ECRITURES ARITHMETIQUES EN LIEN AVEC L'APPRENTISSAGE DU CALCUL SOUSTRACTIF

Anne-Marie RINALDI
Formatrice ESPE de l'académie d'Amiens
Laboratoire de Didactique André Revuz Paris Diderot
anne-marie.rinaldi@u-picardie.fr

Résumé
La communication présente une partie des résultats de mon travail de thèse (Rinaldi, 2016). La recherche, conduite dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999), m'a permis de construire une organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif et d'élaborer une ingénierie pour le CE2 (8-10 ans), en cherchant à rester assez proche des pratiques de l'enseignement ordinaire (Robert, 2013). L'évolution des productions des élèves sur un ensemble de séquences permet de questionner l'usage des écritures arithmétiques et des schémas avec appui sur la droite numérique, dans le but de communiquer, s'approprier, valider et évaluer un ensemble de techniques de calcul mental (Threlfall, 2002).

I - INTRODUCTION

Dans Rinaldi (2016), je m'intéresse à l'enseignement et à l'apprentissage du calcul soustractif à l'école élémentaire, précisément en CE2. J'ai ainsi cherché à répondre aux questions que les professeurs des écoles se posent sur le choix de l'algorithme à enseigner et sur les conditions à mettre en œuvre pour permettre à l'ensemble des élèves de devenir performants en calcul mental. Une des priorités étant de relier l'enseignement du calcul mental et du calcul posé et d'envisager une programmation de l'étude afin de pallier les difficultés d'apprentissage des élèves.

En effet, si on se réfère aux travaux Maurel & Sackur (2010), les calculs soustractifs posés ne sont pas maîtrisés par tous les élèves : « *Ils font la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas.* » C'est ainsi que pour effectuer 53− 27, ils vont effectuer 7− 3 et trouver 34 à la place de 26.

Par ailleurs, en calcul mental, pour Butlen & Charles-Pézard (2007), les élèves à qui on n'a pas appris à faire autrement : « *privilégient en premier lieu l'algorithme posé dans la tête, en second lieu des procédures mobilisant des décompositions canoniques des nombres.* » Cela est sans conséquence pour effectuer par exemple 53− 21. 53-21=50-20+3-1 mais problématique pour effectuer le calcul proposé ci-dessus 53− 27.

L'analyse des contextes institutionnel et professionnel m'a donc amené à m'interroger sur la nature des savoirs à enseigner. Quels répertoires ? Quelles propriétés des nombres et des opérations ? Quelles désignations des nombres enseigner surtout si l'objectif recherché est de développer la valence pragmatique du calcul (calculer vite et bien) et la valence épistémique du calcul (connaitre les propriétés mathématiques qui interviennent dans l'effectuation d'un calcul). Mais une fois ces savoirs identifiés se pose la question de leur enseignement. Est-il possible de programmer et d'organiser l'étude en tenant compte de la progressivité des apprentissages, des conditions et des contraintes de l'enseignement ordinaire ? Pour tenter de répondre à cette question, j'ai été amenée à concevoir, puis à évaluer, l'impact sur les apprentissages des élèves en calcul soustractif d'une ingénierie introduisant progressivement et régulièrement les écritures arithmétiques. Avant de présenter en partie mes résultats, je commence dans le paragraphe suivant à préciser le cadre théorique utilisé et la méthodologie suivie.

II - CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

Dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, j'ai exploité le concept d'*organisation mathématique* qui permet de caractériser l'activité mathématique et le concept d'*organisation didactique* qui renvoie aux différents moments de l'étude (Chevallard, 1999). J'ai également utilisé le concept d'*organisation mathématique de référence* (Chevallard, *ib.*). Selon Bosch et Gascon (2005), l'organisation mathématique de référence permet au chercheur – pour un sujet donné : ici le calcul soustractif sur les entiers naturels – d'identifier, à partir d'une étude épistémologique et didactique, l'ensemble des savoirs à enseigner. De ce fait, l'organisation mathématique de référence rend légitime la transposition didactique des savoirs savants aux savoirs à enseigner. Dans ma recherche, cette organisation mathématique de référence a servi pour construire une organisation mathématique conforme à la référence et comme outil d'analyse.

J'ai également utilisé les concepts de *contrat*, d'*habitude* et de *régularité* des pratiques empruntés à Robert (2013) pour connaitre les pratiques de trois enseignants de CE2 et le concept de *zone proximale de développement des pratiques* pour concevoir l'organisation de l'étude sans trop m'éloigner des pratiques de l'enseignement ordinaire (Robert, *ib.*).

Un autre concept, celui d'*ingénierie didactique* (Artigue, 2011) m'a servi à définir une méthodologie générale de mise à l'épreuve et d'analyse.

