

# MANIPULATION ET DÉCONSTRUCTION DIMENSIONNELLE POUR L'APPRENTISSAGE DU CONCEPT DE TRIANGLE AU CYCLE 3

**Anne VOLTOLINI**

Doctorante, IFE, ENS Lyon

Laboratoire S2HEP

anne.voltolini@ac-grenoble.fr

## Résumé

Dans cet atelier j'ai présenté une situation utilisant les technologies numériques pour apprendre la construction du triangle à la règle et au compas au cycle 3, élaborée dans le cadre d'un travail de thèse. L'enjeu de la situation est, d'une part de faire évoluer les connaissances des élèves sur le triangle, en particulier d'amener une vision ligne 1D du triangle. D'autre part, la situation doit faire prendre conscience aux élèves de la nécessité d'un nouvel instrument, le compas, autre que la règle graduée pour réaliser cette construction. L'atelier a permis aux participants de découvrir la situation didactique articulant des cahiers informatisés à l'utilisation du compas matériel dans l'environnement papier-crayon. Ils ont testé et analysé cette articulation, qualifiée de duo d'artefacts numérique et matériel, du point de vue de ses potentialités didactiques. Nous avons discuté des apports de l'usage d'un environnement numérique comme une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage entre des manipulations d'objets matériels et entre des constructions géométriques aux instruments.

Dans Voltolini (2017), je me suis interrogée sur la possibilité d'élaborer des situations pour le cycle 3, mobilisant les technologies numériques, qui engagent les élèves dans l'acquisition de connaissances géométriques sur les figures. Mon intention était de construire des situations didactiques qui n'obligent pas dans un premier temps à aller jusqu'à la conceptualisation du point de dimension 0 difficilement appréhendable par les élèves de l'école primaire. Plus particulièrement je souhaitais faire exister une vision 1D des figures et mon hypothèse était que les technologies numériques pouvaient être un moyen pour accompagner la conceptualisation 1D des figures géométriques. En outre, mon idée n'était pas d'utiliser un environnement numérique à la place d'activités dans l'environnement papier-crayon mais d'utiliser les technologies numériques conjointement à des activités papier-crayon. C'est dans la perspective d'une articulation artefact matériel et artefact numérique au sein d'une même situation que j'ai donc travaillé.

Au cours de l'atelier les participants ont découvert une situation mobilisant un duo d'artefacts, numérique et matériel, pour la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. L'objectif du duo d'artefacts et de la situation est double : d'une part introduire le compas comme instrument géométriquement pertinent pour construire un triangle et d'autre part amener une vision 1D du triangle. Les participants ont pu mettre en œuvre une analyse de la situation en termes d'apprentissage et d'évolution des connaissances du triangle au fil de la situation.

## I - NUMERIQUE ET MATERIEL : QUELLE COMPLÉMENTARITÉ ?

L'objet de ma recherche était d'étudier l'introduction des technologies numériques, pour l'apprentissage des mathématiques, comme environnement complémentaire à des manipulations matérielles dans l'espace sensible. Les résultats de la recherche en didactique (Hoyle & Lagrange, 2010) (Drijvers et al., 2016), assurent du potentiel des technologies numériques pour apprendre les mathématiques. Cependant, je suis persuadée de la nécessité de ne pas simplement substituer les environnements numériques à des manipulations dans l'espace sensible ou aux activités papier-crayon. Mon expérience d'enseignante m'a convaincue que la différence de résolution d'une même tâche dans les deux environnements, numérique et matériel, pouvait être une potentialité à exploiter. C'est donc dans la

perspective d'une mobilisation conjointe de deux environnements, numérique et sensible, ou numérique et papier-crayon que j'ai travaillé.

Mon hypothèse de départ était que la variété des supports et la mobilisation conjointe d'un artefact numérique et d'un artefact matériel dans une même situation, pouvaient être favorables à la conceptualisation. Les travaux de Maschietto et Soury-Lavergne (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013) (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015) qui ont conçu des situations consistant à associer un artefact matériel donné et un environnement numérique mettent en évidence que ce qui se passe en termes d'apprentissage dans l'environnement sensible, lors de l'utilisation de l'outil matériel, est différent de ce qui se passe lors des manipulations dans l'environnement numérique. Les travaux de ces auteures se font dans la perspective d'une articulation, avec une recherche de continuités et de ruptures, entre les deux artefacts, numérique et matériel. Elles montrent que la complémentarité et les ruptures entre les artefacts, numérique et matériel, sont favorables à la conceptualisation. De manière analogue, mon idée principale n'est pas de substituer un environnement numérique à l'utilisation d'un outil matériel ; c'est dans la perspective d'une articulation artefact matériel, artefact numérique que j'ai travaillé.

Je me suis donc interrogée sur les conditions dans lesquelles l'articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel pouvait être une plus-value pour les apprentissages. L'objectif de mon travail était de caractériser ce qui fait duo afin de donner une définition de ce que je qualifie de duo d'artefacts numérique et matériel.

## 1 Caractérisation d'un duo d'artefacts numérique et matériel

J'ai défini un duo d'artefacts comme l'articulation fructueuse d'un artefact numérique et d'un artefact matériel au sein d'une situation didactique. Cette articulation, pour être un réel gain didactique, doit répondre aux critères suivants :

- une situation didactique (Brousseau, 1998) qui organise un milieu représentant les savoirs à acquérir et ainsi fonde les conditions de l'émergence et de l'évolution des conceptions (Balacheff, 1995a) ;
- des genèses instrumentales (Rabardel, 1995) associées provoquées par des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation de chaque artefact ;
- une orchestration (Trouche, 2003) pertinente des artefacts numériques et matériels dans la situation optimisant le duo par le choix raisonné du recours à l'un puis à l'autre artefact.

### 1.1 Une situation didactique pour faire exister le duo

« Les outils n'ayant de sens que par rapport aux situations dans lesquelles ils sont mis en œuvre » (Bruillard & Vivet, 1994) l'utilisation d'outils, numérique et matériel, ne permet l'apprentissage que lorsqu'ils sont mobilisés dans une situation didactique.

La situation didactique problématise le recours aux artefacts numérique et matériel, éléments essentiels du milieu; elle combine les environnements, numérique et sensible ou papier-crayon, et met en œuvre l'articulation entre les manipulations de chaque artefact. Il s'agit, pour un apprentissage donné, d'élaborer un milieu riche en rétroactions en tirant profit des potentialités de chaque artefact tout en intégrant les contraintes de chacun. De plus, la situation permet la dévolution au sujet à la fois du milieu et des actions/rétroactions judicieuses avec ce milieu, en particulier avec chaque artefact.

Dans un duo d'artefacts, la façon dont l'outil numérique est conçu et exploité conjointement à un outil matériel donné est primordiale. L'élaboration de l'outil numérique et des tâches qui le mobilisent doit permettre de tirer profit du potentiel didactique d'un environnement numérique afin de favoriser certaines trajectoires d'apprentissage. Le cœur d'un duo repose sur la plus-value que peut apporter l'artefact numérique pour la conceptualisation. L'objectif est que chaque artefact enrichisse l'autre, en particulier que l'artefact numérique sollicite de nouvelles stratégies de résolution ; il est primordial que les stratégies suscitées par un artefact complètent celles suscitées par l'autre. Ainsi, dans l'élaboration d'un duo d'artefacts et de la situation qui lui permet d'exister, il s'agit de chercher à ce que l'artefact numérique soit une simulation qui offre une gamme de stratégies et d'interactions, contrôlées par l'utilisateur, qui enrichissent celle de l'artefact matériel.

