L'élève qui réussissait les Si-problèmes correspondants a les connaissances numériques nécessaires pour résoudre ces CC-problèmes puisque les deux sortes de problèmes mobilisent les mêmes connaissances numériques. Un éventuel échec ne peut donc provenir que d'un manque d'utilisation des connaissances conceptuelles qui ont été travaillées dans la phase précédente, auquel cas il conviendrait de retravailler la compréhension de ces connaissances conceptuelles.

Enfin, dans un quatrième temps, il convient d'enseigner des techniques opératoires (opération en ligne, opération posée) afin que les élèves puissent résoudre des problèmes donnés avec des valeurs numériques quelconques : les Si et les CC-problèmes ont en effet la caractéristique commune de pouvoir être résolus par un calcul mental simple, ce qui ne correspond pas au cas général.

L'intérêt d'une telle progression est la succession d'un temps, le premier, où les enfants apprennent à comprendre les situations, et d'un autre temps, le troisième, où ils apprennent à utiliser les connaissances conceptuelles des opérations dans des situations qui n'exigent pas plus de compétences numériques que celles que le premier temps exigeait. Afin de mieux mettre cet aspect en valeur, le deuxième temps, celui qui correspond à l'enseignement de la face stratégique, n'a pas encore été présenté de manière précise. C'est ce qui va être fait maintenant.

III - LES CC-PROBLÈMES : DES SITUATIONS PRIVILÉGIÉES POUR ENSEIGNER LA FACE STRATÉGIQUE DE LA CONCEPTUALISATION

Sur la quatrième page de couverture de la seconde édition (2005) du livre *Les activités mentales*, de Jean-François Richard, on lit : « *Le raisonnement et la résolution de problèmes reposent fondamentalement sur une interprétation de la situation et exigent souvent une réinterprétation pour arriver à une conclusion ou une solution* ». Nous allons voir que le contexte d'un CC-problème favorise un tel phénomène de réinterprétation et que cela permet d'enseigner l'opération, son signe, ses propriétés conceptuelles et les diverses stratégies de calcul de cette opération (c'est-à-dire sa face stratégique).

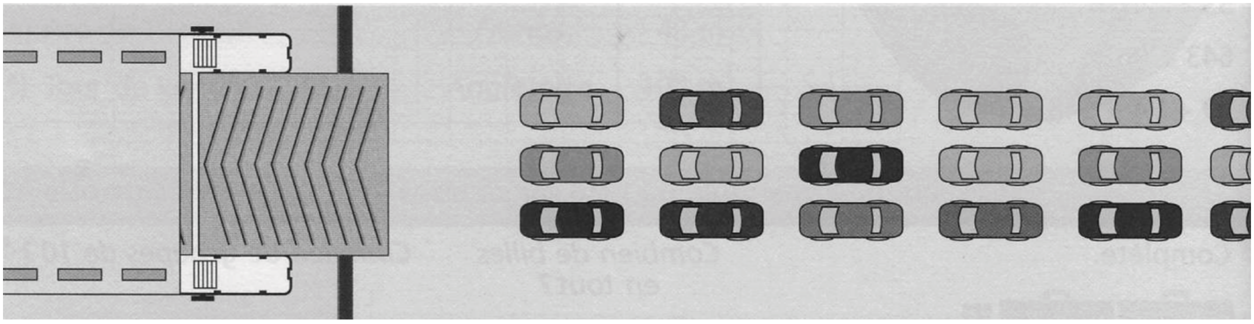
1 Un CC-problème « aménagé » pour favoriser une réinterprétation

Considérons ce problème de type CC-Addition Itérée, dont l'énoncé s'accompagne d'un schéma réaliste comme celui de la figure 1.

Des voitures vont monter 3 par 3 sur un bateau.

50 rangées de 3 voitures vont monter sur le bateau.

Combien y aura-t-il de voitures sur le bateau ?



