

DU MATERIEL ET DES ACTIVITES DE MANIPULATION POUR SOUTENIR UN APPRENTISSAGE CONSTRUCTIF DES FRACTIONS ET DES OPERATIONS SUR LES FRACTIONS DE 10 A 14 ANS.

Isabelle BERLANGER

Maitre-assistante, Haute École Galilée (Bruxelles)
Groupe d'Enseignement Mathématique GEM (Louvain-la-Neuve)
isabelle.berlanger@galilee.be

Thérèse GILBERT

Maitre-assistante, Haute École Galilée (Bruxelles)
Groupe d'Enseignement Mathématique GEM (Louvain-la-Neuve)
therese.gilbert@galilee.be

Résumé

Cet atelier présente des activités de manipulation et de réflexion pour établir ou revoir le sens des règles sur les fractions et les opérations associées. Il s'agit d'utiliser des gabarits sur transparents pour déterminer des fractions représentées par des aires. Les aires sont choisies de telle façon que les différentes opérations et les règles associées se présentent naturellement. Nous évoquerons notamment le (un des) sens de la fraction, l'équivalence de fractions, le passage de la division à la barre de fraction et l'addition. Ces activités sont conçues pour la fin du premier degré et le début du deuxième (cycle 3 et début du cycle 4) et sont utilisées en formation d'enseignants. Notre travail s'appuie sur (et prolonge) des travaux tels que ceux de Rouche (1998) et Géron (2015).

I - ORIGINE DU PROJET ET OBJECTIFS

Le matériel et les activités ici présentés ont été conçus par un groupe de travail du Groupe d'Enseignement Mathématique¹, entre 2014 et 2017. Ils ont été présentés pour la première fois au congrès de la SBPMef² en 2015.

Les fractions constituent un sujet crucial à la charnière primaire-secondaire. Pleinement étudiées aux cycles 3 et 4, on les rencontre plus tard encore dans le domaine du calcul algébrique, des fractions rationnelles et des probabilités.

Un grand nombre d'élèves de tous niveaux d'enseignement sont en grande difficulté face aux fractions et ces difficultés perdurent bien au-delà de l'enseignement obligatoire, comme en témoignent notre propre expérience de formateurs et diverses études sur le sujet³.

Une telle présence dans le cursus scolaire mérite une compréhension en profondeur des notions liées aux fractions. Parmi ces notions, les opérations sur les fractions, qui occupent une grande place dans les apprentissages, au cœur de la liaison primaire secondaire, sont à notre connaissance peu documentées.

Ces constats nous ont lancés à la recherche de situations problématiques permettant de *construire* les connaissances sur les fractions, et pas seulement de les mettre en jeu dans la résolution de problèmes.

¹ GEM, Louvain-la-Neuve, Université catholique de Louvain, Belgique.

² Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française.

³ Voir par exemple Géron (2015 & 2016) ou Carette (2009).

L'objectif de cet atelier est de découvrir des activités de *manipulation*, de *représentation* et d'*expression* pour travailler le sens et la construction de notions liées aux fractions.

Précisons d'emblée que les activités qui suivent ne constituent pas une séquence de cours à tester telle quelle. Elles doivent être aménagées, adaptées au public, aux prérequis des élèves. Les participants tantôt ont vécu les activités destinées aux élèves, tantôt ont été invités à les adapter ou en concevoir d'autres en utilisant le même matériel. Certaines consignes sont spécifiquement destinées aux enseignants, elles incitent à prendre du recul.

II - L'ATELIER

1 À vue d'œil

La toute première consigne est la suivante.

Déterminez à l'œil les fractions représentées sur les deux vignettes ci-dessous.

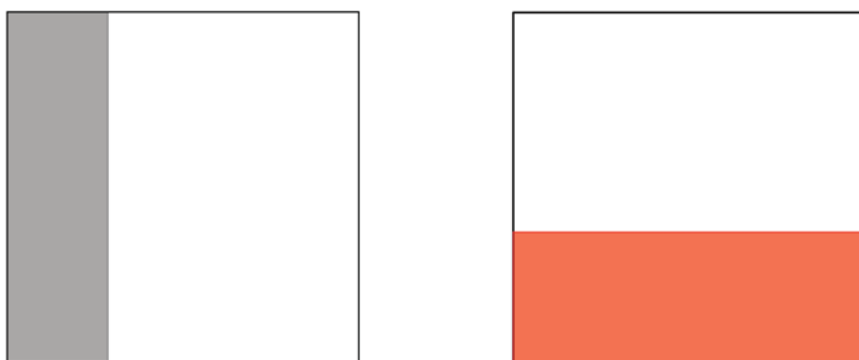


Figure 1

Élément important : **dès à présent et pour toutes les activités, l'unité est la même : il s'agit du carré apparaissant à la figure 1.**

Différentes réponses sont rapidement proposées par les participants : $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{10}$ pour la première vignette ; $\frac{1}{3}$ ou "entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ " pour la deuxième. Comment les départager ? Impossible sans outil supplémentaire. La manipulation du matériel va permettre de vérifier et préciser les estimations.

2 Découverte du matériel

Chaque participant reçoit une pochette (figure 2 et figure 3) dans laquelle se trouvent :

- une série de grilles transparentes (découpées), à positionner librement sur les vignettes ;
- une "fenêtre" servant de gabarit pour créer soi-même des vignettes (nous y reviendrons plus tard).

