

ROLE DES OSTENSIFS DANS LES TECHNIQUES DE TYPE DE TACHES RELEVANT DU CHAMP ADDITIF

Danielly KASPARY

Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG, France

UFMS – Univ. Fédérale du *Mato Grosso do Sul*, PPGEdumat, Campo Grande, MS, Brésil

kaspary.d@gmail.com

Marilena BITTAR

UFMS – Université Fédérale du *Mato Grosso do Sul*, PPGEdumat, Campo Grande, MS, Brésil

marilenabittar@gmail.com

Résumé

Une tâche qui relève du champ additif peut être traitée par différentes techniques. Nous employons ici tâche et technique au sens de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1999). Notre objectif est de comprendre comment ces techniques sont introduites et mises en place dans des institutions qui visent l'étude de l'opération d'addition. Pour cela, on considère comme élément fondamental de cette analyse les notions d'ostensif et de non-ostensif (Bosch, M. et Chevallard, Y. 1999). Les ostensifs constituent la partie visible de l'activité mathématique tandis que les non-ostensifs vivent dans le domaine des idées. Ainsi, la mise en œuvre d'une technique se traduit par la manipulation d'ostensifs contrôlés par des non ostensifs. Dans notre communication nous présenterons des résultats d'une recherche que nous avons menée sur le champ additif dans des manuels du système éducatif brésilien. Nous avons analysé et décrit l'évolution des techniques depuis les premières rencontres avec des types de tâches qui mobilisent la notion d'addition jusqu'à l'institutionnalisation de l'algorithme usuel. Pour l'analyse nous avons cherché à identifier des liens entre les techniques et les ostensifs. Nous mettrons ainsi en évidence l'importance des ostensifs et leurs différents rôles dans l'étude de cette évolution. En particulier, on étudiera l'usage de quelques ostensifs, comme signes, discours oral, doigts, droite numérique et matériel de numération.

I - LE CONTEXTE

Au Brésil, les manuels sont soumis périodiquement à une évaluation promue par l'État - Programme National de Manuels Scolaires - PNLD. Seules les collections approuvées peuvent être achetées par les écoles publiques du pays. On trouve donc des groupes de recherche qui s'intéressent à l'étude de ce que les manuels approuvés présentent comme une proposition pour l'enseignement considérée comme légitime par le gouvernement. La recherche du master de Kaspary (2014), sur laquelle ce texte est basé, fait partie de ce contexte et a visé à caractériser l'objet *champ additif* dans une collection de manuels approuvés par le PNLD. Les aspects mathématiques et didactiques y sont étudiés. La collection analysée concerne les cinq premières années d'école et a été la collection la plus acquise par les enseignants au cours du période 2010-2016.

L'analyse a été réalisée à partir du point de vue de l'organisation praxéologique, soutenue par la Théorie Anthropologique du Didactique - TAD (Chevallard, 1999). Les techniques proposées pour réaliser les tâches du champ additif ont été modélisées selon les *ostensifs* qu'ils mettent en action – un concept aussi développé dans cette approche. De plus, la *valence instrumentale* nous a permis de mieux comprendre le progrès et la réduction des ostensifs dans l'étude des opérations d'addition et de soustraction. Ces notions seront présentées par la suite.

II - QUELQUES NOTIONS THEORIQUES

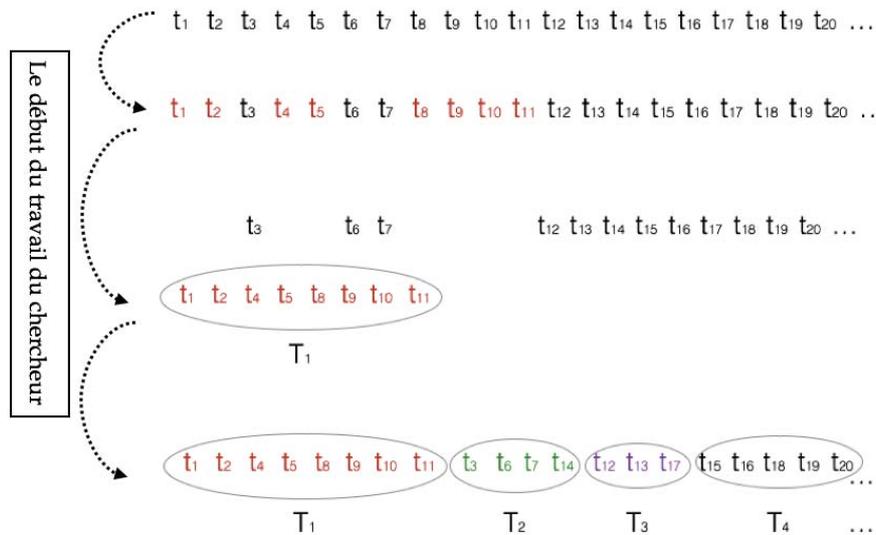
La connaissance, dans la perspective anthropologique proposée par la TAD, est le fruit d'une activité humaine. Dans notre travail, ce sont les activités mathématiques proposées par les manuels dans le