## 1.2 Des genèses instrumentales associées

Une analyse des genèses instrumentales (Rabardel, 1995) et des schèmes d'utilisation (ibid) de l'artefact matériel participe à l'élaboration d'un artefact numérique en termes de continuité et discontinuité entre les deux artefacts. Ainsi l'approche instrumentale fournit-elle le cadre théorique pour élaborer l'artefact numérique et l'articulation entre les deux artefacts numérique et matériel. D'autre part, l'approche instrumentale permet d'étudier les genèses instrumentales de chaque artefact, numérique et matériel, et d'analyser le bénéfice de chacune d'elles en termes d'apprentissage.

Dans un duo, l'artefact numérique élaboré doit autoriser des transferts de schèmes d'utilisation d'un artefact vers l'autre. Mais l'artefact numérique doit aussi favoriser la construction de nouveaux schèmes; des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation doivent être engendrés par le duo (Figure 1). L'articulation des artefacts doit autoriser, dans un premier temps, des tentatives d'assimilation de manière à ce que les éléments qui font l'objet de l'apprentissage soient reliés à ce que le sujet connaît déjà. Dans un second temps, il faut qu'un déséquilibre apparaisse afin que des processus d'accommodation des schèmes soient mis en œuvre pour retrouver un nouvel équilibre et induire un apprentissage. De tels déséquilibres sont provoqués par une discontinuité entre les deux artefacts ; l'artefact numérique doit inclure des éléments supplémentaires relativement à l'artefact matériel. La continuité entre les deux artefacts participera quant à elle à ce que les schèmes d'utilisation construits soient plus puissants, plus polyvalents ; ils pourront ainsi être mobilisés dans un plus grand nombre de tâches. Les instruments fondés par le sujet (Rabardel, 1995) lors de la mobilisation d'un duo ne sont pas simplement deux instruments juxtaposés ; l'instrument 2 incorpore l'instrument 1.

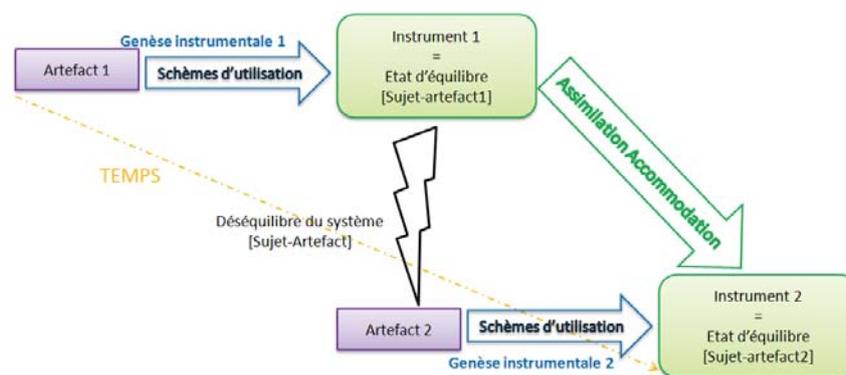


Figure 1. Le duo engendre des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre

Afin de guider la constitution des instruments des élèves et faciliter leur contrôle, une orchestration instrumentale (Trouche, 2004) des deux artefacts du duo doit être envisagée. L'élaboration d'une situation et l'orchestration du recours aux artefacts est un enjeu didactique de l'élaboration d'un duo. Il s'agit de trouver des modes d'exploitation qui optimisent le duo par un choix raisonné du recours à l'un puis l'autre artefact. Envisager l'orchestration des artefacts du duo oblige à analyser la contribution de chacun dans la situation d'apprentissage.

## 2 Des manipulations dans les deux environnements numérique et matériel

Plusieurs études (Sinclair & Baccaglini-Franck, 2015) font ressortir les avantages des manipulations d'objets numériques par rapport aux manipulations d'objets matériels dans l'espace sensible. En particulier des études sur le micromonde de la géométrie dynamique mettent en évidence la facilité avec laquelle les jeunes enfants peuvent voir et explorer une grande variété de formes, et ainsi découvrir des relations entre les formes. Les environnements de géométrie dynamique s'avèrent efficaces pour l'apprentissage de la géométrie dès l'école primaire. Un environnement numérique permet de créer des représentations dynamiques d'objets mathématiques, éléments du milieu, avec lesquels l'utilisateur pourra interagir et ainsi acquérir des connaissances en contexte. Un duo d'artefacts doit donc inciter à des manipulations dans l'environnement matériel et dans l'environnement numérique.

Cependant, de simples manipulations, d'objets matériels ou numériques, n'assurent pas un apprentissage. Ce qui est important c'est la façon dont ces objets numériques et matériels, sont conçus et utilisés. Il est en effet nécessaire de problématiser les manipulations par des questionnements et de les inclure dans un contexte plus général qui donne du sens aux objets à manipuler.

## II - UN DUO D'ARTEFACTS NUMÉRIQUE ET MATÉRIEL POUR LA CONCEPTUALISATION DU TRIANGLE

L'enjeu pour moi, dans la thèse, était donc de composer un duo pour un apprentissage choisi et d'analyser à la fois le processus de composition du duo et de la situation qui le mobilise, ainsi que les effets du duo sur l'apprentissage et la conceptualisation.

J'ai choisi de composer un duo d'artefacts dédié à la conceptualisation du triangle dans la tâche de construction d'un triangle de longueurs des côtés données. L'artefact matériel du duo est donc le compas. Il s'agit alors de développer conjointement un artefact numérique articulé au compas matériel et une situation qui mette en œuvre le duo. Mon objectif est de donner du sens à l'usage du compas dans cette tâche de construction et simultanément de favoriser la conceptualisation du triangle.

### 1 Un problème du cycle 3 : la construction du triangle à la règle et au compas

Le choix de cet apprentissage, la construction du triangle à la règle et au compas, résulte des programmes du cycle 3, et d'une analyse théorique du triangle reposant sur sa déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005). Cette construction du triangle à la règle et au compas (Figure 2), est emblématique de l'enseignement de la géométrie comme construction d'un polygone à la règle et au compas. Dans l'enseignement, elle n'est souvent associée qu'à une procédure de tracé et non à la conceptualisation du triangle. En outre, cette construction repose sur une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D en un triangle déterminé par un côté, objet géométrique 1D, et le troisième sommet, objet géométrique 0D, difficilement appréhendé par les élèves.

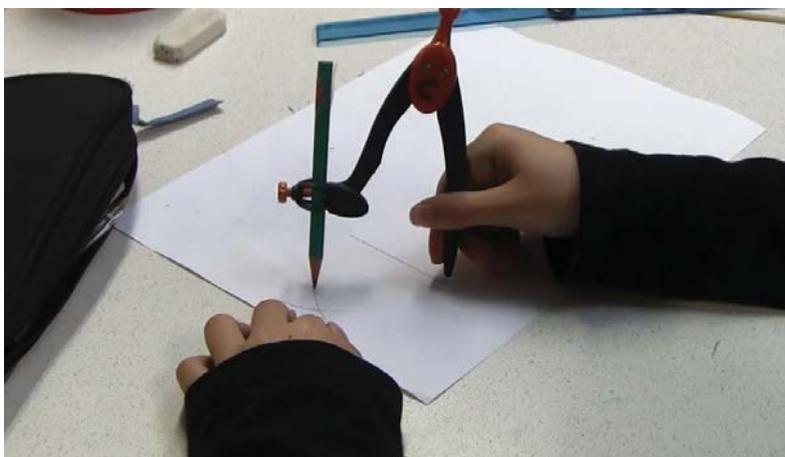


Figure 2. Un triangle déterminé par un côté et le troisième sommet obtenu comme intersection de lignes