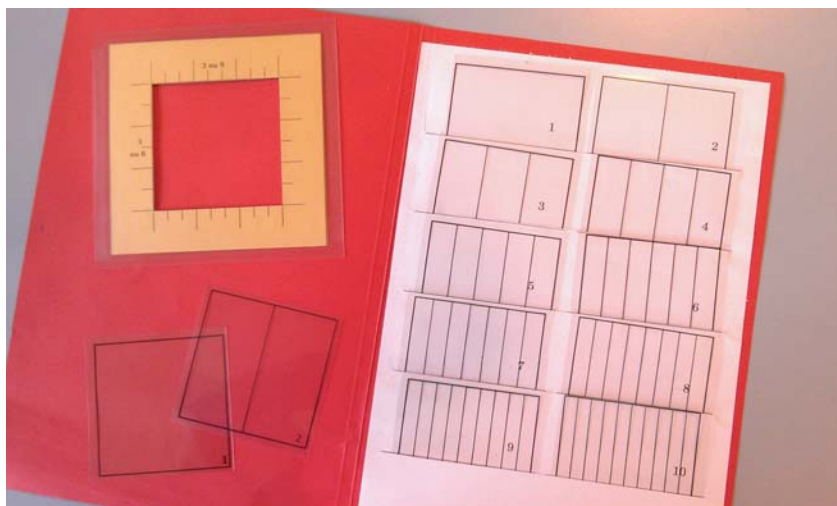


Figure 2. Matériel

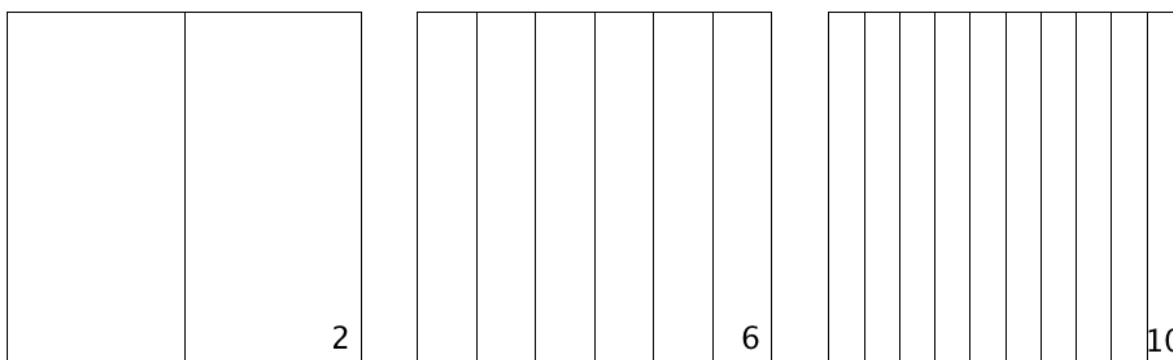


Figure 3. Exemples de grilles

Les réponses ne tardent pas, mais ne font pas l'unanimité pour la première vignette : s'agit-il de $\frac{2}{7}$ ou de $\frac{3}{10}$? Comment convaincre son voisin que l'on a été "plus précis que lui" ? Si l'utilisation des grilles seules laisse planer le doute, leur superposition est sans appel : $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{10}$, "ce n'est pas la même chose". La différence entre les deux apparaît sous forme d'une mince bande blanche, que l'on ne cherche pas à ce stade à quantifier, mais qui est bien présente. Nous proposons, en cas de doute, d'illustrer cette différence à l'aide d'un logiciel de géométrie⁴, qui permet de trancher en zoomant fortement sur la zone incriminée (figure 4).

⁴ Ici à l'aide d'un fichier GeoGebra faisant partie du matériel.

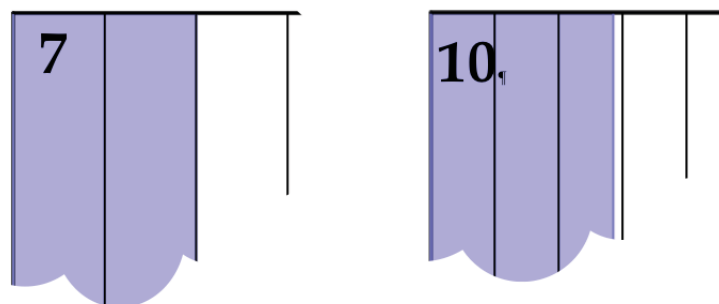


Figure 1. Zoom à l'aide d'un logiciel de géométrie

Le matériel est complété par un jeu de fiches en couleur proposant différentes vignettes, classées par thèmes⁵. La première série de fiches ne vise pas un apprentissage en particulier ; les fiches contiennent des vignettes très variées. Le but est de se familiariser avec le matériel, de (re)découvrir différents aspects des fractions, de faire émerger (ou de casser) certaines représentations. Les participants, ou les élèves en classe, travaillent ici à plusieurs sur une même fiche, pour favoriser les échanges d'idées. À ce stade, les participants ont sous les yeux les vignettes des figures 5 à 16, et l'unique consigne suivante :

« Déterminez les fractions représentées en utilisant les transparents ».

Précisons que, lors des essais effectués dans des classes de différents niveaux d'âge, les élèves n'ont jamais rencontré de problème particulier pour s'approprier le matériel. Sa manipulation ne nécessite pas d'explications préliminaires. Si des erreurs surviennent malgré tout (par exemple, des élèves ne se soucient pas que les grilles s'ajustent bien à la partie colorée), il est même bienvenu de les "laisser venir" pour mieux les surmonter ensuite. Nous reprenons ci-après quelques éléments-clés des découvertes associées à ces premières explorations, qui dévoilent déjà quelques atouts du matériel.