COMMUNICATION C23 – Recherche universitaire

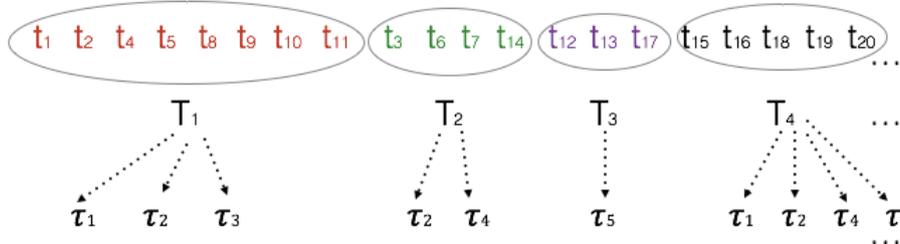
domaine du champ additif qui nous intéressent. Pour décrire et analyser l'activité humaine, et dans notre cas l'activité mathématique liée à l'objet « champ additif », cette approche nous fournit " des instruments clairement opératoires" (Bosch et Chevallard, 1999, p. 4), qui sont le résultat de la construction d'un modèle appelé *organisation praxéologique*.

Pour comprendre ce modèle on se tourne vers ses composantes : le type de tâche, la technique, la technologie et la théorie $[T, \tau, \theta, \Theta]$ - qui constituent l'anatomie de l'activité mathématique (Casabò, 2001). Dans ce texte on va se concentrer spécialement sur l'analyse des techniques.

Brièvement, les tâches sont des situations qui doivent/peuvent être accomplies dans une certaine institution¹. Les tâches t qui sont significativement proches sont regroupées, par *les mains* du chercheur, en *types de tâches* T .



Les types de tâches sont accomplis par des *techniques* τ . Connaître et identifier ces techniques fait partie aussi de la modélisation praxéologique.



Cependant, c'est important remarquer qu' « [...] en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en d'autres institutions. Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I , d'une illusion de « naturalité » des techniques institutionnelles dans I – faire ainsi, c'est naturel... –, par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s'ils y sont confrontés, qu'ils regarderont spontanément comme artificielles, et (donc) « contestables », « inacceptables », etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I , de véritables passions institutionnelles pour les techniques naturalisées dans l'institution. » (Chevallard, 1999, p. 03)

Chaque technique a une technologie θ qui à son tour a une théorie Θ – les éléments qui permettent de justifier et de produire les techniques mises en place dans une certaine institution.

En se concentrant surtout sur les techniques, on peut les regarder à travers les notions d'ostensifs et non-ostensifs, aussi discutés au sein de la théorie anthropologique du didactique :

¹ Chevallard (1992) considère les institutions comme, par exemple, « une salle de classe » ou « une famille », c'est-à-dire un lieu - pas seulement dans le sens physique - où une praxéologie peut vivre. Dans notre cas, nous considérons comme institution les "manuels didactiques".