#### 1.1 La règle graduée un obstacle à franchir

La construction du triangle à la règle et au compas est un apprentissage qui résiste au sens où les élèves tracent spontanément le triangle à la règle graduée uniquement. La règle graduée est un artefact à partir duquel sont élaborés deux instruments. Un instrument pour l'alignement qui permet de tracer des droites, des segments et un instrument de mesure de longueurs. La règle graduée permet donc aussi en mobilisant simultanément les deux instruments de tracer des segments de longueurs données. Étant donné que, dans leur scolarité, les élèves n'ont mobilisé que la règle graduée pour tracer des segments de longueurs données et donc pour tracer les côtés d'un polygone, je me suis interrogée sur l'éventualité que l'utilisation de la règle graduée pour construire un triangle de longueurs des côtés données soit potentiellement un obstacle. La résistance de cet obstacle tient à une vision 2D du triangle comme « une surface délimitée par trois côtés » ; elle tient aussi au fait que souvent les longueurs des côtés sont

données par leurs mesures. La règle est alors l'instrument naturellement associé au tracé du triangle car elle permet de tracer ses trois côtés de mesures données. Brousseau (1998) explique que le franchissement d'un obstacle représente un palier dans le développement cognitif du sujet. Le franchissement d'un obstacle requiert un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance. L'obstacle est franchi si la situation et les outils disponibles suscitent l'opération mentale requise. Introduire le compas dans la construction du triangle nécessite une autre vision du triangle, une autre déconstruction du triangle.

### 1.2 Une construction qui repose sur la conceptualisation du point

Construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, c'est montrer que le triangle existe théoriquement et produire un tracé de ce triangle, ou montrer que le triangle n'existe pas théoriquement, c'est-à-dire que les trois longueurs données ne vérifient pas l'inégalité triangulaire. La construction attendue (Figure 3) consiste à tracer à la règle un segment d'une des trois longueurs souhaitées, puis à tracer avec le compas deux cercles (arcs de cercle) centrés sur les extrémités de ce segment avec pour rayon chacune des deux autres longueurs. Le compas, en produisant un cercle, produit tous les points qui sont à distance fixe de son centre. Les intersections des deux cercles permettent de trouver deux points situés à des distances données de chaque extrémité du premier segment tracé. Ces deux points, s'ils existent, sont les sommets de deux triangles symétriques construits de part et d'autre du segment initial. Construire un triangle nécessite donc de décomposer le triangle en tracés constructibles, en particulier il s'agit de construire le 3<sup>e</sup> sommet du triangle comme intersection de deux cercles (arcs de cercle) à tracer.

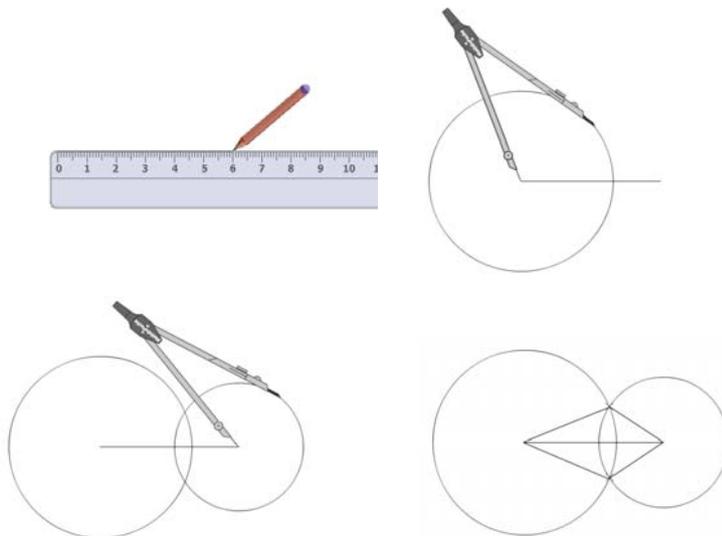


Figure 3. Illustration de la construction du triangle à la règle et au compas

La construction du triangle à la règle et au compas présente donc deux difficultés. D'une part, cette construction repose sur une déconstruction du triangle 2D en un triangle déterminé par un côté, objet géométrique 1D, et le troisième sommet, objet géométrique 0D, difficilement appréhendé par les élèves. D'autre part le compas ne produit pas le contour du triangle mais produit des tracés auxiliaires, des cercles (arcs de cercles) n'appartenant pas au triangle.

### 1.3 Trois idées directrices pour l'élaboration d'une situation et d'un duo d'artefacts

Induire la pertinence géométrique de l'utilisation du compas dans cette construction ainsi qu'amener une vision 1D du triangle étaient mes enjeux dans l'élaboration d'un duo d'artefacts et d'une situation qui le met en œuvre. A la lumière des travaux de Duval, Perrin-Glorian et Godin (Duval & Godin, 2005), (Perrin-Glorian & Godin, 2014), j'ai formulé trois idées directrices pour l'élaboration d'une situation.

#### Une déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point

Je cherchais à adopter une démarche qui tienne compte du développement cognitif des élèves. Mettre un accent particulier sur la déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point difficilement

appréhendable par les élèves était au cœur de mes préoccupations. Je cherchais donc à élaborer un duo d'artefacts favorisant l'émergence d'une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle.

### Un nouvel instrument compas dans la construction du triangle

Les genèses instrumentales du compas pour tracer un cercle ou pour reporter une longueur ne permettent pas aux élèves de l'utiliser dans la construction du triangle. Le duo et la situation devaient donc provoquer une nouvelle genèse instrumentale du compas dans la tâche de construction d'un triangle.

### Une nouvelle caractérisation du cercle

Je souhaitais aussi profiter de l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas pour faire évoluer les connaissances sur le cercle. Mon intention était donc aussi que la situation mobilisant un duo d'artefacts numérique et matériel amène le cercle comme outil dans la construction du triangle et renforce le concept de distance constante associé au cercle.

#### 1.4 Introduction d'un environnement numérique

La déconstruction du triangle 2D en éléments 1D ne peut être obtenue par la seule utilisation de la règle et du compas. Cette décomposition 1D du triangle nécessite l'utilisation d'instruments différents. C'est pourquoi il m'a semblé intéressant d'utiliser les potentialités d'un environnement numérique pour élaborer un artefact qui permette d'explorer le triangle au travers d'une analyse visuelle différente de celle induite par l'usage de la règle et du compas.

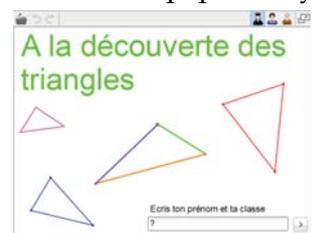
L'élaboration d'un artefact numérique qui permet de travailler hors de l'environnement papier-crayon et donc hors de l'utilisation des outils usuels de géométrie pouvait aussi être un moyen de proposer une phase de rupture face à l'obstacle de la règle graduée. Les tâches proposées dans l'environnement numérique devaient conduire l'élève à prendre conscience de la nécessité de l'usage d'un nouvel instrument compas autre que la règle graduée pour réaliser la construction d'un triangle de longueurs des côtés données.

## 2 Une situation qui articule compas matériel et cahier informatisés

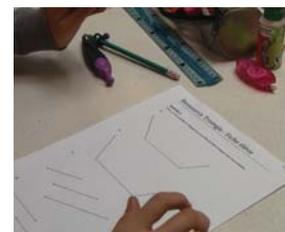
### 2.1 Une situation en quatre phases

La situation est constituée de deux cahiers informatisés et de deux activités papier-crayon (Figure 4). L'orchestration des artefacts, numérique et matériel, du duo a été pensée de manière à alterner les activités dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon. Quatre phases successives sont à traiter : un cahier informatisé et une activité papier-crayon puis un second cahier informatisé et une deuxième activité papier-crayon.

