# 10 OU DIX : QUELLE EST LA QUESTION ?

**Michel DERUAZ**
Professeur Formateur, HEP VAUD
UER MS
Michel.deruaz@hepl.ch

**Valérie BATTEAU**
Assistante diplômée, HEP Vaud
UER MS, 3LS
vbatteau@gmail.com

**Résumé**
Nous nous référons au modèle du triple code (Dehaene, 1992) dans lequel le nombre peut s'exprimer selon trois représentations: auditive-verbale, analogique (pour nous : quantité représentée par des jetons) et symbolique (avec des chiffres). Notre questionnement de formateurs est le suivant : nos étudiants connaissent les effets de la multiplication et de la division par *dix* (et de ses puissances) sur l'écriture d'un nombre dans le système décimal de numération (Clivaz & Deruaz, 2013; Deruaz & Clivaz, 2012). Mais, qu'en est-il lorsque l'on multiplie ou divise par *10* (et ses puissances) dans une base quelconque ? Ce type de questionnement permet de mettre en évidence les spécificités liées à chacune de ces représentations. En particulier, il met en évidence les difficultés à communiquer avec la représentation auditive-verbale lorsqu'on travaille dans une autre base que la base dix, ainsi que des propriétés naturalisées en base dix qui deviennent alors de vraies questions dans une autre base (Anselmo & Zucchetta, 2013).

## I - INTRODUCTION

Cet atelier s'inscrit dans le cadre d'un cours de mathématiques et de didactique des mathématiques (Deruaz & Clivaz, 2012) donné en formation initiale d'enseignants primaire en Suisse (Haute École Pédagogique Vaud). À la différence de la formation française, nos étudiants commencent cette formation avec une maturité fédérale (baccalauréat) ou un titre jugé équivalent. L'un des objectifs de ce cours est de permettre aux étudiants de prendre du recul face aux mathématiques qu'ils enseigneront à l'école primaire, de leur faire prendre conscience que dans leurs futures classes, ils devront répondre aux questions des élèves ou se positionner face à leurs réponses. C'est pour les contraindre à faire un pas de côté face à la numération décimale que nous avions décidé de les confronter à la numération dans d'autres bases. Lors de séances de réponses aux questions, nous avons pu observer que les procédures mises en œuvre par les étudiants en difficultés pour résoudre les tâches demandées restaient principalement algorithmiques ce qui leur permettait, en quelque sorte, d'échapper à ce pas de côté et de continuer à percevoir les mathématiques comme une suite de recettes à appliquer à bon escient, ce qui ne correspond absolument pas à nos objectifs. Ce constat nous a conduit à remettre en question la partie du cours sur la numération et les outils de calculs écrits mais sans renoncer à leurs contenus et en particulier au travail avec d'autres bases que la base dix. Pour cela nous avons construit un nouveau dispositif de formation qui intègre un certain nombre de manipulations avec du matériel spécifiquement conçus pour cela au printemps 2017. Nous présentons dans cet atelier une partie de ce matériel et des tâches qui ont été construites avec celui-ci dans le cadre de six séances de cours (avec des effectifs de plus de 100 étudiants par cours) consacrées à la numération et aux outils de calculs écrits. Nous montrerons en particulier pourquoi du matériel complémentaire a dû être conçu pour permettre aux étudiants de prendre note des manipulations faites devant eux par le formateur et ainsi de participer depuis leur banc, aux manipulations proposées devant l'auditoire par le formateur.

# II - ENJEUX DE FORMATION

L'enseignement de la numération est un enjeu prioritaire de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Or, l'enseignement de la numération est essentiellement vu comme un préalable à l'enseignement des opérations et algorithmes tout en étant détaché de l'enseignement des opérations et algorithmes (Bednarz & Janvier, 1984).

> L'étude de l'évolution historique de la numération nous révèle combien représenter un nombre et calculer ne font qu'un, la survie d'un système et son évolution étant étroitement liées à son efficacité calculatoire. Or, ce lien est pauvrement perçu dans l'enseignement primaire. (p.26).

Ces auteurs mentionnent un manque de liens entre l'enseignement de la numération et celui des opérations et algorithmes. Par son importance dans les curriculums, par les difficultés tant du côté enseignement (Clivaz & Deruaz, 2013 ; Batteau & Clivaz, 2016) qu'apprentissage (Dias & Deruaz ; 2012), ce sujet demeure un sujet de recherche toujours d'« actualité » dont les travaux de Bednarz et Janvier (1984) restent une référence. Pour ne citer qu'un exemple, une brochure réalisée par la COPIRELEM en 2015 sur la « Numération à l'école primaire, un scénario de formation » recense des situations de formations (COPIRELEM, 2015).

Notre contribution se situe dans la ligne de ces travaux et nous allons décrire certains de nos choix dans l'introduction mathématiques et didactique qui suit.

## 1 Enjeux mathématiques et didactiques

### *1.1 Le nombre et ses représentations*

Dans ce qui est proposé lors de ces six séances de cours, nous privilégions l'aspect cardinal du nombre, contrairement à d'autres travaux qui privilégient son aspect ordinal dans des bases autres que dix en formation initiale des maîtres primaires (par exemple, Vivier, 2015). Par conséquent, on peut associer n'importe quel nombre au cardinal d'un ensemble ou d'une collection d'objets. On associera, par exemple, le nombre seize à n'importe quel ensemble de seize objets. Nous pouvons ainsi le représenter de manière décontextualisée par une collection de seize points :

Dans ce cas, à la suite de Dehaene (1992) on parle de « représentation analogique » du nombre. Dans les lignes qui précèdent, nous avons déjà utilisé plusieurs fois une autre représentation de ce nombre en écrivant, en lisant ou en disant, « seize ». Dehaene appelle cette représentation « auditive-verbale ». C'est en effet celle qui est utilisée dans le langage parlé, celle que l'on dit ou que l'on entend, même si le nombre est écrit 16.

Lorsqu'on écrit 16 avec des chiffres, on utilise une troisième représentation du nombre qui utilise le fait que l'on peut mettre en évidence un groupement de dix des seize éléments de la collection pour en faire un groupe de dix et laisser six éléments isolés comme dans la figure ci-dessous :

Dans ce qui suit, nous appellerons cette représentation à l'aide de chiffres, « représentation symbolique décimale » ou « représentation symbolique en base dix ». Remarquons que cette représentation est uniquement visuelle. Lorsque nous lisons le nombre 16, écrit comme cela, nous sommes contraints de le dire « seize » en utilisant la représentation auditive-verbale.

L'adaptation que nous avons réalisée du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p31) dans le cadre du cours permet de visualiser en un seul schéma ces trois représentations du nombre :

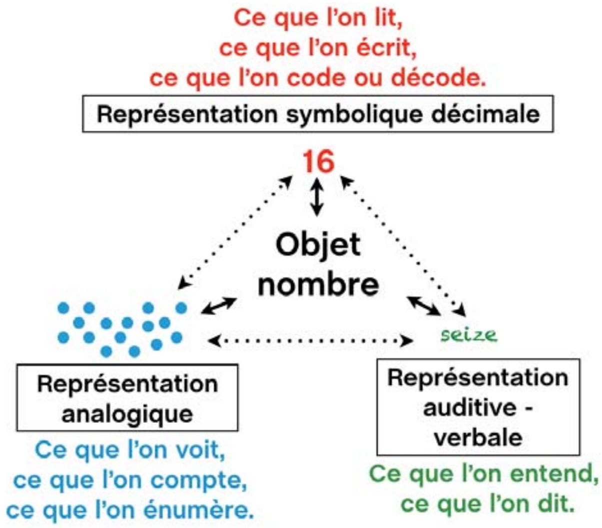



*Figure 1.* Représentations du nombre adapté du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p31)

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons essentiellement aux passages entre les représentations analogique et symbolique en mettant en évidence un certain nombre de représentations intermédiaires qui nous apparaissent comme importantes. En effet, notre objectif est que les futurs enseignants puissent faire des liens entre ces représentations analogique et symbolique et qu'ils puissent ensuite proposer ces liens à leurs élèves et peut-être encore plus particulièrement à ceux qui seraient en difficulté avec les nombres et leurs représentations.

Nous classerons ces représentations intermédiaires en deux catégories : la première contient les représentations que l'on qualifiera d'iconiques puisque les points sont encore présents, la seconde contient celle que l'on qualifiera de symboliques et qui font intervenir l'aspect positionnel de l'écriture symbolique décimale du nombre.

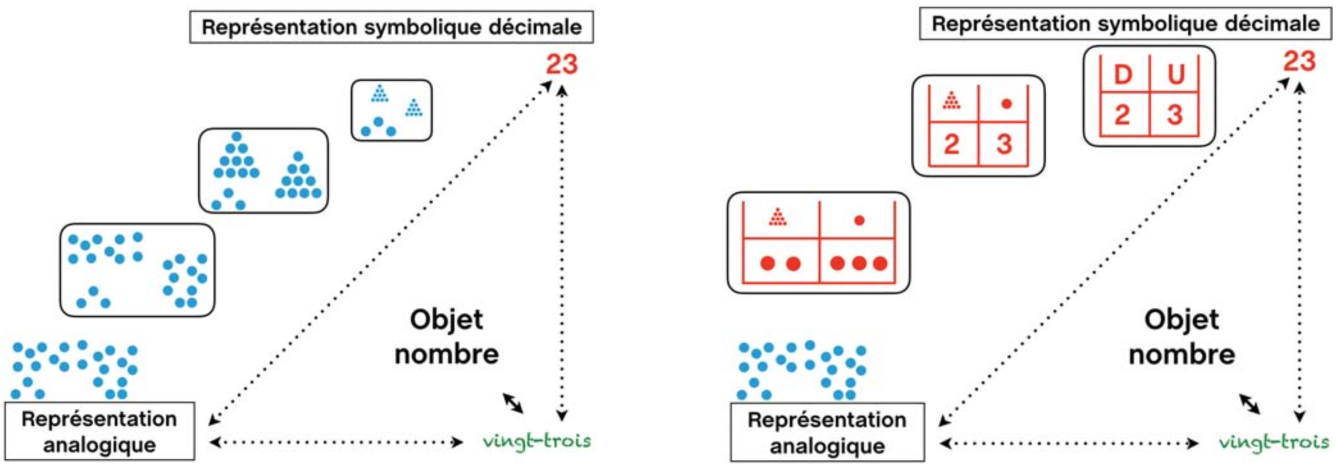



*Figure 2.* Représentations intermédiaires iconiques Représentations intermédiaires symboliques