« [...] la mise en œuvre d’une technique se traduit par une manipulation d’ostensifs réglée par des non-ostensifs. Les ostensifs constituent la partie perceptible de l’activité, c’est-à-dire ce qui, dans la réalisation de la tâche, se donne à voir, aussi bien à l’observateur qu’aux acteurs eux-mêmes. Dans l’analyse du travail mathématique, les éléments ostensifs font partie du réel empirique, accessible aux sens. Par contraste, la présence de tel ou tel non-ostensif dans une pratique déterminée ne peut être qu’induite ou supposée à partir des manipulations d’ostensifs institutionnellement associés. » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 11)

Dans ce sens, on prend les ostensifs comme *l’ingrédient primaire d’une technique*. Autrement dit, les ostensifs mobilisés pour réaliser les types de tâches caractérisent (et différencient) les techniques. Ce choix nous a permis de mieux comprendre l’évolution praxéologique analysée². Ci-dessous, on présentera certains passages dans les manuels qui mettent en évidence le rôle des ostensifs dans cette évolution. Pour cela, on fera un survol sur les cinq années (les cinq manuels) afin de montrer succinctement ce qui se passe dans chaque année et les changements d’une année à l’autre.



Avant de passer à l’analyse, il faut encore remarquer qu’un certain objet ostensif peut être considéré comme un bon *instrument*, ou pas, en fonction des activités dans lesquelles il est appliqué – ce qui peut permettre d’indiquer *la portée* de la technique – c’est ce qu’on appelle la *valence instrumentale* d’un ostensif (Bosch et Chevallard, 1999). Ce concept nous permettra de discuter de la potentialité / le rendement d’un ostensif particulier en tant qu’instrument dans une activité mathématique donnée et, par conséquent, nous permettra aussi de comprendre le changement de différents ostensifs au cours de l’évolution praxéologique.

III - L’ÉVOLUTION PRAXÉOLOGIQUE ET LES OSTENSIFS : L’EXEMPLE DU CHAMP ADDITIF A L’ÉCOLE PRIMAIRE

1^o année

D’abord, pour analyser cette évolution, on considère important de situer les premiers moments où l’objet d’étude apparaît dans le manuel. L’étude du champ additif commence à l’intérieur de l’étude du système de numération décimale, et pour cela on voit un héritage des idées et des techniques. Par exemple, un type de tâche commun dans l’étude du système de numération décimale est « indiquer la quantité d’éléments d’un ensemble ». On a quelques techniques pour répondre à ce type de tâche, comme « compter d’un en un avec les doigts » et cette idée est perpétuée et adaptée pour le type de tâche du champ additif « indiquer la quantité d’éléments de l’union d’un ou plusieurs ensembles ».

Ainsi, l’étude du champ additif émerge à travers des tâches de comptage. Les premiers ostensifs mobilisés pour les réaliser sont les dessins indiqués dans les énoncés des tâches :

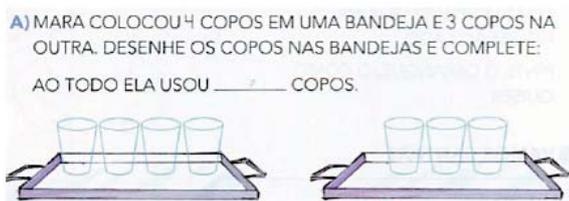


Figure 1. Dante, vol.1, p. 70

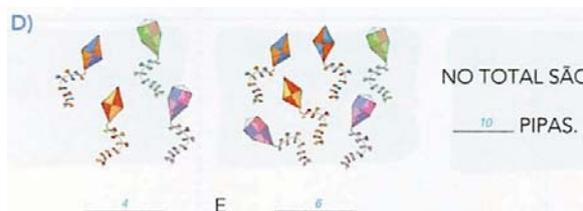


Figure 2. Dante, vol.1, p. 125

Dans certaines tâches, comme dans la figure 2, les ostensifs sont présentés en forme de dessin dans l’énoncé de la tâche et à travers eux l’élève doit découvrir la quantité totale en comptant d’un en un. Il y a

² Proposée dans une collection brésilienne de manuels scolaires destinés aux cinq premières années de l’école primaire par rapport au champ additif des nombres entiers.

COMMUNICATION C23 – Recherche universitaire

des situations aussi où l'élève est invité³ à dessiner les objets de la situation pour la représenter et alors découvrir la quantité totale de l'union de deux ensembles, comme dans la figure 14.

Mais, ces ostensifs sont rapidement remplacés et, alors, d'autres techniques sont développées. Des *signes* qui représentent chaque unité d'un certain objet commencent à être utilisés, ce qui donne une économie importante dans le travail employé pour réaliser les tâches.

