LABYRINTHES D'UN POINT DE VUE MATHÉMATIQUE ET EXPÉRIMENTATION, POINT DE DÉPART D'UNE FUTURE ANALYSE DIDACTIQUE

André STEF
Maître de conférences, Université de Lorraine
CNRS, IECL, F-54000 Nancy, France
andre.stef@univ-lorraine.fr

Résumé
Les labyrinthes ont un intérêt culturel, cultuel, artistique, initiatique, ludique, touristique, … et aussi mathématique. La plupart des intérêts signalés sont autant de raisons de les aborder en classe. Dans ce texte, nous nous intéressons uniquement à des aspects mathématiques des labyrinthes et à leur utilisation en classe : forme, parcours, codage, algorithmes de sortie, construction. Les expérimentations présentées ont été réalisées dans des classes d'écoles élémentaires (essentiellement de cycle 3) et en licence pluridisciplinaire scientifique (études menant des étudiants au professorat des écoles).
Dans une première partie, nous présentons les différents contextes dans lesquels les expérimentations ont été proposées ainsi que la nature du public élèves ou étudiants. Les mathématiques intervenant à propos des activités autour des labyrinthes sont explicitées dans la deuxième partie. Dans les deux parties suivantes, différents supports sont présentés ainsi que les enjeux des séances selon le contexte considéré. Une séquence réalisée dans une classe de CM1 est ensuite détaillée dans la partie 5.

I - CADRE DES EXPÉRIMENTATIONS

1 Parcours pluridisciplinaire scientifique (2001 – 2013)

Le parcours pluridisciplinaire à Épinal (licence pluridisciplinaire 2001 – 2005, puis parcours L3 des licences de Mathématiques et de Sciences Physiques dans le cadre LMD 2005 – 2013) s'adressait à des étudiants de formation scientifique (en particulier Mathématiques, Sciences Physiques) se destinant au métier de Professeur des Écoles.

2 Cycle 3 (2009 - 2013 et 2015)

Le travail sur les labyrinthes a été expérimenté plusieurs années (2008 - 2013) dans la classe de CM1/CM2 de Sylvie Baud - Stef, Professeur des Écoles, à l'école Jean Moulin de Champigneulles (54). Les interventions de l'auteur dans la classe se sont faites dans le cadre d'un projet de classe intitulé « des mathématiques autrement » faisant intervenir un chercheur dans la classe.

Les labyrinthes ont également été le thème d'une activité lors de la semaine des mathématiques en 2015 dans la classe de CM2 de Laurent Bauer, Professeur des Écoles, à l'école Fleming de Jarville (54).

3 U.E. Libre (S4) mathématiques pour le Professeur des Écoles (2013 – 2017)

Tous les étudiants inscrits dans une licence de l'Université de Lorraine choisissent en semestre 4 (S4) une UE, dite libre, (30 h de cours) dans une liste d'UE spécifiques proposées à l'échelle de l'université par les différentes formations. Un étudiant ne peut pas choisir une UE proposée par sa licence. L'UE « Math pour P.E » est proposée par la licence de mathématiques et s'adresse à des étudiants se destinant à passer les épreuves du CERPE, avec l'objectif annoncé que ces étudiants puissent maintenir des compétences en mathématiques, voire les développer.

Les labyrinthes sont abordés lors d'une séance sur les algorithmes. Ici un labyrinthe est tracé à l'entrée de l'amphithéâtre avant le début du cours.

4 U.E. Exposés mathématiques (S4) en licence de mathématiques (2013 – 2016)

Seule expérimentation avec des étudiants de licence de mathématiques (deuxième année), une séance permet aux étudiants de construire de manière autonome un labyrinthe sur le sol, puis d'aborder les notions algorithmiques associées aux labyrinthes.

5 Fête de la Science (Épinal 2010 – 2013, Faculté des Sciences 2016)

Un labyrinthe est construit sur le sol avec des étudiants (L3). L'animation par les étudiants ou l'auteur était faite devant des groupes d'élèves ou devant un public visiteur, pour des séances ne pouvant excéder 20 minutes. Elle porte sur les déplacements dans un labyrinthe, les problèmes liés au guidage d'une personne (repère tournant) et des algorithmes de parcours (main droite/main gauche, algorithme de Trémeaux).

II - MATHÉMATIQUES DU LABYRINTHE

Il s'agit de mettre en évidence les connaissances mathématiques susceptibles d'être abordées lors des activités en classe.

1 Topologie du labyrinthe

1.1 *Labyrinthe simple*

Un labyrinthe simple peut être défini comme un labyrinthe pour lequel il n'y a qu'un seul vrai chemin menant de l'entrée à la sortie. La définition de vrai chemin est à prendre au sens topologique, c'est-à-dire que ce chemin est défini à déformation continue près : on peut imaginer deux chemins « réellement parcourus » pour lesquels on a déroulé une ficelle sur le sol de l'entrée à la sortie. Ces deux chemins sont déclarés identiques (« homotopes ») si on peut déplacer une ficelle (« déformation continue ») pour la superposer à l'autre sur tout le parcours sans toucher aux deux extrémités.

Sur l'exemple suivant (figure 1), il n'y a qu'un seul chemin. À gauche le labyrinthe seul, à droite deux parcours correspondant à un même chemin topologique.

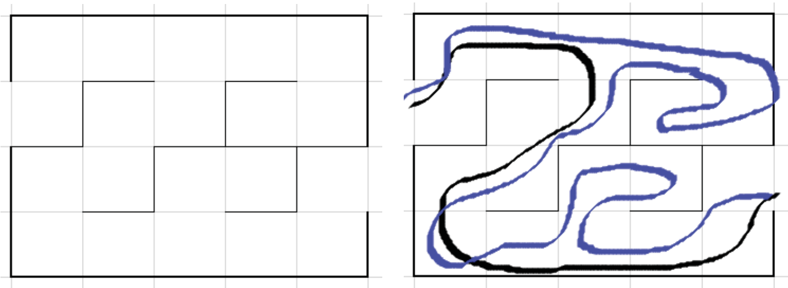


Figure 1 : labyrinthe simple

1.2 *Labyrinthe à ilot*

Ce sera la situation des labyrinthes qui ne sont pas simples. Des chemins différents sont possibles par l'existence d'ilots de murs non reliés aux bords du labyrinthe (des « trous »). Pour ces labyrinthes, il y a une infinité de chemins topologiques différents de l'entrée à la sortie.