### 1.2 Représentations symboliques dans d'autres bases que la base dix

Si l'on regarde plus attentivement la construction de la représentation symbolique décimale, on observe qu'elle est construite sur deux principes : le groupement par dix et le fait que la valeur associée à un symbole dépend de sa position dans l'écriture du nombre. On peut illustrer ces deux aspects à l'aide du nombre que l'on écrit 1232, et en s'aidant du tableau MCDU :

| M | C | D | U |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |

Lorsqu'on se place en base dix, on regroupe dix unités pour obtenir une dizaine, puis dix dizaines pour obtenir une centaine et ainsi de suite, autrement dit on effectue des groupements par dix pour passer d'une colonne à la colonne qui se situe à sa gauche. L'aspect positionnel est lié au fait que la signification du symbole 2 dépend de la colonne dans laquelle il se trouve ou de sa position dans l'écriture du nombre. Le symbole le plus à droite correspond à des unités donc à deux unités dans le cas présent, celui qui se situe à sa gauche à des dizaines donc à trois dizaines dans le cas présent. Le suivant vers la gauche à des centaines donc à deux centaines, et ainsi de suite. On peut d'ailleurs écrire ce tableau différemment :

| 1000 | 100 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |

Cela correspond à la décomposition

$$1232=1\text{x}1000 + 2\text{x}100 + 3\text{x}10 + 2\text{x}1$$

Ou encore

$$1232=1\text{x}10^3 + 2\text{x}10^2 + 3\text{x}10^1 + 2\text{x}10^0$$

On appellera alors les dizaines « groupes d'ordre un », les centaines « groupe d'ordre deux » et les milliers « groupe d'ordre trois ». Le tableau devient alors :

| $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |

Dans le texte qui suit nous allons voir ce qui se passe si nous effectuons des groupements par un autre nombre que dix en conservant les aspects positionnels. Par exemple, si l'on reprend le nombre seize, mais que l'on effectue des groupements par cinq comme dans le schéma ci-dessous :

| $G^{un}$ | U |
|---|---|
| 3 | 1 |

On obtient alors trois groupes de cinq et un élément isolé. La représentation symbolique en base cinq nous permettra de noter ce nombre 31. Pour éviter toute ambigüité on précisera la base utilisée en indice pour obtenir la notation $31_{cinq}$.

Pour être complet, il faut préciser que, comme pour la base dix, avant d'écrire un nombre avec la représentation symbolique, on effectuera toujours le maximum de groupements possibles. En effet, en base cinq, n'effectuer avec seize objets que deux groupements de cinq en laissant six objets isolés pour écrire $26_{cinq}$ est proscrit.

| $G^{un}$ | U |
|---|---|
| 2 | 6 |

En effet, si l'on acceptait cela on pourrait alors écrire le nombre seize de deux manières différentes avec la même représentation symbolique en base cinq : $31_{cinq}$ ou $26_{cinq}$, ce qui poserait assez rapidement des problèmes, par exemple pour comparer des nombres entre eux. Ce principe a pour conséquence que pour écrire un nombre en base cinq, on utilisera que les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4, soit cinq chiffres. Le nombre de chiffres nécessaires pour écrire un nombre correspond au nombre par lequel on regroupe, donc à la base utilisée. Le tableau 1 ci-après montre comment on peut écrire les nombres de zéro à treize en base cinq.

| Représentation analogique | Représentation auditive - verbale | Représentation symbolique en base cinq |
|---|---|---|
| | zéro | 0 |
| ● | un | 1 |
| ●● | deux | 2 |
| ●●● | trois | 3 |
| ●●●● | quatre | 4 |
| ○○○○○ | cinq | 10 |
| ○○○○○● | six | 11 |
| ○○○○○●● | sept | 12 |
| ○○○○○●●● | huit | 13 |
| ○○○○○●●●● | neuf | 14 |
| ○○○○○<br>○○○○○ | dix | 20 |
| ○○○○○●<br>○○○○○ | onze | 21 |
| ○○○○○●<br>○○○○○● | douze | 22 |
| ○○○○○●●<br>○○○○○● | treize | 23 |

*Tableau 1*

La représentation auditive-verbale utilise aussi des groupements par dix. Dans le tableau 1 ci-dessus, nous avons décidé de garder intacte la correspondance entre les représentations analogiques et auditives verbales et de perdre la correspondance entre les représentations auditives verbales et symboliques. Un autre choix aurait été possible. En effet, quel que soit le nombre par lequel nous regroupons, il s'écrit 10 dans sa base puisqu'il est constitué dans sa représentation analogique d'un groupement et d'aucun objet isolé. On pourrait donc décider de dire ce nombre « dix » et de dire « vingt-trois » le nombre constitué de deux groupements et de trois objets isolés.

Un tel choix aurait l'avantage de faciliter la lecture mais il ne permettrait pas de signifier la base utilisée puisque celle-ci se dirait systématiquement « dix ». Le seul moyen serait alors d'exprimer la base en utilisant la représentation analogique sans pouvoir la dire autrement que « dix » ou l'écrire autrement que « $10_{\text{dix}}$ » ce qui poserait d'importants problèmes de communication.

Notons toutefois que notre choix de maintenir intact le lien entre les représentations analogiques et auditives verbales comme dans le tableau 1 rend difficile la lecture des nombres que nous écrivons. En effet, si on ajoute maintenant un objet à la collection de seize objets que nous avons utilisée plus haut, on se retrouve dans la situation ci-dessous :

| $G^{un}$ | U |
|---|---|
| 3 | 2 |

On écrira alors ce nombre $32_{\text{cinq}}$ alors qu'il se dit « dix-sept ». On se trouve dans une situation inconfortable car contrairement à ce qui se passe en base dix, on a perdu, en utilisant une autre base, les liens naturels et historiques entre les représentations symboliques décimales et auditives-verbales (Mounier, 2010, pp. 100-113).

### *1.3 Passage d'une base quelconque à la base dix et réciproquement*

Dans ce qui suit, nous allons devoir distinguer lorsque nous dirons un nombre ou lorsque nous lirons son écriture en représentation symbolique. Nous utiliserons donc la représentation auditive verbale pour dire le nombre, indépendamment de la base utilisée et une lecture de la gauche vers la droite des chiffres avec mention de la base lorsqu'il s'agira de la lecture d'un nombre écrit à l'aide d'une représentation symbolique. Par exemple, pour le nombre dix-sept, écrit $32_{\text{cinq}}$ en base cinq, nous lirons « trois groupes

de cinq, deux unités » ou « trois, deux en base cinq » ou encore « trois, deux » s'il n'y a qu'une base en jeu.
Si nous prenons le nombre écrit $1232_{cinq}$ et que nous utilisons un tableau de nombres en base cinq, nous allons avoir :

| $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |

Ainsi dans un système de numération en base cinq, on regroupe cinq unités pour obtenir un groupement d'ordre un, puis cinq groupements d'ordre un pour obtenir un groupement d'ordre deux et ainsi de suite, autrement dit les regroupements pour passer d'une colonne à la colonne qui se situe à sa gauche se font chaque fois par cinq. On peut d'ailleurs écrire ce tableau différemment :

| 1000 | 100 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |

Ce qui, de manière analogue à la base dix, signifie

$$1232_{cinq} = 1x1000_{cinq} + 2x100_{cinq} + 3x10_{cinq} + 2x1_{cinq}$$

Ou encore

$$1232_{cinq} = 1x10^{trois} + 2x10^{deux} + 3x10^{un} + 2x10^{zéro} \text{ en base cinq.}$$

Ce qui, écrit en base dix, donne

$$1232_{cinq} = 1x5^{trois} + 2x5^{deux} + 3x5^{un} + 2x5^{zéro} = 125_{dix} + 50_{dix} + 15_{dix} + 2_{dix} = 192_{dix}$$

On construit ainsi une procédure algorithmique qui permet de passer de l'écriture d'un nombre dans une base quelconque à son écriture en base dix. Une procédure pour passer de l'écriture en base dix à son écriture dans une base quelconque, par exemple en base cinq, découle assez directement du passage de la représentation analogique du nombre à son écriture en base cinq. En effet, si on prend un ensemble d'objets et qu'on les regroupe par cinq, le nombre d'objets ne faisant partie d'aucun groupe correspond au reste de la division du nombre d'objet par cinq (division-quotition).
Donc si l'on reprend l'exemple ci-dessus de la base dix à la base cinq, on aura :

192 : 5 = 38 reste 2, d'où dans le tableau de nombres :

| $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |

En regroupant les groupes de cinq par cinq, on obtient :

38 : 5 = 7 reste 3, d'où :

| $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|
| | | 3 | 2 |

Puis,

7 : 5 = 1 reste 2 d'où :

| $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |

Les deux procédures algorithmiques décrites ci-dessus pour passer d'une base quelconque à la base dix et réciproquement utilisent essentiellement l'aspect groupement de la numération et très peu l'aspect positionnel. Elles ne permettent pas de travailler les règles d'échanges qui permettent de passer d'une colonne à celle qui la suit ou à celle qui la précède dans le tableau de nombres et qui sont énormément utilisées lors des procédures de calculs écrits.

### *1.4 Passages d'une base à une autre sans passer par la base dix lorsque l'une des bases est une puissance de l'autre*

Pour passer de l'écriture en base neuf d'un nombre à son écriture en base trois, il est évidemment possible de passer par l'écriture intermédiaire en basse dix de ce nombre en utilisant l'une après l'autre les deux procédures décrites ci-dessus mais il est aussi possible de procéder de manière plus directe. En effet, si l'on prend le nombre $184_{neuf}$ et qu'on l'écrit à l'aide de l'abaque ou du tableau de nombres, on obtient :

| $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|
| • | •••••••• | •••• |

| $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 4 |

Ou, en changeant les étiquettes des colonnes :

| 100 | 10 | 1 |
|---|---|---|
| • | •••••••• | •••• |

| 100 | 10 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 4 |

Mais comme trois groupes de trois est équivalent à un groupe de neuf, ce qui s'écrit aussi $100_{trois}=10_{neuf}$, le tableau ci-dessus en base neuf, devient en base trois :

| 10000 | 100 | 1 |
|---|---|---|
| • | •••••••• | •••• |

| 10000 | 100 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 4 |

Ou, en faisant apparaître les colonnes intermédiaires :

| 10000 | 1000 | 100 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| • | | •••••••• | | •••• |

Et, en effectuant des groupements par trois lorsque c'est possible

| $G^{quatre}$ | $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|---|
| • | | ••• ••• •• | | ••• • |

Qui devient, en remplaçant chaque groupe de trois par des unités dans la colonne à gauche de celle dans laquelle se trouve le groupe remplacé :

| $G^{quatre}$ | $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|---|
| • | •• | •• | • | • |

Ou, en passant au tableau de nombres :

| $G^{quatre}$ | $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |

On a donc réussi à l'aide d'échanges successifs à établir l'égalité $184_{neuf}=12211_{trois}$.