Tout d'abord, certains cas particuliers – délibérément redondants – permettent d'installer quelques images de base bien utiles : des *fractions simples* de type $\frac{1}{n}$ (figure 5), la notion de *double* (ou de *moitié*) (figure 6) ou encore les *fractions complémentaires* (par rapport à l'unité) (figure 7). La grille "2" (celle qui fournit la fraction $\frac{1}{2}$) sera naturellement utilisée pour vérifier que certaines bandes ont bien été coupées en deux, comme à la deuxième vignette de la figure 5 (où un tel découpage a même eu lieu dans les deux directions, horizontalement et verticalement) et à la figure 6.

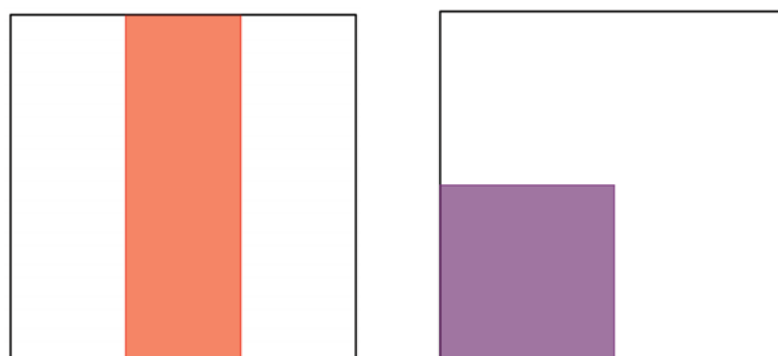
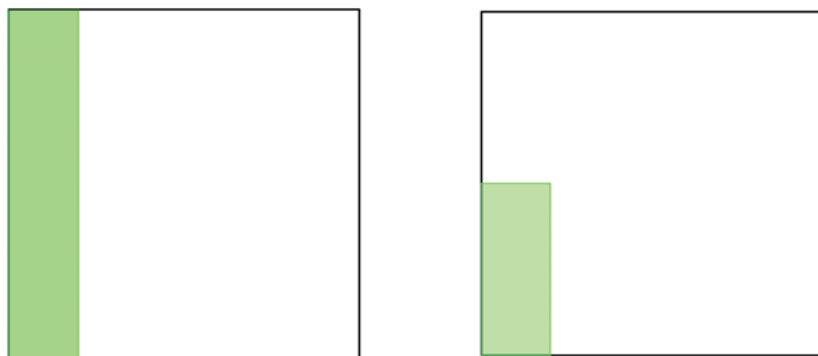
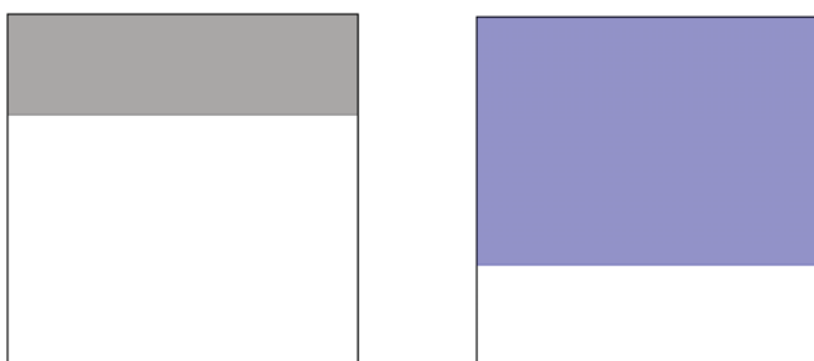
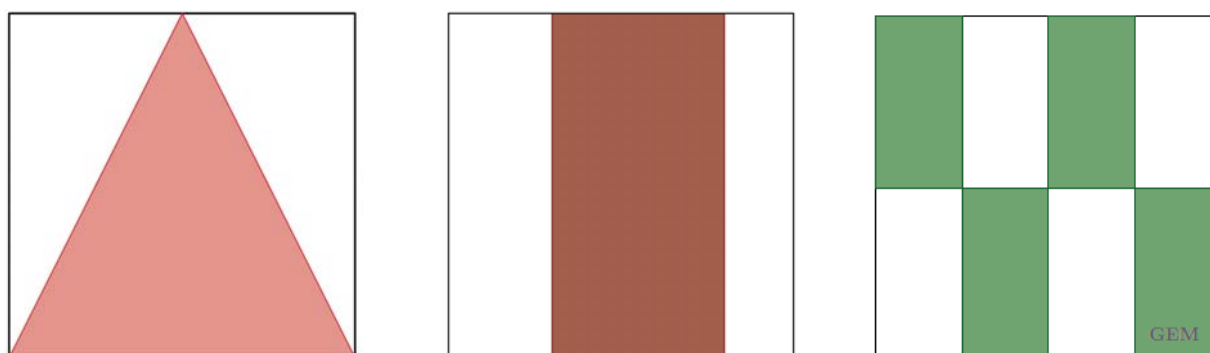


Figure 2. Les fractions simples $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$

⁵ Quelques-unes de ces fiches sont reproduites en annexe.

Figure 6. La fraction $\frac{1}{5}$ et sa moitiéFigure 7. Les fractions complémentaires les $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$

Ensuite, la présence d'une même fraction simple, $\frac{1}{2}$ par exemple, sous de multiples formes, y compris non rectangulaires (voir les vignettes de la figure 8), permet d'avoir bien à l'esprit la *conservation de l'aire* en jeu ici : la fraction $\frac{1}{2}$ est représentée par une aire qui, quelle que soit sa "forme" ou sa "position", vaut toujours la moitié du carré-unité. Si nécessaire, le matériel peut aider à s'en convaincre, par exemple en déposant la grille "2" sur la figure et en procédant mentalement par décomposition-recomposition de la partie colorée, qui forme en tout $\frac{1}{2}$, comme suggéré à la figure 9.

