QUELLES SEMIOSIS POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMERATION AU CYCLE 2 ?

Serge PETIT
Professeur de mathématiques honoraire de l'IUFM d'Alsace
Université de Strasbourg
petit.serge@sfr.fr

Annie CAMENISCH
Maitre de conférences en Sciences du langage, ESPE
Université de Strasbourg
annie.camenisch@espe.unistra.fr

Résumé
L'objectif de l'atelier était de réaliser une étude des progressions dans l'apprentissage des différents registres sémiotiques menant à la construction du système de numération de position au cycle 2 et d'analyser leur pertinence. Ce compte-rendu comporte trois parties : une première partie comportant des rappels théoriques permettant d'établir un langage en vue d'une analyse de la construction des différents registres de représentation sémiotiques en usage dans la construction de la numération de position en cycle 2, une deuxième partie organisée autour de travaux de groupes visant une analyse de certains manuels scolaires afin de mettre en relief le travail explicite portant sur les registres sémiotiques, une troisième, pratique, qui propose une progression permettant de construire le sens avant d'introduire les signes spécifiques.

I - RAPPELS THEORIQUES

Une première précision sur les mots s'impose. Le mot *noèsis* est composé de l'élément de mot *no(o)-* qui signifie pensée, acte de pensée, concept. Le mot *sémiosis* est composé de *sém(a)* qui renvoie à la notion de signe. Le suffixe commun à ces deux mots, vient de –èse et indique une action, un processus.

Ainsi, le terme *sémiosis* exprime la construction des signes, d'un système de signes, tandis que le terme *noèsis* exprime la construction d'un concept, d'une pensée.

Ces deux termes, *sémiosis* et *noèsis* sont intimement liés comme le précise Vergnaud (1991) quand il définit le sens du mot *concept*, définition dans laquelle il précise qu'« un concept est un triplet de trois ensembles », le dernier ensemble qu'il cite est « l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédés de traitement (signifiant) ». Il est donc difficile, voire impossible d'exprimer un concept, de le concevoir, sans avoir recours à au moins un système de représentation sémiotique.

1 Qu'est-ce qu'un registre de représentation sémiotique ?

D'après Duval (1995), un *registre de représentation sémiotique* est un système de signes permettant :

- de **représenter** quelque chose (représentations),

La première opération, celle qui permet de représenter une situation dans un registre donné, est ce que Duval appelle la formation des représentations, « soit pour « exprimer » une représentation mentale, soit pour « évoquer » un objet réel » (Duval, 1995, 36). A la base même du principe de représentation, ce point doit être travaillé de manière explicite. Il s'agit en effet, en mathématiques, non de dessiner les objets, travail laborieux, sans portée générale, n'objectivant pas la situation, mais de les représenter[1] dans un système.

- de **transformer** ces représentations à l'intérieur du système de représentation,

Duval désigne par **traitement** cette opération qui transforme les représentations dans un même registre : « *Un **traitement** est la transformation d'une représentation prise comme donnée initiale en une représentation considérée comme terminale par rapport à une question, à un problème ou à un besoin, […]. Un traitement est une **transformation de représentation interne à un registre** […].* » (Duval, 1995, 39).

- de **convertir** des représentations d'un registre vers un autre.

L'opération qui consiste à passer d'une représentation dans un registre à une représentation dans un autre registre « *s'avère être, pour beaucoup d'élèves aux différents niveaux d'enseignement, une opération difficile et parfois même impossible.* » (Duval, 1995, 19). Il y a donc lieu de prendre cette opération, que Duval appelle ***conversion** des représentations*, comme un objet d'enseignement à part entière, au fil des situations rencontrées (et pas de manière déconnectée). Et ce, d'autant plus que « *Chez les sujets, une représentation ne peut véritablement fonctionner comme représentation, c'est-à-dire leur donner accès à l'objet représenté que lorsque deux conditions sont remplies : qu'ils disposent d'au moins deux systèmes sémiotiques différents pour produire la représentation d'un objet, d'une situation, d'un processus… et qu'ils puissent convertir « spontanément » d'un système sémiotique à l'autre, sans même le remarquer, les représentations produites* ».

Ce processus de conversion est de loin le plus délicat et pose le redoutable problème de la congruence (Duval, 1995) entre les différentes représentations. Nous y reviendrons plus avant.

Cette définition du concept de registre impose donc l'existence d'au moins deux registres de représentation sémiotique. Cette condition permet de ne pas confondre l'objet représenté et sa représentation (par exemple, ne pas confondre le signe 10 et le nombre par ailleurs appelé *dix* en français).

En résumé succinct, un registre de représentation sémiotique est un ensemble de signes permettant les trois opérations suivantes : la formation des représentations, le traitement des représentations, la conversion des représentations d'un registre vers un autre registre

Ce qui peut se traduire dans le schéma 1 :