On arrive évidemment à établir cette égalité en effectuant les mêmes échanges, qui apparaissent plutôt sous la forme de substitutions en passant par la chaîne d'égalités ci-dessous :

$$184_{neuf} = 1x9^{deux} + 8x9^{un} + 4x9^{zéro} = 1x3^{quatre} + 8x3^{deux} + 4x3^{zéro} = 1x3^{quatre} + (2x3+2)x3^{deux} + (3+1)x3^{zéro}$$

$$= 1x3^{quatre} + 2x3^{trois} + 2x3^{deux} + 1x3^{un} + 1x3^{zéro} = 12211_{trois}$$

Mais si on regarde attentivement cette chaîne d'égalités, elle est écrite en base dix ! Le passage par les abaques et les tableaux de nombres permet donc d'échapper à la base dix pour communiquer entre la base neuf et la base trois.

Une procédure analogue, en remplaçant les groupements de la droite vers la gauche par des dégroupements de la gauche vers la droite permet de passer d'un nombre écrit en base trois à un nombre écrit en base neuf. Cette nouvelle procédure peut d'ailleurs aussi s'écrire avec la chaîne d'égalités ci-dessus mais en la lisant de la droite vers la gauche.

Ce type de tâches permet aux étudiants de se familiariser avec les groupements de la droite vers la gauche utilisés dans les additions et les multiplications écrites et avec les dégroupements de la gauche vers la droite utilisés dans les soustractions et les divisions écrites avant de travailler spécifiquement ces outils de calcul. On illustrera cela par les quelques exemples ci-dessous.

### *1.5 La multiplication par 10 dans une autre base que la base dix*

Prenons, par exemple, la multiplication $212_{trois}$ x $10_{trois}$. Si on écrit le nombre $212_{trois}$ à l'aide de l'abaque ou du tableau de nombres, on obtient :

| $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 2 |
| | •• | • | •• |

En base trois, 10 signifie un groupe de trois et zéro unité, donc trois. On peut donc représenter la multiplication $212_{trois}$ x $10_{trois}$ comme suit sur l'abaque :

| $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|
| | •••••• | ••• | •••••• |

Ce qui, en regroupant par trois lorsque c'est possible et en remplaçant chaque groupe de trois par une unité dans la colonne située à gauche de celle dans laquelle se trouve le groupe remplacé, donne :

| $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | U |
|---|---|---|---|
| | ••• ••• | ••• | ••• ••• |
| •• | • | •• | |
| 2 | 1 | 2 | |

On observe alors que multiplier le nombre $212_{trois}$ par le nombre $10_{trois}$ revient à décaler chaque chiffre qui compose le nombre d'une colonne vers la gauche dans le tableau de nombres. L'espace ainsi libérer dans la colonne des unités peut alors être comblé en utilisant le chiffre 0, ce qui donne l'égalité :

$$212_{trois} \text{ x } 10_{trois} = 2120_{trois}$$

Ce résultat peut être généralisé à toutes les multiplications d'un nombre entier par 10, quelle que soit la base utilisée.

### 1.6 L'écriture de nombres non nécessairement entiers

Comme on vient de le voir, multiplier un nombre par 10 revient, quelle que soit la base utilisée à décaler les chiffres utilisés pour écrire ce nombre d'une colonne vers la gauche dans le tableau de nombres en ajoutant si nécessaire une colonne à gauche :

| $G^{quatre}$ | $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | $G^{zéro}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 1 | 2 | 212 |
| | 2 | 1 | 2 | | 212 x 10 |
| 2 | 1 | 2 | | | 212 x 100 |

Comme la division est l'opération inverse de la multiplication, diviser par 10 revient, quelle que soit la base utilisée à décaler les chiffres utilisés pour écrire le nombre d'une colonne vers la droite dans le tableau de nombres en ajoutant si nécessaire une colonne à droite :

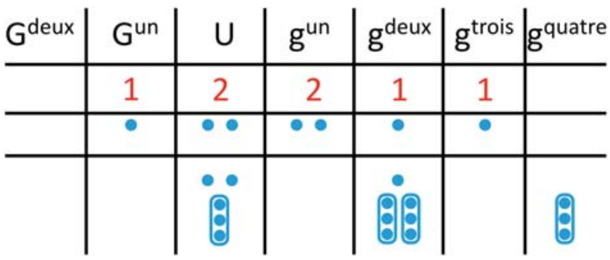
| $G^{trois}$ | $G^{deux}$ | $G^{un}$ | $G^{zéro}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 2 | | 212 |
| | | 2 | 1 | 2 | 212 : 10 |

Pour passer d'une colonne à la colonne située à sa gauche, il faut multiplier par la base. Selon ce principe la valeur des éléments représentés dans la nouvelle colonne du tableau de nombres créée à droite de la colonne des unités doit être multipliée par la base pour obtenir l'unité. Il s'agit donc du nombre qui multiplié par la base donne un, soit l'inverse de la base. On notera donc cette quantité $G^{moins\ un}$ ou $g^{un}$. Il est évidemment toujours possible de créer, selon le même principe de nouvelles colonnes vers la droite. On peut par exemple coder en base trois le nombre suivant à l'aide de l'abaque ou du tableau de nombres :

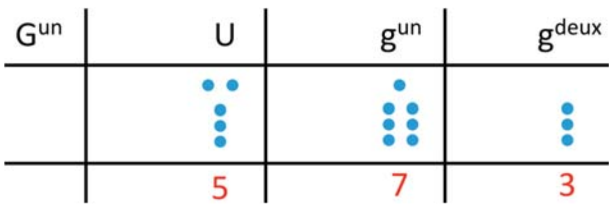
| $G^{un}$ | U | $g^{un}$ | $g^{deux}$ | $g^{trois}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| • | •• | •• | • | • |

Pour s'affranchir du tableau, on doit introduire une virgule à la droite du chiffre des unités : $12{,}211_{trois}$.

Le lecteur intéressé pourra remarquer que s'il cherche à écrire ce nombre en base neuf, il obtiendra en dégroupant ce qui se trouve dans les colonnes à exposant impaire :




Mais comme trois groupes de trois est équivalent à un groupe de neuf, ce qui s'écrit aussi $100_{trois}=10_{neuf}$, le tableau ci-dessus en base trois, devient en base neuf :




Remarquons que si $12211_{trois}=184_{neuf}$, $12{,}211_{trois}=5{,}73_{neuf}$.

## 2 Enjeux liés à la manipulation

Dans le cadre du cours de mathématiques et de didactique des mathématiques présenté en introduction, nous avons toujours souhaité permettre aux étudiants d'effectuer des manipulations pour la partie sur la numération et les outils de calculs. Or, ce cours est constitué en parts égales d'un cours en grands effectifs (environ 360 étudiants répartis en trois groupes) et de séminaires (groupes de 25 à 30 étudiants). Étant donné qu'il était impossible d'avoir du matériel en suffisance, pour expliquer le système de numération dans différentes bases, le formateur présentait, dans son diaporama, des animations dans la représentation analogique, puis les aspects algorithmiques liés à ces animations dans la représentation symbolique. Les étudiants retenaient essentiellement des « recettes » de type algorithmique (voir 1.3) qu'ils appliquaient en vue de l'examen. Dans ces « recettes » de type algorithmique, ces étudiants restaient uniquement dans la représentation symbolique du système de numération, c'est d'ailleurs ce qu'ils ont retenu de leur formation secondaire. Pour casser cette représentation des mathématiques et de leur enseignement, nous avons modifié le cours afin de les amener à faire des liens entre les représentations symboliques et analogiques. Pour cela, nous avons créé du matériel mis à disposition de chaque étudiant afin de les faire manipuler et donner du sens à la numération. Nous n'avons pas utilisé le matériel de numération existant (voir figure 3) car d'une part il est en base dix, d'autre part, il est en partie iconique : la barre une dizaine est une barre de dix petits carrés que l'on ne peut pas détacher, de même pour la plaque une centaine, elle symbolise dix barres une dizaine que l'on ne peut pas détacher, de même pour le cube un millier qui lui est même creux.

*Figure 3* : Matériel de numération en base dix utilisé en Suisse Romande dans les classes

Matériel en base trois fabriqué dans le cadre de ce cours

Le matériel que nous avons conçu est constitué de billes et de boîtes (fabriquées avec une imprimante 3D) et permet d'effectuer des groupements, ce que le matériel usuel ne permet pas. Il permet aussi de travailler les représentations analogiques (boîtes avec les billes) ou avec des symboles de type iconique (boîtes sans les billes). Ce matériel sans billes correspond au système de numération hiéroglyphique égyptien : le panier représenté par son anse pour grouper dix objets (dizaine), la corde pour attacher dix paniers (centaine).

Dans la version modifiée du cours que nous proposons aux étudiants depuis 2017, nous présentons toujours un diaporama avec des animations qui relient les représentations symboliques et analogiques, mais également une manipulation avec le matériel conçu (qui est filmée et projetée en direct pour que tous les étudiants puissent voir ces manipulations) dans la représentation analogique. De plus, les étudiants en suivant les manipulations du formateur vont avec des fiches A4 (voir Annexes) tout d'abord essayer par eux-mêmes de représenter ces manipulations. Puis, le formateur propose au rétroprojecteur une utilisation possible de ces fiches. Les objectifs de formation sont multiples : les étudiants ont une posture active pendant le cours, ils s'approprient ce qui est présenté, les fiches permettent de faire les liens entre les représentations analogiques et symboliques, ces fiches constituent une trace des manipulations auxquelles ils ont assisté. Ces fiches représentent un support intermédiaire qui permet de faire les liens entre les représentations analogiques des manipulations et les représentations symboliques utilisées plus couramment.

## III - PRESENTATION DES QUATRE ATELIERS

Nous avons proposé quatre ateliers qui portent sur « écriture d'un nombre dans une base autre que dix », « changement de base », « addition-soustraction » et « multiplication-division ». Pour chaque atelier, nous avons demandé aux participants de répondre aux questions suivantes :

- Que travaille-t-on dans cet atelier d'un point de vue mathématique et par rapport aux différents aspects de la numération ? Travaille-t-on avec le nombre, le chiffre, la quantité associée au chiffre indépendamment de la base ?
- Dans quel registre du triple code de Dehaene se situe-t-on ?
- Que remarque-t-on quand on fait l'activité ? A quoi se réfère-t-on ?
- Que pensez-vous de cette activité ? Comment l'améliorer ?
- Avez-vous des remarques ?

### 1 Atelier « écriture d'un nombre dans une base autre que dix »

Cet atelier a pour objectif de prendre conscience que l'écriture d'un nombre dépend de la base dans laquelle on se place et de la signification de l'aspect groupement de la numération. Pour cela, nous avons construit différentes tâches qui utilisent toujours le même nombre cent cinquante-sept.