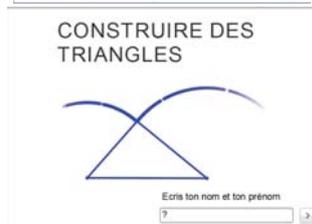
Phase 1



Phase 2



Phase 3



Phase 4

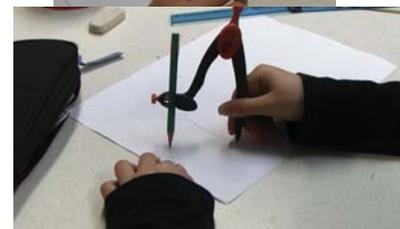


Figure 4. Une situation en quatre phases qui alterne cahiers informatisés et activités papier-crayon

### 2.2 De la manipulation de segments numériques à la construction au compas

Ayant pour double objectif d'amener le compas dans la construction du triangle et de provoquer la conceptualisation 1D du triangle, mon intention était de proposer des tâches qui détachent les côtés du

triangle de la surface qu'ils délimitent et qui permettent d'identifier des relations entre ces côtés en particulier d'identifier qu'avec trois longueurs on ne peut pas toujours former un triangle.

Ce sont les choix de variables didactiques qui vont provoquer la genèse instrumentale du nouvel instrument compas et qui vont permettre l'évolution des connaissances sur le triangle. Je considère trois variables didactiques potentielles : les longueurs des segments, les déplacements possibles des segments, les outils disponibles.

### **Un premier cahier informatisé : A la découverte des triangles**

J'ai développé un environnement numérique qui inclut une approche expérimentale basée sur des manipulations directes de représentations dynamiques de segments. Il s'agissait d'utiliser les potentialités du numérique pour, d'une part, favoriser l'expérimentation et l'étude des objets mathématiques et, d'autre part, élaborer un milieu riche en rétroactions qui aident les élèves à réfléchir sur les aspects mathématiques de leur action et qui permette la mise en œuvre de stratégies, leur évolution et donc l'enrichissement des connaissances géométriques du triangle.

Le premier cahier d'activités informatisé nommé « À la découverte des triangles » comprend cinq pages d'activités numérotées de 1 à 5 (Figure 5). Les cinq pages d'activités de ce cahier informatisé, amènent à traiter deux tâches : former des triangles par manipulations directes de segments de longueurs fixes donnés (page 1), et déterminer si trois segments donnés peuvent être les trois côtés d'un triangle (page 2, 3, 4 et 5). La deuxième tâche à propos de l'existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui problématise la recherche et la formation d'un triangle et donc le recours aux déplacements des segments.

#### **Les longueurs des segments présents sur chaque page**

Je souhaitais que les élèves puissent prendre conscience qu'avec trois longueurs on ne peut pas toujours obtenir un triangle. Ainsi, dans ce premier cahier informatisé j'ai choisi de proposer des triplets de longueurs qui vérifient l'inégalité triangulaire et d'autres qui ne la vérifient pas. Page 1, un triplet de longueurs permet d'aboutir à un triangle plat. En revanche les longueurs sont choisies de manière à ce que tous les triangles perceptibles à l'écran de l'ordinateur soient théoriquement constructibles. En effet, les cas limites dans lesquels il serait possible de former perceptivement un triangle à l'écran alors que les longueurs ne vérifient pas l'inégalité triangulaire sont exclus.

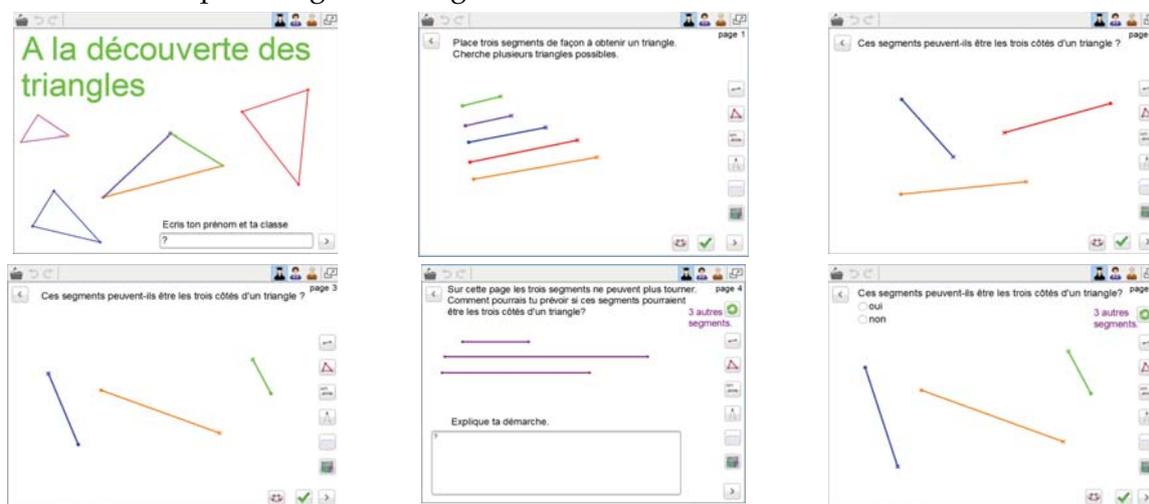


Figure 5. Illustration des différentes pages du premier cahier informatisé « À la découverte des triangles »

#### **Les déplacements possibles des segments**

Les segments proposés sur les pages 1, 2, 3 et 5 sont asymétriques à l'écran dans leur représentation et au cours de leur mouvement. Deux déplacements sont possibles pour un segment : déplacer le segment entier par translation en attrapant le segment ou son extrémité ronde ; faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe en attrapant le segment par son extrémité cruciforme (Figure 6). La

## ATELIER A21

distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme, permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment.

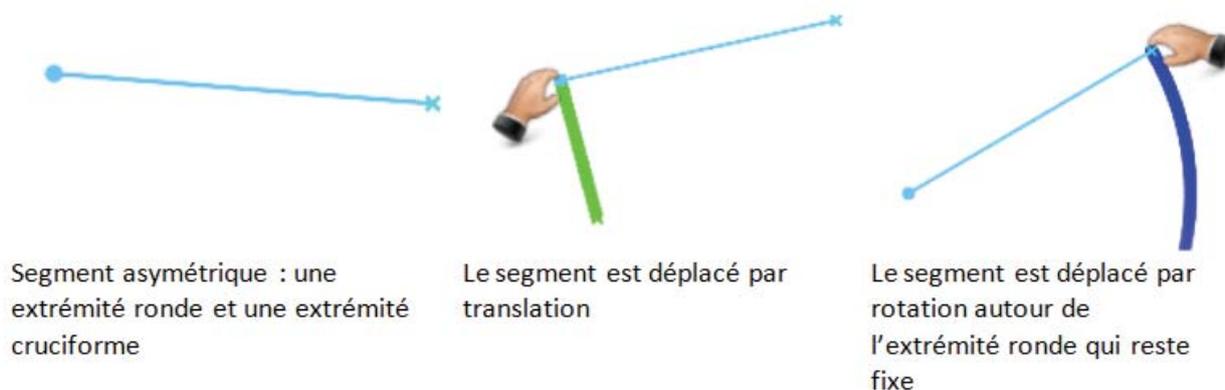


Figure 6. Des segments asymétriques à l'écran et dans leur comportement

Dans ce cahier, l'asymétrie de déplacement des segments provient d'une contrainte du logiciel Cabri Elem<sup>1</sup> utilisé dans le cadre de ce travail. En effet dans le logiciel Cabri Elem, pour créer un segment de longueur fixe celui-ci doit être le rayon d'un cercle. Ainsi l'extrémité correspondant au centre du cercle peut être déplacée librement ce qui translate le segment, et l'autre extrémité ne peut être déplacée que par rotation sur le cercle. Cette asymétrie de déplacement des segments participe à la dynamique de la situation et à la mise en place de stratégies porteuses de savoirs et de sens comme nous le verrons dans le travail en atelier.

