# L'ENTREE DES ELEVES DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES VERBAUX AU CP (6-7 ANS)

**Philippe LE BORGNE**
Maitre de Conférences, ESPE de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UFR-EDUC
philippe.leborgne@univ-fcomte.fr

**Arnaud SIMARD**
Maitre de Conférences, ESPE de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UFR-EDUC
arnaud.simard@univ-fcomte.fr

**Résumé**
Les auteurs s'inscrivent dans la lignée de la recherche conduite par Houdement (2011), portant sur la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires à l'école primaire. Celle-ci met en évidence le rôle des processus de contrôle dans la mise en œuvre des connaissances associées à la résolution.
Le projet présenté consiste à examiner ce qui se passe pour des élèves de cours préparatoire (6-7 ans) lors de leur première rencontre avec des problèmes arithmétiques verbaux (problèmes à énoncé textuel du type « Sultana a cinq pommes et quatre poires dans son panier. Combien a-t-elle de fruits dans son panier ? » (Thévenot, Barrouillet et Fayol, 2004)). Les auteurs étudient ce qui émerge des traces d'activité du point de vue des connaissances sur les situations. Celles-ci s'inscrivent dans le modèle de la réalité davantage que dans le modèle du problème mathématique (Burgermeister et Coray, 2008). La méthodologie retenue s'inspire d'expérimentations conduites par Camensisch et Petit (2006) : une entrée dans les problèmes arithmétiques par le biais de petites bandes dessinées manipulables a été proposée à deux classes de CP. La phase didactique avait pour objectif final la création d'énoncés de problèmes mathématiques contextualisés par les élèves eux-mêmes. Cette expérimentation met notamment en lumière que ce n'est pas tant les mathématiques sous-jacentes que le contexte qui est complexe lors de la résolution de problèmes.

Ce travail prend sa source dans un article de Houdement (2011) portant sur les « connaissances cachées » en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. L'auteure y présente une recherche basée sur des entretiens d'explicitation individuels (Vermersch, 1994) réalisés auprès d'élèves de cycle 3 (grade 3°, 4° et 5°). Le but de la recherche est de mettre en lumière des connaissances cachées (Sackur *et al.*, 1997 ; Castela, 2008) qui outillent certains élèves et semblent faire défaut à d'autres lors de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux[1] de réinvestissement (Nesher *et al.*, 1982 ; Verschaffel et De Corte, 1993). Parmi les connaissances exhibées par Houdement, certaines seraient utilisées de façon non consciente et auraient été auto-construites ou apprises « par hasard » (à l'occasion d'une remarque anodine d'un professeur par exemple), sans faire l'objet d'un enseignement. Dans tous les cas, leur absence poserait un problème aux élèves qui en sont démunis.

Le travail que l'on se propose de relater ici s'intéresse aux jeunes élèves (5 à 6 ans) qui n'ont pas encore rencontré de problèmes arithmétiques verbaux. La question qui a aiguisé notre curiosité est la suivante : les connaissances (ou leur prémisses) exhibées par Houdement sont-elles déjà présentes dans l'esprit de ces jeunes élèves ?

[1] Problèmes numériques, résolubles avec une (ou plusieurs) des quatre opérations usuelles, dont l'énoncé est un texte, plutôt écrit.

Très rapidement nous nous sommes confrontés à une réalité plus structurelle : la notion même de « problème » mathématique n'est pas naturelle chez les jeunes élèves, ce qui rend cruciale la question de l'entrée dans ce que la communauté enseignante appelle les problèmes mathématiques, avant de s'intéresser à leur résolution.

## I - CADRE THEORIQUE

### 1 La *mathématisation* dans les problèmes verbaux

Le problème verbal décrit brièvement une situation mathématique sous la forme d'une « petite histoire » (Thévenot, Barouillet et Fayol, 2010) ; il peut être présenté sous la forme d'un texte ou oralisé. Nous nous intéressons à des problèmes arithmétiques dont la structure injonctive impose la réponse à une question mobilisant des mathématiques. Puisque « les problèmes arithmétiques verbaux usuels de l'école primaire ont cette particularité de problématiser une réalité, évoquée par l'énoncé, pour obtenir une réponse mettant en jeu des mathématiques » (Houdement, 2011, p. 68), deux versants du passage du réel (Houdement, 1999) au traitement mathématique sont à distinguer : la mathématisation (Freudenthal, 1971) et la modélisation. « La mathématisation (…) consiste à acquérir des connaissances mathématiques à partir de la résolution de problèmes issus du réel par transformation de modèles implicites d'action » (Houdement, 2011, p.69) en référence à (Brousseau, 1998 ; Vergnaud, 1991). Le travail de Houdement est centré sur la modélisation en observant des élèves de grade 3°, 4° et 5° qui ont déjà acquis des connaissances mathématiques. Les procédures et algorithmes nécessaires à la résolution des problèmes sont alors maîtrisés dans le domaine numérique de l'énoncé : il s'agit dans ce cas de problèmes d'application.

Selon le cognitiviste Julo (1995, 2002) le sujet mobiliserait en résolution de problème des connaissances acquises lors de la résolution d'anciens problèmes (le sujet enrichit sa bibliothèque de schémas de problèmes en résolvant des problèmes). En d'autres termes, des schémas de problèmes (Julo, 1995 ; Levain *et al.*, 2006), outilleraient le sujet dans la résolution de problèmes nouveaux et l'échec en résolution de problème serait corrélé à la difficulté de pouvoir construire une représentation mentale de la situation (De Corte, Verschaffel et De Win, 1985).

Ces considérations théoriques font la part belle à l'activité de résolution de problème qui s'enrichit par elle-même, mais qu'en est-il de l'initiation du processus, de la rencontre avec le problème mathématique ? Notre travail va s'attacher au versant de la mathématisation et, plus particulièrement à la définition d'un problème mathématique avec des jeunes élèves (6-7 ans).

### 2 Les *contrôles*

Lors de l'activité de résolution de problème, le sujet convoque des connaissances en en contrôlant la pertinence dans le problème, ce que Coppé (1995) appelle la vérification : « argument avancé ou action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude du résultat ».