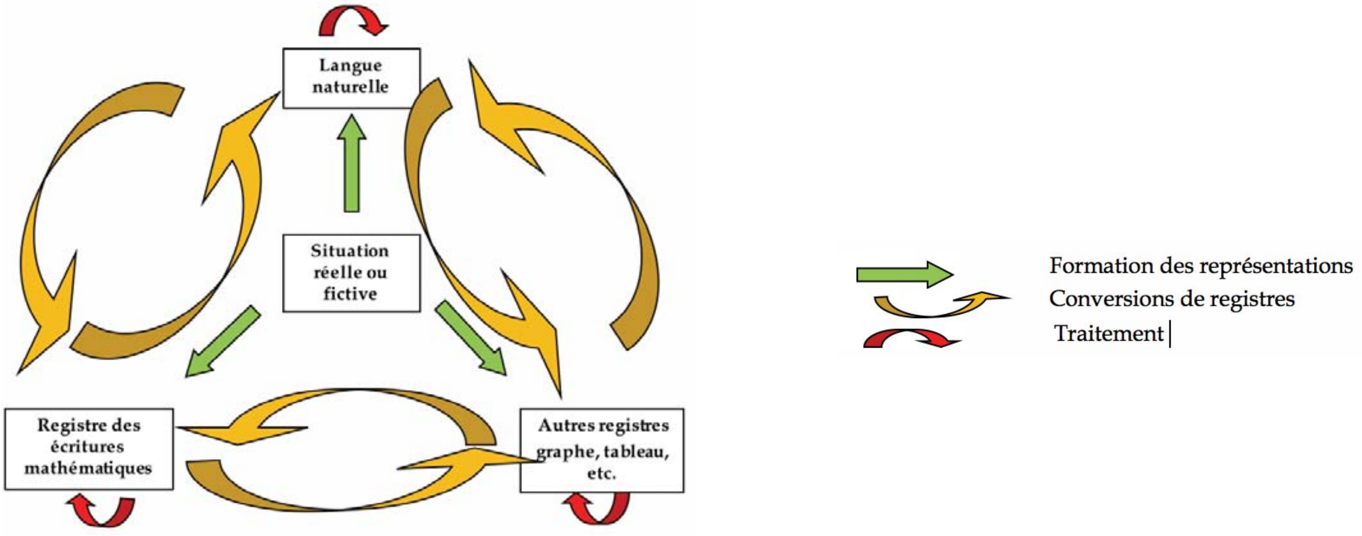


Schéma 1.

[1] Il existe trois verbes *représenter* (*Brio*, Ed. Le Robert, 2004). Dans ce contexte, Il faut comprendre ce verbe comme étant formé des éléments *re-* (qui donne une valeur intensive et qui signifie « complètement », *-pré-* qui signifie « devant », *-(es)s-* qui signifie être, *-ent-* qui indique le résultat d'une action et de la désinence verbale *–er*. Ce verbe indique donc le fait de placer complètement devant soi, en sous-entendant que cette *présence* est celle apportée par un système de signes (mots de la langue, chiffres, signes opératoires, dessins de figures, etc.).

On peut donc aisément imaginer que chacune des transformations mentionnées dans ce schéma, doit, à l'occasion de leur fréquentation, être explicitement travaillée avec les élèves. Le processus de conversion impose en outre de prendre en compte de manière explicite les problèmes relevant de la congruence ou de la non-congruence entre deux représentations de deux registres différents.

2 Exemples de registres de représentation sémiotique opérant dans l'enseignement de la numération au cycle 2

Le premier registre est sans conteste celui de la langue naturelle.

Le deuxième registre est celui des écritures symboliques mathématiques (+, =, -, <, >, désignation chiffrée des nombres, etc.).

La droite graduée (frise numérique) est un registre important dans le sens où il met en relief la relation d'ordre sur les entiers naturel.

La construction du nombre impose de représenter transitoirement les objets de manière analogique, par des points, des croix, des signes divers. Il s'agit de ce que l'on appelle le registre des représentations figurales.

Enfin, d'autres registres sont souvent utilisés comme les tableaux, les histogrammes, etc.

Représenter un concept dans un registre donné est ce que (Duval, 1995) appelle la formation des représentations.

Remarque : Tous les registres sémiotiques ne sont pas équivalents. Un système domine les autres, il est nécessaire à toute communication : celui de la langue naturelle, comme précisé dans la présentation d'une contribution de G. Vergnaud (2002) : « Si la conceptualisation est un processus qui, au départ, n'implique pas le langage, la fonction sémiotique est cependant essentielle à son accomplissement : un concept n'est pas totalement un concept tant qu'il n'est pas nommé et explicité dans un système. Le langage naturel remplit donc une fonction essentielle, puisqu'il n'est pas seulement un système symbolique parmi d'autres, mais le métalangage de tous les autres systèmes de symbolisation ». Ce registre nous permet de communiquer sur les autres registres et de communiquer à propos des concepts. Il est placé au cœur de l'enseignement des mathématiques dans les nouveaux programmes de 2015.

3 Représentations sémiotiques et représentations mentales

Il est fréquent d'entendre que les élèves (certains élèves) n'ont pas une bonne représentation mentale d'une situation donnée. Les représentations sémiotiques peuvent vraisemblablement contribuer à la formation de ces représentations mentales. On peut en effet « *voir dans les représentations sémiotiques un support pour les représentations mentales* » (Duval, 1995, 18). Duval précise qu'il n'est cependant pas facile de passer « *de la forme du représentant au contenu représenté* ». Ce que l'on peut facilement s'imaginer en voyant les écritures *3* ou *trois* qui représentent un nombre, un même nombre. Une prise en compte explicite des apprentissages sémiotiques dans les apprentissages en mathématiques est sans doute primordiale.

On peut globalement caractériser le travail d'un élève en situation de résolution de problème comme suit, l'énoncé étant donné sous forme verbale :

- l'élève devra souvent, dans un premier temps reformuler tout ou partie de l'énoncé,

- puis, afin de mieux se représenter la situation, mobiliser un registre tiers donc effectuer une conversion vers ce registre,

- souvent traiter l'information dans ce registre tiers,

- opérer le traitement mathématique après avoir effectué une conversion vers le registre des écritures mathématiques.