Dans le labyrinthe suivant (figure 2) , il y a un ilot ; le nombre de tours et le sens de rotation déterminent des chemins.

À gauche, le labyrinthe seul, au centre deux chemins différents (au-dessus et au-dessous de l'ilot), à droite un troisième chemin différent (rotation d'un tour dans le sens des aiguilles autour de l'ilot).

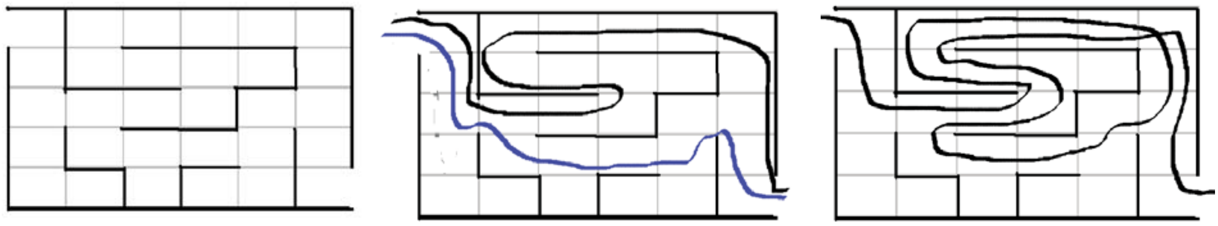


Figure 2 : labyrinthe à un ilot

Les labyrinthes introduits dans les expérimentations comporteront volontairement plusieurs ilots. L'exemple de la figure 3 comporte 13 ilots et nous donnons un exemple de chemin.

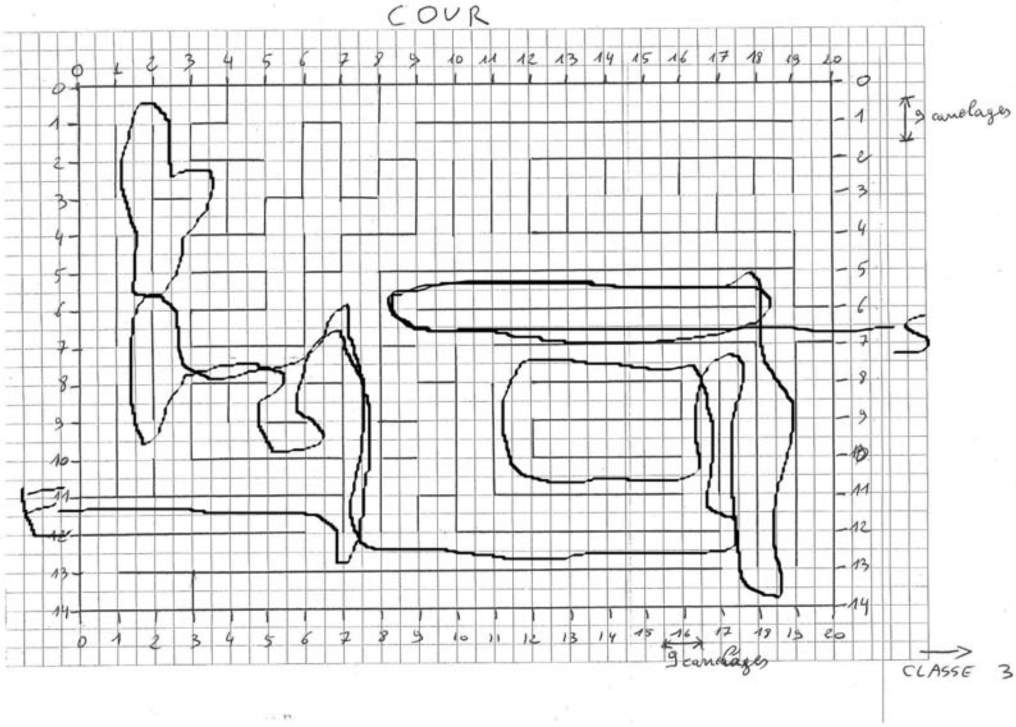


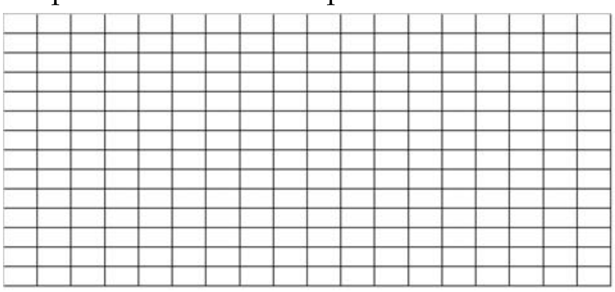
Figure 3 : labyrinthe à treize ilots

2 Longueur des murs

La construction sur le sol d'un labyrinthe de M x N cases carrées de côtés de mesure H, dont les murs seront des côtés des carrés nécessite une certaine longueur d'adhésif L. Une tâche consiste à estimer la longueur d'adhésif (ou le nombre de rouleaux) à prévoir. La valeur exacte peut ne pas dépendre uniquement de M, N et H, on peut en effet produire des labyrinthes de longueurs L différentes pour de même valeurs de M, N, H. Il s'agira donc de **majorer** la valeur L en fonction des trois données M, Net H.

Raisonnement possible (faisant intervenir des expressions « au plus », « au moins », « majorant ») :

- On part d'un réseau complet avec M x N zones isolées (il y a des murs partout).



- Calcul du nombre de murs. Un mur est une longueur H entre deux points du réseau.
  - Nombre de murs d'une ligne horizontale : M
  - Nombre de lignes horizontales : N + 1

- Nombre de murs horizontaux : M (N + 1) = MN + M
- Nombre de murs d'une ligne verticale : N
- Nombre de lignes verticales : M + 1
- Nombre de murs verticaux : N (M + 1) = NM + N
- **Nombre total de murs** (somme) **: 2 NM + M + N**

- On supprime alors des murs, afin de permettre le passage.
- Chaque fois qu'on enlève un « mur », on fusionne **éventuellement** deux zones pour n'en former plus qu'une.
- Donc si on veut n'avoir qu'une seule zone, car tout communique dans un labyrinthe, il faut casser **au moins** MN – 1 murs.
- Il **faut** de plus casser **un** mur pour l'entrée et **un** pour la sortie.
- Le nombre de murs est donc **au plus** 2 MN + M + N – (MN – 1 + 2) = MN + M + N – 1.
- La longueur L est donc **au plus** H (MN + M + N – 1).