*Une vérification a pour conséquence soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement acquérir la certitude du résultat ; soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement déboucher sur une phase de rectification.* (Coppé, 1995).

Pour compléter, le processus de validation ne possède pas seulement une fonction rétroactive. Les processus de contrôles interviennent pendant la phase de résolution comme *anticipation de la validation* (Margolinas, 1993).

Houdement (2006) propose une typologie des contrôles mobilisables par les élèves en identifiant leur nature : pragmatique, sémantique, syntaxique et la qualification.

Le *contrôle pragmatique* mobilise le contexte évoqué par l'énoncé pour vérifier la plausibilité de son résultat. Si le contexte est familier pour le sujet, alors l'ordre de grandeur du résultat renforce ce contrôle.

Le *contrôle sémantique* s'exprime lorsque le sujet interprète la situation évoquée dans l'énoncé et se construit une représentation du problème (Julo, 1995). Cette représentation est liée au vocabulaire utilisé et intervient dans le choix des opérations en jeu dans la résolution (ajouter c'est additionner, partager c'est diviser …). Le sujet contrôle ainsi les opérations en jeu.

Le *contrôle syntaxique* intervient lorsque le processus de modélisation est enclenché. Il renvoie au traitement par le sujet des objets mathématiques en dehors du contexte. Les relations mathématiques entre ces objets deviennent source de contrôle (réversibilité de l'addition ou de la multiplication par exemple). Le contrôle syntaxique peut conduire à la production d'un résultat sans rapport avec le sens de la question posée lorsque les contrôles sémantiques et pragmatiques ne sont pas mis en œuvre de façon efficiente (Margolinas, 1993).

La *qualification* s'exprime lorsque l'articulation entre la réalité évoquée par l'énoncé et les mathématiques en jeu dans la résolution passe par la qualification des grandeurs en jeu. Houdement distingue deux niveaux de qualification. La *qualification faible* revient à savoir donner l'unité appropriée à chaque valeur numérique calculée ou en jeu. La *qualification complète* revient à pouvoir resituer dans le contexte de l'énoncé toute valeur numérique. Ce que Margolinas (1993) différencie entre « résultat » et « réponse » est précisé étape par étape par cette notion de qualification. Dans le travail que nous présentons ici la qualification s'étend à toutes les occurrences du discours de l'élève lui permettant de qualifier verbalement les objets en jeu dans la situation et dans la mise en œuvre de sa résolution.

Les différents contrôles présentés entrent en jeu lors de l'activité de résolution de problème de manière explicite (sur un brouillon de recherche) ou de manière implicite (il convient alors de les révéler lors d'un entretien d'explicitation). Pour mettre en place les contrôles pragmatique, sémantique et syntaxique, le sujet se réfère à des situations antérieures de résolution de problème ou à un vécu social. Ces contrôles sont liés à des connaissances difficiles à « attraper » comme le souligne Houdement. La qualification, quant à elle, s'inscrit plutôt dans une méthodologie ou une heuristique de résolution de problème. Ce contrôle semble plus simple à cibler et à ritualiser dans une démarche d'apprentissage en résolution de problème.

## 3 Les problèmes mathématiques : une culture spécifique

Selon Thévenot, Barouillet et Fayol (2010), la difficulté des problèmes varie en fonction de la complexité des situations décrites plutôt qu'en fonction de la nature des opérations à effectuer pour leur résolution. Des travaux plus anciens (Thévenot, 2008 ; Moreau et Coquin-Viennot, 2003) s'accordent pour faire travailler les élèves sur une variété de problèmes en insistant sur l'interprétation des situations plutôt que sur l'apprentissage des procédures de résolution. Ainsi, la construction de schémas de problèmes (au sens représentation mentale) semble être à la base de l'apprentissage en résolution de problèmes verbaux. Ces schémas se constitueraient de façon dynamique au sein même de l'activité de résolution de problèmes et seraient mis en œuvre de manière plus ou moins spontanée. Ces hypothèses rejoignent la notion de flexibilité cognitive définie par Clément (2009), c'est-à-dire la capacité pour un sujet de reproduire un modèle ou, au contraire, d'envisager un autre modèle pour la résolution de problèmes proches.

Le CP (élèves de 6 à 7 ans) semble être la classe charnière pour cette entrée dans les problèmes mathématiques. En effet, les jeunes élèves sont familiers avec un domaine numérique suffisamment large (nombres jusqu'à 30) tout en connaissant quelques décompositions additives de certains de ces nombres ainsi que les compléments à 5 et à 10. Ces élèves sont également habitués à écouter et à se représenter des histoires issues d'albums présents en classe où à la maison. Ceci permet d'envisager l'entrée dans la résolution de certaines catégories de problèmes additifs (arithmétiques et verbaux) : problèmes de transformation, problèmes de combinaison statique, problèmes de comparaison (Vergnaud, 1991). Passer d'une histoire que l'on écoute à un problème mathématique que l'on résout (passer d'une histoire à un énoncé de problème), nécessite un réel travail d'acculturation basé sur une représentation mathématisée de la situation (développement des schémas de problème), c'est ce que nous illustrons par la suite.

### 4 Mathématiques et langage

Plusieurs travaux se sont intéressés à la question de la langue des énoncés de problèmes. Camensisch et Petit ont travaillé ensemble sur des « projets d'écritures en mathématique » (Camensisch et Petit, 2004, 2005, 2006, 2007). Ils émettent l'hypothèse que, pour un niveau donné, « les mathématiques ne constituent pas un obstacle à la résolution des problèmes, mais que les principales difficultés proviennent de la langue française. C'est bien le langage qu'il convient de travailler afin de permettre aux élèves en difficulté de mieux réussir en mathématiques » (Camensisch et Petit, 2006, p.2). Leurs travaux visent à améliorer à la fois des compétences en mathématiques, dans le domaine de la résolution de problèmes et certaines compétences bien précises sur la langue. Leurs expérimentations consistent, entre autres, en des ateliers d'écriture d'énoncés de problèmes mathématiques basés sur des petites bandes dessinées en trois cases issues de manuel russe[2], idée que nous reprendrons dans la section II. Ces chercheurs mettent l'accent sur la différence significative entre une histoire et un énoncé :

*Contrairement à l'histoire qui a une dominante narrative unique, l'énoncé de problème comprend au moins deux séquences textuelles. L'une est à dominante narrative ou informative et comprend les données du problème. L'autre, plutôt injonctive, conduit à l'action de résoudre un problème en mettant en œuvre un raisonnement et, dans le domaine numérique, des calculs. Ecrire un énoncé de problème équivaut donc dans un premier temps à imaginer et à écrire une histoire en suivant une trame narrative chronologique. Dans un second temps, il faut transformer cette histoire en modifiant éventuellement l'ordre d'énonciation et donc la chronologie et en adaptant le texte à sa dominante principale, informative ou injonctive.* (*Camensisch et Petit*, 2006, p.9).