Afin de donner sa conclusion, il traduira alors son résultat mathématique en langue naturelle, effectuant alors une ultime conversion. Son travail peut alors se schématiser de la manière suivante (Schéma 2)

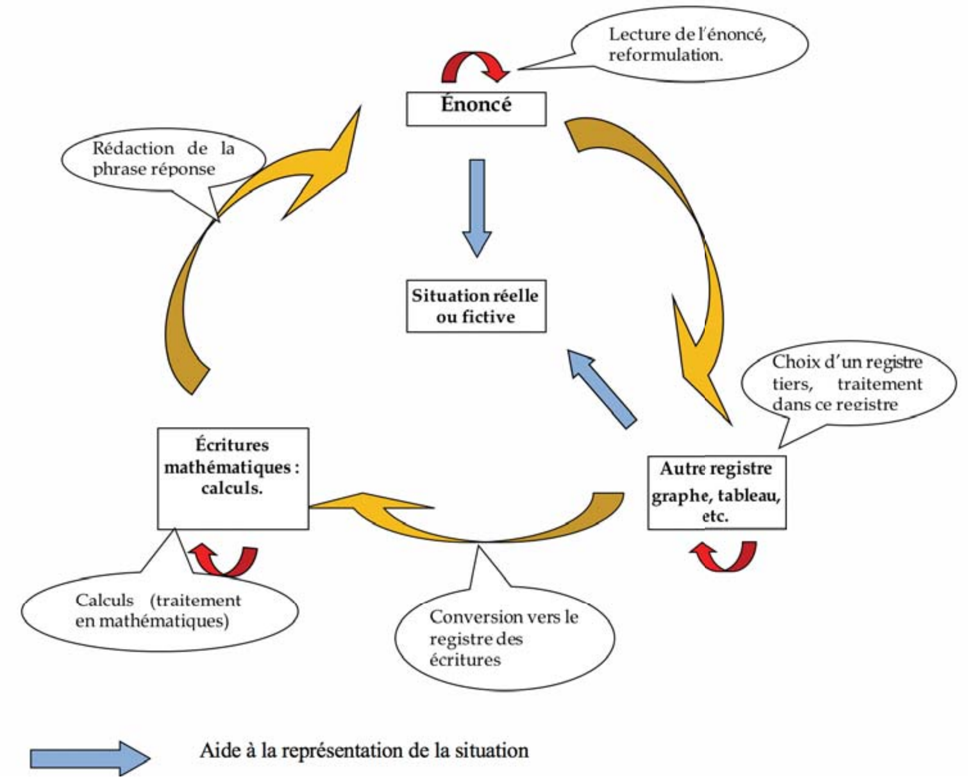


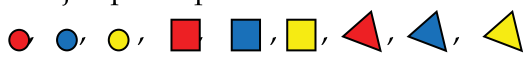
Schéma 2.

4 Exemple de formation, de conversion et de traitement

Considérons un ensemble d'objets en bois, de trois couleurs différentes. Ces objets ont un volume, une épaisseur et des formes qui sont, vues du dessus, globalement des triangles, des carrés et des ronds. À ce niveau, nous utilisons déjà des termes qui désignent des objets conceptuels, pour des objets matériels qui ne sont que des représentants de ces objets.

Nous désignerons donc ces objets par les trois termes qui les représentent : triangles, carrés, ronds[2]. Ces objets sont, chacun peints d'une couleur uniforme. On repère trois couleurs : bleu, rouge, jaune.

Les questions qui seront posées à propos de ces objets peuvent concerner leur couleur, leurs formes, leurs nombres, des comparaisons du nombre d'objets d'une classe avec le nombre d'objets d'une autre classe, etc. Les questions ne portent pas sur les dimensions des objets, sur des précisions sur leurs formes (triangles rectangles, isocèles, équilatéraux, dimensions des carrés, des ronds, etc.) Il est donc tout à fait possible de représenter ces objets par des signes : un carré pour les carrés, quelles que soient leurs dimensions, un rond pour les ronds (idem.), un triangle (pourquoi pas équilatéral pour les triangles). Chacun de ces signes est coloré de la couleur de l'objet qu'il représente.

Nous obtenons ainsi un ensemble de signes : {  }

L'ensemble des objets peut alors se représenter par un ensemble (figure 1)

[2] Nous n'ignorons pas le caractère non mathématique de ce mot, mais il est fréquemment utilisé en classe.

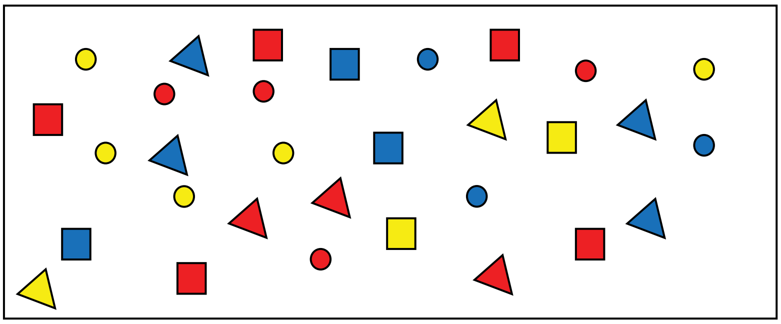


Figure 1.

L'ensemble des neuf signes ci-dessus constitue-t-il un registre sémiotique ?

Il convient d'analyser successivement les trois caractéristiques des registres sémiotiques pour répondre à cette question :

1. Cet ensemble de signes permet-il de représenter les objets matériels donnés ?

La réponse est évidemment positive.

2. Cet ensemble de signes permet-il d'effectuer des transformations sur les représentations des objets ?

La réponse à cette question est encore positive, on peut par exemple grouper tous les carrés, tous les triangles, tous les ronds, ou bien regrouper les signes par couleurs, ou encore par un critère croisé portant sur la forme et la couleur (on obtient alors neufs paquets).

Cet ensemble de signes permet des reconfigurations dans le registre figural.

3. Peut-on passer de cette représentation des objets matériels dans ce registre figural à une représentation des objets dans un autre registre ?