Figure 3. Différentes représentations de $\frac{1}{2}$

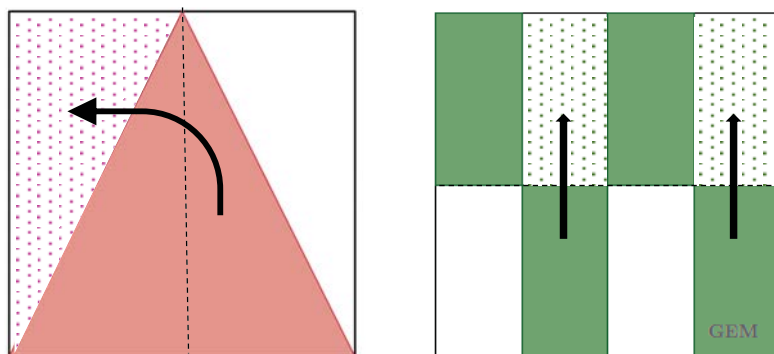


Figure 4. Voir dans sa tête la fraction $\frac{1}{2}$

La présence de *fractions supérieures à un* a également été remarquée (figure 10). On visualise particulièrement bien leur signification : il y a "débordement" du carré-unité. L'expérience nous a révélé qu'il était utile de mettre à disposition des élèves un transparent "unité", qui permet de se convaincre qu'une unité, même "déplacée" (les élèves font "glisser" le transparent pour s'en assurer), reste toujours une unité !

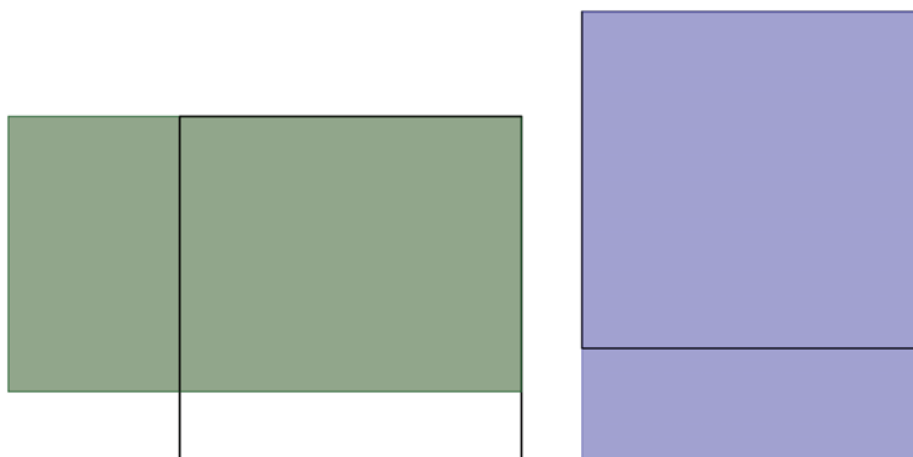


Figure 5. Fractions supérieures à 1

À contrario, la présence de parties qui "débordent" du carré initial alors que la fraction correspondante reste inférieure à l'unité (comme sur les deux premières vignettes de la figure 11) peut déranger certains élèves. Ce dérangement, et d'autres encore, sont plutôt bienvenus ; ils permettent de casser quelques fausses représentations : non, une fraction du carré ne doit pas obligatoirement être rangée à l'intérieur du carré ; non, elle ne doit pas être poussée "dans les angles" (figures 5, 8 et 11) ; oui, elle peut être tournée ou décalée par rapport aux sous-unités disponibles (deux dernières vignettes de la figure 11)... Plus les élèves se questionnent à propos de ces cas "bizarres", plus ils ont de chance de progresser dans leurs représentations.