Cette présentation générale étant faite, il me semble important de revenir précisément sur la composition de l'organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif car celle-ci est la clef de voute de ma recherche.

1 Organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif

L'organisation propre au calcul soustractif sur les entiers naturels est fédérée autour de quatre organisations mathématiques locales :

- ✓ La première organisation OM1 regroupe les tâches propres à la production de calcul. Tâches qui permettent essentiellement à l'école élémentaire de modéliser les situations additives en référence aux travaux de Vergnaud (1990).
- ✓ La seconde organisation OM2 regroupe les tâches qui consistent à associer ou transformer des représentations sémiotiques. Parmi ces représentations sémiotiques, nous retenons les écritures arithmétiques, les schémas et les expressions langagières. Cette organisation est motivée par OM1 et OM3.
- ✓ La troisième organisation OM3 regroupe les tâches qui vont consister à effectuer un calcul.
- ✓ La dernière organisation OM4 est associée à la réécriture de calculs. C'est celle qui va permettre de montrer quelles sont les propriétés des nombres et des opérations qui sont mobilisée donc de développer la valence épistémique du calcul au sens d'Artigue (2005).

Le schéma ci-dessous met en avant les liens entre les différentes organisations mathématiques locales :

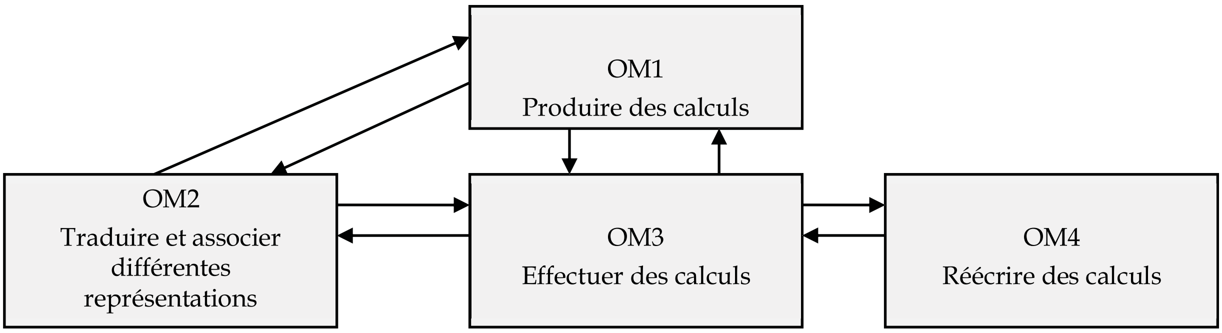


Figure 1. Schéma relatif aux organisations locales propres au calcul additif et soustractif sur N

En rapport avec la recherche, j'ai particulièrement développé l'étude de l'organisation propre à l'effectuation de calculs. J'ai identifié différents types de tâches. Ces types de tâches sont soustraire un nombre à un chiffre (Ta−□), soustraire un multiple de dix (Ta−□0), soustraire un nombre à deux chiffres (Ta−□□) puis soustraire un nombre à trois chiffres (Ta−□□□).

Pour chaque type de tâches, j'ai ensuite recensé les techniques potentielles en m'appuyant sur les travaux de Fuson et al. (1997), Carpenter et al. (1998), Klein et al. (1998) et Thompson (1999). J'ai regroupé les techniques citées autour de quatre technologies savantes.

La première technologie θ_{DD} s'appuie sur la décomposition des deux nombres, la recomposition d'un nombre, les répertoires additifs et soustractifs, le principe décimal et le principe de position de la numération décimale, les propriétés de la soustraction sur N. Elle génère deux techniques de décomposition τ_{1010}, $(\tau_{1010})'$.

Technologie θ_{DD}	- Technique de décomposition τ_{1010}	Exemple de calcul : $168 - 23 = (100 + 60 + 8) - (20 + 3)$ $= (100) + (60 - 20) + (8 - 3)$
	- Technique de décomposition $(\tau_{1010})'$	Exemple de calcul : $165 - 27 = (100 + 60 + 5) - (20 + 7)$ $= (100) + (50 - 20) + (15 - 7)$

$\boldsymbol{\tau_{1010}}$ est une technique par décomposition canonique des deux nombres qui consiste à calculer des différences partielles sur des multiples de 100, de 10, de 1 et à les ajouter. $(\tau_{1010})'$ est une technique par décomposition du premier nombre et décomposition canonique du nombre à soustraire qui se rapproche de τ_{1010}.

La seconde technologie θ_{D} s'appuie sur les mêmes propriétés que la première. Elle ne nécessite pas de décomposer les deux nombres du calcul mais nécessite de décomposer un des deux nombres. Elle génère trois techniques séquentielles τ_{N10}, τ_{A10} et τ_{N10C}.