Afin de répondre à cette question, il convient de considérer un autre registre, par exemple un tableau.

La représentation de l'ensemble des objets dans un tableau peut se présenter sous la forme suivante :

	Rouge	Bleu	Jaune
Triangle	3	4	2
Carré	5	3	2
Rond	4	3	5

Un tel tableau est un registre sémiotique de représentation (il obéit aux trois critères). Ce tableau rempli est une représentation sémiotique de la situation précédente qui comporte exactement les mêmes informations (au regard des questions possibles ci-dessus énoncées) que celles figurant dans le registre figural précédemment construit.

La conversion de la représentation précédente vers une représentation dans un autre registre est donc possible.

Les neuf signes constituent un registre qui permet de représenter les objets donnés, tout comme le tableau.

Nous venons de réaliser deux opérations de formation de représentations et une conversion d'un registre vers un autre registre.

Cette conversion des représentations ne pose aucun problème.

Il existe cependant bien des cas où les conversions de représentations d'un registre vers un autre ne vont pas de soi car elles ne sont alors pas congruentes. Nous en donnons un aperçu plus loin dans le texte.

5 Opérationnalité de la reformulation en résolution de problèmes

Soit l'énoncé suivant donné à des élèves de cycle 2 :

> *Etienne a trois billes de moins que Lucie.*

Etienne a six billes.

Combien de billes a Lucie ?

Représenter directement la situation évoquée dans l'énoncé est difficile dans le registres des écritures symboliques mathématiques.

L'élève peut être invité à écrire ce qu'il cherche.

Ce que je cherche :

« *Je cherche le nombre de billes de Lucie. Ma phrase réponse est alors : Lucie a ___ billes* ».

Dans l'énoncé, aucune phrase ne commence par « Lucie a… ». Par contre, la première phrase peut être reformulée de la manière suivante : « Lucie a trois billes de plus qu'Etienne ». Cette formulation est inspirée de la phrase réponse à trou écrite par l'élève. Désormais, les données s'enchainent bien pour écrire l'égalité résolvante :

« Etienne a six billes. Lucie a trois billes de plus qu'Etienne ».

Une égalité résolvante est alors : 6 + 3 = ___. La solution est alors immédiate.

Cet énoncé engendre de très nombreuses erreurs en fin de cycle 2, alors que l'énoncé reformulé n'en engendre que très peu. D'où l'intérêt de la conversion, de la reformulation dans le registre de la langue naturelle. Cette reformulation devient alors à la fois un outil de compréhension de l'énoncé et un outil de résolution de problème.

Quelles en sont les raisons ?

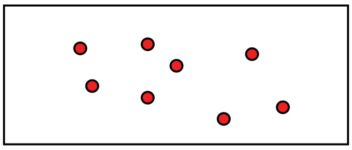
Dans l'énoncé on lit : « de moins que », qui ne permet pas d'écrire aisément une égalité résolvante (une représentation sous forme de diagramme - autre registre - permettrait de visualiser cette différence, mais nous restons dans le cas plus classique). Il convient en effet d'effectuer une addition pour répondre à la question. D'un côté la même information est portée par « de moins que », de l'autre par le signe « + ». Il n'y a pas de correspondance sémantique entre ces deux éléments. Ces deux éléments ne semblent pas bien fonctionner ensemble, aller ensemble, et contribuent à ce que Duval nomme *non-congruence* entre les représentations.

6 Concept de *congruence*

Considérons deux registres et une représentation du même objet dans l'un et l'autre des deux registres.

Par exemple, huit objets que nous représentons dans le registre des écritures mathématiques par le nombre noté 8, et dans le registre figural par huit ronds.

Les représentations et leurs correspondances entre les deux registres peuvent prendre diverses formes comme le montre le tableau suivant :

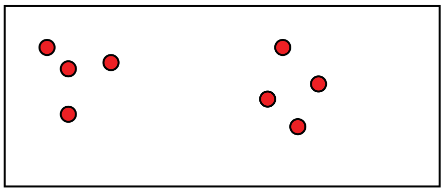
Registre des écritures symboliques mathématiques	Registre figural
8	

Opérons une reconfiguration dans le registre figural :

8 (invariant)

$4 + 4$

2×4



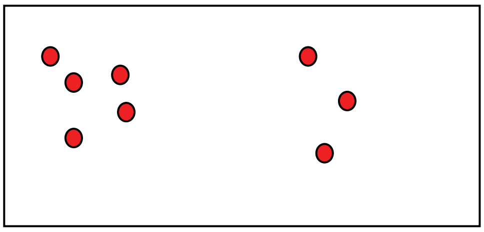
Les représentations dans le registre symbolique mathématique et le registre figural « marchent bien ensemble », sont *congruentes*[3]. Effectuons une reconfiguration dans le registre figural et conservons les représentations dans le registre des écritures symboliques mathématiques.

Nous obtenons alors la correspondance suivante :

8 (invariant)

$4 + 4$

2×4

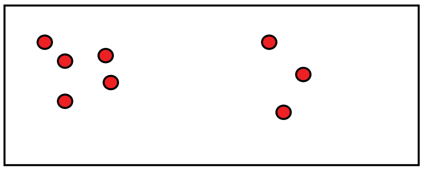


Cette fois, les représentations dans les deux registres ne « vont pas bien ensemble », ne sont pas congruentes.

Pour rétablir une bonne congruence, effectuons corrélativement un traitement des représentations dans le registre des écritures symboliques. Nous obtenons alors les correspondances suivantes :

8 (invariant)

$5 + 3$



La représentation 8 reste invariante, tandis que la représentation précédente 4 + 4 est traitée pour devenir 5 + 3, représentation totalement congruente avec la représentation du registre figural.