La recherche présentée ici poursuit le projet de mieux connaitre les connaissances mobilisées par les élèves de début du cycle 2 dans l'entrée dans la résolution de problèmes verbaux. Il nous semble que peu de recherches se sont intéressées aux questions de résolution de problème à ce niveau en les prenant en compte dans le cadre des situations rencontrées en classe. Le projet s'appuie sur des observations en classe et notre démarche est exploratoire. Nous nous appuyons également sur le constat des difficultés observées, notamment dans les premières séances de l'expérimentation pour construire des situations permettant d'enrichir nos observables. Même si le fil conducteur de nos expérimentations induit des modifications dans le comportement des élèves confrontés aux questions qui leur sont posées, notre intention n'est pas de présenter ici une ingénierie.

## II - METHODOLOGIE

Nous faisons l'hypothèse que l'écrit ne donne pas facilement accès aux décisions, aux choix et à toute la dimension cognitive des pratiques des élèves. Ceci nous apparait d'autant plus vrai au CP, quand le recours à l'écrit n'est pas encore installé. Le langage oral constitue alors l'outil central sur lequel nous appuyer pour avoir accès à la composante privée (Houdement, 2011) du travail de l'élève. Cependant la formulation verbale n'est pas toujours possible et l'exiger peut transformer le rapport à la tâche. Aussi nous considérons que toute dimension sémiotique est à prendre en compte. Ainsi, les signes visibles ou cachés (gestes, attitudes, regards, manipulations), sont susceptibles de nous renseigner sur l'activité du sujet lorsque cette dernière est conscientisée.

Forts de ces hypothèses nous privilégions l'analyse de séances filmées de travail en petits groupes de quatre ou cinq élèves. Ces séances sont encadrées par les enseignantes responsables de la classe qui ont été associées au travail de recherche sur le long terme. Nous disposons ainsi d'une banque de 161 films de quelques minutes chacun mettant en scène une trentaine d'élèves de CP. Sans chercher à généraliser, la redondance de certains comportements d'élèves face aux mêmes questions nous permet de questionner notre sujet d'étude malgré le faible nombre d'élèves observés.

[2] Moro et Stepanova (1990). *Matematika 1*. Moscou.

# III - UNE EXPERIMENTATION EN COURS PREPARATOIRE (CP, ELEVES DE 6-7 ANS)

## 1 Investigation

Le travail d'investigation qui a été réalisé en amont de l'expérimentation s'est déroulé en septembre 2015 (à l'entrée des élèves en CP). Il concernait la mise en lumière des connaissances cachées en résolution de problème avec des jeunes élèves. Ce premier travail a été peu concluant car les élèves, certainement trop jeunes ou trop peu aguerris à la culture mathématique, sont restés extérieurs aux problèmes mathématiques que nous leur avons soumis. A titre d'exemple (générique de ce que nous avons observé sur les 30 élèves), voici les réflexions d'un groupe de quatre élèves (Ewan, Titouan, Emma, Victor) concernant un problème arithmétique verbal dans un domaine numérique largement connu à leur niveau :

*Enseignante : Sultana[3] a 5 pommes et 4 poires dans son panier. Combien a-t-elle de fruits dans son panier ? Ewan, est-ce que tu peux redire cette histoire ?*

*Ewan : Je me souviens plus c'était qui…je me souviens plus c'était laquelle qui est dans l'histoire...*

*Enseignante : Le nom ? Sultana ? Alors Sultana…*

*Ewan : Sultana a pris des pommes et des poires…*

*Enseignante : Alors…est-ce que tu te souviens ? Combien de pommes ?*

*Ewan : 4.*

*Enseignante : Non 5…5 pommes et combien de poires ?*

*Ewan : 4 pommes.*

*Enseignante : Non…quatre…*

*Ewan : Poires.*

*Enseignante : Et qu'est-ce qu'on demande Ewan ?*

*Ewan : Combien y'a de pommes…*

*Enseignante : Est-ce qu'il faut dire combien il y a de pommes ? Qu'est-ce qu'on demande Emma ? Et pis toi…tu sais toi…qu'est-ce qu'on demande ?*

*Titouan : On demande de compter les pommes.*

*Enseignante : Est-ce qu'on demande de compter les pommes ? Victor ?*

*Victor : Oui.*

*Enseignante : Alors, je redis…Sultana a 5 pommes et 4 poires dans son panier. Combien a-t-elle de fruits dans son panier ?*

*Victor : 5.*

*Enseignante : Est-ce qu'on demande combien a-t-elle de pommes ? Qu'est-ce qu'on dit ? Combien a-t-elle de … ?*

*Ewan : Pommes…*

*Enseignante : Non.*

*Emma : Fruits…*

*Enseignante : De fruits dans son panier. Alors Emma, tu nous redis l'histoire.*

*Emma : Je me rappelle plus…*

*Enseignante : Sultana…*

*Emma : Sultana a 4 pommes et 5 pommes dans son panier.*

*Enseignante : Et qu'est-ce qu'on demande ?*

*Emma : De compter…*

---

[3] Sultana est le prénom d'une élève de la classe (le prénom est donc connu des élèves).