Cas d'un labyrinthe dont le plan est présenté en section précédente (figure 3), réalisé sous le préau :

- Pour le labyrinthe 20 x 14 (M = 20 et N = 14), il faut au plus 313 murs (20 x 14 + 20 + 14 – 1), soit 156,5 m d'adhésif au plus (0,5 x 313) si la longueur d'un côté du carré est 50 cm.
- En pratique, il y avait quelques murs détruits supplémentaires, ne menant pas à des fusions de zones. Le nombre réel de murs est ici de 300 (c'est-à-dire la différence entre le majorant ci-dessous et le nombre d'ilots, 13 ici comme signalé plus haut, ce qui est un résultat général, puisque tout mur enlevé lors de la création du labyrinthe et ne fusionnant pas deux zones crée en fait un ilot).

3 Codage du parcours d'un labyrinthe plan

3.1 Cadre général

Décrire un labyrinthe revient à indiquer les choix d'orientation à chaque intersection. Dans un labyrinthe plan (qui peut être dessiné sur une feuille), par exemple, la première en partant de la droite est indiquée. Dans un labyrinthe quelconque, qui n'est autre qu'un graphe, le codage sera lié à la manière dont ce graphe est défini.

3.2 Codage d'un labyrinthe à cases carrées

Dans le cas d'un labyrinthe à cases carrées ou rectangulaires (comme dans les exemples précédents), avec des murs, côtés de ces carrés, un chemin parcouru ou à parcourir peut être décrit de plusieurs manières :

- à l'aide d'une suite (finie) de 3 lettres
  - T avancer d'une « case » tout droit ;
  - G pivoter d'un quart de tour sur la gauche et avancer d'une « case » ;
  - D pivoter d'un quart de tour sur la droite et avancer d'une « case ».

  La dernière case parcourue fournit l'orientation pour comprendre l'orientation indiquée pour le déplacement suivant. Il s'agit donc ici d'un repère mobile.
- à l'aide d'une suite de 4 lettres indiquant la direction à suivre, d'une case :
  - H vers le haut de la feuille ;
  - D vers la droite de la feuille ;
  - B vers le bas de la feuille ;
  - G vers la gauche de la feuille.

Ou par exemple les points cardinaux N, E, S, O repérés sur les bords de la feuille. Il s'agira donc d'un repère fixe.

4 Algorithmes

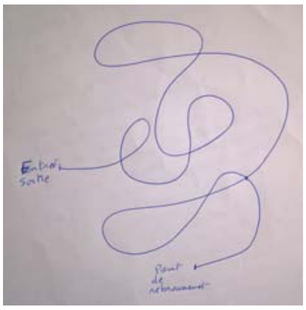
Il s'agit d'algorithmes permettant d'indiquer la manière de parcourir un labyrinthe pour effectuer une tâche donnée.

4.1 Revenir à son point de départ. Le fil d'Ariane.

Si une ficelle est attachée à un point de départ et qu'on parcourt le labyrinthe, il suffit, pour revenir à son point de départ à tout moment, de suivre le fil en sens inverse pour revenir à ce point de départ. C'est la méthode indiquée dans la mythologie grecque par Ariane à Thésée[1] pour sortir du (LE) labyrinthe.

Une variante est la méthode utilisée avec les cailloux par le Petit Poucet (dans le conte de Charles Perrault (1628 – 1703)) pour sortir de la forêt. Il s'agit bien d'une variante et non de la même méthode car si le fil d'Ariane peut se croiser, on sait quel bout du fil suivre. Pour les cailloux du Petit Poucet, on ne sait pas, lors d'un croisement, quels sont les cailloux posés le plus récemment, mais notons que le choix de la piste suivie n'a pas d'importance :

- S'il s'agit de la piste la plus récente, le Petit Poucet reviendra à cette intersection après une boucle suivie dans la forêt puis prendra la piste plus ancienne ;
- S'il s'agit de la deuxième piste la plus récente, il suivra une boucle pour revenir par la piste la plus récente, puis suivra une piste plus ancienne ;
- S'il s'agit d'une piste plus ancienne, alors il économisera le parcours d'une boucle.



Une remarque : cette méthode, suivie par Thésée, ne lui permettait pas de trouver à coup sûr le Minotaure, même si ce dernier ne bougeait pas.

4.2 Algorithme de la main droite / main gauche

Ces algorithmes s'appliquent pour traverser un labyrinthe plan de l'entrée à la sortie, qui se trouvent au bord du labyrinthe (et non dans le labyrinthe, par exemple par un escalier).

Le mur d'enceinte est défini comme l'ensemble des murs qui cernent le labyrinthe ainsi que les murs qui sont reliés à ces premiers murs. Lorsqu'il y a une entrée et une sortie distinctes (ce qui n'est pas le cas dans le labyrinthe de la mythologie), il y a alors deux murs d'enceinte (le mur à droite de l'entrée et celui à gauche) (figure 4).

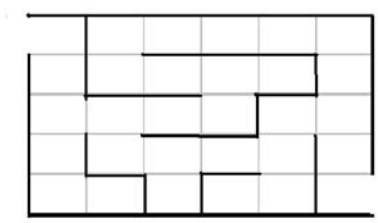


Figure 4 : labyrinthe avec une entrée et une sortie distinctes

[1] « Ayant fourni tous les renseignements à Thésée, elle lui donna aussi un fil qui lui permit de sortir du Labyrinthe, après avoir vaincu le Minotaure. »

Algorithme de la main droite :

En entrant dans le labyrinthe, suivre le mur de droite et parcourir alors le mur d'enceinte du labyrinthe. En suivant ce mur, qui a un côté intérieur (au labyrinthe) et un côté extérieur, on est certain de passer à un moment de l'intérieur à l'extérieur (ce mur a deux extrémités : l'entrée et la sortie), ce sera la sortie du labyrinthe (figure 5).

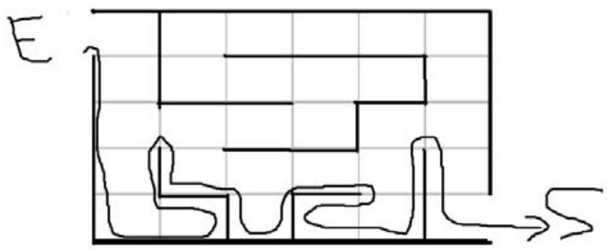


Figure 5 : algorithme de la main droite

Algorithme de la main gauche :

De même, le fait de suivre le mur de gauche dès l'entrée mènera également à la sortie (figure 6).