Technologie θ_{D}	- Technique séquentielle τ_{N10}	Exemple de calcul : $125 - 23 = 125 - (20 + 3)$ $= (125 - 20) - 3$.
	- Technique séquentielle τ_{A10}	Exemple de calcul : $125 - 27 = 125 - (25 + 2) = (125 - 25) - 2$ ou $123 - 27 = 123 - (20 + 7) = (123 - 20) - 7$
	- Technique séquentielle τ_{N10C}	Exemple de calcul : $125 - 47 = (125 - 50) + 3$.

τ_{N10} est une technique séquentielle qui consiste à décomposer canoniquement le nombre à soustraire. τ_{A10} et τ_{N10C} sont deux techniques séquentielles qui consistent à décomposer le nombre à soustraire afin d'obtenir des calculs soustractifs intermédiaires plus simples à effectuer.

La troisième technologie $\theta_{SOU/ADD}$ s'appuie sur la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur les entiers naturels et génère la technique $\tau_{SOU/ADD}$.

Technologie $\theta_{SOU/ADD}$	- Technique $\tau_{SOUS/ADD}$	Exemple de calcul : Pour calculer $125 - 47$, on cherche le complément de 47 à 125

$\tau_{SOU/ADD}$ est une technique par inversion qui consiste à remplacer une soustraction par une addition à trou.

La dernière technologie θ_{AN} s'appuie la propriété de conservation des écarts. Elle génère une technique de calcul mental τ_{AN} et l'algorithme de la soustraction par compensation qui consiste à ajouter aux deux termes du calcul si, besoin est, un ou plusieurs multiples de dix.

Technologie θ_{AN}	- Technique τ_{AN}	Exemple de calcul : $125 - 47 = (125 + 3) - (47 + 3)$.

τ_{AN} est une technique par translation qui consiste à ajouter (respectivement soustraire) un même nombre à chaque terme du calcul soustractif.

Parallèlement, j'ai cherché quels ostensifs, objets sensibles permettant d'évoquer les concepts (Bosch & Chevallard, 1999), pouvaient être utilisés pour mettre en avant les différentes fonctions des technologies (expliquer, évaluer, valider, motiver), en référence à l'article de Castela et Romo Vasquez (2011). En me basant sur les études de Teppo & Van den Heuvel-Panhuizen (2014), Ernest (1985), Gravemeijer (1994), Bobis & Bobis (2005), Van den Heuvel-Panhuizen (2008) j'ai émis plusieurs hypothèses :

- la droite numérique vide (DNV) aiderait à visualiser les différentes étapes d'un calcul donc à expliquer le mode d'emploi des techniques séquentielles ;
- la droite numérique graduée (DNG) aiderait à visualiser l'écart dans le cadre de la mesure ;
- les écritures chiffrées (EC) et les arbres permettant de valider toutes les techniques.

Le cadre théorique fixé, j'ai opté pour une méthodologie dont j'énonce les grands axes dans le paragraphe suivant.

2 Méthodologie

Après avoir construit l'organisation mathématique de référence, j'ai utilisé et mis à l'épreuve cet outil théorique pour analyser les manuels et les pratiques spécifiques de trois enseignants. Ainsi, j'ai pu m'appuyer sur cette étude et sur une connaissance des contrats et habitudes des trois enseignants « observés » pour nourrir l'organisation didactique de l'ingénierie. L'organisation mathématique étant fondée sur l'organisation mathématique de référence. Pour finir, deux des trois enseignants ont accepté d'expérimenter l'ingénierie dans leurs classes respectives.

III - PRESENTATION DE L'INGENIERIE

L'ingénierie vise l'explicitation des éléments théoriques en jeu dans l'effectuation de calculs et à agréger les organisations mathématiques locales (cf. figure 1) pour permettre aux élèves de développer la valence pragmatique et épistémique du calcul. Etant donné qu'elle s'appuie sur une meilleure connaissance des pratiques enseignantes, je vais donner quelques éléments prélevés à la suite de l'observation conduite dans trois classes de CE2, avant de présenter globalement les séquences de l'ingénierie et précisément celles qui introduisent les écritures arithmétiques.

1 Eléments prélevés suite aux observations de classe

La valence pragmatique du calcul est prédominante dans le sens où les enseignants cherchent avant tout à ce que les élèves calculent vite et bien. Les corrections étant là surtout pour valider les résultats. Peu de synthèses autour des techniques sont mises en place. Par ailleurs, dans les séances de calcul mental que j'ai observées, les enseignants proposaient des séries de calcul pour s'entrainer à soustraire sept, soustraire des multiples de dix, soustraire un nombre à deux chiffres, donc des tâches non isolées et toutes d'un même type. Le travail en calcul mental vu qu'il était conduit essentiellement à l'oral, ne facilitait pas la réécriture de calcul. Sur l'ensemble des techniques enseignées, on ne retrouvait pas de technique s'appuyant sur la propriété de conservation des écarts. Un dernier point : les enseignants alors qu'ils n'étaient pas demandeurs initialement d'un autre projet d'enseignement ont accepté dans un premier temps de mettre en œuvre des scénarios que je leurs avais proposé (entre autres sur la propriété de conservation des écarts) et dans un second temps d'expérimenter l'ingénierie que je présente ci-dessous.