### Des outils de géométrie dynamiques disponibles

Sur toutes les pages d'activités de ce cahier, des outils de géométrie dynamique sont disponibles. Dans ce cahier sont présents les outils segment, triangle, mesure, compas-gd, règle graduée-gd et calculatrice. Dans la conception des cahiers informatisés, nous avons fait le choix de proposer sur chaque page une boîte à outils de géométrie dynamique disponible même lorsque ceux-ci ne sont pas nécessaires pour réaliser la tâche. Ils sont présents sur chaque page du cahier comme les outils matériels, le crayon, la règle, l'équerre et le compas sont disponibles dans les activités de géométrie en papier-crayon. L'usage de certains outils de géométrie dynamique sera nécessaire à la résolution des problèmes proposés dans le second cahier informatisé.

### **Une première activité papier-crayon qui poursuit l'exploration du triangle à partir de ses trois côtés**

Dans l'environnement papier-crayon, les tâches proposées devaient conduire les élèves à poursuivre l'exploration du triangle en ses trois côtés. La première activité papier-crayon consiste donc à tracer des triangles dont les côtés sont donnés sous forme de segments tracés sur la feuille. Les segments proposés sont soit disposés en ligne brisée soit parallèles les uns aux autres. Plusieurs configurations de trois segments sont proposées (Figure 7). Dans un souci de continuité avec les manipulations des segments dynamiques dans le cahier informatisé, la consigne est encore formulée en termes de segment et non en termes de longueurs. Dans chaque cas, la consigne est la suivante : « Peut-on obtenir un triangle avec les segments proposés ? Si oui, le tracer ». Dans le prolongement du premier cahier informatisé, dans cette première activité papier-crayon des triplets de longueurs vérifient l'inégalité triangulaire et d'autres ne la vérifient pas.

Pour réaliser ces tâches, une boîte à outils de géométrie contenant le crayon, la règle graduée, l'équerre et le compas, est disponible.

<sup>1</sup> Le logiciel Cabri Elem est développé par la société Cabrilog et utilisé dans notre travail dans le cadre d'une collaboration scientifique entre l'entreprise Cabrilog et l'Institut Français de l'Éducation.

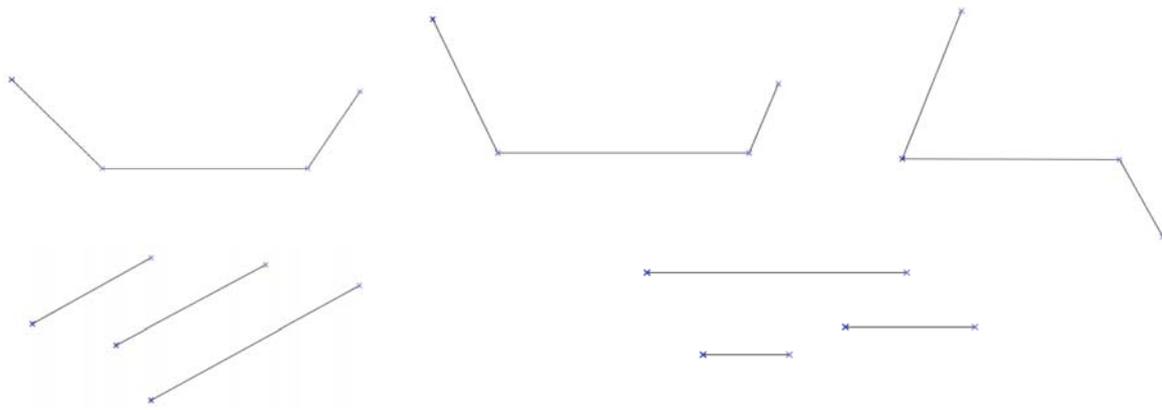


Figure 7. Les cinq configurations de la première activité papier-crayon

### **Un second cahier informatisé et une seconde activité papier-crayon**

Les deux dernières phases de la situation n'ayant pas été analysées dans l'atelier, je ne les présente ici que succinctement.

Le second cahier informatisé, « Construire des triangles », a pour objectif d'amener les cercles sous-jacents à la construction du triangle. La construction de cercles doit être la stratégie gagnante efficace pour résoudre le problème. La technologie Cabri Elem nous permet de mettre à la disposition de l'utilisateur certains outils de géométrie dynamique bien choisis. Cette opportunité a été utilisée pour contraindre l'utilisation de l'outil cercle dans les stratégies. En effet, c'est par un jeu sur les outils disponibles que le cercle devient l'outil de la situation. Dans un premier temps, l'outil cercle est utilisé pour vérifier si une ligne brisée peut-être le contour d'un triangle ou non. D'outil pour vérifier, il devient ensuite outil pour produire. Dans un second temps, il s'agit d'utiliser l'outil cercle pour déterminer le troisième sommet du triangle.

La situation se termine par une deuxième activité papier-crayon mobilisant le compas matériel dans la construction de triangles. Cette deuxième activité papier-crayon consiste à tracer si cela est possible, des triangles dont les longueurs des côtés sont données par leurs mesures. Cette activité marque la fin de la situation et permet de faire un bilan des apprentissages menés à bien grâce à la mobilisation des artefacts numériques articulés au compas matériel.

## **III - L'ATELIER ET LES DÉBATS**

Les participants à l'atelier ont pu étudier les deux premières phases de la situation : le premier cahier informatisé ainsi que la première activité papier-crayon. Ils ont découvert le duo implémenté dans la situation et ont mis en évidence la plus-value de ce dernier pour provoquer la genèse instrumentale du compas dans la construction du triangle et l'effet de la situation sur l'évolution des connaissances du triangle.

### **1 Le premier cahier informatisé « À la découverte des triangles »**

Dans un premier temps, les participants ont étudié le premier cahier informatisé « À la découverte des triangles » (Figure 5). Ils ont pris en main le cahier, ce qui leur a permis de découvrir la manipulation des segments dynamiques, les stratégies possibles pour résoudre les différentes tâches proposées. Des extraits vidéo de l'activité de certains élèves étaient aussi à la disposition des participants ce qui leur a permis d'identifier les stratégies mises en œuvre par les élèves et les difficultés rencontrées par ces derniers.

#### **1.1 Des segments numériques d'apparence et de comportement asymétriques**

Après cette phase de découverte, l'analyse du cahier a porté sur les valeurs des variables didactiques en jeu et sur les stratégies qu'elles induisent. Le candidat artefact numérique du duo a lui aussi été interrogé.

L'environnement numérique permet de faire apparaître les segments côtés du triangle, déjà présent mais pas dans la bonne position. Les longueurs des côtés proposées sous forme de segments et non par leurs mesures favorisent un travail sur les longueurs et non sur les mesures. Un tel environnement permet aussi de créer des segments qui peuvent pivoter autour d'une extrémité.