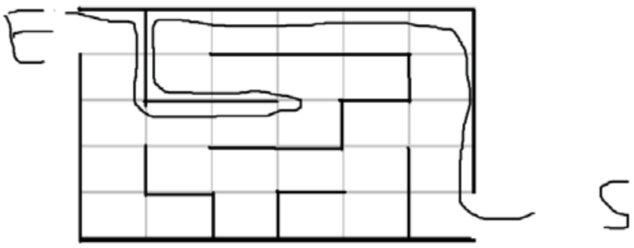


Figure 6 : Algorithme de la main gauche

Ces deux algorithmes ne peuvent être étendus aux cas suivants :

- S'il est appliqué et que l'on change de mur en cours de parcours, il n'est alors pas certain que le nouveau mur soit un mur d'enceinte (cela peut être un ilot), donc on peut alors « tourner en rond » sans trouver la sortie.
- S'il est appliqué alors que l'on est déjà dans le labyrinthe, il n'est pas certain que les murs voisins soient des murs d'enceinte, le fait de parcourir l'un de ces murs ne garantit donc pas que l'on trouve la sortie.
- Si un « trésor » est à trouver dans le labyrinthe, le parcours « main droite » (comme celui de « main gauche ») ne garantit pas que celui qui le suit passe à proximité de ce trésor. En effet, l'algorithme ne permet pas de s'éloigner du mur d'enceinte et le trésor peut en être éloigné.
- Si le labyrinthe n'est pas plan (plusieurs niveaux par exemple), ces algorithmes ne garantissent pas que l'on trouve la sortie. Sans indication supplémentaire, il n'y a pas de certitude que toute la surface (sur chaque niveau du labyrinthe) du mur d'enceinte sera suivie, et il n'est pas exclu qu'on tourne en boucle. Pour comprendre la complexité de cette situation, une première réflexion peut-être de se demander la voie à suivre lorsqu'on rencontre un escalier dans un tel labyrinthe (prendre ou non l'escalier ?).

Remarque : ces algorithmes de main droite / main gauche auraient permis à Thésée de revenir à l'entrée (qui est également la sortie) mais pas de trouver à coup sûr le Minotaure.

4.3 Algorithme de Gaston Tarry (1895)

Cet algorithme permet de parcourir tout le labyrinthe. Tout passage sera alors parcouru deux fois exactement avant de revenir au point de départ si on ne trouve pas de sortie. En voici une description :

- On parcourt chaque couloir exactement deux fois dans chaque sens, en mettant une marque à l'entrée et à la sortie dans le couloir ;

- À chaque carrefour, on s'impose de ne reprendre le couloir de découverte du carrefour qu'en dernier recours.

Cette description n'est toutefois pas suffisamment explicite sur le choix du parcours à effectuer. Il s'agit moins d'un algorithme que d'un principe général. Curieusement (ou pas) une description plus complète existe et elle est antérieure.

4.4 Algorithme de Charles Trémeaux (19e siècle)

Il est plus explicite que celui de Gaston Tarry.

- On marquera le couloir à l'entrée et à la sortie chaque fois qu'on l'emprunte.
- On emprunte une voie quelconque. Si on aboutit à une impasse on revient sur ses pas.
- Si on arrive par une voie nouvelle à un carrefour déjà exploré, on revient sur ses pas (ce qui revient à condamner cette voie).
- Si on arrive à un carrefour déjà exploré par une voie déjà parcourue dans l'autre sens, on choisit en priorité une voie nouvelle, sinon une voie parcourue dans un seul sens.

Le principe de cette méthode est le suivant :

- Sa mise en œuvre amène à marquer à chaque fois qu'on parcourt un couloir son entrée et sa sortie. Lorsqu'une entrée de couloir est marquée deux fois, ce couloir est considéré comme condamné.
- Le fait d'arriver par une voie nouvelle (c'est-à-dire empruntée pour la première fois) à un carrefour déjà exploré permet de constater que :
    - on n'est pas arrivé dans un nouveau lieu,
    - on est dans un lieu qu'on pourra retrouver en revenant sur ses pas.

  On peut alors revenir sur ses pas et condamner cette voie.

Cette méthode peut être illustrée sur le sol d'un labyrinthe à l'aide de jetons (ou bouchons). Sur la figure 7 une illustration par un parcours suivant cette méthode.

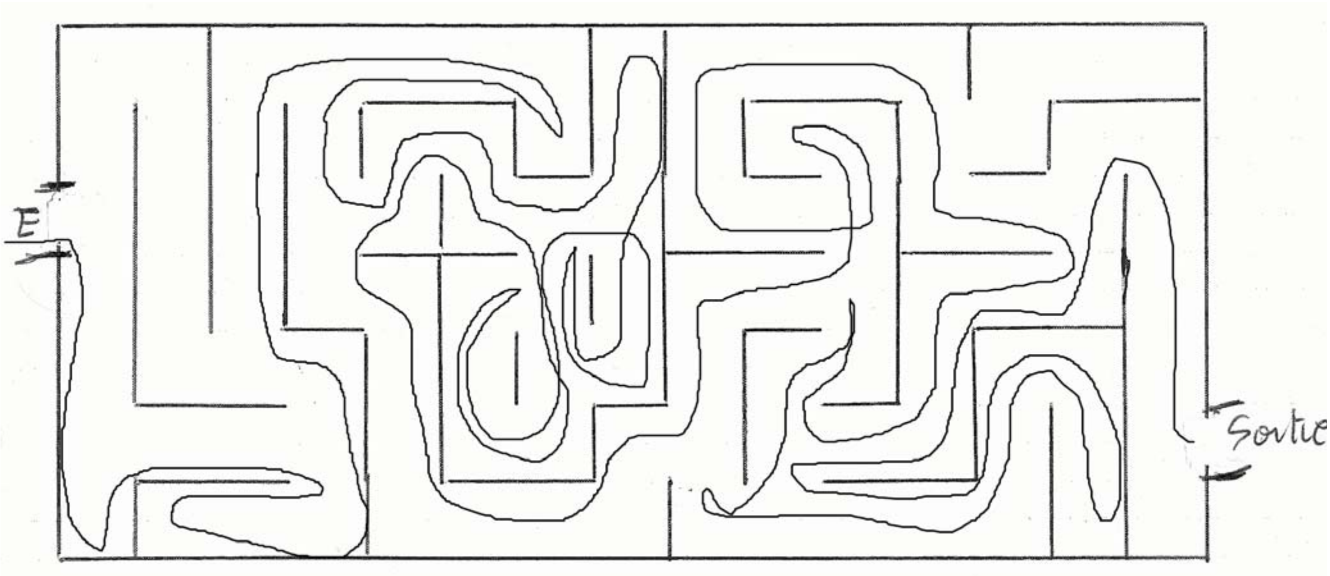


Figure 7 : Algorithme de Charles Trémeaux (entrée / sortie)