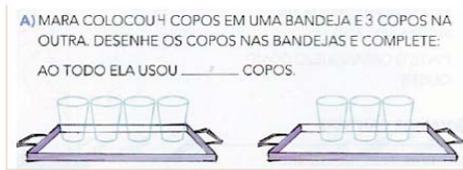


Figure 3 : Dante, vol.1, p. 70

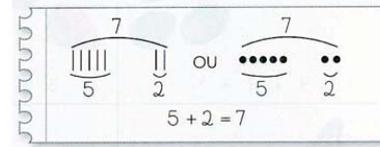


Figure 4 : Dante, vol.1, p. 132

Pendant toute la première année on voit la mobilisation d'une pluralité d'ostensifs, qui évoquent différentes idées du champ additif : la droite numérique, le matériel Cuisenaire, les doigts, le discours oral... Le travail est très axé sur la manipulation de ces ostensifs. Cependant, ils n'apparaissent qu'à certains moments ponctuels. Dans une première page la technique est présentée, ensuite il y a quelques pages pour pratiquer cette technique (et mettre en œuvre les ostensifs) et tout de suite ces techniques et ces ostensifs sont oubliés et n'apparaissent plus. Les signes sont l'unique exception de ce phénomène, ce qui indique une préférence, dans cet institution, pour l'utilisation de ces ostensifs.

2^o année

La praxéologie développée dans le premier volume est présentée à nouveau dans la deuxième année. Certaines techniques (par conséquence quelques ostensifs) sont retrouvées, mais avec quelques modifications. Par exemple, la droite numérique est remobilisée, mais à ce moment-là, on remarque l'absence de son début (figure 6). Ce changement vient d'une évolution par rapport à l'usage de cet ostensif, ce qui a été possible grâce à une *intériorisation* de la façon de comment cet ostensif « se comporte ».

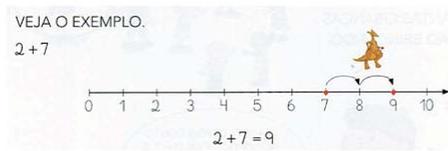


Figure 5 : Dante, vol.1, p. 134

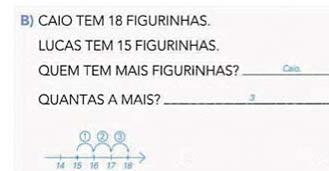


Figure 6 : Dante, vol.2, p. 34

Certaines tâches deviennent *routinières*, comme le calcul avec des nombres inférieurs à 10, ce qui permet un travail plus arithmétique et l'abandon des certains ostensifs. Dans l'exemple suivant on peut regarder ce phénomène :

³ Il s'agit d'un contrat didactique implicite, qu'on a su à travers de la réponse indiquée dans le manuel du professeur.

⁴ Une possible traduction : « Mara a mis quatre verres sur un plateau et trois verres sur un autre plateau. Quel le nombre total de verres qu'elle a utilisé ? ».



Figure 7 : Dante, vol.2, p. 50

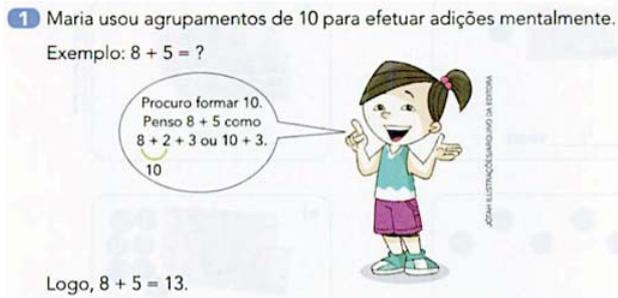


Figure 8. Dante, vol.2, p. 126

D’abord, dans la figure 7, il faut remarquer que l’usage des signes change en comparaison avec le volume 1 : auparavant, une fois les deux ensembles représentés avec les signes, l’élève devait compter la quantité totale, mais à ce moment-là la technique est adaptée et l’élève doit former des groupes de dix unités pour savoir le résultat. Déjà dans la figure 7 on remarque l’abstraction de ce qui est fait avec les ostensifs, et alors, le travail devient plus purement arithmétique – l’enfant parle « *Dans ma tête, je cherche à former dix ; je pense 8 plus 5 comme 8 plus 2 plus 3, ou simplement dix plus 3 ; ça donne alors 13* ». Cet exemple montre deux aspects importants : la réduction des ostensifs et le traitement indispensable donné aux ostensifs pour l’évolution des techniques.