Le calcul de 3 + 3 + ..., celui qui est induit par l'énoncé, ne menant pas à la solution numérique, les élèves sont invités à imaginer comment l'image se prolongerait vers la droite. Ce qui met à leur disposition une représentation spatiale de la collection organisée en colonnes (c'est celle de l'énoncé) mais aussi en lignes. Cette réinterprétation leur permet d'accéder à un autre mode d'énumération des unités : dans l'image prolongée, il y a 50 voitures en haut, 50 au milieu et 50 en bas. Grâce à l'organisation spatiale des données du problème, les élèves mobilisent donc une équivalence entre schèmes de parcours des unités d'une collection et c'est cette équivalence qui fonctionne comme preuve et confère un statut d'évidence à la solution.

C'est le moment d'introduire le signe "×" et les égalités 3 × 50 = 150 et 50 × 3 = 150. La plupart des pédagogues, lorsqu'ils introduisent le signe "×", associent l'écriture $a \times b$ au nombre de cases d'un quadrillage ayant a lignes et b colonnes parce que c'est un moyen simple d'enseigner la commutativité de cette opération : si $a \times b$ est le nombre de cases d'un tel quadrillage, comme on peut dénombrer les unités ligne par ligne ou colonne par colonne, l'égalité en nombres s'en déduit. Cependant, il est important que les enfants relient cette propriété au calcul d'une addition réitérée et non à la configuration elle-même. Le CC-problème précédent, aménagé sous cette forme, est un moyen de le faire.

De manière générale, les CC-problèmes ont cette propriété essentielle : chacun d'eux est associé à un Si-problème et, dès que les enfants réussissent celui-ci, on est sûr : 1° qu'ils comprennent la situation du CC-problème parce que c'est la même, et 2° qu'ils disposent des compétences numériques nécessaires à la résolution du CC-problème parce que ce sont les mêmes. Ainsi, ni la compréhension de la situation, ni les compétences numériques ne sont des obstacles et il suffit donc d'aménager l'énoncé du CC-problème afin de le transformer en une sorte d'« *insight problème* » pour que celui-ci soit à l'origine de la conceptualisation : d'une part il en fournit le mobile, d'autre part, en s'appuyant sur une équivalence entre différents schèmes de parcours des unités, la propriété conceptuelle visée peut émerger. La même analyse vaut pour la soustraction : là encore, via la résolution d'un CC-problème de recherche du résultat d'un retrait, on peut amener les enfants à mobiliser une équivalence entre schèmes de parcours qui les conduit à calculer une soustraction « en avançant » plutôt qu'« en reculant » (voir Brissiaud, 1994, 2002). Ils mettent ainsi en relation les deux « sens » de calcul d'une soustraction qui sont possibles.

2 Enseigner la face stratégique favorise-t-il le progrès sur la face catégorisation ?

La réponse est assurément positive concernant la multiplication. Ainsi, dans Brissiaud et Sander (2010), le taux de réussite aux problèmes de type CC-Addition Itérée était de 0,17 en début de CE1, avant tout enseignement de la multiplication et, donc, de sa commutativité. En fin de CE1, il était de 0,54 chez les mêmes élèves, et nous avons vu que l'étude à l'entrée du CE2 montre que ce score correspond à un usage de la multiplication. En revanche, on dispose de peu de recherches empiriques qui prouvent qu'enseigner la face stratégique d'une soustraction favorise le progrès sur la face catégorisation, du fait qu'il est beaucoup plus rare d'enseigner les deux grands types de stratégies de calcul d'une soustraction que d'enseigner la commutativité de la multiplication, ce que tous les enseignants font. On notera cependant que Fuson et Willis (1988) et Brissiaud (1994) obtiennent des résultats qui étayent l'hypothèse du rôle positif de l'enseignement des diverses stratégies de calcul d'une soustraction.