Si la sortie n'est pas recherchée mais l'exploration de tout le labyrinthe, le parcours pourra se poursuivre comme indiqué dans le labyrinthe de la figure 8 (en bleu)

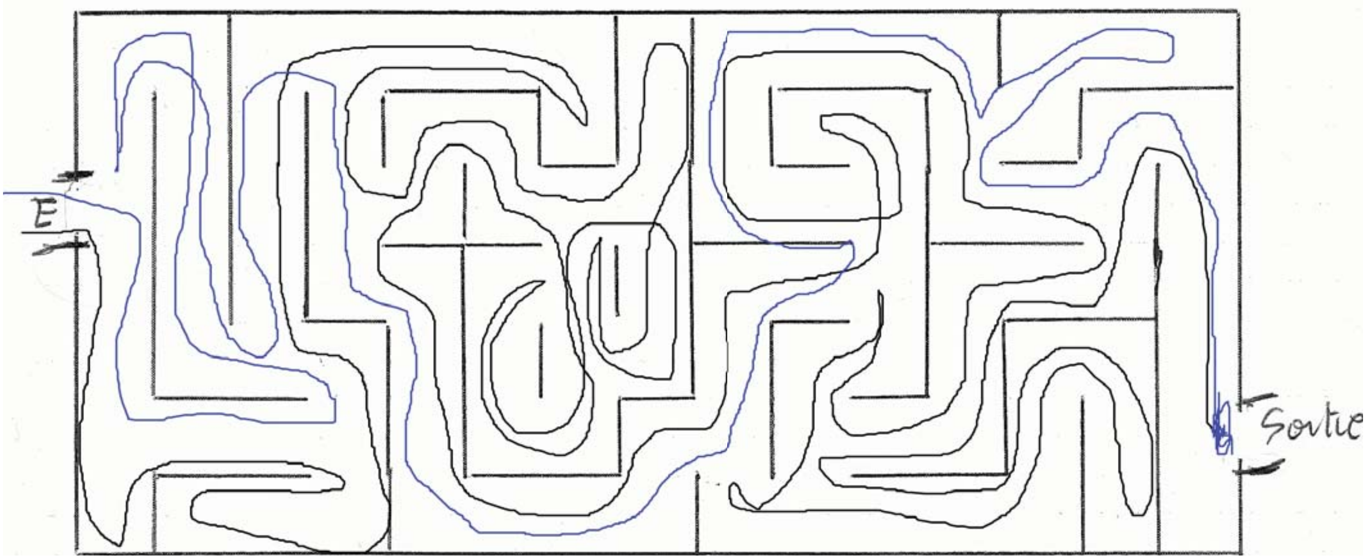


Figure 8 : Algorithme de Charles Trémeaux (exploration de tout le labyrinthe)

Par cet algorithme, tout labyrinthe est exploré, y compris les labyrinthes non plans, l'orientation (droite/gauche) n'ayant pas de rôle ici.

En suivant cet algorithme, Thésée aurait trouvé le Minotaure, si ce dernier ne se déplaçait pas.

4.5 Autres algorithmes

Il existe d'autres algorithmes permettant d'explorer un labyrinthe, mais l'objectif n'est pas ici de viser l'exhaustivité. Citons par exemple l'algorithme d'Oystein Ore (20e siècle) qui explore l'algorithme « en profondeur » : les cases sont codées par leur distance au point de départ au fur et à mesure de l'exploration du labyrinthe. Le principe est le suivant :

- coder 0 la case de départ ;
- se déplacer à une case voisine, codée 1, puis revenir à la case 0 et recommencer vers toutes les cases voisines de 0 ;
- partir de la case 0 pour rejoindre chaque case 1 pour coder 2 toutes les cases voisines de chaque case 1 qui ne sont pas encore numérotées ;
- recommencer, jusqu'à arriver à la sortie ou au trésor. Le code de la case de sortie indique la longueur du chemin minimal. Revenir au point de départ se fait en parcourant des cases dans l'ordre des codes décroissant.

Cette description n'est pas complète, il faudrait préciser comment sont explorées toutes les cases voisines d'une case 1, par exemple. Le temps d'exploration du labyrinthe est beaucoup plus important que celui de la méthode de Trémeaux, mais fournit d'autres informations.

III - SUPPORTS POUR LA REPRÉSENTATION DE LABYRINTHES

1 Forme des labyrinthes utilisés

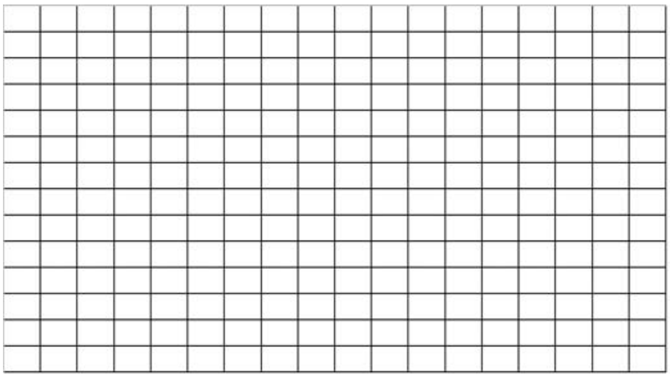
Les labyrinthes utilisés respectent tous le modèle suivant :

- un rectangle ;
- des murs à angle droit (deux directions de mur) et sans épaisseur, des cases (ou cellules) carrées (ou rectangulaires) ;
- tout le rectangle est utilisé (labyrinthe parfait), c'est-à-dire que toutes les cases du rectangle sont reliées (accessibles) ;
- une entrée ;

- une sortie.

2 Plans

Les plans s'appuient ainsi sur le réseau d'une feuille, les murs sont des segments du quadrillage.



Sur une feuille à petits carreaux, le choix est de considérer des cases de 1 cm de côté, soit des cases de « 2 x 2 carreaux ».