2 Grandes lignes de l'ingénierie

Le tableau présenté ci-dessous (figure 2) montre les grandes lignes de l'ingénierie. Il peut se lire verticalement et horizontalement.

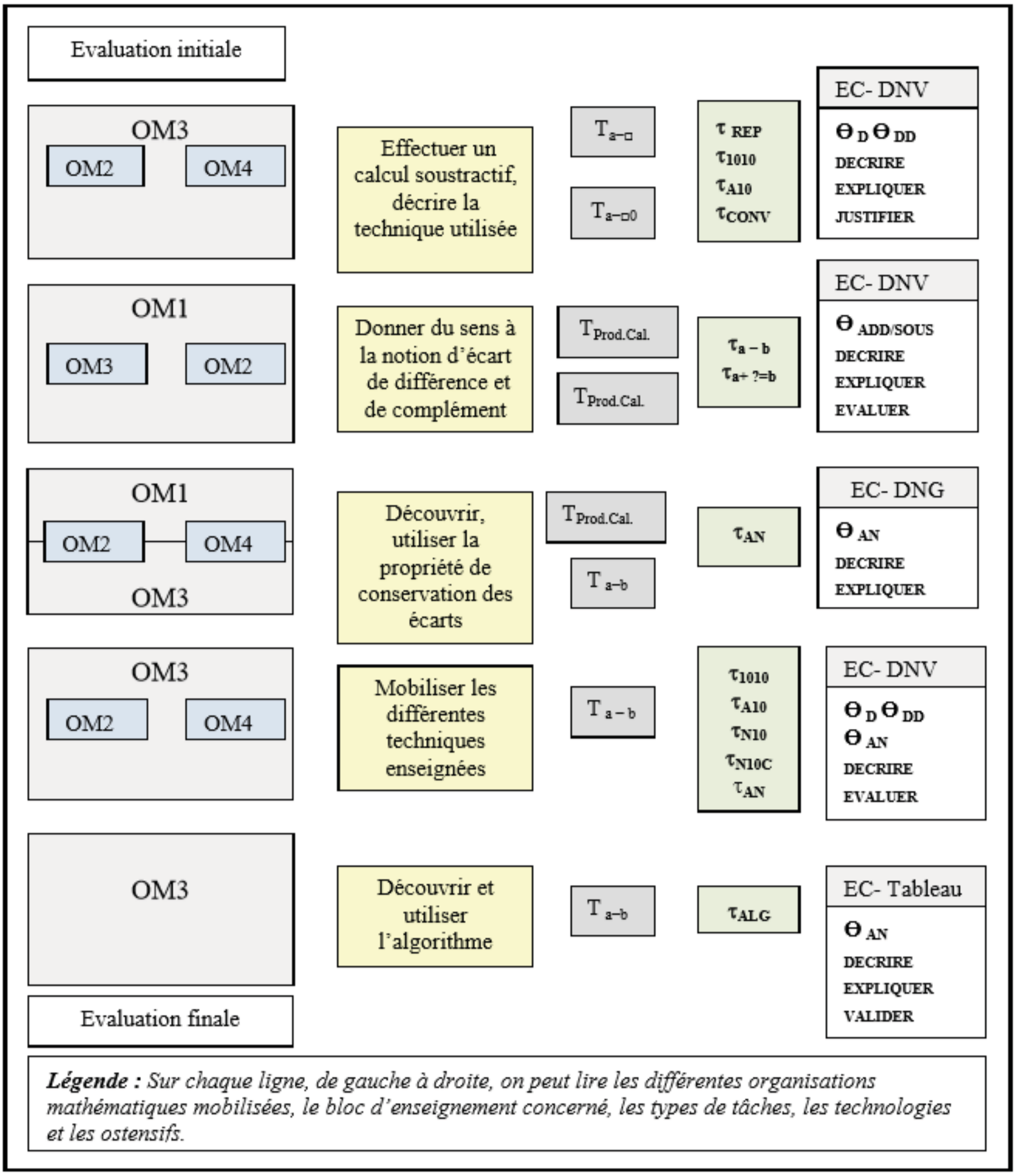


Figure 2. Présentation de l'ingénierie (Rinaldi, page 210)