La rareté de ce type d'études s'explique également ainsi : pour mener des recherches sur cette question, il faut se situer dans un cadre théorique qui, comme celui qui a été développé dans ce texte, distingue de manière claire les deux faces de la conceptualisation des opérations arithmétiques. Quand ce n'est pas le cas, les chercheurs surestiment souvent les performances des élèves. Ainsi, Peltenburg et coll. (2012) montrent que même des élèves scolarisés dans l'enseignement spécialisé, utilisent souvent une stratégie de complément pour résoudre un problème qui, dans le cadre théorique présenté ici, est de type Si-Complément (avec les nombres 27 et 31, par exemple). Contrairement à Brissiaud (1994) et Brissiaud et Sander (2010), ils considèrent la résolution d'un tel problème comme le calcul d'une soustraction et, donc, comme un comportement de haut niveau. Or, c'est l'un des résultats les mieux établis en faveur du modèle *Situation Strategy First* : dans les problèmes de type Si-Complément, les élèves trouvent la solution numérique sans penser à la soustraction, il ne s'agit pas d'un comportement de haut niveau. La confusion entre les deux faces de la conceptualisation des opérations est ainsi un frein au progrès dans l'étude de cette question.

IV - UNE EXTENSION DU CADRE THÉORIQUE : LES CC-PROBLÈMES ASSOCIÉS À DEUX PROPRIÉTÉS CONCEPTUELLES

Nous sommes très loin d'avoir abordé ici l'ensemble des problèmes relevant d'une opération arithmétique donnée (Vergnaud & Durand, 1976). Considérons la catégorie des problèmes d'addition, par exemple. Ce problème : « *Paul a 39 billes, il en gagne 4, combien en a-t-il maintenant ?* » est de toute évidence un Si-problème alors que celui-ci : « *Paul a 4 billes, il en gagne 39, combien en a-t-il maintenant ?* » est un CC-problème dont la connaissance conceptuelle associée est la commutativité de l'addition : l'énoncé invite à calculer 4 + 39 alors que le calcul économique est 39 + 4. Mais il existe bien d'autres types de problèmes d'addition, celui-ci par exemple : « *Avant la récréation, Paul avait des billes. Pendant la récréation, il perd 39 billes. Maintenant il a 4 billes. Combien avait-il de billes avant la récréation ?* ».

Ce dernier problème, qui reste longtemps difficile à l'école primaire, est un CC-problème dont la résolution dépend de l'usage de deux propriétés conceptuelles : en utilisant la réversibilité de la soustraction et de l'addition, on est conduit au calcul de 4 + 39 (la quantité finale + la quantité perdue = la quantité initiale) mais il faut de plus utiliser la commutativité de l'addition pour être conduit au calcul de 39 + 4 qui, lui, donne immédiatement la solution numérique. Il existe donc des CC-problèmes « au carré », au sens où leur solution est quasi immédiate d'un point de vue numérique à la condition d'utiliser deux propriétés conceptuelles de l'opération.

De manière récente, Sander et Fort (2014) ont aménagé ce dernier énoncé de la manière suivante : « *Avant la récréation, Paul avait des billes vertes et des billes rouges. Pendant la récréation, il a perdu ses 39 billes vertes. Maintenant il lui reste ses 4 billes rouges. Combien avait-il de billes avant la récréation ?* ». Cet énoncé présente d'emblée la collection de billes comme scindée en deux parties, les vertes et les rouges, et ces parties correspondent respectivement aux billes perdues et conservées. La réussite se trouve favorisée chez des élèves de CE1 et de CE2. De plus, les auteurs montrent que la résolution de la version aménagée fait progresser les élèves dans la résolution de la première version. Une question se pose cependant : la résolution préliminaire de cette autre version obtenue en permutant 39 et 4 dans l'énoncé initial : « *Avant la récréation, Paul avait des billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Maintenant il a 39 billes. Combien avait-il de billes avant la récréation ?* », version dont la résolution nécessite l'usage d'une seule propriété conceptuelle, la réversibilité de la soustraction et de l'addition (39 + 4), n'aurait-elle pas conduit au même résultat, voire à un meilleur résultat ? Ce qui peut se formuler ainsi de manière plus générale : la présentation préalable du CC-problème associé à une seule propriété conceptuelle, ne favoriserait-elle pas encore mieux le progrès dans la résolution de celui qui est associé à deux propriétés conceptuelles ?

L'exemple de ce problème montre que l'étude des facteurs qui ont une influence sur la réussite (articulation de la représentation initiale de l'énoncé et de l'économie du calcul numérique, sémantique de l'énoncé, etc.) et celle de la façon dont les enseignants peuvent manipuler ces facteurs pour favoriser le progrès sont loin d'être achevées et que bien des études empiriques restent à mener.