3 Tracés sur le sol

La matérialisation des murs d'un labyrinthe sur le sol peut être réalisée à l'aide de rouleaux de masquage. Il s'agit d'un adhésif, peu cher, facile à placer et à enlever, utilisé pour protéger des surfaces lors de la peinture de zones connexes. Cette idée a été fournie à l'auteur par Sophie André et Lauriane Berger, étudiantes en L3 pluridisciplinaire (2008 – 2009), lors de leur exposé sur les algorithmes dans les labyrinthes. Le pavage du sol par des dalles (de moquette) ou des carrelages (carrés ou rectangles) permet de repérer facilement les deux directions. La taille des cases est choisie en relation avec les dimensions des carrés unitaire du pavage du sol (ci-dessous à gauche, une case = 2 x 2 carreaux, et à droite, une case = 9 x 9 carreaux) (figure 9).

Figure 9 : Labyrinthes tracés sur le sol (moquette et carrelage)

En l'absence de pavage sur le sol, il convient de tracer le rectangle de contour, le réseau des intersections (figure 10).

Figure 10 : Labyrinthe tracé sur le sol au parc des expositions d'Epinal lors de la fête de la Science

4 « Planche à clous »[2]

Un réseau de clous est planté sur un plateau de bois. Les murs sont réalisés avec des élastiques, facilement déplaçables (figure 11).

Figure 11 : Labyrinthe sur une planche à clous

5 Autres idées

D'autres idées ont été proposées lors d'activités en écoles, par les élèves ou les enseignants (figure 12)

Figure 12 : Labyrinthes avec des briques de bois[3]

---

[2] L'idée est d'Edith Petitfour, alors en poste à l'IUFM de Lorraine.

Citons encore, des labyrinthes réalisés avec des cotons tige (avec adhésif) et des briques plastiques se fixant (clipsant) sur une grille support (figure 13).

Figure 13 : Labyrinthe avec des cotons tige[4]

IV - OBJECTIFS DE SÉANCES SUR LES LABYRINTHES

1 Parcours pluridisciplinaire scientifique (2001 – 2013)

Les labyrinthes sont abordés dans le cadre d'un travail sur les algorithmes. Il s'agit d'illustrer :

- la diversité d'algorithmes permettant d'arriver à un même résultat ;
- la comparaison d'algorithmes ;
- la réflexion sur les notions de majorant, de maximum (nombre de murs) ;
- et de présenter des notions mathématiques travaillées à l'école primaire (telles que plan, orientation, codage, échelles, débuts de la proportionnalité).

2 Cycle 3 (2009 – 2013)

L'activité sur les labyrinthes est l'occasion :

- d'amener les élèves à réinvestir des notions déjà rencontrées,
- de travailler simultanément sur le plan et le modèle grandeur nature,
- de construire un objet qui devient plan et de réaliser ce plan « grandeur nature »,
- de travailler ainsi sur la proportionnalité,
- de travailler sur le codage et son expérimentation,
- de travailler en groupe classe sur un projet,
- d'échanger (dans le cadre des « mathématiques autrement ») avec un chercheur,
- de montrer que les mathématiques permettent d'appréhender le monde.

3 U.E. libre (S4) mathématiques pour le professeur des écoles (2013 – 2017)

Les labyrinthes sont l'occasion d'illustrer un cours sur les algorithmes et de montrer ce que des élèves de cycle 3 peuvent réaliser dans un travail sur les labyrinthes. Il s'agit également de montrer ce que peut être le travail du professeur des écoles à de futurs étudiants de Master MEEF.

4 U.E. Exposés mathématiques (S4) en licence de mathématiques (2013 – 2016)

L'objectif est essentiellement d'étudier les algorithmes.

---

[3] à gauche : école Jean Moulin de Champigneulles (54), classe de CM1/CM2 de Sylvie Baud-Stef, à droite : école Fleming de Jarville (54), classe de CM2 de Laurent Bauer

[4] école Fleming de Jarville (54), classe de CM2 de Laurent Bauer

5 Fête de la Science (Épinal 2010 – 2013, Faculté des Sciences 2016)

L'objectif est de montrer que les mathématiques sont présentes ou peuvent être mobilisées pour résoudre des problèmes de la vie courante ou dans des activités de jeux. Les labyrinthes sont l'occasion de parler de codage, repérage, algorithmes…

V - ACTIVITÉ EN CLASSE DE CM1

La description de l'activité du point de vue de l'enseignante, Sylvie Baud-Stef a été publiée dans PLOT[5].

1 Séance 1 : parcours dans un labyrinthe

1.1 Travail préparatoire, en dehors du temps de classe, par l'enseignant

Un labyrinthe (voir figure 9 à droite), avec des ilots[6], est réalisé préalablement par l'enseignant sur le sol, en dehors de la classe (dans le préau, par exemple). Il n'est pas nécessaire qu'il soit caché aux élèves, il est même utile qu'il soit visible pour susciter la curiosité et l'intérêt.

1.2 Découverte en classe

Une question est posée en début de séance à la classe : qu'est-ce qu'un labyrinthe ? Un temps d'échanges avec les élèves doit permettre de faire ressortir les idées de mur (miroir, haies), de chemin (tunnel), d'intersection (bifurcation), d'entrée, de sortie (trésor). Peut apparaître (mais concerne davantage la suite) l'évocation du fil d'Ariane (rare) ou du Petit Poucet (très rare). Sont également mentionnés : Alice aux pays des Merveilles, des champs de maïs, les vacances, les monstres (très fréquent).

Un plan de labyrinthe est distribué à chaque élève. Il s'agit de trouver la sortie (figure 14).

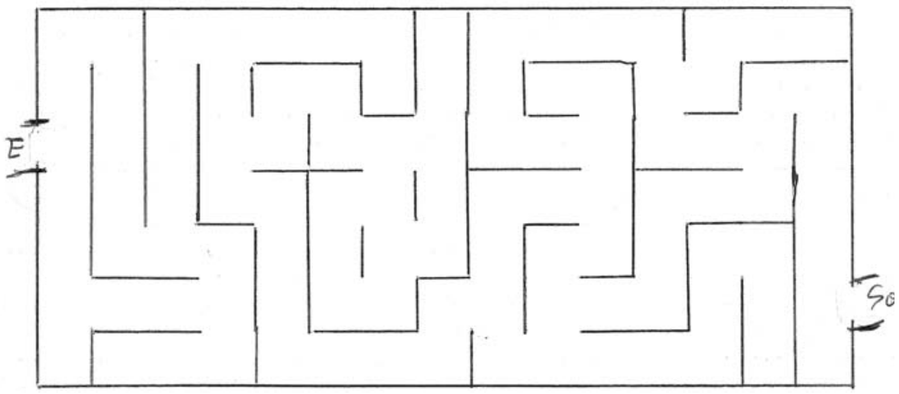


Figure 14 : Plan du labyrinthe

La consigne donnée ensuite est : décrire le chemin vers la sortie au moyen des trois lettres suivantes :
- T : avancer d'une « case » tout droit
- G : tourner d'un quart de tour sur la gauche et avancer d'une « case »
- D : tourner d'un quart de tour sur la droite et avancer d'une « case »

La description du parcours est une suite dont les éléments sont ces trois lettres, écrite sur une feuille (différente du plan pour éviter l'écriture du code dans les cases du plan, qui pourrait faciliter le repérage).
Ici, contrairement à l'utilisation de directions fixes (gauche/droite/haut/bas d'une feuille ou points cardinaux N/S/E/O), le codant doit se représenter la position et l'orientation de celui qui parcourt, virtuellement ou réellement, le labyrinthe. Le repère est dit « tournant ».