Nous avons tout d'abord proposé la fiche « Confettis » (Annexe 1) qui est inspirée d'une tâche proposée à des élèves de 4H (CE1 - 7/8 ans), que nous avons modifiée car elle se limite à la base dix. Nous avons demandé aux participants d'écrire le nombre de confettis en base trois, puis en base neuf. Nous avons choisi d'écrire un nombre dans ces deux bases, car neuf est une puissance de trois. Ainsi, en base trois, on groupe par trois et les puissances sont : un, trois, neuf, vingt-sept, huitante-et-un (quatre-vingt un). En base neuf, on groupe par neuf et les puissances sont : un, neuf, huitante-et-un.

L'objectif est d'effectuer des groupements par trois (et ses puissances), puis par neuf (et ses puissances) et de voir comment on peut passer de l'écriture d'un nombre en base trois à la base neuf, sans passer par la base dix.

Le nombre cent cinquante-sept en base dix s'écrit 184 en base neuf ou 12211 en base trois.

L'exercice 1 (Annexe 2 et figure 4) illustre le passage de la base neuf à la base trois : il faut effectuer des regroupements par trois. $184_{neuf} = 12211_{trois}$. Par exemple, le chiffre 4 des unités correspond aux quatre unités (en base neuf). Ces quatre unités peuvent se regrouper par trois pour donner un groupe de trois et une unité en base trois. C'est-à-dire $4_{neuf}=11_{trois}$.

L'exercice 2 (Annexe 2 et figure 4) illustre le passage de la base trois à la base neuf : il faut effectuer des dégroupements. Par exemple, on dégroupe un groupe de trois (en base trois) pour faire trois unités (en base neuf), à laquelle on ajoute une unité et on trouve bien les quatre unités (en base neuf). Autrement dit, $11_{trois}=1x3+1x1=4_{neuf}$. Ce qu'il faut remarquer c'est que cette égalité reste vraie lorsqu'on déplace les chiffres 11 d'un nombre pair de rangs vers la droite (ou la gauche) par exemple $1100_{trois}=40_{neuf}$ (on a déplacé 11 de deux rangs vers la gauche) ou encore $0{,}0011_{trois}=0{,}04_{neuf}$ (on a déplacé 11 de quatre rangs vers la droite). Cette remarque n'est plus vraie lorsqu'on déplace 11 d'un nombre impair de rangs vers la droite (ou la gauche) comme dans ces exemples : $110_{trois}=13_{neuf}$ ou encore $0{,}011_{trois}=0{,}13_{neuf}$ (voir 1.4).

Figure 4 : Participants de l'atelier 1

Pour le dernier exercice de cet atelier, nous avons disposé cent cinquante-sept billes sur la table (dans une grosse boîte) et nous avons demandé aux participants d'écrire le nombre de billes en base trois puis en base neuf. Pour cela, nous avons proposé du matériel : une planche en bois avec des trous pour les billes pour disposer les unités, des boîtes violettes qui contiennent trois billes, des boîtes vertes qui contiennent trois boîtes violettes de trois billes (soit des boîtes de neuf billes), des boîtes bleues qui contiennent trois boîtes vertes (soit des boîtes de vingt-sept billes) et une boîte rouge qui contient trois boîtes bleues (soit une boîte de huitante et une billes).


Figure 5 : Matériel en base trois (cent cinquante-sept billes). Représentations analogiques du nombre en base trois (photo du milieu) et en base neuf (photo de droite)

Cette tâche permet également d'effectuer des groupements par trois et des dégroupements.

Ces tâches travaillent le passage de la représentation analogique à la représentation symbolique en base trois ou en base neuf, ainsi que les groupements et dégroupements pour passer d'une base à l'autre et la notion d'échange.

## 2 Atelier « changement de base »

Cet atelier a pour objectif de travailler :

- l'aspect groupement de la numération
- les groupements et dégroupements dans les représentations analogiques pour les changements de bases lorsque l'on passe d'une base à une autre, dans le cas particulier où la base n'est pas une puissance de l'autre.

L'exercice 1 (Annexe 3) illustre le passage de la base quatre à la base huit. Comme huit n'est pas une puissance de quatre, nous voyons qu'il va falloir effectuer à la fois des groupements et des dégroupements pour passer de la base huit à la base quatre. Ainsi $2131_{quatre}=235_{huit}$.

Par exemple le chiffre 3 représente trois groupes de quatre en base quatre, on doit ainsi décomposer les trois groupes : on va grouper les deux groupes de quatre en un groupe de huit et on va dégrouper un groupe de quatre en quatre unités. Ainsi $30_{quatre}=3x4=1x8+4x1=14_{huit}$

L'exercice 2 (Annexe 3) illustre le passage de la base quatre à la huit en passant par la base deux. Pour passer de la base quatre à la base deux, on effectue des groupements par deux. Ainsi 2131 en base quatre s'écrit 10011101 en base deux (nous laissons les détails à la charge du lecteur, voir exercice 2 de l'Annexe 3). Par exemple, le chiffre 3 représente trois groupes de quatre, on groupe en un groupe de huit et il reste un groupe de quatre. Ainsi $3_{quatre}=11_{deux}$ autrement dit 3 en base quatre s'écrit 11 en base deux et ceci quelle que soit la position du chiffre 3 dans le nombre (voir 1.4).

Puis pour passer de la base deux à la base huit, on effectue des dégroupements.

Ainsi, $10011101_{deux}=235_{huit}$.

Après ces exercices nous avons proposé la tâche suivante : nous avons disposé un tas de billes (cent cinquante-sept) et nous avons demandé aux participants d'écrire le nombre de billes en base deux, puis en base quatre puis en base huit. Pour cela, nous avons mis du matériel à disposition : des boîtes contenant une bille, deux billes, quatre billes, huit billes, seize billes, trente-deux billes, soixante-quatre billes et cent vingt-huit billes.

Les participants ont ainsi choisi les boîtes et trouvé que le nombre s'écrit 10011101 en base deux, puis en sélectionnant le matériel disponible en base quatre, ils ont effectué des groupements et trouvé que le nombre s'écrit 2131 en base quatre. Puis en sélectionnant le matériel disponible en base huit, ils ont encore effectué des groupements ou dégroupements et trouvé que le nombre s'écrit 235 en base huit.

*Figure 6.* Participants de l'atelier 2

Pendant cet exercice, nous avons distribué deux tableaux de nombres (Annexe 4 et photo ci-dessus) pour les passages de la base huit à la base quatre en passant par la base deux. D'un côté, les entêtes des colonnes sont en représentation symbolique et écrites en base dix (puissance de huit : 64, 8, 1, puissances de deux : 64, 32, ..., 1, puissances de quatre : 64, 16, 4, 1) et de l'autre en représentation analogique voire iconique (voir les représentations intermédiaires en 1.1).

La dernière tâche proposée utilise des nombres non entiers. Nous avons demandé comment représenter le nombre qui s'écrit 23,5 en base huit avec le matériel à disposition. Nous avons d'abord dû déterminer qu'il fallait choisir pour la boîte unité une boîte pouvant contenir un multiple de huit (voir figure 7).

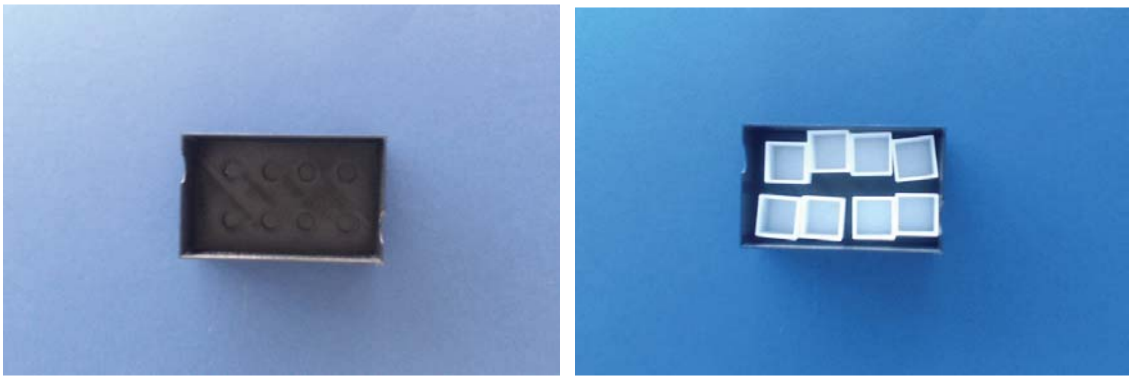


*Figure 7.* Boîtes unité en représentation symbolique de type iconique. Sur la photo de droite, la boîte unité contient des boîtes blanches (groupements d'ordre moins un ou huitième).

Nous avons représenté ainsi le nombre 23,5 en base huit (voir figure 8), en base deux puis en base quatre.

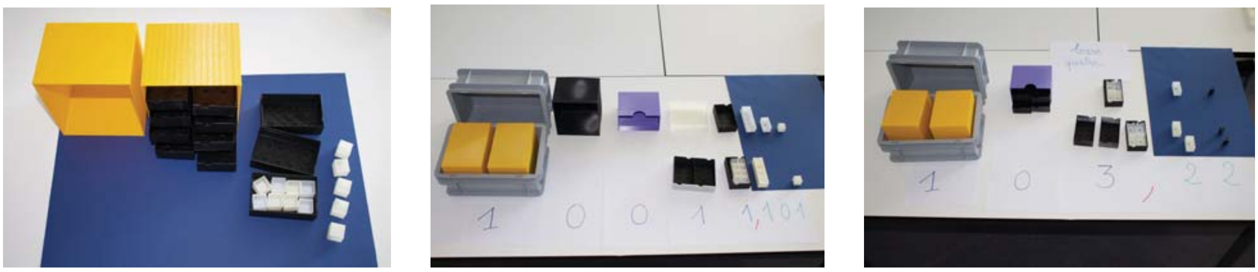



*Figure 8.* 23,5 en base huit (à gauche), en base deux (au milieu), en base quatre (à droite)

En base huit, le huitième de l'unité est la petite boîte blanche (pouvant contenir 1 bille). Sur la photo de gauche (figure 8), le nombre 23,5 en base huit est représenté avec :

- deux boîtes jaunes qui contiennent chacune huit boîtes noires (unités).
- trois boîtes noires qui sont les trois unités du nombre (une unité en base huit contient huit petites boîtes blanches).
- cinq boîtes blanches qui correspondent aux cinq huitièmes du nombre.

En base deux, la moitié de l'unité[1] est la boîte blanche pouvant contenir 4 billes. Le quart de l'unité est la boîte blanche pouvant contenir deux billes. Le huitième de l'unité est la boîte blanche pouvant contenir 1 bille. Sur la photo du milieu (figure 8), le nombre 23,5 en base huit est représenté avec le matériel en base deux :

- une boîte grise qui contient seize unités (deux boîtes jaunes de huit boîtes noires chacune)
- une boîte blanche qui contient deux boîtes noires (c'est-à-dire deux unités)
- une boîte noire unité (qui contient huit petites boîtes blanches d'un huitième)
- une boîte blanche (un demi de l'unité ou une demi boîte noire, qui contient quatre petites boîtes blanches d'un huitième)
- une petite boîte blanche d'un huitième.