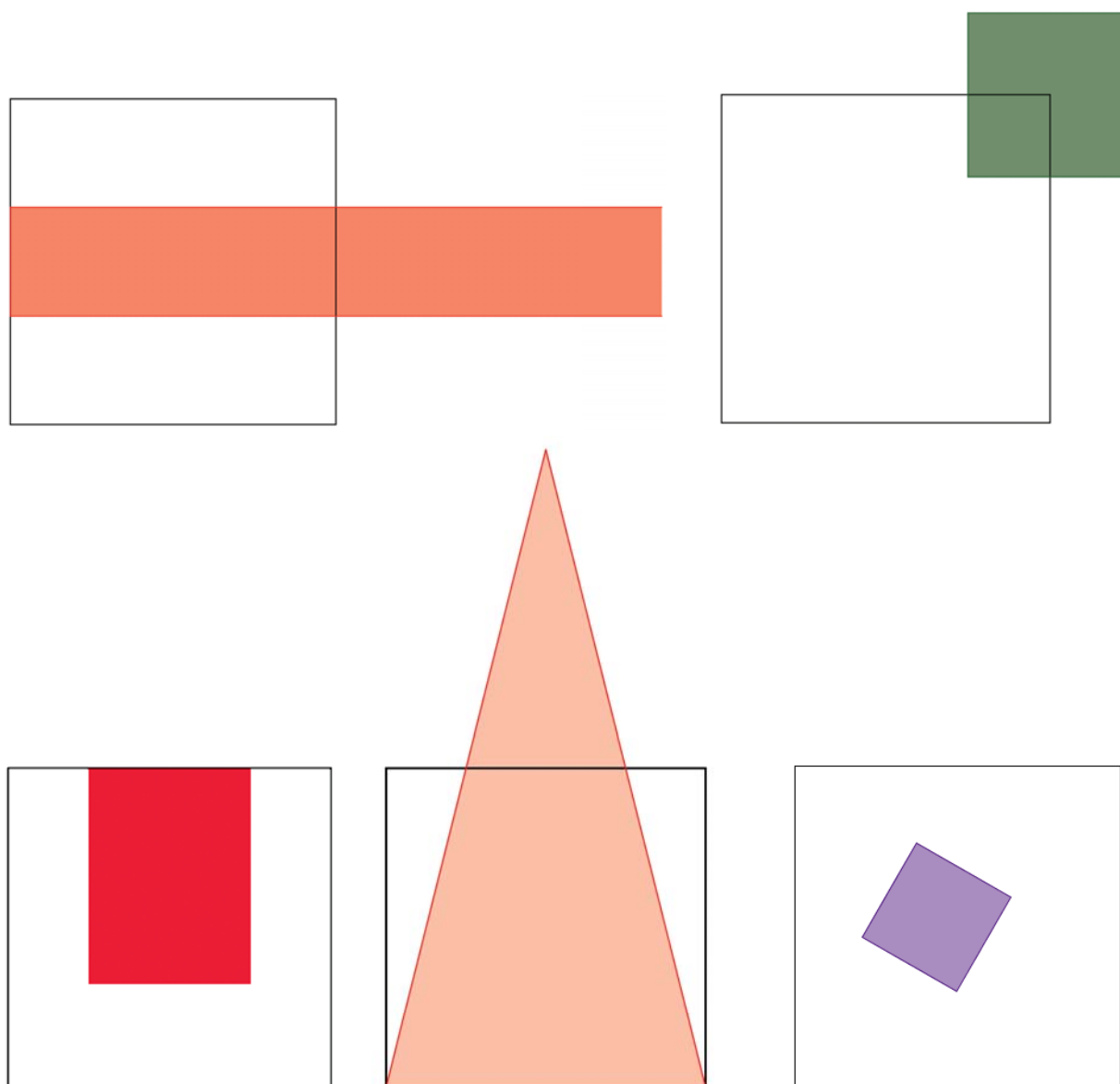


Figure 11. Quelques cas déroutants

De manière générale, la manipulation des transparents encourage et facilite une certaine mobilité entre les différents points de vue à l'œuvre à travers les activités : différentes "lectures" d'une même vignette, différentes représentations pour une même fraction, différentes fractions pour une même représentation. Les transparents peuvent en effet facilement être utilisés de *multiples manières*, qui ne génèrent pas forcément les mêmes images mentales. On peut les déposer "horizontalement" ou "verticalement", juxtaposer deux grilles (figure 12), les faire glisser (par exemple figure 13) ; on peut superposer les bandes "dans le même sens" et observer l'agencement des sous-unités (figure 14 à droite, par superposition des grilles "2" et "3") ; on peut aussi – c'est souvent une grande trouvaille ! – les *croiser*, ce qui permet de découvrir ou revoir, entre autres, que " $\frac{2}{10}$, c'est comme $\frac{1}{5}$ " (figure 6) ou " $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$, c'est $\frac{1}{6}$ " (figure 14 à gauche). En déplaçant mentalement les carreaux formés par le croisement des grilles (comme suggéré par les vignettes de la figure 15), en décomposant et recomposant les figures, on jette les bases des futures opérations sur les fractions, et ce sans faire aucun calcul.

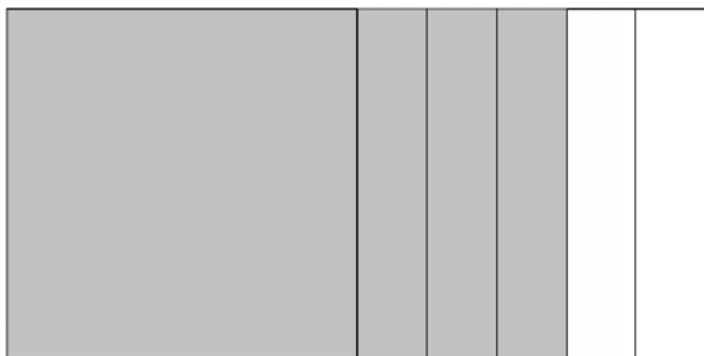


Figure 12. Juxtaposition des grilles « 1 » et « 5 »

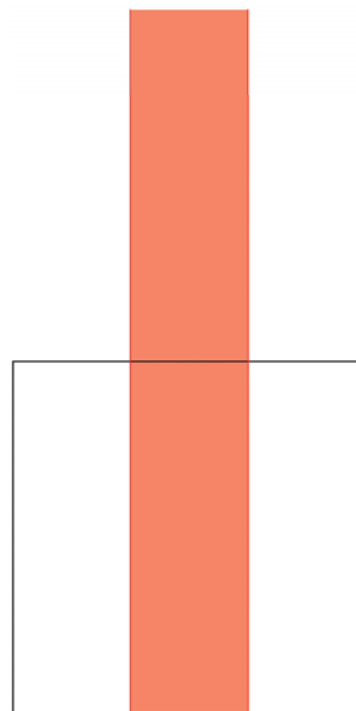
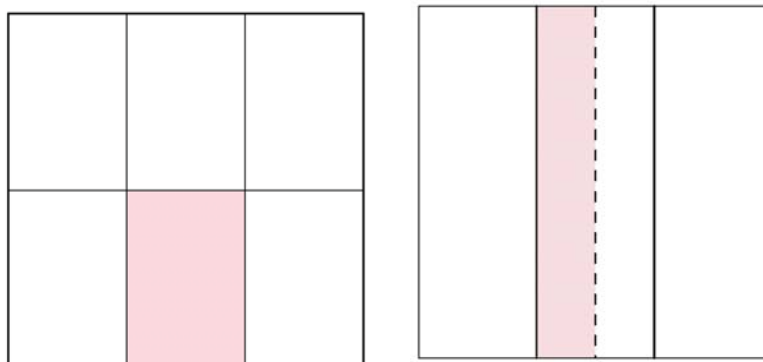
Figure 13. Voir $\frac{2}{3}$ en glissant le transparent « 3 »Figure 14. Deux manières de représenter « $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ »

Figure 15. Croisement de grilles

Par ailleurs, l'outil fait la part belle à l'estimation, une compétence utile à développer chez les élèves. Au fil des manipulations, l'œil s'aguerrit et le choix des transparents à utiliser devient plus sûr. Et en cas d'erreur, on peut toujours se poser la question d'un meilleur ajustement : "Avec des $\frac{1}{6}$ ça ne tombe pas juste, dois-je plutôt choisir des $\frac{1}{5}$ ou des $\frac{1}{7}$?". Ici les sous-unités ne sont pas données d'emblée – ce qui force à se poser la question et à faire un choix parmi les transparents – mais elles sont facilement accessibles – ce qui dispense de fastidieux mesurages.

Enfin, notons pour terminer que certaines vignettes colorées ne montrent *pas* le carré-unité (figure 16). C'est là une manière de remettre au premier plan la question de l'unité. Quelle est-elle, si on ne la voit plus ?



Figure 6. Carré-unité non apparent

Nous incitons ainsi l'élève à se rappeler qu'un choix a été posé au départ, qu'il s'agit toujours d'une convention : sans unité déterminée, pas de fraction représentée. Mais ce simple rappel n'est certainement pas suffisant ; il serait bénéfique pour l'élève d'être confronté à une *variation de l'unité*, ce que ne permet pas notre matériel. Cette lacune devra être compensée par l'utilisation conjointe d'autres outils.

3 Création de vignettes

Lors des séances de travail avec le matériel, nous aimons alterner activités *d'analyse* et activités de *création* de vignettes par les participants. Rien de tel pour se faire une idée des représentations des élèves que de leur demander de concevoir eux-mêmes une vignette, éventuellement sous certaines contraintes.

Pour faciliter ce travail de représentation, nous fournissons à chaque participant un gabarit plastifié (figure 17). Une « fenêtre », recto et verso – que nous appelons *fenêtre* – qui permet de produire aisément un carré de la bonne taille ainsi que les différentes sous-unités reprises dans les transparents (à l'exception toutefois des septièmes), sans rien devoir mesurer.

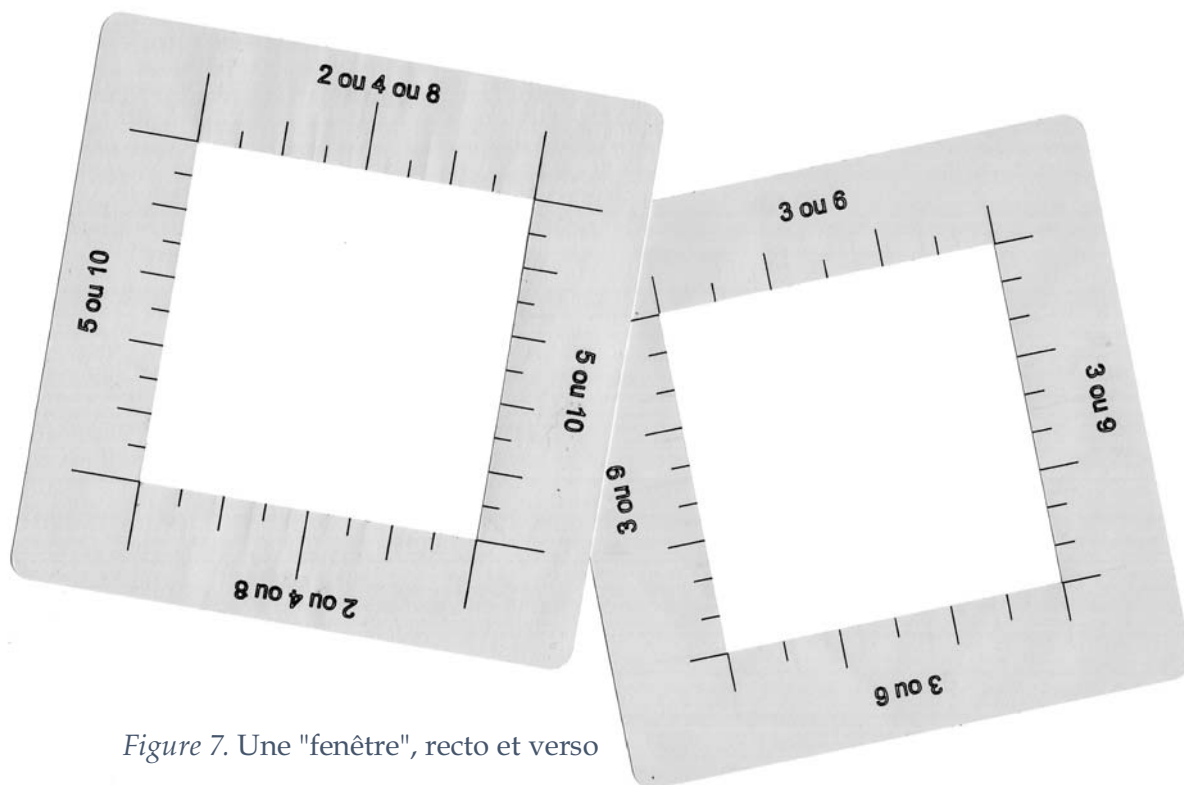


Figure 7. Une "fenêtre", recto et verso

Voici quelques exemples de consignes en ce sens :

- Trouvez d'autres représentations du demi. Pour cela, vous pouvez utiliser les "fenêtres".
- Représentez une fraction puis passez votre composition à votre voisin pour qu'il la détermine.
- En utilisant des fenêtres et les transparents, représentez les fractions $\frac{1}{15}$, $\frac{8}{15}$ et $\frac{5}{18}$ par des rectangles.