Une autre représentation dans le registre des écritures mathématiques permet une congruence intermédiaire : 3 + 5. Elle n'est pas congruente (avec les conventions de lecture de gauche à droite), mais l'est davantage que 4 + 4. Ainsi, la notion de congruence peut être « gradable » de très congruent à pas du tout congruente.

Duval définit comme suit ce concept de congruence selon trois critères (Duval, 1995, 49) :

<u>Premier critère</u>

« Correspondance sémantique des éléments signifiants »

<u>Deuxième critère</u>

« À chaque unité signifiante élémentaire de la représentation de départ, il ne correspond qu'une seule unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d'arrivée. »

<u>Troisième critère</u>

Même ordre des unités signifiantes dans les deux représentations.

On voit que sur le dernier exemple, la représentation 3 + 5 ne respecte pas le troisième critère, que dans les précédentes représentations, il n'y a pas correspondance sémantique entre les éléments signifiants (d'un côté 4 et 4, de l'autre, un ensemble de cinq ronds et un ensemble de trois ronds). Cette représentation ne respecte ni le deuxième, ni, *a fortiori* le troisième critère.

Nous invitons le lecteur à procéder à l'analyse de congruence entre la représentation dans le registre de la langue naturelle et le registre des écritures symboliques mathématiques (égalité résolvante) dans le cas du problème donné en exemple (billes, Lucie, Etienne).

[3] Le mot « congruent » est formé sur la base de *con-* (qui signifie *avec, ensemble*) et de *–gr-* qui signifie *marcher, aller*, on retrouve cet élément de mot dans *degré, grade, plantigrade, progrès, progression, régression,* etc. Cet élément de mot prend aussi les formes *gress-* et *gred-* (ingrédient).

Les problèmes liés à la congruence peuvent être redoutables pour les élèves. Un travail explicite visant à rétablir la congruence pour la résolution de problèmes notamment peut produire des effets positifs en résolution de problèmes (Camenisch & Petit, 2016).

Le travail sur le concept de *congruence* demanderait à être développé davantage, mais, ne l'ayant pas été lors de l'atelier, il ne l'est pas dans ce compte-rendu.

Dans le cadre concerné par cet exposé, celui de la numération, il est loisible de s'intéresser aux problèmes de congruence entre les représentations figurales et les représentations dans le registre des écritures symboliques mathématiques lors de la construction du système de numération de position. Pour ce faire, il faut que des représentations figurales aient été préalablement formées et associées aux écritures symboliques.

La deuxième partie de l'atelier a proposé aux participants de procéder à des analyses d'ouvrages portant à la fois sur la manière dont les concepts sont présentés aux élèves par le sens qu'ils revêtent (la *noèsis*) et les différentes formes dans lesquels sont représentés ces concepts (la *sémiosis*).

Il existe en effet deux types d'objets intellectuels à enseigner. D'un côté ceux qui relèvent d'une convention et donc de la *sémiosis* et de l'autre, ceux qui sont le fruit de la résolution de situations-problèmes, ceux qui relèvent de la *noèsis*. Pour exemple, nous pouvons citer :

Objets relevant d'une convention	**Objets ne relevant pas d'une convention**
• Les premiers noms de nombres (qui diffèrent d'une langue à l'autre), • Les chiffres (et leur forme), • Le signe + (et sa forme), • Le signe = (et sa forme), • Les groupements par dix et non douze ou vingt, • Le signe ×, • Le système de numération de position, etc.	• La nécessité d'avoir un nouveau nombre : le zéro, • Les décompositions additives, • La nécessité de pouvoir dire que deux écritures différentes ont le même référent, • La nécessité de former des paquets pour réduire les écritures, etc.

Ces différents objets ne peuvent s'enseigner sans une prise en compte par l'enseignant de

- l'existence de différents registres sémiotiques,
- d'un travail explicite sur la formation des représentations (le verbe *représenter* est un verbe essentiel qui caractérise l'activité mathématique et, à ce titre, figure explicitement en amont des programmes des cycles 2, 3 et 4),
- d'un travail explicite portant sur les articulations de registres, les conversions de représentations et les problèmes liés aux phénomènes de congruence et surtout de non-congruence,
- d'un travail explicite de traitement des informations dans les différents registres (reformulation dans le registre de la langue naturelle et calculs dans celui des écritures mathématiques, notamment).

II - TRAVAUX DES GROUPES

1 Questionnement

L'objectif de l'atelier était d'analyser quelques extraits de manuels de CP afin d'avoir un aperçu de la manière dont les différents registres sémiotiques étaient introduits dans la construction du système de numération de position, en relation avec les aspects noétiques. En effet, les programmes de l'école primaire stipulent la nécessité de construire le sens des concepts (et donc la *noèsis*) avant les signes qui les représentent (et donc la *sémiosis*), à l'exception bien sûr de la langue naturelle :

> La composante écrite de l'activité mathématique devient essentielle. Ces écrits sont d'abord des écritures et représentations produites en situation par les élèves eux-mêmes qui évoluent progressivement avec l'aide du professeur vers des formes conventionnelles. […] L'introduction et l'utilisation des symboles sont réalisées au fur et à mesure qu'ils prennent sens dans des situations d'action, en relation avec le vocabulaire utilisé (Programmes, 2016).

Six groupes ont été constitués ayant pour tâche d'analyser chacun la manière dont certains concepts liés à la numération sont construits dans quelques manuels estampillés par les éditeurs comme étant « conformes aux nouveaux programmes 2016 ». Chaque groupe disposait de fiches de suivi pour chaque axe d'observation, en particulier pour analyser la manière dont la nécessité du concept pris à la loupe répondait à un problème lors de sa première apparition dans le manuel. Il s'agissait aussi de pointer quelques travaux explicites sur la notion, de vérifier si le caractère conventionnel des symboles mathématiques était indiqué et si le lien, ou les différents liens (cas des reformulations) avec la langue naturelle était explicité.