En base quatre, le quart de l'unité est la boîte blanche pouvant contenir deux billes et le seizième de l'unité est la boîte noire pouvant contenir une demi-bille. Sur la photo de droite (figure 8), le nombre 23,5 en base huit est représenté avec le matériel en base quatre :

- une boîte grise qui contient seize unités (quatre boîtes violettes de quatre boîtes noires chacune)
- trois boîtes noires d'une unité (qui contiennent chacune quatre petites boîtes d'un quart ou de deux billes)
- deux boîtes blanches d'un quart d'unité chacune (ou de deux billes chacune)
- deux demi boîtes noires d'un seizième d'unité chacune (ou d'une demi-bille chacune)

La question soulevée est de savoir si le fait de manipuler des boîtes avec ou sans billes change la représentation du nombre ? Les boîtes avec billes correspondent à une représentation analogique du nombre et sans les billes à une représentation plus symbolique. Lorsqu'on manipule ce type de matériel de numération pour représenter des nombres non entiers dans des bases autres que dix, cela a posé des difficultés aux participants : le choix de l'unité, le choix du matériel correspondant à chacun des ordres $g^{un}$, $g^{deux}$, $g^{trois}$ en bases deux, quatre et huit, le choix du matériel disponible pour chaque base, les règles d'échanges pour passer d'une base à l'autre avec le 0,5 en base huit.

Une des difficultés relevant d'un aspect mathématique sous-jacent pourrait être l'association du nombre avec le cardinal d'un ensemble pour la partie non entière du nombre.

Pour les ateliers 1 et 2, des participants ont insisté sur la difficulté de précision du vocabulaire employé. Par exemple, la phrase « en base quatre, on n'a pas un huitième » pour expliquer qu'on n'a pas de boîte correspond au huitième en base quatre devrait être remplacée par « un huitième n'est pas un groupement en base quatre » ou alors « un huitième ne fait pas partie des ordres de grandeur à

[1] Nous voyons ici en acte que $1_{deux} = 1_{quatre} = 1_{huit}$.

disposition en base quatre » (puissances de quatre). En effet, en base quatre, on passe directement de « un quart », un groupement d'ordre moins un à « un seizième », un groupement d'ordre moins deux. Notons que si l'on ne peut pas utiliser les notations 1/4 et 1/16 rattachées à la base dix dans les représentations symboliques, on peut très bien utiliser les mots « un quart » et « un seizième » puisque nous avons fait le choix de ne pas adapter notre représentation auditive-verbale à la base dans laquelle on travaille (voir 1.1).

## 3 Atelier « addition-soustraction »

Dans cet atelier, il est demandé aux participants d'effectuer des additions et des soustractions de nombres entiers avec du matériel en base dix puis en base trois. L'objectif de cet atelier est de montrer qu'avec le matériel proposé, pour effectuer ces calculs, on effectue des échanges et on n'est pas nécessairement dans l'aspect positionnel de la numération (représentation intermédiaire iconique, voir figure 2).

*Figure 9.* Participants de l'atelier 3

Nous avons demandé d'effectuer 285+147 en base dix avec le matériel (voir figure 9), puis 345 – 187 en base dix.


*Figure 10.* Calcul 285+147 en base dix avec le matériel

Pour la soustraction, nous avons demandé d'effectuer les calculs par dégroupement et par compensation avec le matériel. Il est ressorti que l'utilisation du matériel incite à soustraire par dégroupement (méthode « suisse ») plutôt que par compensation (méthode « française »).

Nous avons ensuite demandé d'effectuer le calcul 1222+2212 écrit en base trois, ceci avec le matériel de la photo ci-dessous et une fiche à compléter en même temps (voir figure 11).

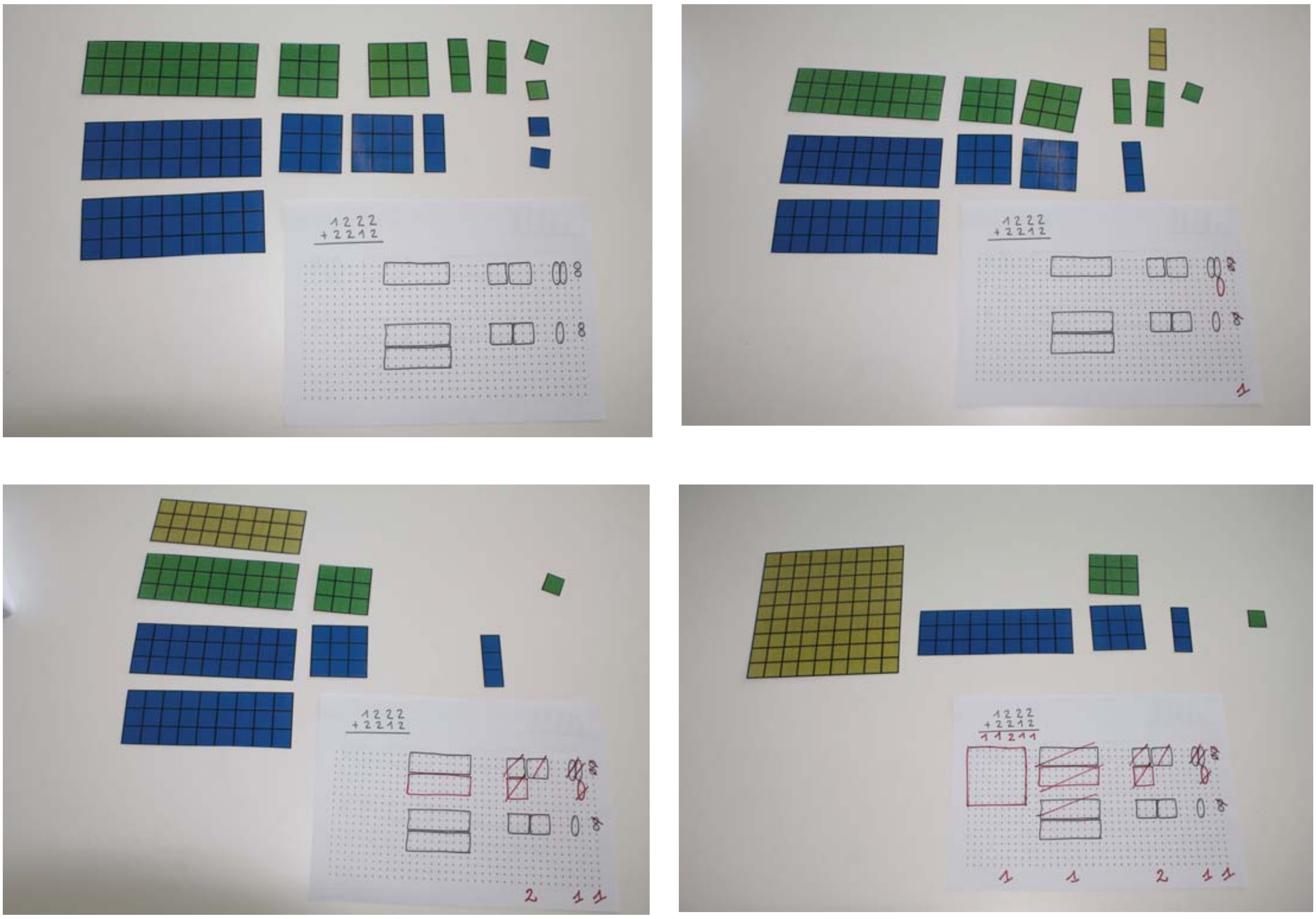



*Figure 11.* Calcul 1222+2212 écrit en base trois avec le matériel

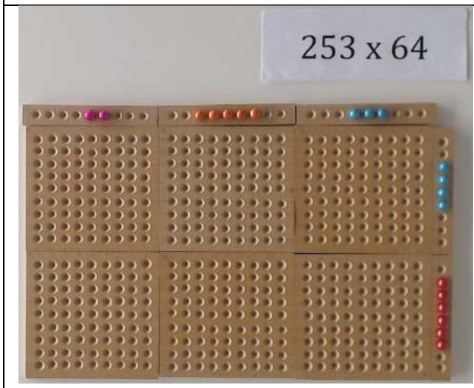
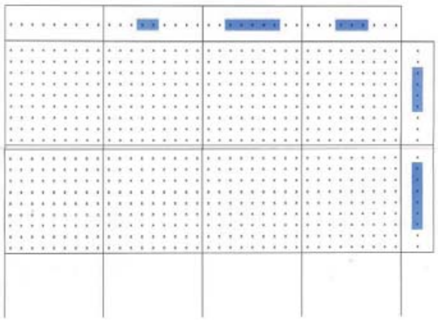
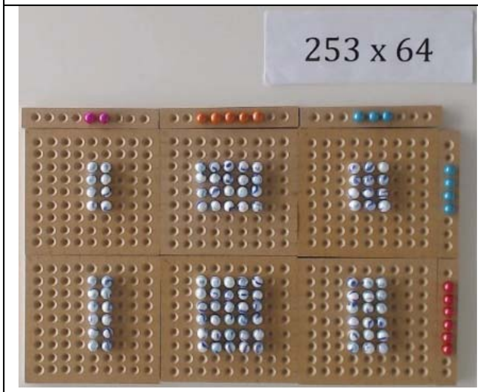
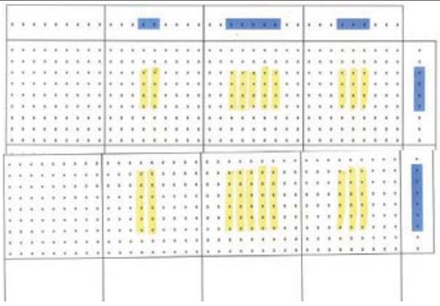
Comme pour la base dix, nous avons ensuite proposé d'effectuer des soustractions avec ce matériel et comme pour la base dix, les participants ont signalé que le matériel incite à soustraire par dégroupement. On peut aussi noter que ce matériel est iconique et qu'il n'est pas positionnel. Toutefois, la plupart des participants ont organisé les calculs comme ci-dessus, en respectant les positions habituelles des différents groupements.