Verticalement, ce tableau (figure 2) permet de voir que la mise en place de l'ingénierie a été précédée de la mise en place d'une évaluation initiale et suivie d'une évaluation finale pour mesurer les effets de l'ingénierie sur les apprentissages des élèves. Il montre comment l'étude a été découpée et programmée autour de cinq blocs d'enseignement (présentés dans la seconde colonne). Le dernier bloc visant l'introduction de l'algorithme de la soustraction posée basée sur la propriété de conservation des écarts. Le premier et l'avant dernier étant axé sur l'enseignement du calcul mental. Le deuxième et le troisième visant à donner du sens à la notion d'écart, de différence et de compléments et le troisième à découvrir et utiliser la propriété de conservation des écarts. Il montre comment les blocs sont imbriqués les uns aux autres donc qu'associer à l'effectuation de calculs (OM3) est associé un travail de mise en relation de représentations sémiotiques (OM2) et de réécriture de calculs.

Horizontalement, je vais détailler la lecture correspondant au premier bloc d'enseignement.

3 Introduction des écritures arithmétiques

Le premier bloc d'enseignement correspond à l'étude de deux types de tâches : soustraire un nombre inférieur à dix (Ta−□) et soustraire un multiple de dix (Ta−□0). Les moments correspondants à cette étude sont des moments de reprise au sens de Larguier (2009) car les élèves ont déjà rencontré ces types de tâches. Il s'agit alors de « ne pas reprendre totalement l'étude du thème et de s'efforcer de faire apparaitre le « nouveau à étudier » par rapport à « l'ancien ». La mise en scène choisie est directement inspirée d'une pratique d'un enseignant (pratique observée). Trois séries de quatre calculs sont donnés à chercher individuellement. Entre deux séries, un temps de restitution face au groupe classe est effectué.

En revanche, la consigne donnée aux élèves est modifiée. L'élève ne doit pas se contenter d'écrire le résultat. L'élève doit écrire le résultat et décrire la technique mise en œuvre pour effectuer le calcul. La nature des quatre calculs de chaque série est un début d'assortiment (Genestoux, 2002). En effet sur les quatre calculs, j'ai fait en sortes d 'assortir les trois premiers. C'est ainsi, que dans la première série composée des quatre calculs suivants 48− 5; 59− 2; 328− 6 et 70− 6, pour les trois premiers calculs, le nombre à soustraire est volontairement inférieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait. τ_{1010} est donc applicable. En revanche, pour le dernier, cette technique n'est pas applicable. La présence de ce calcul doit ainsi amener l'élève à évaluer la technique τ_{1010}.

Les productions et leurs évolutions sur plusieurs séquences vont permettre alors d'analyser la nature des techniques, des ostensifs et des éléments théoriques utilisés par les élèves et parallèlement les éléments institués par les enseignants.

Dans le paragraphe suivant, je donne des éléments d'analyse suite aux expérimentations conduites dans deux classes, nommées par la suite A et B.

IV - ANALYSE DE L'INGENIERIE

Les expérimentations ont commencé alors que les enseignants des classes A et B n'avaient pas encore abordé le calcul soustractif. Ils avaient travaillé sur le calcul additif et la numération (lecture, écriture et décomposition des nombres). Les séquences de l'ingénierie se sont enchainées, sept séquences de deux voire trois séances de 45 minutes chacune. Les données dont je dispose sont toutes les productions écrites des élèves et les enregistrements vidéo d'une à deux séances par semaine dans chaque classe. Elles m'amènent à questionner l'usage des écritures arithmétiques à différents moments de l'étude.

1 Analyse relative à l'étude de Ta−□

Le type de tâches qui consiste à soustraire un nombre inférieur à dix (Ta−□) a été abordé lors de la première séquence. Les tableaux qui suivent montrent les techniques utilisées par les élèves des classes A et B pour effectuer le calcul 48− 5 (premier calcul de la première séance).

	Classe A (17 productions)		
Techniques répertoriées		Nombre de productions	Résultats arrondis en %
	τ_{1010}	3/17	18%
	$\tau_{SOUS/ADD}$		
	$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ALG}}$	12/17	**71%**
Autres	Comptage		
	Imagée		
	Non identifiée	2/17	11%

	Classe B (29 productions)		
Techniques répertoriées		Nombre de productions	Résultats arrondis en %
	τ_{1010}	13/29	**45%**
	$\tau_{SOUS/ADD}$	2/29	7%
	$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ALG}}$		
Autres	Comptage		
	Imagée	2/29	7%
	Non identifiée	12/29	41%

Figure 3. Techniques pour effectuer 48 − 5

Dans la classe A comme l'enseignant n'avait pas précisé aux élèves qu'ils ne devaient pas poser d'opération en colonne, presque les trois quarts des élèves (71%) vont s'emparer de l'algorithme. A l'inverse, dans la classe B, vu que l'enseignant avait précisé qu'il ne voulait pas de calcul posé en colonne, seulement 2 élèves sur 29 posent leur calcul en colonne.
Par ailleurs, ce tableau montre que sur beaucoup de productions la technique n'est pas identifiée car les élèves se contentent d'indiquer qu'ils « enlèvent cinq à quarante-huit » pour obtenir quarante-trois.