*Enseignante : De compter combien il y a de fruits dans son panier. Vous le faites et vous me donnez la réponse…allez-y.*

*Victor : Moi je sais déjà.*

*Enseignante : Ben tu le fais et tu nous écris…ici…* [attente] *Vous avez tous répondu ? Alors Titouan…qu'est-ce que tu as noté toi ?*

*Titouan : 5.*

*Enseignante : Et toi Emma, qu'est-ce que tu as noté toi ?*

*Emma : 9.*

*Enseignante : Et toi Ewan ?*

*Ewan : 6.*

*Enseignante : Et pis toi Victor ?*

*Victor : 8.*

Les élèves ne « rentrent » pas dans le problème malgré un contexte familier et un domaine numérique connu. Leur attention première est focalisée sur le contexte (nom du personnage, nom des fruits en jeu), l'aspect numérique passe au second plan et la question posée est totalement éludée. On note également que les contrôles sont absents. La qualification, même faible, semble faire défaut dès lors qu'un contexte est donné (mémorisation difficile de toutes les données : nom, données numérique, fruits).

Ces observations d'élèves confortent notre décision de travailler sur l'entrée dans la culture des « problèmes mathématiques » ou comment transformer une *histoire* en un *énoncé*. Pour cela nous décidons de travailler la résolution de problème avec ces élèves en mettant en avant : la compréhension orale de l'énoncé ; la représentation mentale des contextes des énoncés ; la chronologie des contextes proposés ; la reformulation des énoncés ; la construction d'énoncés de problèmes ; la manipulation d'objets ou l'usage de dessins pour poser des problèmes et les résoudre ; l'inclusion des structures mathématiques additives et/ou soustractives dans un contexte.

## 2 Le matériel

Nous décidons de travailler les points évoqués dans le paragraphe précédent de manière simultanée en privilégiant l'oral des élèves. Ainsi nous construisons des situations mettant au centre de l'activité la production orale par les élèves eux-mêmes.

### 2.1 Les strips

Pour ce faire, nous avons créé des strips (bandes dessinées de trois cases), qui se présentent tous sous la même forme (voir Figure 1).

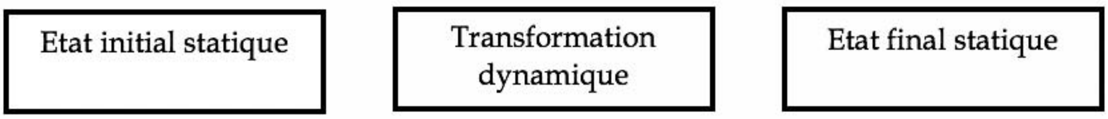



*Figure 1.* Forme des strips proposés

Le strip illustre une petite histoire et ne constitue pas un énoncé de problème. Le but des séances proposées aux élèves est de discuter de la chronologie de cette histoire puis de mathématiser cette histoire pour enfin faire émerger un énoncé de problème.

### 2.2 Les cartes

Les strips que nous avons créés reposent sur un jeu de cartes (présenté en annexes 1 et 2), et ils respectent les points suivants :

- le contexte est ludique (dessins gais mais sans fioritures excessives) ;
- la transformation d'état doit être clairement identifiée (le mouvement d'envol ou d'atterrissage) ;

- les personnages représentés sont tous identiques et non différenciables (pas de signe distinctif d'une « unité » à l'autre) ;
- la répartition des personnages est la plus « quelconque » possible (pas d'alignement strict ni de constellation) ;
- les valeurs numériques choisies sont 3, 4 et 7[4].

Le jeu de carte est imprimé en couleur en format A4 sur papier cartonné (ce qui permet une manipulation aisée). Le jeu comporte sept cartes présentant respectivement : 7 oisillons dans un nid ; 4 oisillons dans un nid ; 3 oisillons dans un nid ; 4 oisillons dans un nid et 3 oisillons qui s'envolent ; 4 oisillons dans le nid et 3 oisillons qui se posent ; 3 oisillons dans le nid et 4 oisillons qui s'envolent ; 3 oisillons dans le nid et 4 oisillons qui se posent. Les différents agencements de ces sept cartes permettent de raconter 4 histoires différentes[5].

Exemple : Trois oisillons sont dans un nid, quatre oisillons arrivent dans le nid, sept oisillons sont dans le nid (Figure 2).

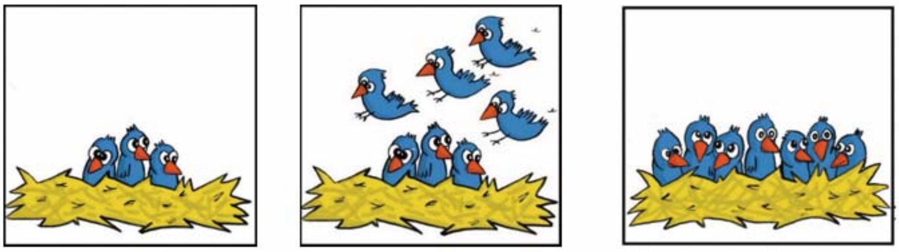


*Figure 2.* Exemple d'une histoire.

Lorsque l'une des cartes est retournée, l'histoire n'est pas complète… et l'on peut poser une question mathématique. On retourne la carte du milieu dans l'histoire précédente (Figure 3).

Exemple de problème avec le strip précédent : Au départ trois oisillons sont dans un nid, à la fin ils sont sept dans le nid. Combien d'oisillons sont arrivés dans le nid ?

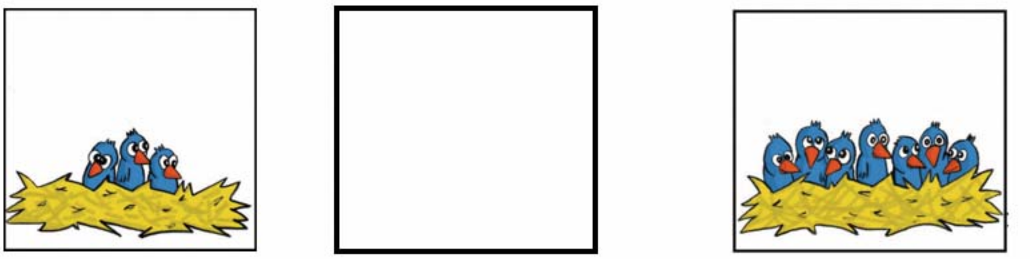


*Figure 3.* Exemple d'un problème mis en image.

Chaque strip permet donc de poser trois problèmes différents en fonction de la carte retournée.