Cinq axes d'observation, constitutifs de la construction du système de numération de position, ont été proposés :

- Le chiffre 0 et le mot *zéro* en relation avec la désignation d'un nombre.
- La décomposition additive des nombres avec les expressions *et, et encore, plus* et le symbole +, le lien entre le signe + et le signe –.
- Le signe = et les mots *égal, égaler, égalité, différent*, le travail sur les mots liés à la notion d'égalité.
- La nécessité de former des paquets pour désigner les nombres, l'apparition du mot *dizaine*, le caractère conventionnel du choix du cardinal du paquet.
- La mise en place explicite du système de numération de position, en réponse à un problème. Les participants devaient en outre préciser si le système de numération était enseigné d'un bloc pour tous les nombres supérieurs à neuf ou par tranches. Un autre point essentiel concernait d'une part les congruences entre les noms de nombre et leurs désignations chiffrées, d'autre part les congruences entre les représentations des nombres dans le registre figural et les désignations chiffrées.

2 Supports choisis

Six fichiers ou méthodes, portant la mention « conformes aux programmes 2016 », ont été sélectionnés pour être analysés[4] :

- *J'apprends les maths avec Picbille*, CP, sous la direction de Rémi Brissiaud, Retz, 2016.
- *Cap Maths*, CP, Roland Charnay et alii, Hatier, 2016.
- *Vivre les maths*, CP, Jacqueline Jardy et alii, Nathan, 2016.
- *Opération maths*, CP, Marie-Lise Peltier, Joël Briand et alii, Hatier, 2016.
- *Les nouveaux outils pour les maths*, CP, Patrick Gros et alii, Magnard, 2016.

[4] Le choix des ouvrages a surtout été déterminé du fait de leur présence dans le centre de documentation à disposition. La plupart correspondaient aux ouvrages les plus commercialisés et donc les plus fréquemment utilisés par les enseignants.

- *Construire les maths avec les NuméRas*, Cycle 2, niveau 1, Serge Petit, Annie Camenisch, Nathan, 2016 (guide pédagogique). *Je construis les maths avec les NuméRas*, cahier élève, Cycle 2, Niveau 1, Nathan, 2017.

Les groupes disposaient d'extraits photocopiés, du manuel original et du guide pédagogique.

3 Résultats

Une mise en commun portant sur chaque point analysé a été réalisée après un temps d'analyse pour chaque groupe. Les groupes ont rendu compte de leurs observations, parfois partielles ou incomplètes, étant donné que le temps imparti ne permettait pas toujours d'utiliser l'ensemble des documents mis à disposition.

Les tableaux ci-dessous reproduisent les travaux des groupes, à l'exclusion de toute indication des animateurs.

3.1 Le nombre appelé zéro

	Réponse à un problème	Autre travail sur	Caractère conventionnel	Lien avec la langue naturelle
J'apprends les maths (Picbille)	Le zéro ne répond pas à un problème. Roue numérotée avec les nombres 0, 1, 2 Écriture : 2 + 1 + 0	Calculs additifs contenant le terme 0	Du signe 0 ou du nom *zéro* pas indiqué de façon explicite	Pas de lien explicite, mais le mot apparait dans le titre
Cap Maths	Pas de situation problème	Aucun travail sur le zéro	Non indiqué	Non indiqué
Vivre les maths	Situation de dénombrement : relier un dessin de collection à une écriture chiffrée	Titre Écriture de « 10 » Écriture de « 0 » Calcul : 3 + 0 Suite de 2 en 2 à partir de 0 Calcul : 6 - 0	Non indiqué	Le zéro apparait surtout en tant que chiffre, sauf une fois en tant que chiffre et nombre.
Opération maths	Pas en tant que zéro	Dans les nombres fréquents 10, 20 Apprentissage du tracé en écriture	Non indiqué	Non indiqué
Nouveaux Outils	Ne répond à aucune justification			
Les NuméRas	Solution d'un problème : nombre qui précède « un »	Travail sur le sens avec le nom d'un nombre	Sens conventionnel du chiffre et du nom indiqué par la fiction	En lien avec « il n'y a plus de », « il n'y a pas de »

3.2 La décomposition additive

	Réponse à un problème	Autre travail sur la décomposition additive	Caractère conventionnel Sens du signe +	Lien avec la langue naturelle
Picbille	Pas de situation problème 5 signes différents pour un nombre Itération de 1	Décomposition en sous-base 5 et marquage du 3 Pas une décomposition mais une addition en	Du signe + indiqué Sens : Réunion de deux ensembles Sans lien avec le signe +	Oui

		stade intermédiaire		
Cap Maths	Pas de décomposition additive	La maison des … avec le + et = 6 est le double de 3 6 = 3 + 3 Cartes à points		
Vivre les maths	Comptage de collections / sous collections Faire des paquets de 5 Ajouter pour faire 5	Dénombrement de collection / sous-collections Juxtaposition de « et », « plus » et + Transformation	Synonyme de « plus » Sens de « et » Sens Regroupement de plusieurs collections	Mot « et » : « et » précède le « plus » Mot : « ajoute »
Opération maths	Codage d'une décomposition (mais pas de nécessité) : un rouge et trois bleus	Recherche de compléments	Activité écrite artificielle plaquée. Pas de construction du sens pour les élèves : « robotisation »	Non
Nouveaux Outils	Non analysé			
Les NuméRas	Exprimer le regroupement de plusieurs quantités en lien avec une décomposition d'une collection		Sens conventionnel souligné Remplace « et »	Mot « et »