On observe également que la technique attendue, basée sur la décomposition est présente dans les deux classes. En effet, je me suis basée sur les discours des élèves pour l'affirmer. Deux types de discours sont présents. Un type de discours où les nombres sont pris chiffre à chiffre. Un autre type où le nombre de départ 48 est décomposé additivement. Pour illustrer ce propos, j'ai sélectionné les productions suivantes :

Nombres considérés chiffres à chiffres	Nombres décomposés additivement
dans l'unittée de 8 j'ai enlever 5 et j'ai trouver 3 donc 43 8-5= 3, 48-5=43 — 43 48-5 3 — 43	C'est 43 car 8 c'est 3+~~8~~ -5 alor on enlève le 5 et on garde le 40 on rajoute le trois au 40 et ca fait 43 Je ~~vais~~ ses que ~~8-3~~ 3+ 3-5=3 et aprés je rajoute 40.

Figure 4. Exemples de discours associés au calcul de 48 – 5

Associé à ces productions, il est intéressant d'analyser les échanges entre enseignant et élève pour montrer les éléments théoriques mis en avant.

Premier échange :

L'enseignant a écrit le calcul à effectuer en ligne 48−5 au tableau.
Elève : 8 moins 5 ça fait 3 du coup ça fait 43. *L'enseignant écrit la réponse 43 et relie le 8 au 5.*
Enseignant : 8 moins 5, ça fait 3 dans les unités. Tu ne changes pas le 4.
Elève : Parce qu'il n'y a pas de changement de dizaine.
Enseignant : Là il n'y a pas de dizaine. *L'enseignant montre l'espace devant le 5*. Donc rien ne change au niveau des dizaines. *Il montre le « 4 » de 48 et le « 4 » de 43.*

Second échange :

Elève : Moi j'ai fait quarante plus huit après j'ai fait moins cinq et ça fait quarante-trois.
Enseignant : Vous avez compris ce qu'il a fait. Il sait que quarante-huit, c'est quarante plus huit, ensuite il a juste fait huit moins cinq. Tu as fait huit moins cinq. Tu as trouvé trois, tu as ajouté quarante. Tu trouves quarante-trois.

En considérant le premier échange, notons que le fait de relier les chiffres 8 et 5 permet de « montrer » comment la technique s'applique sans pour autant justifier celle-ci.

A contrario, dans le second échange, le fait d'indiquer que quarante-huit est égal à quarante plus huit est un début de justification. Cependant cette justification n'est pas menée jusqu'au bout car il n'y a pas de tâche propre à la réécriture de proposée. $48-5=40+8-5$ n'est pas une égalité numérique notée au tableau.

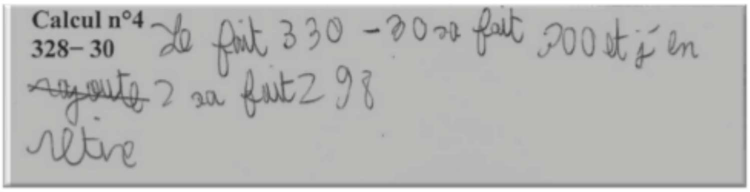
2. Analyse relative à l'étude de Ta−□0

Lors de la deuxième séquence, en prenant l'exemple de $328-30$, nous constatons que pour effectuer ce calcul :

- ✓ Environ la majorité des élèves de chaque classe utilise une décomposition du nombre à soustraire. Cela s'explique car ils ont travaillé au préalable sur des techniques séquentielles (à base de sauts) privilégiant le passage à la dizaine entière inférieure pour effectuer des calculs tels que 42– 7. La difficulté va alors résider à savoir comment décomposer 30 de façon économique. Quand 30 est décomposé en 20+10 ou 28+2 les élèves arrivent à effectuer correctement les calculs intermédiaires. En revanche, quand 30 est décomposé en 8+22 l'élève est bloqué pour soustraire 22 car il ne pense pas à ajouter une étape supplémentaire : soustraire 20 puis 2 pour simplifier le calcul.

- ✓ Très peu d'élèves (trois sur quarante-sept) pensent à convertir les nombres en dizaines et unités pour effectuer le calcul.