## 3 Déroulement prévu

Le travail expérimenté s'effectue par groupe de 4 ou 5 élèves en quatre temps forts (qui peuvent, selon le cas, donner lieu à quelques variantes pour laisser les élèves s'exprimer).

Phase 1. Un strip entier (trois cartes visibles) est présenté aux élèves et l'enseignant leur demande de raconter l'histoire.

---

[4] Dans un premier temps les valeurs numériques sont 3, 4 et 7 (contexte « nid – oiseaux ») puis dans un second temps, 5, 7 et 12 (contexte « mer – poissons »).

[5] Les histoires des problèmes sont les suivantes :

3 oiseaux étaient dans un nid, 4 arrivent, maintenant il y en a 7 dans le nid : 3 + 4 = 7.

4 oiseaux sont dans un nid, 3 arrivent, maintenant il y en a 7 dans le nid : 4 + 3 = 7.

7 oiseaux sont dans un nid, 4 s'envolent, maintenant il y en a 3 dans le nid : 7 – 4 = 3.

7 oiseaux sont dans un nid, 3 s'envolent, maintenant il y en a 4 dans le nid : 7 – 3 = 4.

Phase 2. On montre un second strip dans lequel une des cartes n'est pas visible (elle est retournée). On demande alors aux élèves de raconter l'histoire et de poser une question. Il s'agit ensuite de répondre à cette question. La validation se fait en rendant visible la carte retournée. Cette phase peut être jouée à plusieurs reprises avec des strips différents.

Phase 3 (qu'il est prévu de faire ou non selon le niveau de compréhension de chaque groupe). L'objectif est un passage à l'écrit mathématisé du strip. Quel code adopter pour se souvenir d'un strip lorsque le contexte est connu ? Si le strip est complet, les élèves peuvent résumer la situation par une écriture mathématique du type « 3 + 4 = 7 » pour résumer, par exemple, l'histoire « 3 oisillons sont dans le nid, 4 arrivent, ils sont alors 7 dans le nid ». Si le strip présente un carte retournée, le passage à l'écrit permet une entrée dans les écritures pré-algébriques du type « 3 + ? = 7 » pour résumer, par exemple, l'énoncé « Au début il y a 3 oisillons dans le nid, à la fin il y en 7. Combien d'oisillons sont arrivés dans le nid ? ». On note ici la nécessaire recomposition de la chronologie de l'histoire mis en lumière par Camensisch et Petit (2004, 2005, 2006).

Phase 4. L'objectif de cette dernière phase est de créer un énoncé de problème sans avoir recours au matériel tout en gardant la structure ternaire rencontrée dans les phases précédentes. Le contexte est libre.

## 4 L'expérimentation

L'expérimentation s'est déroulée au mois de mai 2016 en classe de CP (fin de CP) avec 6 groupes de 4 à 6 élèves. Nous faisons le choix de ne pas relater in-extenso les propos des élèves mais plutôt de catégoriser leurs discours. En effet, dans chaque groupe le même processus s'est mis en place, les mots n'étant peut-être pas à tout à fait identiques, mais les idées largement communes. Par ailleurs, nous tenons à signaler que l'enseignante précisait d'entrée que le petit groupe était réuni pour faire un travail mathématique. Cette précision place directement l'élève dans un contexte référencé à l'intérieur de la pratique scolaire.

### *4.1 Phase 1*

Lors de la première phase, les élèves sont invités à s'exprimer sur le strip donné Figure 2. La consigne est la suivante : « Racontez l'histoire ».

Le terme « histoire » n'est peut-être pas pertinent, car il est rattaché à un univers trop distinct des mathématiques (lecture et compréhension de texte) et peut orienter les élèves sur une piste non attendue (histoire imaginaire, conte). La question du terme approprié reste ouverte car le terme « énoncé » ne convient pas non plus.

Dans un premier temps les élèves identifient la chronologie sous-jacente et comprennent intuitivement que l'histoire se décrit de gauche à droite avec des oisillons et un nid. Dans un second temps les données numériques 3 et 4 sont identifiées puis le nombre 7. Dans un troisième temps, l'imaginaire entre en jeu pour donner un enjeu narratif à l'histoire. A partir du moment où un élève entre dans l'imaginaire qui peut entourer l'histoire, tous les élèves du groupe focalisent leur créativité pour inventer des contextes de plus en plus extravagants.

Exemples de réponses d'élèves : *« Je vois des oiseaux, ils sont dans leur nid, y'a des oiseaux qui sont dans le nid et d'autres qui volent…et maintenant ils sont tous dans leur nid…ah ceux-là ils vont dans le nid. » ; « Au début il y en a 3, puis 4 arrivent et après il y en a plusieurs. » ; « Il y a 3 oiseaux dans le nid, après il y en 4 qui viennent, après ils sont tous réunis » ; « Il y a des oiseaux, 3 oiseaux qui viennent et après il y a tous les oiseaux dans le nid. » ; « Il y a 3 oiseaux dans le nid, après il y en 4 qui vient, après il y en a plein dans le nid. » ; « Au début ils sont 3, après ils sont 7…y'a des oiseaux qui reviennent et là y'en a 7 aussi. » ; « Au début il y a…3 oiseaux après il y en a 7. » ; « Je vois 4 oiseaux dans un nid et ils attendent quelque chose, après je vois des oiseaux qui viennent dans le nid comme du coup ils sont 7 dans le nid. » ; « Les parents arrivent avec pépé et mémé. » ; « Ils font la fête dans le nid. » ; « Ils attendent ils s'ennuient…ils attendent pour jouer….les cousins et les cousines qui arrivent…ils jouent. »*

### *4.2 Phase 2*

La deuxième phase se présente comme la situation de référence (Brousseau, 1998) pour la construction d'énoncés de problème. En effet après avoir compris la chronologie d'enchainement des strips, les élèves sont maintenant confrontés à l'absence d'une carte (voir exemple Figure 3). La consigne est la suivante : « Racontez une histoire et posez une question ».

Les groupes d'élèves n'ont pas été confrontés aux mêmes strips, mais leur approche est similaire.