### **Les longueurs des segments**

Dans les différentes pages du cahier informatisé « À la découverte des triangles », les longueurs des segments proposés, permettent à l'élève de rencontrer des triplets de longueurs qui vérifient l'inégalité triangulaire, et d'autres qui ne la vérifient pas. Ainsi dans certains cas le triangle peut-il être formé alors que dans d'autres il ne le peut pas. Le triangle plat peut aussi être rencontré sur la première page. Ces valeurs de variables didactiques révèlent le problème d'existence ou non du triangle qui ne peut être résolu avec une conception<sup>2</sup> 2D du triangle. La mise en œuvre de contrôles sur les longueurs des segments s'impose, ce qui nécessite la mobilisation d'une nouvelle conception du triangle. La question de la permanence des longueurs des segments numériques est abordée. L'environnement numérique permet de proposer des segments côtés de longueurs fixes alors que les outils matériels ne permettent pas d'avoir cette permanence des longueurs dans l'environnement papier-crayon.

### **Les déplacements des segments**

Dans ce premier cahier informatisé, seules deux valeurs de cette variable sont attribuées aux segments : le double déplacement d'un segment par translation et par rotation dissociées, ainsi que le déplacement par translation uniquement. La distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme, permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment. Lorsque les segments proposés apparaissent asymétriques dans leur représentation à l'écran, leur déplacement est double : l'extrémité ronde ainsi que tout point du segment autorise un déplacement par translation et l'extrémité cruciforme autorise le déplacement par rotation autour de l'extrémité ronde qui reste fixe. Lorsque les segments ont deux extrémités rondes (page 5 du cahier) le seul déplacement autorisé est celui par translation uniquement.

La discussion s'engage sur la différence entre l'usage de baguettes matérielles et la manipulation de segments numériques. Les segments numériques asymétriques dans leurs déplacements sont les éléments centraux du milieu constitué par ce cahier informatisé. En effet, l'environnement informatique oblige à dissocier les deux déplacements, par translation et par rotation autour d'une extrémité, contrairement aux manipulations d'objets matériels lors desquelles les déplacements sont réalisés conjointement. Ainsi l'environnement informatique met en évidence la rotation indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques et provoque la genèse instrumentale d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique. C'est cet instrument qui va induire l'usage du compas matériel pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon.

## **1.2 L'apprentissage inclus dans la stratégie gagnante**

Un participant fait remarquer que ne pas pouvoir pivoter les deux extrémités du segment induit la stratégie gagnante. En effet, l'asymétrie de mouvement des segments conduit à la mise en œuvre d'une stratégie gagnante efficace pour former un triangle. Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas rend fastidieuse la mise en œuvre d'une stratégie par ajustements. Les ajustements faciles à réaliser sont les ajustements par rotation et c'est ainsi que la stratégie « ligne brisée » prend forme. Une stratégie gagnante efficace pour former un triangle à partir des segments proposés dans l'environnement numérique, consiste à former, avec trois segments, une ligne brisée dont les extrémités sont cruciformes. Le triangle sera ensuite obtenu en faisant pivoter les deux segments extrêmes de la ligne brisée (Figure 8). Ainsi l'environnement numérique crée un milieu qui met en évidence la rotation, indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques et conduit à la mise en œuvre d'une stratégie « ligne brisée », stratégie gagnante porteuse d'apprentissage (Voltolini, 2014). En effet cette stratégie est associée à une conception 1D du triangle : un triangle est une ligne brisée fermée. De plus, la ligne brisée

---

<sup>2</sup> Le mot conception est considéré au sens de Balacheff et du modèle cK $\zeta$  (Balacheff 1995a). « Une conception est une instanciation de la connaissance d'un sujet par une situation. » « Une conception est caractérisée par un ensemble de problèmes pour lesquels elle apporte des outils de résolution. »

amène à penser la ligne brisée qui ne peut se fermer et donc l'inexistence du triangle (Figure 8). Cette nouvelle conception contient une structure de contrôle nouvelle par rapport à la conception initiale 2D du triangle. Si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas.



Un triangle est une ligne brisée fermée

La ligne brisée ne peut être fermée pour obtenir un triangle

Figure 8. Illustration de la stratégie « ligne brisée », stratégie porteuse d'apprentissage

Cette stratégie « ligne brisée » est une première étape dans la déconstruction dimensionnelle du triangle. L'activité de formation du triangle dans l'environnement informatique à partir de trois segments en passant par la ligne brisée repose sur une reconstruction du triangle 2D à partir de la ligne brisée 1D.

La question de la place du plus grand segment au centre de la ligne brisée ou non est soulevée dans la discussion. Dans le cahier informatisé les rétroactions placent toujours le grand segment au centre. Or les vidéos montrent que les élèves essaient des configurations avec chaque segment au centre de la ligne brisée. Il serait donc pertinent de prévoir la rétroaction correspondant à la disposition des segments proposée par l'utilisateur. Nous notons néanmoins que les lignes brisées avec le plus long segment entre les deux autres sont plus efficaces. En effet, elles permettent une anticipation plus facile de la position du troisième sommet.

## 2 La première activité papier-crayon

Dans un second temps, la première activité papier-crayon et son articulation avec le cahier informatisé ont été étudiées. Des extraits vidéo de l'activité de certains élèves étaient à la disposition des participants afin de leur permettre une identification des stratégies mises en œuvre par les élèves et des difficultés rencontrées par certains. Il s'agissait de s'interroger sur l'instrument compas qui peut émerger de l'articulation du cahier informatisé avec la première activité papier-crayon. La conceptualisation du triangle tout comme sa déconstruction dimensionnelle 1D, restaient, elles aussi, au cœur des discussions.

### 2.1 La ligne brisée comme élément de continuité du duo

Dans la construction du triangle à la règle et au compas, le compas ne rend pas visibles les segments côtés du triangle. La technologie numérique nous a permis de les rendre visibles dans le premier cahier informatisé. Une des caractéristiques d'un duo, mobilisé dans une situation, est que l'articulation des artefacts se fasse dans une certaine continuité. C'est pour cette raison que j'ai intégré dans le milieu constitué par la première activité papier-crayon les objets sur lesquels la stratégie « ligne brisée » fonctionne dans le cahier informatisé : la ligne brisée et les segments côtés. La ligne brisée est l'élément de continuité du duo ; c'est elle qui va permettre de passer du déplacement par rotation au compas matériel.

### 2.2 Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment

La première activité papier-crayon (Figure 7) est prévue de manière à faire mobiliser le compas matériel. Les manipulations directes et continues des segments n'étant plus possibles, les outils de géométrie vont être mobilisés pour remplacer les déplacements par translation et rotation de l'environnement numérique. Un nouvel instrument compas est élaboré : le compas pour pivoter un segment. Pivoter le compas revient à pivoter un segment entre ses branches. Dans l'environnement numérique c'est le même segment qui se déplace mais dans l'environnement papier-crayon le compas produit un cercle (arc de cercle) qui est la trace de l'extrémité du segment pivoté. Le segment résultat du pivotement doit donc être tracé de même longueur que le segment initial (Figure 9).