- ✓ Un seul élève utilise une technique par compensation



En faisant une synthèse de l'ensemble des analyses relatives à l'étude du type de tâches soustraire un multiple de dix, on peut affirmer que certains élèves rencontrent des difficultés liées au choix du nombre pivot. C'est ainsi que pour calculer 437– 50, ils vont commencer par soustraire 37 pour « arriver » à une centaine entière et être bloqués pour calculer le complément de 37 à 50 ou pour soustraire une fois effectué ce calcul, 13 au nombre 400. Par ailleurs, l'utilisation de la droite numérique n'est pas forcément d'une aide majeure. Elle permet à l'élève de s'engager dans un calcul, de le commencer sans lui permettre de le mener jusqu'au bout. En ce sens elle fait illusion, écran.

3. Analyse relative à l'étude de Ta−□□

En me basant sur les productions écrites des élèves et sur les moments de restitution filmés à l'occasion de la sixième séquence, je peux affirmer que le fait d'imposer à chaque élève de prendre un temps pour décrire « sa » technique en utilisant les écritures arithmétiques ou des schémas avec appui sur la droite numérique a permis d'enrichir les moments de synthèse. En effet, l'élève est mieux outillé pour expliquer aux autres les différents calculs qu'il a été amené à enchainer. L'enseignant, pour sa part, peut amener le groupe d'élèves à évaluer la technique et décider de l'instituer ou non. C'est ainsi que les enseignants des classes A et B qui jusqu'alors reprenaient uniquement à l'oral les propositions des élèves sans rien noter au tableau, s'engagent davantage dans un travail de réécriture.

De surcroit, on constate que les techniques exposées sont variées. Pour illustrer ce dernier point, voici des éléments de discours recueillis dans la classe B au sujet du calcul de 52– 16. Ces éléments sont retranscrits dans l'ordre chronologiques et révèlent :

- ✓ L'utilisation de τ_{AN}

Elève : « J'ai rajouté quatre aux deux nombres »

Enseignant : « Pourquoi as-tu ajouté quatre ? Quel nombre dois-tu regarder pour savoir combien ajouter ? »

Elève : « Seize »

Enseignant : « Oui, elle s'est dit seize c'est près de vingt. Soixante-deux plus quatre égal soixante-six moins vingt, quarante-six »

Le nouveau calcul est noté au tableau : 66– 20 = 46.

- ✓ L'utilisation de τ_{A10}

Elève : « J'ai fait un schéma ». *L'enseignant trace un trait horizontal.*

Enseignant : « Je ne sais pas combien d'étapes tu as fait. »

Elève : « J'en ai fait trois. J'ai fait soixante-deux moins deux. J'arrive à soixante. *L'enseignant marque un premier bond sur le schéma.*

Elève : « J'ai fait moins quatorze ».

Enseignant : « Tu arrives à le faire d'un coup ?

Elève : « J'ai fait moins dix. J'arrive à cinquante. Cinquante moins quatre, quarante-six. »

Un autre élève demande la parole pour mettre en avant l'utilisation de τ_{N10C}

- ✓ L'utilisation de τ_{N10C}

Elève : « Moi j'ai fait soixante-deux plus vingt moins quatre ». Ce à quoi l'enseignant réplique qu'il peut le noter.

Nous présentons ci-dessus la photographie du tableau suite à cette série d'échanges.

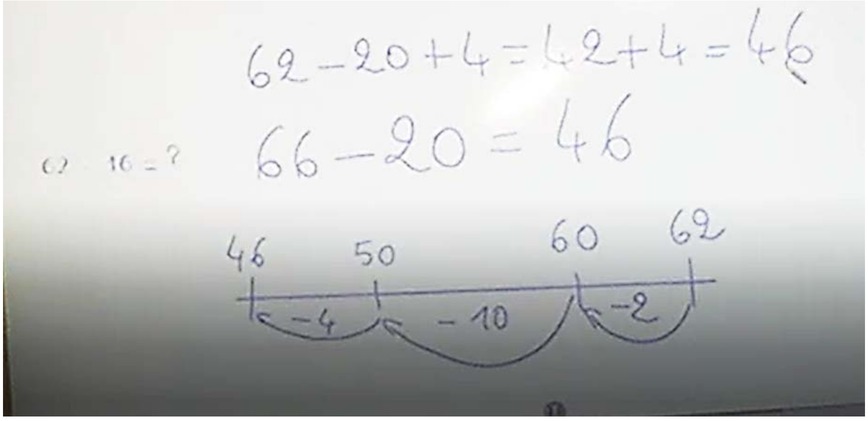


Figure 5. Utilisation des écritures chiffrées et de la droite numérique pour calculer 62 − 16

Cette trace écrite permet d'expliciter avec d'autres ostensifs que les mots de la langue française les différentes étapes qui ont conduit à trouver le résultat d'un calcul. Les ostensifs que sont les écritures arithmétiques ayant l'avantage d'être très économiques et par là même, voués à être de plus en plus utilisés dans la suite de la scolarité.