Dans un premier temps les élèves décrivent ce qu'ils voient sur les cartes sans poser de question. Certains complètent l'histoire en y intégrant la carte manquante. L'enseignante relance alors la consigne en insistant sur la question à poser. Dans un second temps, les élèves posent des questions sur un contexte imaginaire sans se soucier des données numériques : ils ne rentrent pas dans une mathématisation de l'histoire.

Exemples de premières questions posées par les élèves : *« Pourquoi il y en trois autres qui viennent ? » ; « Est-ce qu'ils reviennent ? » ; « Où sont-ils ? » ; « Qu'est ce qui s'est passé ? » ; « Pourquoi ils ont pas dit pourquoi ils partaient ? » ; « Pourquoi y'en avait 7 au début et pourquoi y'en a quatre qui sont partis ? »*

Exemples d'histoires sans questions : *« C'est 4 oiseaux qui sont dans leur nid et maintenant ils sont tous…ils sont 7. » ; « Il y en a 4…oiseaux…dans l'autre carte il y a beaucoup plus d'oiseaux…c'est la carte du milieu qui dit qu'il y en a 7. » ; « Il y a 4 oiseaux, il y a 3 oiseaux qui viennent. », « Il y a 7 oiseaux, 3 qui partent….il y a 4 oiseaux sous cette carte. » ; « On voit que les oiseaux vont se poser dans le nid…et derrière cette image ils se sont posé dans le nid…et ils sont trop serrés. »*

Ce n'est qu'avec insistance que l'enseignante finit par avoir des questions qui commencent par « Combien… ». Cette phase est répétée plusieurs fois avec les élèves en leur proposant différents strips (contexte « oiseaux » avec les valeurs numériques 3, 4, 7 et contexte « poissons » avec les valeurs numériques 5, 7, 12, voir annexes 1 et 2).

Exemples d'orientation du discours par l'enseignante pour recadrer vers la construction d'énoncés : *« Je vous rappelle qu'on allait faire des problèmes. » ; « Quelle question je peux trouver dans mon problème ? » ; « Quelle question on peut poser en mathématiques ? » ; « Je veux une question en mathématiques. » ; « Qu'est-ce que la maitresse demanderait ? »*

Exemples de questions d'élèves après relance : *« Combien y'en a qui sont venus ? » ; « Combien sont venus ? » ; « Combien y'en a qui sont arrivés dans le nid ? » ; « Il y a 4 oiseaux et après y'en a 3 qui viennent…combien ça fait en tout ? » ; « Il y a 4 oiseaux et là on se demande combien il va y en avoir pour faire 7 dans le nid. ».*

Pour autant certains élèves semblent ne pas rentrer dans ce jeu de questions. En effet, pour eux, une question doit être ouverte, ils doivent forcément ne pas connaitre d'emblée la réponse. Pour ces élèves le contexte du strip est peut-être trop évident et ne leur permet pas de poser de questions (si on connait la réponse ce n'est pas la peine de poser de question), comme en témoigne la réflexion suivante : *« Pas besoin de demander combien partent car on les voit ! ».*

Lors de cette phase, il semble important de noter l'enjeu de la qualification. La qualification n'a de sens que lorsque différentes grandeurs sont en jeu. En effet, s'il n'y a pas d'ambiguïté il n'y a alors pas de sens à être rigoureux sur la qualification. Pour autant il semble important de prendre l'habitude de toujours parler dans le contexte de l'énoncé (nombres concrets : nombres et unité). Ainsi *« il y a 3 oiseaux…à la fin il y en a 7. »* devrait être reformulé en : *« il y a 3 oiseaux…à la fin il y a 7 oiseaux. »*

### 4.3 Phase 3

Lors de la troisième phase, les échanges entre élèves ont été très riches d'un point de vue sémantique, pragmatique et pré-algébrique. Les données numériques 3, 4, 7 et leur relation additive (ou soustractive) sont dominées. L'interprétation sémantique de l'arrivée ou du départ des oiseaux (plus ou moins) est en voie de construction pour certains élèves et assurée pour d'autres. Le contrôle pragmatique de la situation entre en jeu (si des oiseaux arrivent, ils seront plus nombreux, s'ils s'envolent ils seront moins nombreux). Les écritures sous forme d'addition (ou soustraction) à trou (avec ou sans « ? ») prend tout son sens et provoque un consensus d'utilisation dès son apparition.

Exemple d'écrits d'élèves et de justification (contrôle sémantique et pragmatique) :

*Lili écrit « 7 – 4 = 3 ».*

*Enseignante : Pourquoi « – 4 » ?*

*Lili : Car il y en a 4 qui s'envolent.*

*Enseignante : Louis…pourquoi tu effaces ? Qu'avais-tu marqué ?*

*Louis : J'avais mis 7 + 3.*

*Enseignante : Et pourquoi ça n'allait pas ?*

*Louis : Parce que 4 partaient, il n'y en avait pas qui revenaient.*

Exemple d'écriture pré-algèbrique (situation 4 + 3 = ?) :

*Sacha écrit « 4 + 3 = 7 » : Parce qu'il y a 4 ici et 3 qui viennent…et là, on sait pas ce que c'est mais 4 + 3 ca fait 7.*

*Louanne écrit « 4 + 3 = ? » : Là…on se demande combien il y en a en tout.*

Suite à cet échange, l'enseignante propose différents strips avec une carte retournée. Les élèves écrivent sans difficulté les codes correspondants : 4 + ? = 7 ou encore ? + 3 = 7.

Exemple de conflit entre contrôle syntaxique et contrôle sémantique (situation 3 + ? = 7) :

*Sophia : Il y en a 3 dans le nid donc j'écris 3…il y en a 7 dans le nid donc j'écris 7…j'ai écrit 3 – … = 7.*

*Enseignante : Pourquoi tu as écris « moins » ?*

*Sophia : J'ai mis 3 + 4 = 7 car y'en 3 dans le nid et 4 qui vient pour faire 7.*

*Sophia : Au début il y a 3 oiseaux, à la fin il y en a 7…il y en a 4 qui viennent.*

Sophia a bien identifié la situation, elle sait que la carte retournée cache 4 oiseaux qui arrivent dans le nid, c'est pourquoi elle justifie « j'ai mis 3 + 4 = 7 » (contrôle sémantique). Elle sait également qu'elle doit résumer cette situation avec une écriture où le « 4 » est remplacé par un « ? » ou un vide (opération à trou). Or ce « 4 » est obtenu par soustraction (7 – 3). Ainsi elle tente de résumer la situation en utilisant la soustraction (contrôle syntaxique), c'est pourquoi elle écrit « 3 – … = 7 ».