Toujours dans la deuxième année, avec des nombres entiers plus grands, plusieurs ostensifs commencent à être abandonnés du fait de leur faible valence instrumentale. Par conséquent, il y a la nécessité de préparer de nouvelles techniques plus efficaces. Par exemple, les signes ne sont plus si efficaces, étant donné que représenter une grande quantité d’unités avec eux est, au moins, coûteux. Alors, d’autres ostensifs arrivent pour les remplacer, comme ce matériel de numération présenté ci-dessous. On voit que ce qui était fait avec les signes est maintenant fait avec ce matériel.

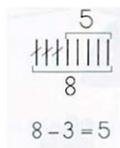


Figure 9 : Dante, vol.1, p. 147

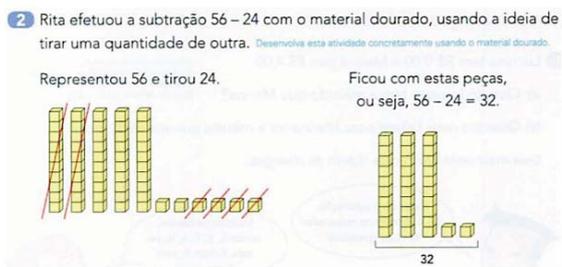


Figure 10 : Dante, vol.2, p. 221

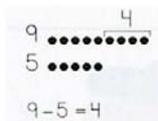


Figure 11 : Dante, vol.1, p. 147

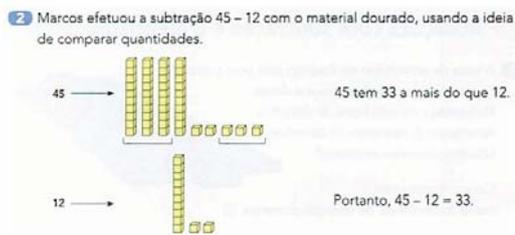


Figure 12 : Dante, vol.2, p. 223

COMMUNICATION C23 – Recherche universitaire

Dans ce même manuel, l'algorithmus usuel est déjà présenté, mais encore comme une façon de représenter le calcul réalisé et non effectivement comme une technique. D'ailleurs, il est généralement accompagné par d'autres ostensifs qui permettent en effet de réaliser les tâches proposées.

2 REPRESENTA AS ADIÇÕES COM DESENHOS E COM NÚMEROS, COMO NOS DOIS EXEMPLOS:

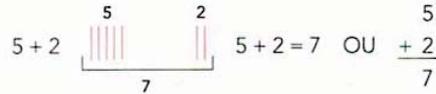


Figure 13. Dante, vol.2, p. 60

3º année

L'analyse du volume 3 met en évidence une proposition d'étude un peu plus abstraite ; on peut la repérer à partir des techniques qui évoquent diverses technologies découlant de la construction du système de numération décimale. La notion de groupement donne légitimité à l'usage de l'algorithmus usuel comme une technique. Dans cette étude quelques ostensifs vivent en second plan en raison des techniques qui mobilisent une arithmétique plus sophistiquée.

Pour mettre en évidence le rôle des ostensifs dans ce contexte, on analyse le passage suivant, où on peut voir trois façons de réaliser une tâche du champ additif. La première technique consiste à représenter et faire des groupements avec le matériel de numération ; la deuxième est l'algorithmus de la décomposition qui à son tour reprend l'idée de groupement par dix ; enfin, la troisième technique est l'algorithmus usuel avec la représentation des dizaines et unités, accompagné d'un discours qui vise à expliquer le fonctionnement de cette façon de réaliser la tâche. À la fin, l'algorithmus dans sa présentation usuelle est présenté.