V - CONCLUSION

Dans ce texte, en utilisant le paradigme Si-problèmes *vs.* CC-problèmes, nous avons proposé une approche didactique raisonnée de la conceptualisation des opérations arithmétiques, dont l'objectif est de mieux comprendre comment les compétences stratégiques que les enfants développent avec le langage spécialisé de l'arithmétique peuvent s'articuler avec un progrès dans l'interprétation et le traitement de situations décrites en langage naturel. Cette articulation s'effectue dans les deux directions. D'une part, le formalisme arithmétique trouve évidemment son origine dans l'interprétation et le traitement des situations qui fondent les opérations, et ces points doivent être travaillés avant tout enseignement des opérations arithmétiques, grâce à des Si-problèmes notamment. D'autre part, en travaillant la face stratégique de la conceptualisation, les propriétés conceptuelles émergent mieux grâce à l'usage du langage spécialisé de l'arithmétique, et l'on favorise ainsi une restructuration de la façon dont les enfants interprètent et traitent les différentes situations décrites en langage naturel (face « catégorisation des situations » du progrès).

VI - BIBLIOGRAPHIE

AMBROS R., BAEK J & CARPENTER T. (2003) Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms, in A. Baroody & A. Dowker, *The development of arithmetic concepts and skills*, p. 307-336. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum.

BAROODY A., DOWKER A. (2003) The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, 2003.

BRISSIAUD R. (1994) Teaching and development: Solving 'missing addend' problems using subtraction, *European Journal of Psychology of Education*, **9**, 343-365.

BRISSIAUD R. (2002) Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques, in J. Bideaud & H. Lehalle, *Traité des sciences cognitives – Le développement des activités numériques chez l'enfant*, 265-291, Paris : Hermes.

BRISSIAUD R. & SANDER E. (2010) Arithmetic word problem solving: A Situation Strategy First Framework, *Developmental Science*, **13**, 1, 92-107.

FUSON K. § WILLIS G. (1988) Substracting by counting up : More evidence, *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**, 5, 402-420.

PETERS G., DE SMEDT B., TORBEYNS J., GHESQUIÈRE P. & VERSCHAFFEL L (2013) Children's use of addition to solve two-digit subtraction problems, *British Journal of Psychology*, **104**, 4, 495-511.

PELTENBURG M., VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN M. & ROBITZSCH A. (2012) Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100. A Proof of the didactical potential of an ignored procedure, *Educational Studies in Mathematics*, **79**, 3, 351-370.

RICHARD J. F. (2005) *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*, Paris : Armand Colin, 2e éd.

SANDER E. (2008) Les connaissances naïves en mathématiques, in J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander & A. Tiberghien, *Les connaissances naïves*, 57-102, Paris : Armand Colin.

SANDER E. & FORT C. (2014) Semantic ambiguity as basis for promoting learning in the case of arithmetic problem solving. *Proceedings of ICAP 2014, 28th international congress of applied psychology*, 8-13 July, Paris.

SCHLIEMANN A., ARAUJO C., CASSUNDÉ M. A., MACEDO S. & NICÉAS L. (1998) Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers, *Journal for Research in Mathematics Education*, **29**, 4, 422-435.

THEVENOT C. (2010) Arithmetic word problem solving: Evidence for the construction of a mental model, *Acta Psychologica*, **133**, 90-95.

THEVENOT C. & BARROUILLET P. (2015) Arithmetic word problem solving and mental representations, in R. Kadosh & A. Dowker, *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*, Oxford : Oxford University Press, 158-179.

TORBEYNS J., GHESQUIÈRE P. & VERSCHAFFE L. (2009) Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit substraction, *Learning and Instruction*, **19**, 1, 1-12.

VERGNAUD G. & DURAND C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie*, **36**, pp. 28-43.

VERSCHAFFEL L., GREER G. & DE CORTE E. (2000) *Making Sense of Word Problems*, Lisse : Sweets & Zeitlinger.