### 4.4 Phase 4

Au cours de la quatrième phase les élèves sont invités à créer leurs propres énoncés avec la consigne suivante : « Créez un problème : Racontez une histoire en imaginant des cartes dont une est retournée. Posez une question. » .

Les élèves qui ont abordé cette phase réagissent de manière similaire. Ils ne s'éloignent pas des contextes déjà vus (oiseaux ou poissons), et les énoncés proposés, comme on peut s'y attendre, sont de la forme : « a + b = ? » ou « a – b = ? ».

Exemples d'énoncés créés par les élèves : *« Il y a 9 poissons au début, 4 s'en vont, combien il reste de poissons ? » ; « Il y a 40 poissons, et il y en a 4 qui partent, combien il y a de poissons ? » ; « Au début il y en a 13 de poissons, ensuite il y en a 4 qui partent…combien y'en a ? » ; « Au début y'en a 12…ils sont réunis, après y'en a 4 qui partent, combien reste-t-il ? ».*

Puis l'enseignante propose : « Vous les avez fait partir, les poissons, on peut trouver un problème avec une autre situation ? ».

Exemples de nouveaux énoncés créés par les élèves : *« Au début il y a 4 poissons, après il y en a 5 qui viennent et combien y'en a la fin ? » ; « Il y en a 50 et il y en a 50 autres qui viennent …combien y'en a la fin ? ».*

## 5 Bilan des phases didactiques

Le matériel proposé (et son utilisation) pour entrer dans les problèmes a ses avantages et ses limites. Les élèves s'emparent facilement des contextes proposés mais la modélisation mathématique sous-jacente ne leur est pas naturelle.

Les attentes de l'enseignant ne sont pas transparentes c'est pourquoi les élèves s'engagent naturellement sur des aspects imaginaires liés au contexte de l'histoire plutôt qu'à des aspects mathématiques liés à la structure des situations. Pour autant, le travail de l'enseignant qui consiste à orienter les discussions vers la création d'énoncés mathématiques semble porter ses fruits dans la dernière phase.

Le dévoilement de la structure des problèmes s'effectue à l'aide d'une discussion conduite par l'enseignant qui donne à voir aux élèves l'espace occupé par la question dans l'énoncé. Le rôle du langage et de l'écriture symbolique semble avoir un poids très important dans l'accès à la modélisation.

La discussion en petits groupes étayée par l'enseignant et par les pairs semble favoriser une acculturation au modèle du problème mathématique. C'est par le langage que les élèves révèlent, petit à petit, la structure d'un problème et c'est par l'écrit symbolique qu'ils la matérialisent et qu'ils s'en emparent.

Les procédures mathématisées plus ou moins formalisées sont assez fréquentes dès lors que les attentes de l'enseignant sont clairement définies. Le travail d'emblée dans le modèle mathématique ne semble pas constituer une difficulté pour l'élève (Burgermeister et Coray, 2008), au détriment de la question du sens de la situation.

## IV - RESULTATS PARTIELS ET DISCUSSION

Le travail présenté ici est inachevé. Nous soulignons quelques interprétations des expérimentations que nous avons conduites.

Le sens du problème (en tant que texte injonctif) n'est pas accessible d'entrée aux élèves de CP observés. Le passage de la compréhension « d'une histoire à un énoncé » fait partie d'une acculturation qu'il semble nécessaire de penser pour donner du sens au questionnement mathématique des problèmes arithmétiques verbaux.

La résolution d'emblée de problèmes mathématiques ne semble pas être le moyen de faire accéder à la compréhension de la structure, l'étape de construction de problème semble prioritaire. La situation des « strips » illustre cette potentialité où la résolution du problème n'apparaît pas comme le moyen central de l'accès au sens. Dans un travail collectif, la pensée est stimulée par la perception de la situation et générée par une pratique sociale d'élucidation des questions (il est à noter le rôle important de l'enseignante et de la phase de discussion). Cette forme de confrontation au modèle de problème peut permettre une acculturation à la résolution de problèmes mathématiques.

L'accès à résolution de problèmes, c'est-à-dire la mise en œuvre d'un modèle mathématique tel que notre travail l'envisage aujourd'hui, ne s'impose pas de l'extérieur. Elle se construit dans un processus d'élaboration de représentations mentales idoines, mobilisant les sens et le vécu du sujet. Cet accès à la résolution de problèmes mobilise ce que nous avons qualifié de « connaissances cachées ». Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit de l'acquisition par l'élève de formes culturelles, de réflexion sensible, ou d'actions sémiotiques. En ce sens la résolution de problèmes apparait comme un objet culturellement situé à travailler en collectif dans un dispositif permettant aux élèves d'objectiver ses caractéristiques (Radford, 2003).

L'élaboration de la représentation du problème semble facilitée par la répétition de situations proches sur une longue durée. Dans ces situations, l'enseignant contribue sur le long terme à une médiation sémiotique de la réalisation d'une pratique sociale, et l'énoncé est un artefact à travers lequel on pense l'activité mathématique.

## V - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU, G., (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La pensée sauvage.

BURGERMEISTER, P., & CORAY, M. (2008). Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive. *Recherches en didactique des mathématiques*, *28*(82), 63.

CAMENSISCH A., PETIT, S. (2006). Lire et Écrire des Énoncés de Problèmes Additifs : Le Travail sur la Langue. *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM*.

CAMENSISCH, A., PETIT, S. (2007). La formation savante de mots en mathématiques. *Bulletin de l'APMEP*, (470), 311-332.

CASTELA, C. (2008 dir.). *Contribution à une approche didactique des implicites scolaires : la problématique des enjeux ignorés d'apprentissage*. Les Cahiers de l'IUFM 7. Université de Rouen.