Les découvertes faites auparavant vont ici pouvoir être activement exploitées. On peut par exemple évoquer le croisement des transparents "3" et "5" pour créer des $\frac{1}{15}$, et en colorier 8 morceaux pour représenter $\frac{8}{15}$. Quelle que soit la manière dont on s'y prend, cela revient à dessiner un rectangle de dimensions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$, ou $\frac{1}{3}$ et $\frac{8}{5}$, ou toute autre combinaison adéquate.

4 L'équivalence de fractions

Après une première phase de découverte tous azimuts de la notion de fraction, nous abordons des points de matières plus spécifiques. Il arrive tout naturellement que, pour une même vignette, différentes fractions soient proposées. Il se peut ainsi que *l'équivalence* de fractions soit évoquée dans la première partie, mais il s'agit ici d'y revenir en profondeur, en terminant par la rédaction d'une synthèse qui en montre le sens.

Le matériel et les activités sont conçus pour aider l'élève à se forger des images mentales durables. Il faut évidemment qu'il puisse à terme se détacher du matériel, mais, à ce moment, il devrait pouvoir facilement évoquer mentalement les images qui lui ont permis de comprendre la première fois. *"Ah oui, c'est comme quand on croisait les grilles..., 1/12 rentre trois fois dans 1/4"*.

Voici une suite d'activités qui permet de cheminer vers la synthèse attendue. Notons l'intérêt de la question 1.c), qui oblige l'élève à se détacher des grilles qu'il a sous la main et à entrer pleinement dans l'argumentation.

1. a) Déterminez les fractions représentées par les parties colorées en utilisant les transparents.

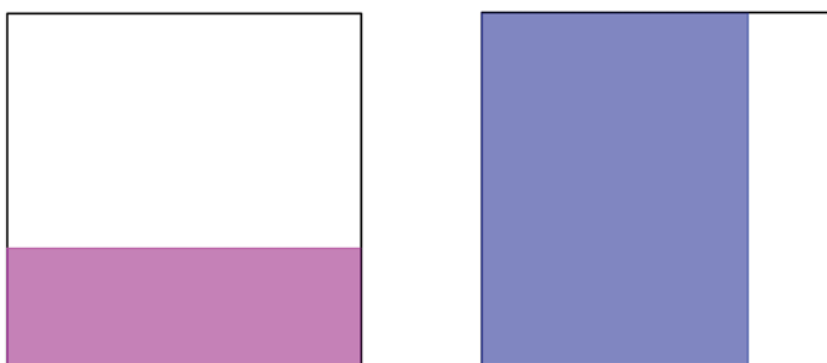


Figure 8

- b) Déterminez d'autres fractions possibles pour ces mêmes parties et montrez à l'aide des transparents qu'elles conviennent bien.
- c) Déterminez encore d'autres fractions possibles que les transparents ne vous permettent pas d'illustrer. Trouvez des arguments pour convaincre vos collègues que vous avez raison.

2. En utilisant des fenêtres et les transparents, représentez la fraction $\frac{1}{4}$ puis trouvez-lui une autre écriture en utilisant d'autres transparents. Même question pour $\frac{4}{6}$ et $\frac{9}{6}$.

3. Trouvez une fraction équivalente à $\frac{2}{5}$. Écrivez un texte avec dessin qui explique à un élève qui aurait été absent pourquoi ces deux fractions sont égales.

Lors des manipulations, nous insistons sur la *justification* des observations : "Pourquoi est-ce que ça marche comme ça et pas autrement ?". Avec les transparents, l'élève peut voir concrètement que $\frac{1}{10}$ est deux fois plus petit que $\frac{1}{5}$, ou que " $\frac{1}{12}$ entre trois fois dans $\frac{1}{4}$ ". Ainsi, l'équivalence de fractions apparaît plus naturellement : "si les morceaux sont *deux fois plus petits*, je dois en prendre *deux fois plus* pour avoir la même chose".

Voici une idée de la synthèse que l'on peut entraîner les élèves à produire.

SYNTHÈSE : ÉQUIVALENCE DE FRACTIONS

$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ = $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ = $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

$\times 2$ On prend 2x plus de morceaux.
 $\times 2$ Les morceaux sont 2x plus petits.

Si on prend des morceaux deux fois plus petits,
 il faut en prendre deux fois plus pour garder la même part du carré-unité.

On dit que $\frac{2}{5}$ et $\frac{4}{10}$ sont des fractions *équivalentes*, car elles représentent la même partie de l'unité.

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre,
 on obtient une fraction équivalente.

Des participants attirent l'attention sur la difficulté du passage du langage courant à l'écriture mathématique, bien présente ici : "les morceaux sont deux fois *plus petits*", se traduit à l'écrit par une flèche accompagnée d'un " $\times 2$ ", alors qu'en toute logique, on attendrait un "2". Encore une fois, la nécessité de bien installer les premières images des fractions se fait sentir. Nous pensons que les transparents peuvent y contribuer, notamment parce qu'ils montrent toujours les sous-unités ensemble formant l'unité (sur le transparent, les cinquièmes vont par cinq), et que leur superposition fait voir les concordances entre sous-unités ($\frac{2}{10}$ et $\frac{1}{5}$ se superposent exactement).