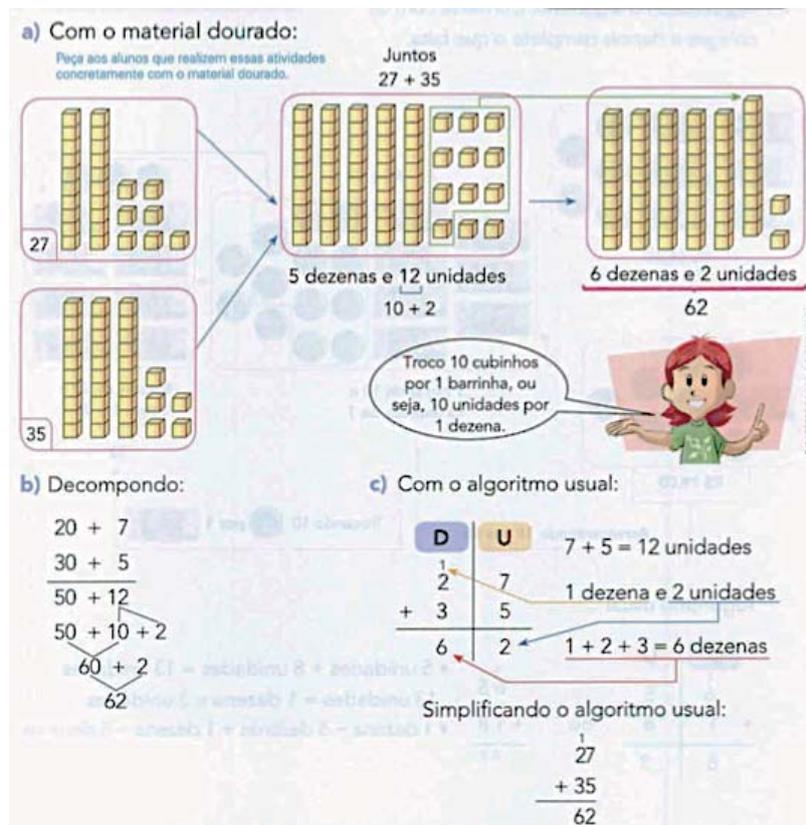
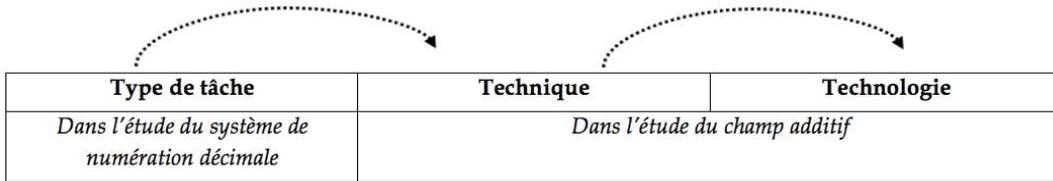


Figure 14. Dante, vol.3, p. 75

On note alors, que les éléments technologiques sont incorporés dans la praxéologie grâce à l'exploration de ces techniques et des ostensifs.

L’usage du matériel de numération et les changements entre dizaines et unités ont d’abord été des tâches pour l’étude du système de numération décimale. Lorsqu’on sait bien utiliser ce matériel et effectuer les échanges, il devient une technique pour des tâches du champ additif. Enfin il devient une technologie pour d’autres techniques, comme on vient de le voir dans la figure 14. Cela montre l’évolution d’usage de cet ostensif dans l’institution en fonction de leurs différents rôles.



4^o année

L'analyse du volume 4 révèle une proposition d’étude différente de celle trouvée dans les premiers volumes de la collection. Nous avons noté une forte évolution de l’environnement technologique-théorique, ce qui influence directement sur le choix des techniques proposées. L’algorithme usuel devient l’outil principal pour effectuer des opérations d'addition et de soustraction. L’étude est également enrichie avec des techniques qui fournissent les calculs mentaux, des approximations et des estimations, construits à partir de la mobilisation des ostensifs.

Dans ce contexte de valorisation de l’algorithme usuel, à certains moments, quelques autres techniques sont convoquées avec l’intention de le légitimer, ce qui arrive souvent avec des ostensifs de nature plus manipulatoire⁵ - comme on peut remarquer dans la figure 15 avec le matériel numérique. Dans cette même figure, on voit aussi la présentation d’un discours écrit qui fait partie aussi de cette justification. L’ordre de la présentation de ces techniques n’est pas arbitraire : c’est la première technique présentée qui permet de justifier le fonctionnement de la deuxième.