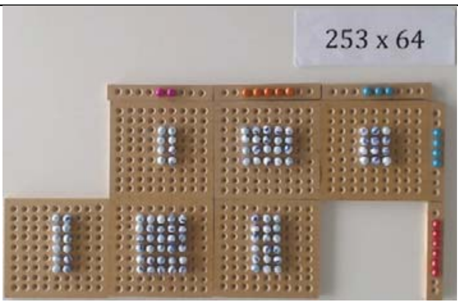
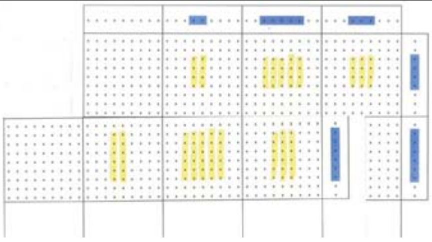
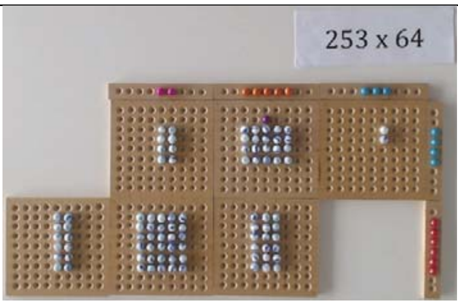
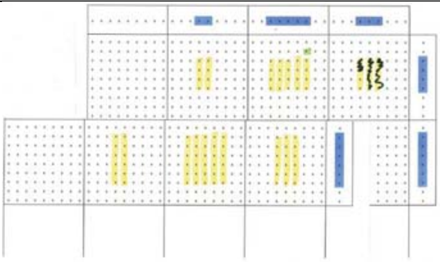
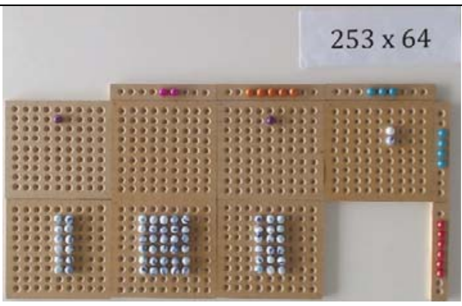
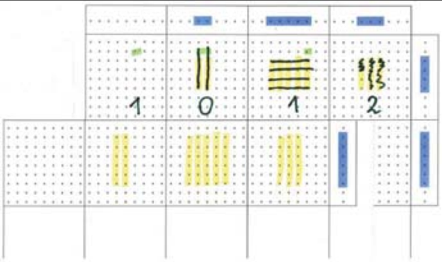
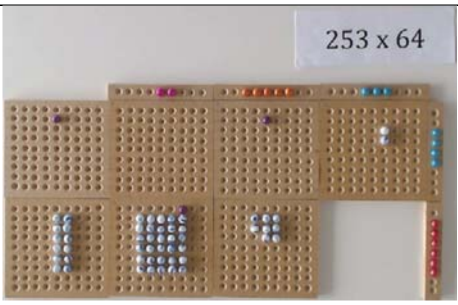
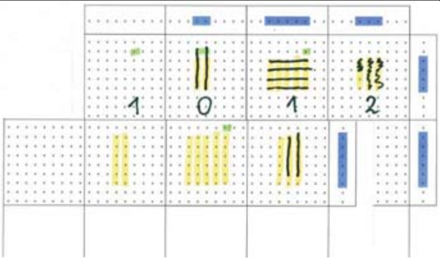
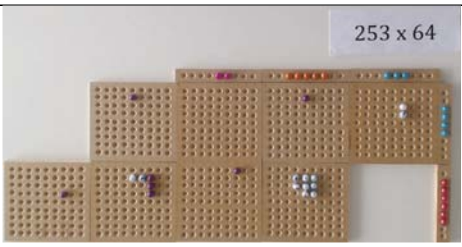
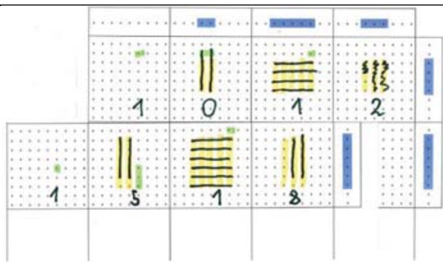
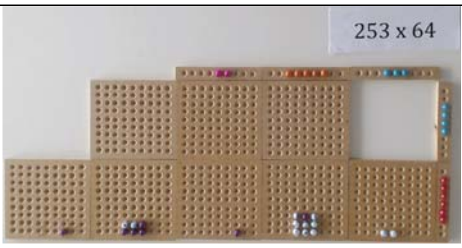
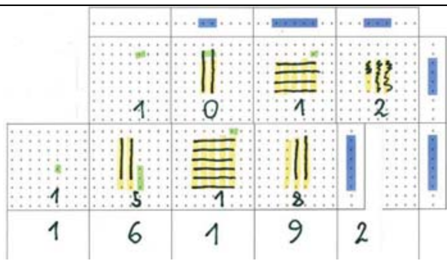
## 4 Atelier « multiplication – division »

Le matériel présenté dans cet atelier permet d'effectuer les quatre opérations. Toutefois nous n'avons proposé que des tâches pour multiplier et pour diviser. Contrairement à ce qui se passait dans l'atelier 3, nous avons travaillé beaucoup sur l'aspect positionnel de la numération puisque nous nous situons dans la représentation intermédiaire qui utilise l'abaque (représentation intermédiaire symbolique, voir figure 2). Comme le matériel est très différent de celui utilisé dans les autres ateliers, nous avons dans un premier temps montré comment l'utiliser pour effectuer une multiplication puis une division en base dix. Nous avons ensuite laissé du temps aux participants pour le tester dans d'autres bases et noter quelles sont les représentations utilisées et quels sont les moments où la base intervient.

*Figure 12.* Participants de l'atelier 4

Dans ce qui suit, nous allons présenter une série de photographies qui illustrent une multiplication en base dix puis une division en base quatre. Le tableau ci-dessous montre ce qui correspond à la multiplication en base dix avec l'exemple 253 multiplié par 64.

| **Ce qui est montré par l'animateur de l'atelier (le formateur dans le contexte du cours)** | **Ce qui est noté par les participants en observant le formateur (les étudiants dans le contexte du cours)** | **Ce qui est donné comme explications orales** |
|---|---|---|
|   |  | Pour effectuer la multiplication 253x64 on pose le 253 en entête de colonnes de notre abaque et le 64 en posant le 4 sur la première ligne et le 6 sur la seconde |
|   |  | On complète alors les différentes cases de l'abaque en respectant dans chaque case le bon nombre de colonnes et de lignes. Cela permet d'éviter de se référer au répertoire mémorisé des tables de multiplication en auditif-verbal |

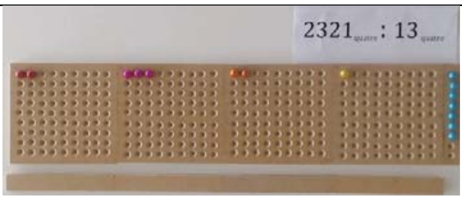
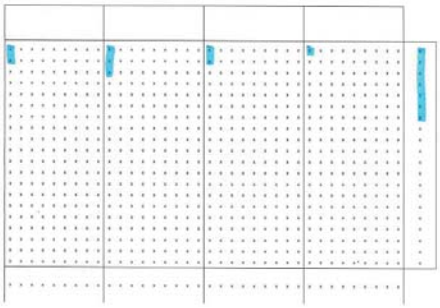
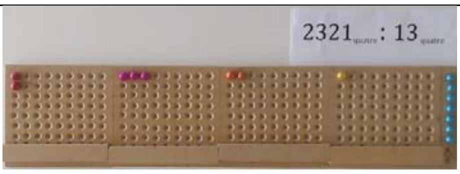
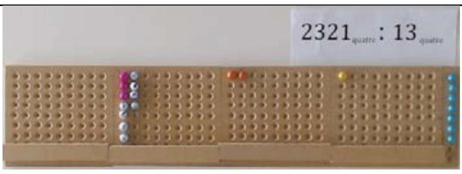
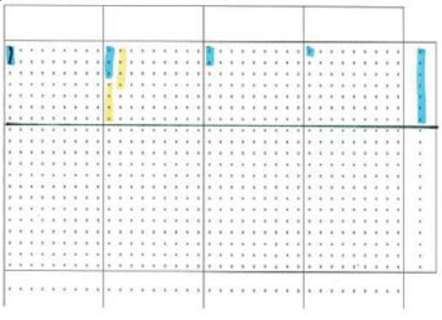
| | | |
|---|---|---|
|   |  | Lorsque l'on a complété la seconde ligne, on l'a fait comme pour une multiplication par 6 alors que l'on multiplie par 6x10. Il faut donc décaler les colonnes d'un cran vers la gauche[2] |
|   |  | Comme on travaille en base dix, on fait des groupements de dix à chaque fois que c'est possible en ajoutant un élément par groupement dans la colonne de gauche |
|   |   | Le nombre 1012 correspond au résultat de la multiplication de 253 par 4 |
|   |   | On effectue, pour la seconde ligne de l'abaque le même type de regroupements par dix à chaque fois que c'est possible |
|   |   | Le nombre 1518 correspond au résultat de la multiplication de 253 par 6. Le nombre 15180 correspond lui au résultat de la multiplication de 253 par 60 |
|   |   | On additionne en regroupant dans chaque colonne les résultats obtenus en multipliant. Le nombre 16192 correspond bien au résultat de la multiplication de 253 par 64. Dans certains calculs, il peut être nécessaire d'effectuer des |

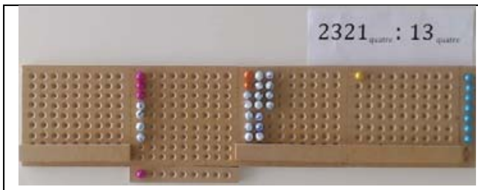
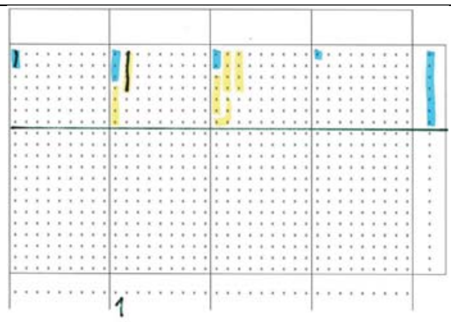
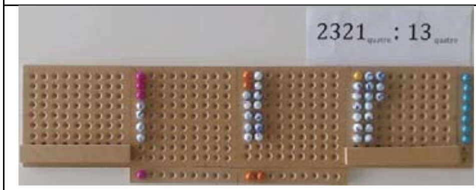
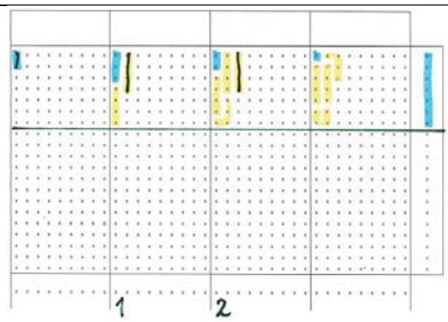
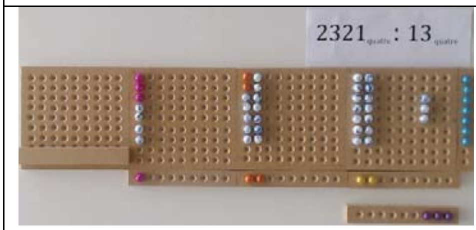
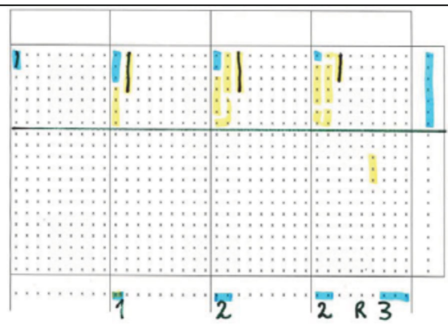
[2] Notons que le matériel « papier » utilisé donne l'impression qu'une bande bleue apparaît dans la colonne des unités, il s'agit en fait de la translation de la deuxième ligne. Des améliorations devront encore être apportées à cet outil de calcul encore en développement.