3.3 L'égalité

	Réponse à un problème	Autre travail sur l'égalité	Caractère conventionnel Sens du signe =	Lien avec la langue naturelle
Picbille	Calculer une addition de 2 termes (manière artificielle) + et = introduits simultanément	Addition de deux termes Décomposition additive des nombres 6 et 7 avec appui sur 5 mais écriture 5 + 1 = 6 et non 6 = 5 + 1	Sens : exécuter « donne le résultat du calcul », pas de réversibilité	Mot « égalité »
Cap Maths	Pas de nécessité explicite	Calcul de somme = est le symbole pour donner le résultat	Traduction congruente de la phrase : 6 est le double de 3 = est la traduction de « est » Caractère conventionnel précisé dans le guide pédagogique	Uniquement dans le guide pédagogique
Vivre les maths	Indiquer le résultat d'une addition Vient remplacer « en tout » (existe avant et	Résultats de soustractions Écris = ou ≠ entre	Transformation d'écriture Indication d'un	« égal » est écrit une fois mais pas utilisé

	conservé après)	des écritures : 5 + 1 … 1 + 5	résultat	
Opération maths	Aucun problème		Équivalence entre deux écritures symboliques	Non
Nouveaux Outils		Résultat d'une addition, traitement Décomposition canonique équivalence entre écriture chiffrée	Équivalence entre représentations de quantités dans le registres des écritures chiffrées (écriture chiffrée / décomposition additive) Avec présence d'un signe +	
Les NuméRas	Travail non réalisé par les participants			

3.4 Les paquets de dix

	Réponse à un problème	Autre travail sur les « paquets de dix »	Caractère conventionnel du cardinal des paquets	Lien avec la langue naturelle Page où apparait le mot « dizaine »
Picbille	Travail non réalisé par les participants			
Cap Maths	Travail non réalisé par les participants			
Vivre les maths	Dénombrer les dizaines Exercice 1 : paquets déjà faits Exercice 2 : paquets à faire Reformulation travaillée, 12 c'est un paquet de 10 et 2	Consignes très guidées Groupements pour compléter des phrases avec *dizaine* et *unité*		Lien avec la langue implicite par correspondance de registres : - dessin et paquets - écriture chiffrée - phrases LN Mot *dizaine* p.55
Opération maths	Pas de nécessité Règle du jeu imposée	Passage de la représentation en unités (plaques de 10 carrés) au terme « dizaine »		Mot *dizaine* p.62
Nouveaux Outils	Travail non réalisé par les participants			
Les NuméRas	Travail non réalisé par les participants			

3.5 Le système de numération de position

	Réponse à un problème	Autre travail sur l'addition	Enseignement en un bloc ou par tranches	Congruence entre noms de nombres et désignations chiffrées
Picbille	Grouper pour écrire dans notre système	Grouper par dix pour écrire des	11 à 16	Non trouvé

	de numération	nombres inférieurs à dix	17 à 20	
Cap Maths		Passage des unités de numération en langue naturelle à l'écriture chiffrée		
Vivre les maths	Écriture « 10 » Les nombres sont écris le rôle des chiffres n'est pas mis en avant			
Opération maths	Travail non réalisé par les participants			
Nouveaux Outils	Travail non réalisé par les participants			
Les NuméRas	Travail non réalisé par les participants			

4 Discussion

Cette mise en commun partielle a néanmoins permis de mettre en évidence l'absence de travail explicite sur le lien entre *noèsis* et *sémiosis* à un moment clé de l'apprentissage de la numération. Sauf dans la méthode *Construire les maths avec les NuméRas* où la découverte des différents concepts est scénarisée par l'intermédiaire d'une fiction et proposé aux élèves sous forme de situation-problème, la nécessité des concepts ne se conçoit généralement pas comme la solution d'un problème. Le sens des signes n'est que rarement objet d'un travail explicite avant leur utilisation. Leur caractère conventionnel n'est pas souligné. Là aussi la méthode *Construire les maths avec les NuméRas* se démarque puisque la fiction permet de faire inventer ces signes de manière arbitraire par la communauté de personnages qui font vivre les mathématiques.

Enfin, la langue, que ce soit au niveau de la reformulation ou de l'explicitation du vocabulaire, n'est guère un objet de travail en contexte mathématique, dans son usage spécifique. Là encore la méthode *Construire les maths avec les NuméRas* fait exception puisqu'elle intègre tous les apprentissages langagiers en relation avec les mathématiques.

III - PROPOSITION POUR UNE AUTRE PROGRAMMATION DANS L'APPRENTISSAGE DE LA NUMERATION AU CYCLE 2

Des constats émis ci-dessus découle la nécessité d'enseigner les mathématiques en réponse à des problèmes clairement identifiés comme tels par et pour les élèves et de construire de manière explicite, simultanément, ou en léger différé, les systèmes de représentation sémiotiques intimement liés à la construction de ces concepts, à leurs désignations.

Les animateurs suggèrent une approche schématiquement reproduite dans le tableau suivant. L'objectif visé est la construction du système de numération, c'est-à-dire du système lui-même en réponse à un problème. Il s'agit d'une organisation de signes parmi bien d'autres possibles permettant de désigner les nombres, tous les nombres entiers. Les découpages par tranches de 10 à 16, ou de 10 à 19, puis de 20 à 29, etc. ne sont nullement dictés par les nombres eux-mêmes. La construction de la désignation des nombres écrits 37 et 43 répond en effet aux mêmes principes, ceux qui gouvernent la construction de la désignation de tous les nombres, à partir du nombre écrit 10 dans notre système usuel. Il ne sera donc pas question dans la suite de ce type de découpage dénué de sens mathématique. Un découpage reposant sur les noms de nombre en langue française n'a pas davantage de sens. Par contre, l'analyse des noms de nombres en parallèle permet aux élèves de construire le sens des désignations verbales en lien avec les désignations chiffrées et les manipulations nécessaires sur les objets.