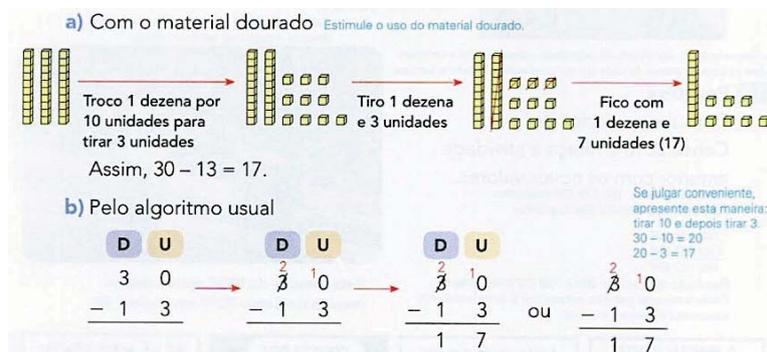


Figure 15 : Dante, vol.4, p. 126

5^o année

Le volume de la cinquième année est le dernier de la collection. Il nous présente un moment d’évaluation des techniques considérées les plus efficaces. L'abandon de certaines techniques et la réduction apparente des ostensifs est une conséquence de l’environnement technologique et théorique plus consolidé. Bref, seules les techniques avec une large valence instrumentale survivent.

On voit encore des justifications par le discours (figure 16), mais après ce moment de justification, ce qui reste est l’algorithme usuel, qui est indiqué comme une façon de réaliser les tâches dans la plupart des activités présentes dans le manuel.

⁵ Chaque objet ostensif peut être manipulé, il faut donc dire que dans cet extrait nous cherchons à souligner ceux qui utilisent les mains pour l’instrumentaliser.

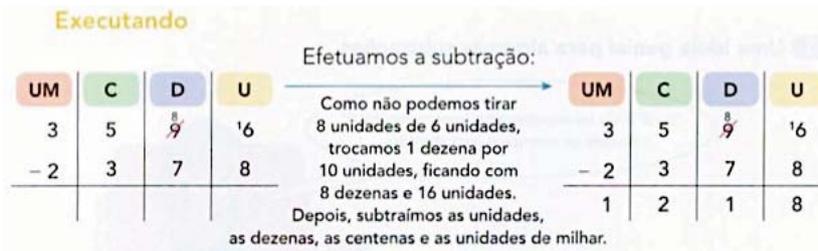


Figure 16. Dante, vol.5, p. 63

IV - REPRENANT QUELQUES IDEES

Pour conclure on reprend quelques points qui résultent d'une réflexion par rapport à ce qui a été présenté. Certains d'entre eux peuvent sembler évidents ; les présenter est alors une façon de renforcer les idées qui guident notre analyse sur l'activité mathématique.

- Les exemples illustrent des moments précis qui permettent de montrer certains aspects importants de l'évolution de la praxéologie. Mais, effectivement, c'est dans *le chaos de plusieurs praxéologies ponctuelles* que l'institution est constituée en tant que telle ;

L'analyse d'un phénomène didactique demande *une pause* pour bien regarder ce qui se passe à un certain moment – une caractéristique qui n'est évidemment pas spécifique de notre champ de recherche. Ainsi, ce qu'on analyse, ce sont des *photos* d'une histoire qui nous reconstruisons : la praxéologie destinée à l'étude du champ additif dans cette institution ne se réduit pas aux exemples présentés et n'a pas cet aspect linéaire. Il est important d'avoir connaissance des limites et des apports liés à cette méthodologie : quels sont les passages qu'on va choisir pour montrer ce qu'on veut analyser ? qu'est-ce qu'arrive entre deux passages ? qu'est-ce qui n'est pas dit ?