---

[5] « Des labyrinthes dans l'école » PLOT n° 52 APMEP

[6] important pour la suite

Une difficulté rencontrée lors de la première expérimentation par des élèves est l'identification de chacune des cases. Il y a été remédié lors des expérimentations suivantes en « pointant » les cases du plan du labyrinthe (figure 15)

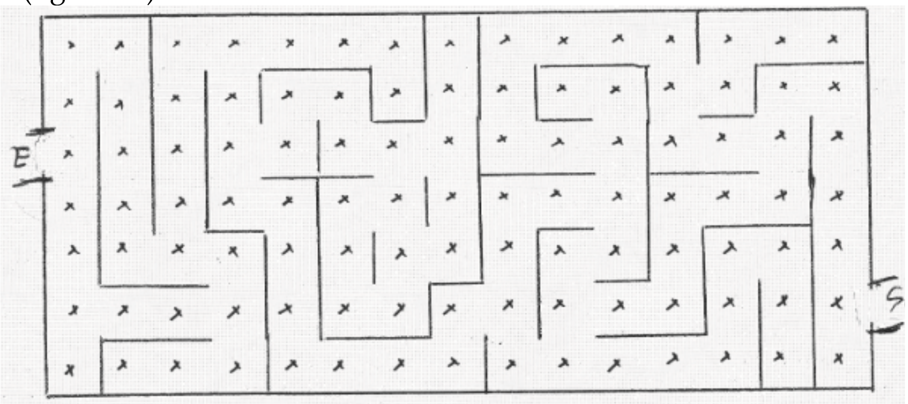


Figure 15 : Plan du labyrinthe avec identification de chacune des cases par une croix

La vérification du codage réalisé consiste à le tester sur le labyrinthe dessiné précédemment sur le sol (cases non encore pointées au moment de la prise de la photographie (figure 9)). Les élèves parcourent le labyrinthe avec leur propre feuille de code ou celle d'un autre.

Des activités optionnelles[7], selon intérêt, le nombre d'élèves et le cadre sont envisagées :

- guider oralement, avec le même code T,G,D un élève dans le labyrinthe ;
- guider un élève, en utilisant le plan et en tournant le dos au labyrinthe ;
- placer un carton (type boite de papier A4) sur la tête d'un élève et lui demander de parcourir le labyrinthe. Cela illustre le fait de ne voir qu'une partie locale du labyrinthe alors que la vue de l'ensemble permet de se projeter dans un chemin perçu vers la sortie.

L'analyse avec les élèves de l'activité permet de faire ressortir :

- la rigueur du codage nécessaire ;
- la difficulté du codage pour cause de repère «qui tourne ».

1.3 Algorithmes

Au cours de la réflexion commune sur la manière de sortir d'un labyrinthe, menée dans la salle du labyrinthe, tout avec le groupe, peut apparaître la « méthode de la main droite », connue de certains élèves. Il est également possible de la faire émerger en regardant ce qui se passe si on longe le mur. L'enjeu est de faire formuler la méthode et de discuter à propos de la raison pour laquelle elle permet bien de sortir. Ensuite il s'agit de faire émerger la méthode de la main gauche et de la faire vérifier expérimentalement pour faire ressortir les limites de la méthode. Pour cela, il convient d'avoir réalisé un labyrinthe à ilots, pour tourner ou faire tourner un élève autour de cet ilot. Il est juste signalé qu'il y a des méthodes qui permettent de sortir du labyrinthe si on est perdu mais que ce n'est pas le but d'en parler ici. Et pour rassurer, informer qu'à la fête foraine, dans les labyrinthes de miroirs, il n'y a pas d'ilot et que suivre un mur au hasard à tout moment mène à la sortie ou à l'entrée (faire alors demi-tour).

1.4 Tâche à proposer

Les élèves doivent ensuite réaliser un plan de labyrinthe plus grand que celui utilisé en classe. Un des plans sera choisi puis réalisé par les élèves sur le sol. La consigne est : indiquer la dimension[8], des murs

[7] Activités réalisées lors d'animations mathématiques car la phase de codage n'est pas adaptée à une présentation à un public pressé

[8] pour la suite, 20 x 14, n'avait pas été choisi au hasard.

suivant le quadrillage de la feuille, toutes les cases accessibles, une entrée, une sortie, des ilots, le « plus compliqué possible ».

2 Séance 2 : réalisation d'un labyrinthe

2.1 Analyse

Le plan de labyrinthe ci-dessous reprend le plan choisi (proposé par un élève de CM1). Tous les élèves ont un exemplaire (figure 16).