Monde « concret » manipulations	*Noèsis*	*Sémiosis*	
		Langue naturelle	**Ecritures symboliques mathématiques**
Objets, quantités, ordre, relations terme à terme, etc.	**Concept de nombre** Relation d'ordre pour résoudre des problèmes d'équipotence, d'ordre, de comparaison, etc.	Noms des premiers nombres (arbitraires) : un, deux, … neuf	1, 2, … 9 (arbitraires)
Impossibilité de proposer une solution à certains problèmes (absence ou retrait total),	La solution de certains problèmes ne peut s'exprimer en réponse à la question « combien de… » qui impose un déterminant numéral. Construction d'**un nouveau nombre**	Ce nouveau nombre est arbitrairement désigné par le nom ***zéro*** en langue naturelle.	Ce nouveau nombre est arbitrairement désigné par un nouveau chiffre : **0**.
Nécessité de désigner des grands nombres pour réaliser une collection équipotente par oral ou par écrit.	**Décomposition additive des nombres** (et pas composition qui relève de l'ajout).	Traduction en langue naturelle par les mots « et » ou « et encore » ou « et puis », etc. Nécessité de désigner le nouveau signe + par un mot : le mot « plus »	Nécessité d'un nouveau symbole arbitraire : le **signe +.** Corrélativement : le **signe -.**
Problème : des décompositions différentes désignent les mêmes quantités.	**Tout nombre a une infinité de désignations possibles**. Il faut pouvoir indiquer que deux écritures différentes (a fortiori identiques) désignent le même nombre.	**Egalite, égale, égale**, est égal à, n'est pas égal à, est différent de, etc.	Nécessité d'un symbole pour traduire ce mot « égal » dans le registre des écritures symboliques mathématiques : le **signe =** (forme conventionnelle).
Activités de résolution de problèmes « concrets » montrant les limites de la désignation additive des nombres (impossibilité mnésique, impossibilité d'écrire les désignations des nombres, etc.)	Nécessité de trouver une autre manière de désigner les nombres. Groupement des quantités par paquets, notions de paquets, de groupes d'objets qui facilitent les désignations de grandes quantités.		
Problèmes liés à la communication.	Nécessité de former des **paquets équipotents**.	Choix arbitraire d'un **cardinal des paquets équipotents : dix**. « paquets de dix », « unités », « dizaines », « **unités libres** »	Désignation des nombres en langue naturelle puis construction du **système de numération de position** en réponse à un problème

		Analyse des noms de nombre en français (voire dans d'autres langues) pour mettre recherche une certaine congruence entre les désignations des nombres en langue naturelle et les désignations chiffrées : « -ze » veut dire « dix », « dou, deux », « ante » et « ente » veulent dire « dizaine ». « Cinquante c'est cinq dizaines ».	(désignation des nombres avec deux chiffres puis davantage). Ecritures chiffrées de grand nombres : 68, 57 (5 **dizaines** et 7 **unités libres**) puis écriture du nombre dix en chiffres : 10 (**une dizaine** et **0 unité libre**).

IV - CONCLUSION

L'atelier, même inachevé, a mis en évidence que le concept de registres sémiotiques de représentations est peu pris en compte dans les ouvrages de CP analysés. Ces registres, pourtant nécessaires aux apprentissages mathématiques ne sont que rarement l'objet d'un apprentissage spécifique, identifié comme tel, par les auteurs d'ouvrages, donc vraisemblablement pas davantage par les enseignants. Leur prise en compte est pourtant nécessaire à plusieurs titres :

- elle permet d'éviter les confusions entre les désignations des objets (ne pas confondre l'écriture *34* et le nombre qu'elle désigne, par exemple),
- elle permet de contourner des problèmes de non-congruence forte, véritable obstacle à la résolution de problèmes, en découvrant des représentations équivalentes congruentes facilitant la résolution, notamment par les opérations de traitement comme la reformulation en langue naturelle,
- elle permet d'enseigner le sens du système de numération au lieu de n'enseigner que des écritures qui se traduisent par le saucissonnage de l'enseignement des désignations des nombres, au détriment de ce sens,
- elle permet de distinguer ce qui relève des concepts et de leurs désignations,
- elle permet d'enseigner le sens le plus général de l'égalité (à l'école primaire), permettant ultérieurement aux élèves de mieux effectuer des traitements mettant en œuvre écritures fractionnaires et écritures décimales, etc., et là encore de ne pas confondre nombre et désignation de nombre,
- elle permet de construire des systèmes de représentations figurales cohérente avec les désignations en langue naturelle, figurale ou chiffrée des nombres, etc.

Le concept de congruence entre représentions figurales, en langue naturelle, dans le registre des écritures symboliques mathématiques mériterait un développement plus approfondi.

V - BIBLIOGRAPHIE

CAMENISCH A. & PETIT S. (2016) Écrire en mathématiques : le rôle des écrits intermédiaires, dans *Recherches en écritures : regards pluriels*, Université de Lorraine, *Recherches Textuelles*, **13,** 235-259.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

VERGNAUD G. (2002) Qu'apportent les systèmes de signes à la conceptualisation *? La Nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation,* ***17***, 171-179. Résumé de l'article sur Refdoq.fr : http://www.refdoc.fr/Detailnotice?cpsidt=13611761

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Revue RDM* ***Vol 10****. /2.3.*

Programme pour le cycle 2, BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, cycle 2.