| | | |
|---|---|---|
| | | regroupements par dix à ce stade. |

Les participants ont très rapidement compris que si l'on travaille en base huit par exemple, la seule différence apparaît au moment des groupements qui se font par huit et plus par dix. Cette façon de procéder a permis d'éviter la transcription entre les tables de multiplication mémorisées en auditif-verbal et leur réécriture symbolique en base huit. On peut noter que les multiplications sur chacune des cases de l'abaque ne dépendent pas de la base choisie mais uniquement des nombres qui correspondent aux chiffres utilisés. En effet, les nombres que l'on écrit 253 et 60 en base dix sont différents de ceux que l'on écrit 253 et 60 en base huit. Par contre les nombres associés, par exemple, aux chiffres 5 et 6 utilisés pour signifier le nombre de groupements d'ordre un dans l'écriture de chacun de ces nombres sont eux égaux et ce sont ces nombres-là que l'on multiplie sur les cases de l'abaque.

Le tableau ci-dessous illustre une division en base quatre avec l'exemple : le nombre 2321 divisé par le nombre 13 écrits en base quatre.

| **Ce qui est montré par l'animateur de l'atelier (le formateur dans le contexte du cours)** | **Ce qui est noté par les participants en observant le formateur (les étudiants dans le contexte du cours)** | **Ce qui est donné comme explications orales** |
|---|---|---|
|   |  | Pour diviser le nombre 2321 par le nombre 13 écrits en base quatre, on pose le nombre 2321 sur les colonnes de l'abaque. |
|   |  | En base quatre, le nombre 13 correspond au nombre qui se dit sept et qui se représente à l'aide de sept objets. Diviser par ce nombre revient donc à faire des groupes de sept objets indépendamment de la base |
| | | Comme on ne peut pas faire de groupe de sept avec deux objets, on remplace chacun des deux objets par des groupements de quatre dans la colonne de droite |
|   |  | On effectue alors des groupes de sept dans cette colonne en utilisant les colonnes de chaque case qui ont sept lignes. |

| | | |
|---|---|---|
|  |  | Comme lors des deux étapes précédentes, on remplace chaque objet restant par quatre objets dans la colonne de droite et on effectue des colonnes de sept |
|  |  | Idem |
|  |  | A ce stade, on peut soit déclarer que les trois objets qui restent constituent un reste ou ajouter des cases à droites pour obtenir un nombre non entier comme quotient |

## IV - BILAN ET CONCLUSION

Les participants ont été actifs pendant chacun des quatre ateliers, ils nous ont fait part d'un certain nombre de remarques exposées dans le descriptif des ateliers. Il est ressorti que le matériel présenté ainsi que les tâches ont été très appréciés par leur aspect innovant, par le fait qu'ils permettent de matérialiser les algorithmes des quatre opérations, de mettre en évidence que les répertoires mémorisés le sont en auditif-verbal, ce qui est caché lorsqu'on écrit en base dix. En effet, lorsqu'on manipule le matériel pour effectuer des multiplications (atelier 4), on n'utilise pas le répertoire mémorisé : on utilise le produit cartésien. Par exemple, si on multiplie six par sept, on obtient quarante-deux, ceci est vrai quelle que soit la base et c'est uniquement lorsqu'on va écrire le nombre quarante-deux que l'on va le décomposer en quatre dizaines et deux unités pour la base dix, ou cinq huitaines et deux unités pour la base huit ($42_{dix}$=$52_{huit}$).

Certains participants ont relevé que le matériel est volumineux, pas disponible dans le commerce et donc long à fabriquer soi-même avec une imprimante 3D. Certes, ce matériel peut être long voir coûteux à fabriquer, mais il est rentabilisé dans le cadre d'une formation dans le sens où il est utilisé par le formateur, puis mis à disposition des étudiants.

Les quatre ateliers avaient lieu simultanément, ainsi les quatre groupes de participants n'ont pas nécessairement suivi les ateliers dans l'ordre présenté dans ce texte. Par ailleurs, nous avons été pris par le temps et n'avons pas pu organiser de mise en commun des quatre ateliers, ce qui aurait permis à chacun de s'exprimer sur l'ensemble des quatre ateliers, notamment de faire des liens entre les ateliers 1-2 et 3-4, autrement dit entre la numération et les algorithmes. Nous n'avons pas non plus abordé la question de l'utilisation du matériel en base dix des ateliers 3 et 4 par un enseignant dans sa classe à l'école primaire.

Même s'il est trop tôt pour tirer des conclusions de ces innovations, nous pouvons toutefois déjà relever que le taux d'échec lors de la première session de l'examen a pratiquement été divisé par deux passant de près de 17,6% en 2014 à environ 9,6% en 2017 avec un examen quasi identique sous forme de questions à choix multiples. Suite à cet atelier, nous envisageons d'analyser plus en profondeur les résultats de nos étudiants par rapport au changement du cours de cette année pour voir les effets de ce dispositif de formation sur un plus long terme. Nous envisageons également de fabriquer du matériel similaire en base dix, mais aussi de réfléchir sur les liens entre les représentations proposées par Dehaene et par les sémiologues (Pierce), notamment essayer de définir ce que nous avons nommé la représentation symbolique en référence à Dehaene.

## V - BIBLIOGRAPHIE

ANSELMO B., ZUCCHETTA H. (2013) Du comptage à la numération. Une formation sur l'enseignement de la numération. *Grand N*, **91**, 71-91.

BATTEAU V., CLIVAZ S. (2016) Le dispositif de *lesson study* : travail autour d'une leçon de numération. *Grand N*, **98**, 27-48.

BEDNARZ N., JANVIER B. (1984) La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, **33**, 5-31.

CLIVAZ S., DERUAZ M. (2013) Des mathématiques à leur enseignement, l'algorithme de la multiplication. *Grand N*, **92**, 15-23.

COPIRELEM (2015) *Numération à l'école primaire. Un scénario de formation* (ARPEME Ed.). Paris: COPIRELEM, Ressources et formation.

DEHAENE S. (1992) Varieties of numerical abilities. *Cognition,* **44**, 1-42.

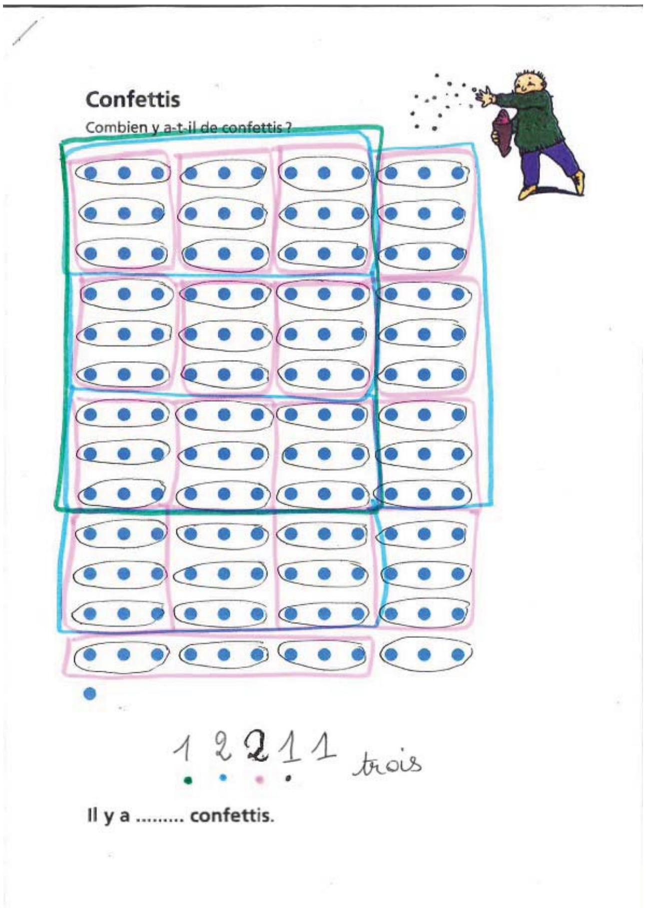
DERUAZ M., CLIVAZ S. (2012) *Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maitres primaires.* Paper presented at the EMF 2012.

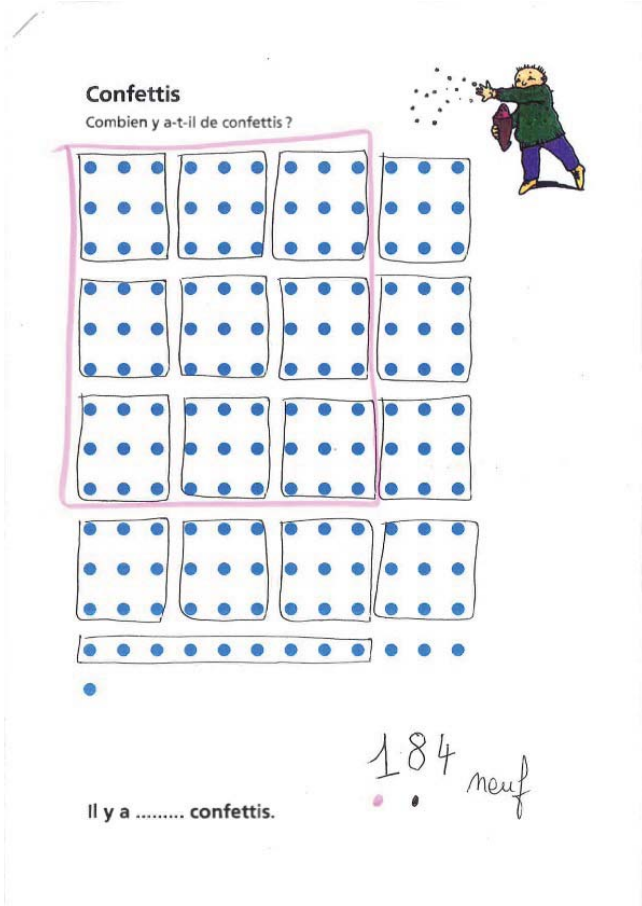
DIAS T., DERUAZ M. (2012) Dyscalculie : et si les enseignants reprenaient la main ? *A.N.A.E.,* **120-121**, 6.