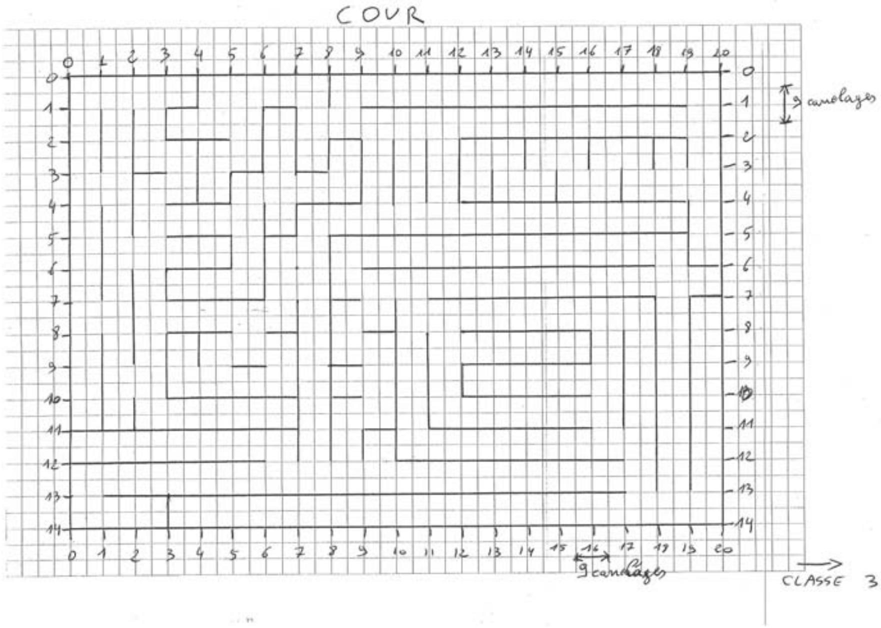


Figure 16 : labyrinthe à treize ilots proposé par un élève de CM1

Le premier travail est d'indiquer l'orientation sur le sol (voir mention de la cour et de la salle de classe). Le sol du préau étant carrelé (cas le plus favorable), il s'agit de déterminer l'échelle. Les données initiales sont les dimensions du préau (que les élèves devront mesurer) et les dimensions du labyrinthe. La proportionnalité (recherche de l'échelle du plan à la grandeur nature) peut être appliquée (via une division décimale ou euclidienne par 20 et une autre par 14), pour calculer la taille d'une case (le plus petit des deux quotients pour obtenir une case carrée). Toutefois une considération pratique sera de chercher à obtenir comme dimensions d'une case des côtés de mesure un nombre entier de fois la mesure d'un carreau de carrelage (ici 9 carrelages) (figure 17).

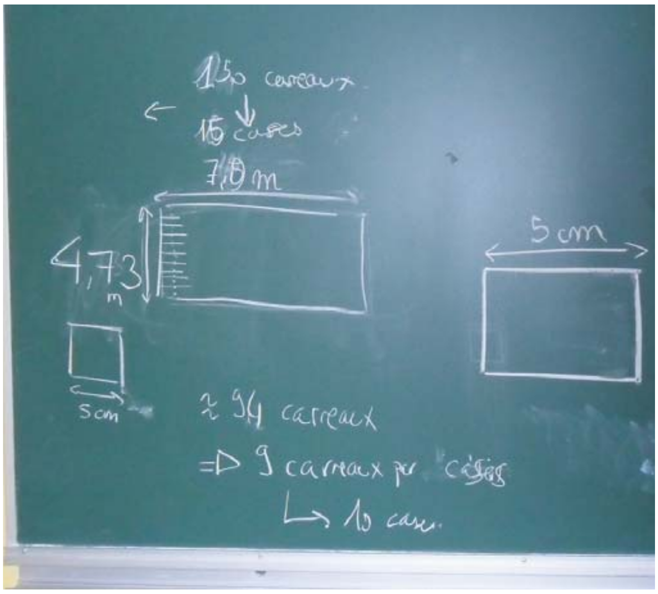


Figure 17 : travail préparatoire sur tableau noir d'étudiants de L3 pluridisciplinaire

2.2 Travail préparatoire sur le sol

Les élèves matérialisent avec l’adhésif le rectangle contenant le labyrinthe puis construisent le réseau des sommets des cases. Lorsque le sol n’est pas carrelé, la construction (plus ou moins approximative) du rectangle d’enceinte (avec indication de la graduation des cases sur l’adhésif) sert de support pour la construction du réseau à l’aide d’un mètre rouleau (de 8 mètres) (figure 18).

Figure 18 : réseau du labyrinthe de L3 (à gauche) et de la fête de la science, sans carrelage (à droite)

2.3 Réalisation des murs

Une fois construit le réseau et le mur d’enceinte du labyrinthe, les élèves peuvent construire les murs. Au cycle 3, les élèves proposent où placer un mur, l’enseignant valide et pose l’adhésif (figure 19)

Figure 19 : labyrinthe avec les murs

2.4 Un calcul de longueur

Le calcul de la longueur d’adhésif nécessaire est traité en fin de séance. Le dénombrement des murs du réseau complet (cf II.2) est mené en groupe classe avec l’enseignant. La présentation des fusions de cellules et surtout le travail de majoration est une tache compliquée pour une grande partie des élèves. Il reste un travail de réflexion à mener pour amener les élèves à comprendre cette étude de longueur.

VI - CONCLUSION

La différence essentielle de gestion des séances en cycle 3 et en parcours pluridisciplinaire est la plus grande autonomie laissée aux étudiants pour construire le labyrinthe. Une autre différence est la possibilité d’aborder des algorithmes plus complexes, par la compréhension de ce qui en fait des algorithmes d’exploration du labyrinthe.

Que ce soit en parcours pluridisciplinaire ou en cycle 3, on note à chaque fois un grand enthousiasme des élèves/étudiants à parcourir, coder, comprendre un algorithme, construire un labyrinthe et ainsi travailler des notions mathématiques. En UE libre, les étudiants hésitent à parcourir le labyrinthe (la « sortie » étant la porte d’entrée de l’amphithéâtre pour le cours à suivre), malgré les incitations de l'enseignant alors que des étudiants de licence de mathématiques, également en S4 étaient très enthousiastes pour construire et parcourir un labyrinthe. Une explication possible à ce refus : les étudiants d'UE libre sont réunis pour ce seul cours mais ne constituent pas un groupe-classe comme le sont les élèves de cycle 3 ou les étudiants du parcours pluridisciplinaire et le regard d'autrui peut les gêner.

Les étudiants de parcours pluridisciplinaire réinvestissent leur travail sur les labyrinthes pour des animations lors de la fête de la science auprès d'un public non scolaire.

Les élèves de cycle 3 s'approprient le labyrinthe pour expliquer les déplacements et algorithmes aux élèves d'autres classes. L'enthousiasme des élèves n'a pu cependant être transmis aux enseignants des autres classes. Les élèves éprouvent le besoin d'ajouter des contraintes, par des feuilles retournées dans le labyrinthe, imposant au promeneur dans le labyrinthe de revenir à l'entrée si la feuille rencontrée révèle un monstre. Non seulement l'objectif de montrer que les mathématiques sont en lien avec le monde est atteint, mais nous avons eu la bonne surprise de constater qu'elles ont touché l'imaginaire des élèves.

VII - BIBLIOGRAPHIE

BAUD-STEF S. (2016) Des labyrinthes dans l'école. *Plot* **52**, 8-11

TANGENTE HS12 *Les graphes*