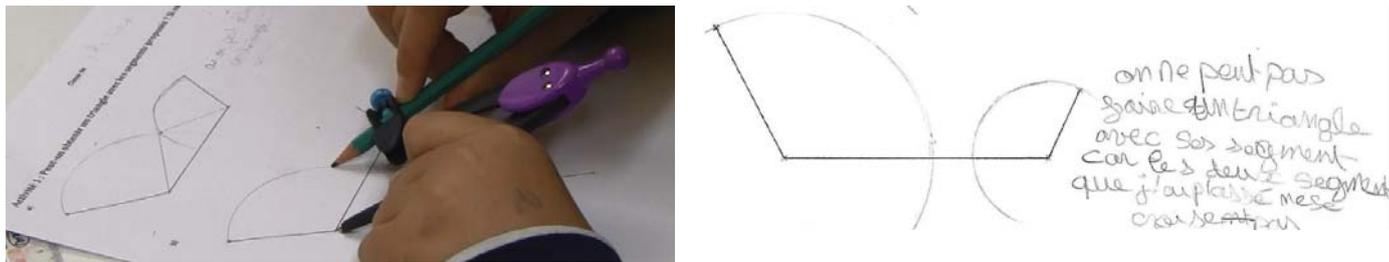


Figure 9. Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment dans la construction du triangle

La mobilisation du compas matériel est coordonnée au déplacement par rotation autour d'une extrémité d'un segment numérique dans le premier cahier informatisé. D'une part, le segment numérique asymétrique dans sa représentation à l'écran et dans ses déplacements rappelle le compas matériel : une pointe qui reste fixe et une mine qui tourne. D'autre part, l'instrumentation du déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique produit des schèmes d'utilisations qui peuvent s'étendre par assimilation et accommodation à des schèmes d'utilisation du compas matériel. On peut décrire un schème d'utilisation pour pivoter un segment numérique : distinguer les deux extrémités du segment puis attraper l'extrémité cruciforme et déplacer par rotation le point extrémité. On peut décrire un schème d'utilisation pour pivoter un segment à l'aide du compas matériel : distinguer les deux branches du compas puis piquer la pointe sur l'extrémité du segment qui reste fixe, écartier les branches et poser la mine sur l'extrémité à pivoter, enfin pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe et produire une trace visible. On identifie des assimilations et des accommodations entre les schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre. Dans chaque schème d'utilisation pour pivoter un segment, dans l'environnement numérique ou dans l'environnement papier-crayon, il faut distinguer : les extrémités du segment ; les branches du compas. Dans chaque schème il faut pivoter : le segment ; le compas. Lors de l'utilisation du compas matériel des accommodations sont nécessaires : il est essentiel de maintenir l'écartement du compas matériel fixe (la permanence des longueurs n'est pas automatique) ; le compas produit une trace visible, trace de l'extrémité du segment qui pivote ; le segment initial ne pivotant pas, il faut tracer le segment résultat du pivotement.

### 2.3 Une vision 1D du triangle comme une ligne brisée de trois segments, fermée

La stratégie « ligne brisée », stratégie gagnante de l'environnement numérique, est encore une stratégie efficace pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon. Tracer une ligne brisée constituée des trois segments puis pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée à l'aide du compas (Figure 9) est une stratégie mise en œuvre par les élèves comme le montrent les vidéos. La discussion s'engage sur le fait que les élèves adaptent la stratégie ligne brisée mise en œuvre dans le cahier informatisé à l'environnement papier-crayon. Une hypothèse pour expliquer ce transport de stratégie d'un environnement à l'autre est que fermer une ligne brisée est moins coûteux que d'assembler les trois segments.

Cette stratégie, d'une part provoque une nouvelle genèse instrumentale du compas et, d'autre part, induit des conceptions nouvelles du triangle et du cercle. La conception 1D du triangle : un triangle est une ligne brisée fermée de trois segments, est mobilisée ; elle permet de résoudre le problème de construction du triangle ainsi que le problème d'existence ou non du triangle (Figure 9).

### 2.4 Une conception du cercle comme la trajectoire de l'extrémité d'un segment pivoté

Le passage par la ligne brisée et l'utilisation du compas pour pivoter ses segments extrêmes engagent aussi une nouvelle conception du cercle : un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote autour d'une extrémité qui reste fixe. Le compas qui pivote un segment déjà tracé consolide la représentation de distance constante associée au cercle. Les participants notent que dans le cas du compas qui pivote le segment ne reste pas visible entre ses branches (Figure 9). La mobilisation d'autres matériels tels que des ficelles ou des bandelettes (Figure 10) qui permettent de rendre visible le segment qui pivote pourraient être complémentaires aux segments numériques et au compas pour renforcer le concept de distance associé au cercle.

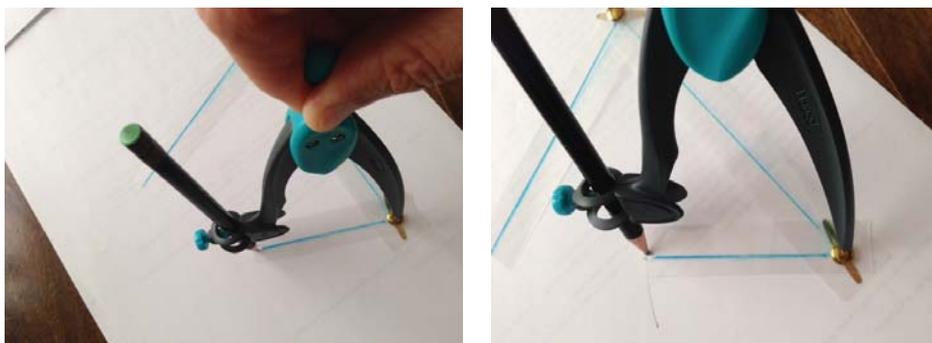


Figure 10. Des bandelettes plastiques qui se déplacent avec le crayon du compas pour rendre visible le segment entre les branches du compas

La question de la prise de conscience par les élèves des deux lieux possibles pour le troisième sommet du triangle est aussi posée. Dans les expérimentations réalisées en classe très peu d'élèves tracent les deux triangles solutions. Même lorsque des cercles complets sont tracés et donc que les deux positions possibles du troisième sommet apparaissent, un seul triangle est tracé : celui « du dessus ». La place des segments dans la feuille pourrait être une nouvelle variable didactique. Par exemple, présenter des segments suffisamment hauts dans la feuille pour que seul le triangle « en dessous » puisse être construit.

### 3 Des parcours d'instruments et de conceptions du triangle au fil de la situation

Des expérimentations de la situation ont été réalisées durant trois années consécutives dans deux classes de CM2 d'une école Rep+ de l'agglomération grenobloise. Ces tests successifs dans de réelles conditions de classe ont participé à l'élaboration du duo et de la situation. L'analyse de 34 productions d'élèves de la dernière année d'expérimentation nous a permis d'obtenir des résultats concernant les effets du duo et de la situation sur les apprentissages.

Le duo, par l'alternance des activités instrumentées dans les environnements numériques et papier-crayon permet à 31 élèves sur 34 de mettre en œuvre la construction d'un triangle de longueurs des côtés données à la règle et au compas (Figure 11).