MOUNIER E. (2010) *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Paris 7, Paris.

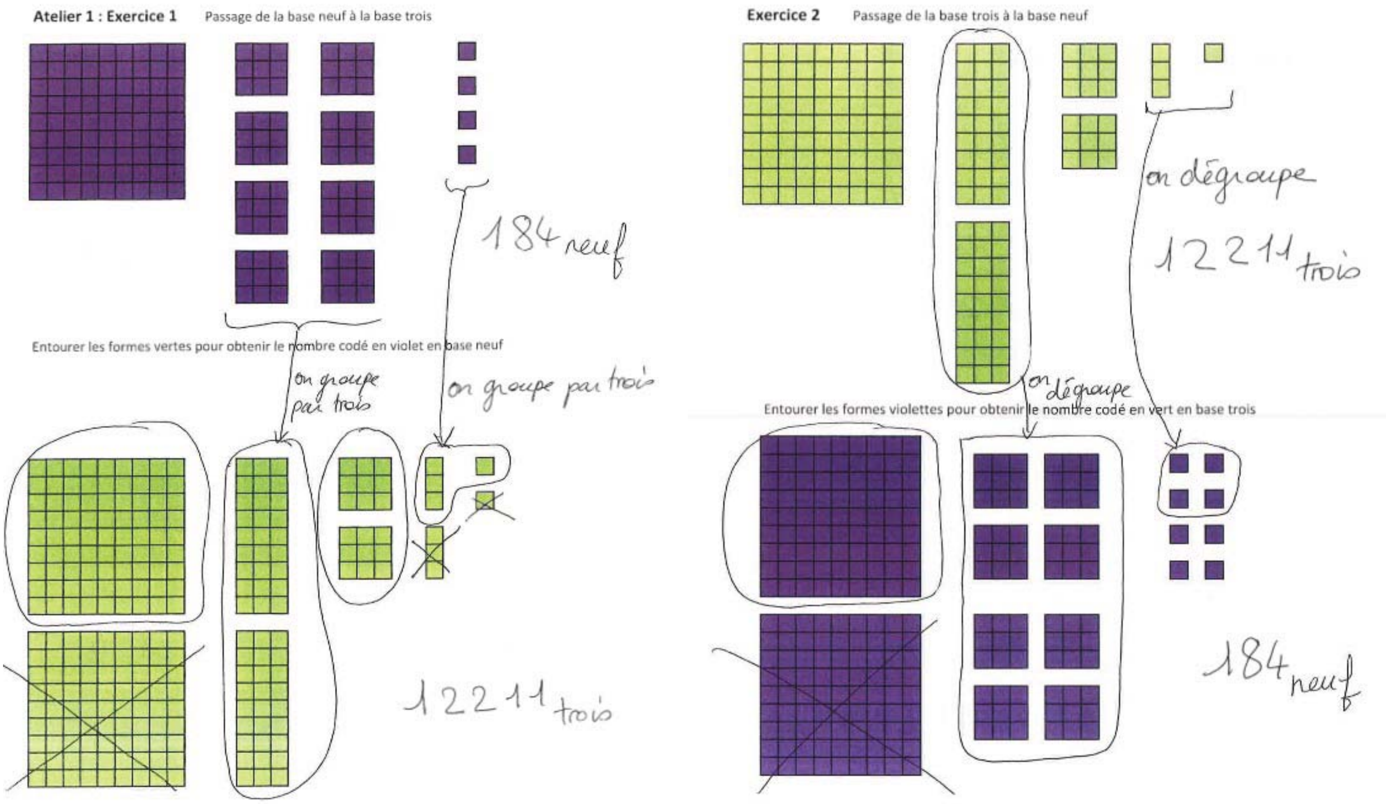
VIVIER L. (2015) Les analogies dans la découverte d'une autre base de numération - La base sept pour de futurs professeurs des écoles. *Cahier du LDAR*, 127-139.

## ANNEXE 1 : ATELIER 1 « CONFETTIS »

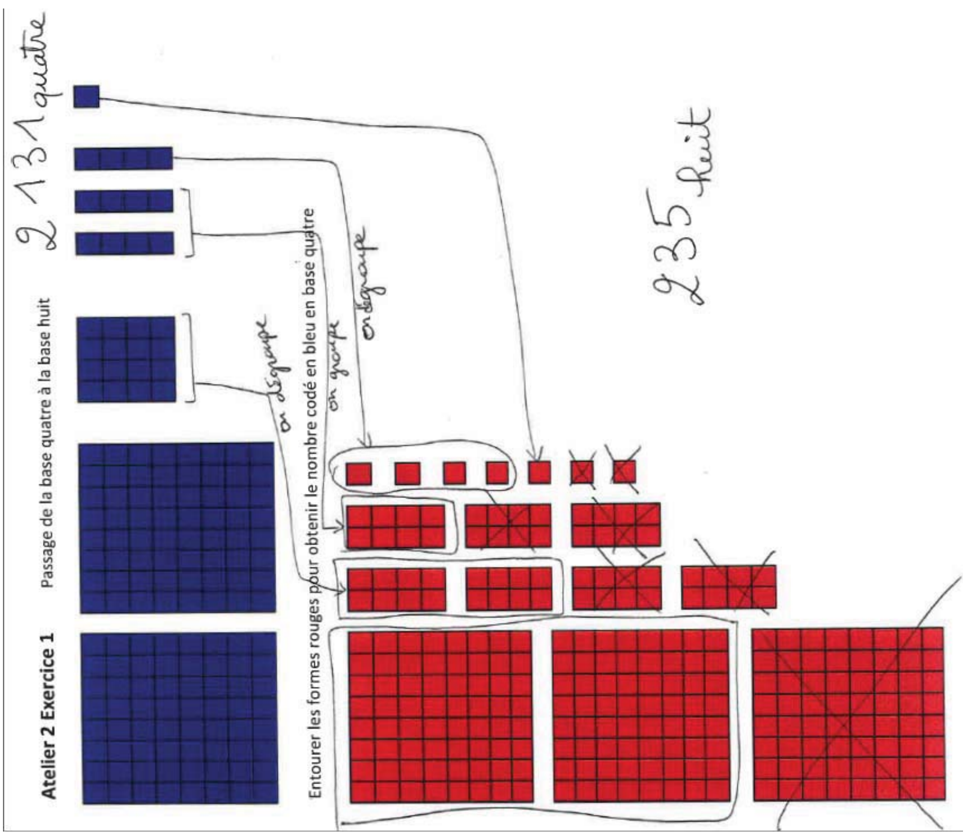


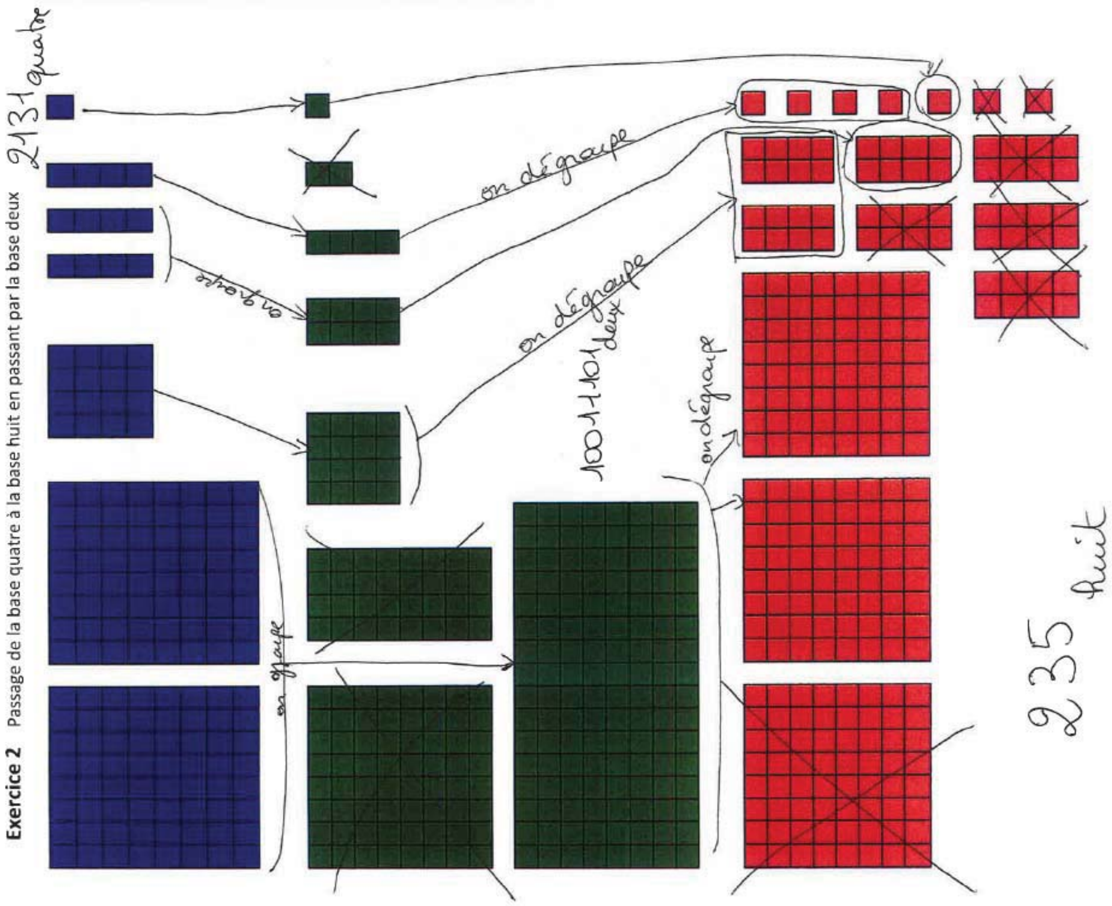



## ANNEXE 2 : ATELIER 1 PASSAGE DE LA BASE TROIS A NEUF




## ANNEXE 3 : ATELIER 2 PASSAGE DE LA BASE QUATRE A HUIT




Exercice 2 Passage de la base quatre à la base huit en passant par la base deux
2131 quatre
on groupe
on dégroupe
on groupe
on dégroupe
10011101 deux
on dégroupe
on dégroupe
235 huit

## ANNEXE 4 : ATELIER 2 TABLEAUX DE NOMBRES