- Les techniques sont adaptées/modifiées aux conditions exigées par les tâches ;

La taille des nombres indiqués par les tâches, par exemple, nous a montré l'influence que cette caractéristique provoque dans le choix des techniques. L'adaptation ou la quête des nouvelles techniques révèle la dynamique qui conduit à l'évolution praxéologique. Cet aspect met en évidence le point suivant :

- La portée de la technique dépend des ostensifs mobilisés ;

Comme les ostensifs sont un moyen de caractériser les techniques, la portée de celles-ci dépendra aussi des ostensifs mis en place. Autrement dit, l'efficacité des techniques est liée à valence instrumentale de *leurs* ostensifs. Pour réaliser une tâche qui demande un travail avec des nombres supérieurs à 20, par exemple, utiliser des dessins est plus couteux qu'utiliser des signes, qui à son tour est plus couteux qu'utiliser le matériel numérique...

- La non neutralité dans la production de signifiés à travers des ostensifs ;

Les différents signifiés qui peuvent être évoqués par les ostensifs sont discutés, dans la TAD, à partir de la notion de valence sémiotique. Ils ne sont pas abordés pas dans ce texte, mais, c'est justement la non neutralité des ostensifs comme producteurs des signifiés qui nous a amené à considérer les ostensifs comme un élément qui caractérise les techniques. Pour cela, *compter d'un en un* avec la droite numérique est différent de *compter d'un en un* avec des signes. La façon d'opérationnaliser ces deux ostensifs change, mais ce qui change aussi, ce sont les notions que la droite numérique porte comme non-ostensifs pour l'activité mathématique en comparaison aux signes.

- Certaines techniques et certains ostensifs sont employés (aussi) pour construire de bonnes conditions pour l'élaboration des nouvelles techniques ;

Certaines techniques sont élaborées pour réaliser quelques tâches, mais, aussi pour construire des conditions qui peuvent être, dans un autre moment, des éléments technologiques pour d'autres techniques. Ce mouvement montre encore plus l'évolution praxéologique. Dans notre cas les ostensifs avaient un rôle important comme objets qui font partie des techniques et des idées élaborées du point de vue technologique.

- L'objectif de l'étude du champ additif dans cette institution est de trouver la *bonne technique* : une *coordination optimisée entre ostensifs et non-ostensifs*.

L’algorithme usuel, la bonne technique, est le résultat d’une réduction des ostensifs dans un système plus pratique qui incorpore plusieurs idées auparavant pratiquées avec d’autres ostensifs – et c’est là où l’élève est conduit.

- Dans cette institution (manuel scolaire) quelques ostensifs peuvent être ignorés avec l’intention d’avoir une mathématique plus “propre”.

Bien entendu, on n’a pas orienté notre discussion sur une possible transposition didactique de ce qui est proposé dans les manuels à ce qu’on peut voir dans une classe. Cependant, on remarque que dans les manuels la description de certaines techniques omet l’usage, parfois naturel, de quelques ostensifs qui peuvent être présents dans un *contexte réel*. Par exemple, pour réaliser la tâche « 128 + 56 » (1) avec l’algorithme usuel, comment un enfant de l’école primaire fait les tâches « 8 + 6 » (2) correspondant aux unités, et « 1 + 2 + 5 » (3) correspondant aux dizaines ? Dans le moment où la tâche (1) est proposée, les tâches (2) et (3) sont devenues routinières et alors les techniques et les ostensifs utilisés pour les réaliser ne sont plus indiqués. Autrement dit, dans cette institution cet usage « souterrain » n’est pas présent de façon explicite, mais peut exister quand cette praxéologie passe à vivre dans une autre institution.

$$\begin{array}{r} 128 \\ + 56 \\ \hline 184 \end{array}$$

V - BIBLIOGRAPHIE

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs. Objet d’étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **19(1)**, 77-124.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par un approche anthropologiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **12/1**, 83-121.

CHEVALLARD Y. (1999) L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(2)** 221–266.

CASABO, M. (2001). Un punto de vista antropológico: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad matemática. *Cuarto Simpósio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Huelva: Universidade de Huelva, p. 15 – 28.

DANTE, L. A. (2011). *Ápis: Alfabetização matemática*. São Paulo: Ática.

DANTE, L. A. (2011). *Ápis: Matemática*. São Paulo: Ática.

KASPARY, D. (2014). Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental. (Mémoire). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Brésil.