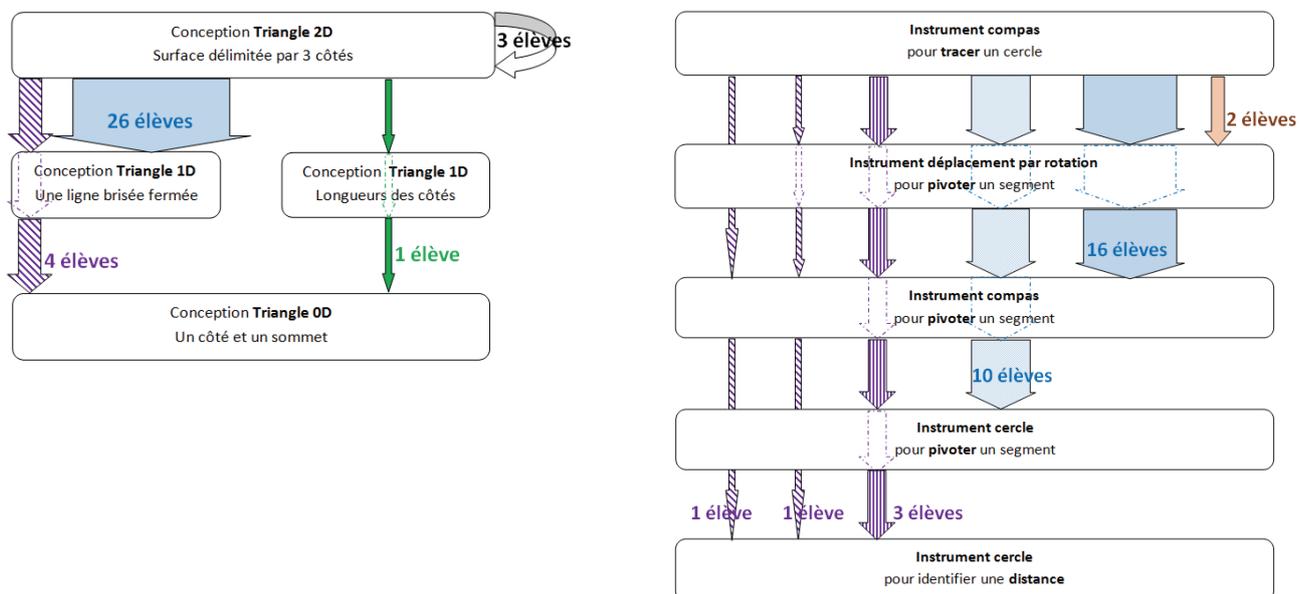


Figure 11. Bilan des parcours de conceptions du triangle et d'instruments identifiant le nombre d'élèves par parcours

Le duo sollicité dans la situation incite à la mise en œuvre d'une stratégie « ligne brisée » pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon pour au moins 26 élèves sur 34. La ligne brisée et la stratégie associée constituent une étape de dimension 1 dans la déconstruction dimensionnelle du

triangle qui n'oblige pas dans un premier temps à aller jusqu'au point de dimension 0 pour construire le triangle à la règle et au compas. Les 26 élèves qui mettent en œuvre la stratégie « ligne brisée » dans l'environnement papier-crayon développent une nouvelle genèse instrumentale du compas pour pivoter un segment. Les 5 autres élèves, qui ont tracé le triangle à la règle et au compas sans l'intermédiaire de la ligne brisée, ont mis en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle jusqu'au point 0D.

---

## IV - CONCLUSION

---

Mon intention, dans ce travail, était de créer une situation utilisant les technologies numériques pour apprendre la construction du triangle à la règle et au compas. L'enjeu était de dépasser la procédure de tracé. Mon objectif était double : d'une part, amener le compas et sa pertinence géométrique dans la construction du triangle et d'autre part faire évoluer les connaissances des élèves sur le triangle. L'objet de cette recherche était donc d'étudier l'introduction des technologies numériques comme environnement complémentaire à l'environnement papier-crayon et à l'utilisation du compas. Il s'agissait d'utiliser les potentialités d'un environnement numérique pour franchir l'obstacle de la règle graduée qui produit le segment côté et pour amener le compas qui lui produit des tracés auxiliaires. Mon intention principale était de mettre l'accent sur la possibilité de faire exister une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle 1D sans nécessairement aller jusqu'au point, obtenu comme intersection de lignes, difficilement appréhendable par les élèves de l'école primaire. J'ai donc développé un duo d'artefacts, déplacement par rotation dans un environnement de géométrie dynamique et compas matériel, et une situation didactique en quatre phases qui sollicite ce duo en articulant successivement cahier informatisé et activité papier-crayon. Utilisée en articulation avec des activités papier-crayon, la manipulation de segments dynamiques d'apparence et de comportements asymétriques a montré qu'elle pouvait être une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage entre des manipulations d'objets matériels et des constructions géométriques aux instruments. Des observations en classe montrent la mise en œuvre d'une stratégie « ligne brisée », stratégie gagnante dans l'environnement numérique adaptée à l'environnement papier-crayon. Cette stratégie provoque à la fois une nouvelle genèse instrumentale du compas pour pivoter un segment et induit des conceptions nouvelles du triangle et du cercle : un triangle est une ligne brisée fermée de trois segments et un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote. Tracer une ligne brisée de trois segments puis pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée à l'aide du compas est une stratégie efficace pour construire un triangle à la règle et au compas qui n'oblige pas la conceptualisation du point d'intersection des deux arcs de cercle ; cette intersection des deux arcs de cercle est identifiée comme le point de rencontre des segments côtés de la ligne brisée. Cette stratégie « ligne brisée » et la conception du triangle 1D-ligne brisée qui lui est associée incluent le problème d'existence ou non du triangle : si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent le triangle existe, s'ils ne se rencontrent pas le triangle n'existe pas. Ainsi l'usage des technologies numériques dans un duo d'artefacts est-il une valeur ajoutée à l'outil matériel compas qui aide à franchir l'obstacle de la règle graduée et à introduire la pertinence géométrique du compas dans la construction du triangle et qui participe à l'élaboration et à l'évolution des connaissances sur le triangle.

Ce travail s'est focalisé sur le développement d'un environnement numérique qui incite à des manipulations pour enrichir le compas matériel. Le duo d'artefacts créé met en relation le déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique et le compas matériel. Ce travail pourrait être prolongé par l'étude de manipulations d'objets matériels. Pourrait-on développer un artefact matériel qui puisse constituer un duo avec le premier cahier informatisé et précisément la manipulation de segments numériques ? Composer par exemple, un duo bandelettes matérielles et segments numériques, nous semble pouvoir être prometteur à la fois pour la conceptualisation du triangle, spécifiquement pour sa déconstruction dimensionnelle 1D en une ligne brisée fermée, et pour amener le compas dans sa construction géométrique. Un tel duo serait aussi plus pertinent pour renforcer le concept de distance associé au cercle, pivoter une bandelette au compas permet de garder visible le segment entre les branches du compas tout au long du pivotement.

---

**V - BIBLIOGRAPHIE**


---

- BALACHEFF, N. (1995a). Conception, connaissance et concept. In Denise Grenier (Ed.) (pp. 219-244). Presented at the Séminaire de Didactique et Technologies cognitives en mathématiques, Grenoble France.
- BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La pensée Sauvage Grenoble, France.
- BRUILLARD, E., & VIVET, M. (1994). Concevoir des EIAO pour des situations scolaires. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 14(1.2), 275-304.
- DRIJVERS, P., BALL, L., BARZEL, B., HEID, M. K., CAO, Y., & MASCHIETTO, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education*. Cham: Springer International Publishing. Retrieved from <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-33666-4>
- DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- DUVAL, R., & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.
- HOYLES, C., & LAGRANGE, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13). Boston, MA: Springer US. Retrieved from <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0146-0>
- MASCHIETTO, M., & SOURY-LAVERGNE, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45(7), 959-971. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0533-3>
- PERRIN-GLORIAN, M.-J., & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole*, (222), 28-38.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France: Armand Colin.
- SINCLAIR, N., & BACCAGLINI-FRANCK, A. (2015). Digital technologies in the early primary school classroom. In *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (pp. 662-686). Lyn D. English; David Kirshner,.
- SOURY-LAVERGNE, S., & MASCHIETTO, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, 47(3), 435-449. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0694-3>
- TROUCHE, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations* (HDR). Montpellier.
- TROUCHE, L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics*, 55, 181-197.
- VOLTOLINI, A. (2014). Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, 94, 25-46.
- VOLTOLINI, A. (2017). *Duos d'artefacts matériel et numérique pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3* (Thèse de doctorat). Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon France.