V - CONCLUSION

La confrontation entre les résultats obtenus à l'évaluation diagnostique et à l'évaluation finale permet de mesurer les effets positifs d'un travail régulier et progressif à partir des écritures arithmétiques sur les apprentissages des élèves. En effet, plus des trois quarts des élèves, les deux classes confondues arrivent à indiquer avec précision la technique qu'ils choisissent de mettre en œuvre. Ce n'était pas le cas avant d'avoir entamé l'étude. Ils se contentaient alors, de noter le résultat et utilisaient bien souvent le comptage pour le trouver. Ce n'était pas non plus le cas au tout début de l'étude car les enseignants des classes A et B pratiquaient beaucoup d'échanges oraux et n'engageaient pas un travail de réécriture. Le contrat didactique a évolué car la volonté d'expliciter les savoirs mathématiques qui se cachent derrière chaque calcul soustractif a été affirmée.

L'organisation mathématique de référence, construite en amont (cf. II.2), s'est avérée fondamentale pour recenser l'ensemble des techniques et des ostensifs envisageables. Elle s'est avérée complexe à transposer en classe. En effet, l'ingénierie (cf. III.2) proposée comporte un nombre conséquent de séquences et mériterait même d'être complétée par un dispositif d'aide. Pour certains élèves, motiver la nécessité de calculer, apprendre les répertoires, maîtriser les décompositions demandent plus d'accompagnement et de suivi. Par ailleurs, beaucoup de questions ont été soulevées, notamment sur la manière d'introduire la propriété de conservation des écarts, sur les aides à apporter pour amener les élèves à savoir soustraire des multiples de dix, sur l'importance à accorder à la droite numérique graduée. Autant de questions qui méritent de poursuivre la réflexion sur l'enseignement du calcul à l'école élémentaire, avant et après le cours élémentaire.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (2005). L'intelligence du calcul. In conférence à l'Université d'été de mathématiques, Saint Flour. Disponible en ligne : http://www.ac-clermont.fr/disciplines/fileadmin/user_upload/Mathematiques/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_02.doc (consulté le 11/07/15).

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel P., Vandebrouck F. & Wozniak F. (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p.15-25). Grenoble : la Pensée Sauvage.

BOBIS, J., BOBIS, E. (2005). The empty number line : Making children's thinking visible . Disponible en ligne: file:///C:/Users/camille/AppData/Local/Microsoft/Windows/INetCache/IE/CFI21X57/Bobis%20J%20and%20E%202005.pdf (consulté le 01/08/ 2015)

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.

BOSCH, M., GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12ième Ecole d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère). Du 20 au 29 aout 2003* (p. 107-122). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BOULE, F., (1994-1995). Regards sur le calcul mental. *Grand N*, 58, 39-52.

BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, M. (2007) Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique. *Grand N*, 79, 7-32.

CARPENTER, T.-P., FRANKE, M.- L., JACOBS, V.-R., FENNEMA, E., EMPSON, S.-B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 29(1), 3-20.

CASTELA, C., ROMO VAZQUEZ, R. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.

ERNEST, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics, 16.* 411- 424.

FUSON, K. C., WEARNE, D., HIEBERT, J., HUMAN, P., MURRAY, H., OLIVIER, A., CARPENTER, T.-P., FENNEMA, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.

GENESTOUX, F. (2002) Les assortiments didactiques. TD2 du thème 2. *Actes de la XIème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques* (p. 177-186). Grenoble: La Pensée Sauvage.

GRAVEMEIJER, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education, Journal for Research in Mathematics Education, 25, 443-471.

KLEIN, A.-S., BEISHUIZEN, M., TREFFERS, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 443 - 464.

LARGUIER, M. (2009) *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* Université de Montpellier II. Sciences et Techniques du Languedoc.

MAUREL, M., SACKUR, C. (2010). Il ne faut pas désarticuler un nombre. Mise en œuvre du dispositif Cesame en primaire. *Grand N*, *85*, 43-59.

RINALDI, A.-M .(2016). *Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie.* Thèse de doctorat. Université Sorbonne Paris Cité. Université Paris Diderot. Disponible en ligne :https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01470473/ (consulté le 21/06/ 2016)

ROBERT, A., PENNINCKX, J., LATTUATI, M. (2013). Présentation d'un ouvrage. Une ressource en formation de formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit x*, 92, 49-56.

TEPPO, A., VAN DEN HEUVEL- PANHUIZEN, M. (2014). Visual representations as objects of analysis : the number line as an example. *ZDM: the International Journal on Mathematics Education,* 46(1), 45-58.

THOMPSON, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1. *Mathematics in School November*, 2-4.

THRELFALL, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics,* 50(1), 29-47.