CLEMENT, É. (2009). *La résolution de problème : à la découverte de la flexibilité cognitive*. Armand Colin.

COPPE, S. (1995). *Types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique de son travail, Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions, 129–144.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L., & DE WIN, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, ***77***(4), 460.

FREUDENTHAL, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational studies in mathematics*, ***3***(3.4), 413-435.

HOUDEMENT, C. (2006). *Trouver ou ne pas trouver : ce qui peut faire des différences dans la résolution de problèmes arithmétiques ordinaires*. Cahier DIDIREM 54. IREM Paris 7.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, ***16***, 67-96.

JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, ***69***. 31-52

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

LEVAIN, JP., LEBORGNE, P., & SIMARD, A. (2006). Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA. *Revue française de pédagogie,* ***155***, 95-109.

MARGOLINAS, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques* (p. 256). Paris : La Pensée Sauvage.

MOREAU, S., & COQUIN-VIENNOT, D. (2003). Comprehension of arithmetic word problems by fifth-grade pupils: Representations and selection of information. *British Journal of Educational Psychology*, ***73***(1), 109-121.

NESHER, P. GREENO, J., & RILEY, M. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, ***13***(4), 373-394.

RADFORD, L. (2003). Narratives, expressions algébriques et calcul formel: de la constitution à la transformation du sens. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, ***8***, 191-208.

SACKUR, C., DROUHARD, J. P., MAUREL, M., & PECAL, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères IREM*, ***28***. 37-68.

THEVENOT, C. (2008). Représentations mentales et stratégies de résolution de problèmes arithmétiques verbaux chez les enfants de CM2. *L'Année psychologique*, ***108***(4), 617-630.

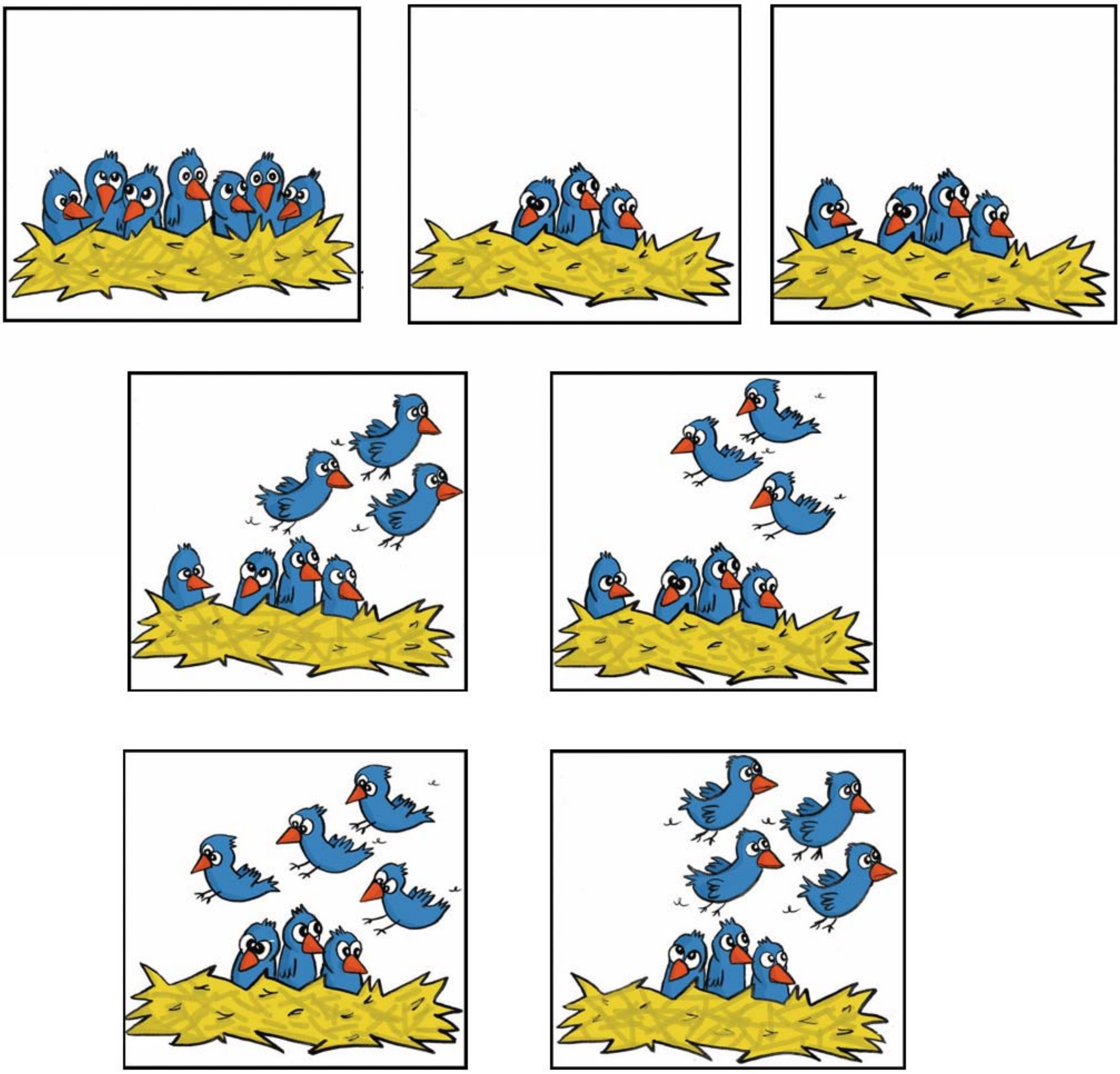
THEVENOT, C., BARROUILLET, P., FAYOL, M. (2010). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In Crahay, M. & Dutrévis, M. (Ed.) (137-166). *Psychologie des apprentissages scolaires*. Bruxelles : De Boeck.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, ***10***(2.3), 133-170.

VERMERSCH, P. (1994). *L'entretien d'explicitation* (Vol. 2003). Paris: ESF.

VERSCHAFFEL, L., & DE CORTE, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological, and practical outcomes. *Educational Psychology Review*, ***5***(3), 239-256.

# VI - ANNEXE 1 : CARTES OISILLONS



## VII - ANNEXE 2 : CARTES POISSONS