Pour terminer, soulignons que – comme bien souvent en classe – les images porteuses de sens ne sont pas ici les mêmes pour les uns et les autres. Pour voir que $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, certains préfèrent superposer les $\frac{1}{5}$ et les $\frac{1}{10}$ "dans le même sens" (horizontalement ou verticalement), tandis que d'autres trouvent l'équivalence beaucoup plus claire lorsque les grilles de $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$ sont croisées pour donner des $\frac{1}{10}$. Et si le $\frac{1}{10}$ obtenu en croisant les transparents ne "ressemble pas" à priori à la bande de $\frac{1}{10}$, il y a bien moyen d'argumenter qu'il s'agit de parties de même aire, par découpage et assemblage, ou parce qu'elles entrent chacune dix fois dans l'unité. La facilité avec laquelle le matériel permet de passer d'une représentation à l'autre est, ici encore, un atout.

5 De la division à la barre de fraction

Pourquoi $5 : 6$ est-il égal à $\frac{5}{6}$? On a d'un côté une opération de base, la division, majoritairement interprétée en primaire comme partage d'un certain nombre d'unités (ici, "Je partage 5 unités en 6"), et de l'autre une fraction, qui évoque d'abord le partage d'une unité en un certain nombre de parts (ici, "Je partage une unité en 6, et j'en prends 5 parts"). Il n'est pas évident que les résultats de ces deux partages coïncident ! Il y a ici une difficulté à surmonter.⁶ Voyons comment l'utilisation des transparents peut aider les élèves à faire des liens entre ces deux représentations.

On donne la consigne suivante, et on invite les participants à utiliser les transparents ou la fenêtre pour représenter leur solution : « Six amis achètent ensemble cinq pizzas et veulent se partager ce repas équitablement. Comment faire ? Quelle part recevront-ils chacun ? Illustrez votre réponse en représentant les pizzas par des carrés. »

Il n'est pas facile de partager directement 5 pizzas en 6 parts égales ; dans tous les cas, il faut un peu ruser. Sur la figure 19, on a reproduit trois des solutions proposées.⁷

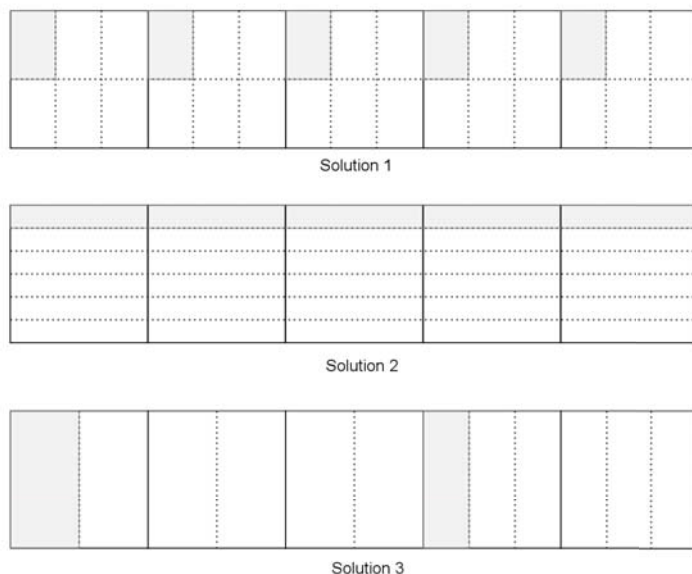


Figure 19. Comment partager 5 pizzas en 6 ?

⁶ Une autre difficulté, qui vient se greffer sur la première, concerne l'interprétation de l'égalité qui lie les deux écritures. En primaire, le signe "=" appelle le plus souvent, dans la tête des élèves, une "réponse" à donner, et il n'est pas évident qu'une fraction puisse jouer ce rôle – surtout si les fractions n'ont pas encore acquis pour l'élève leur statut de nombre. Cet aspect des fractions n'est pas pris en charge par le matériel présenté ; il est important d'être conscient de ces limites.

⁷ Pour des raisons de mise en page, les carrés-unités ne sont pas ici de même grandeur que précédemment.

Dans la première solution, chacune des 5 "pizzas" a été partagée en 6, et chacun prend un morceau de chacune (on peut imaginer qu'elles ont des goûts différents et que chacun veut goûter à tout) ; dans la deuxième, on s'est arrangé pour partager en 6 bandes égales les 5 pizzas mises côte à côte ; dans la troisième solution, les trois premières pizzas sont partagées en 2, procurant 6 morceaux, et les 2 pizzas restantes ont été chacune partagée en 3, ainsi chacun mangera $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ de pizza.

Que nous apprend cette activité ? Le problème, extrait de son contexte, demandait $5 : 6 = ?$, ce que montre bien et de façon directe la solution 2. Et qu'obtient donc chacun des amis ? Les solutions 1 et 2 montrent 5 parts valant chacune $\frac{1}{6}$ de l'unité, donc $\frac{5}{6}$ en tout, pour chacun d'eux.

On a donc

$$5 : 6 = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

On a donc construit une image pour comprendre le passage de la division à la barre de fraction. De plus, la solution 3 nous montre, de façon plutôt originale, que

$$5 : 6 = (3 : 6) + (2 : 6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

6 Somme de fractions⁸

Les participants ont d'abord vécu une activité⁹ pour élèves, testée dans une classe de primaire.

« 1. La somme de deux fractions vaut $\frac{1}{2}$. Quelles peuvent être ces deux fractions ?

Représentez pour convaincre. »

Cette activité est riche tant pour les élèves, que l'on peut inciter à trouver plusieurs solutions, à argumenter, à communiquer, que pour le professeur qui a ainsi accès à leurs représentations privilégiées et peut observer leurs erreurs (le changement d'unité en cours de travail, illustré dans la deuxième production de la figure 20. Deux productions d'élèves en est une bien résistante).

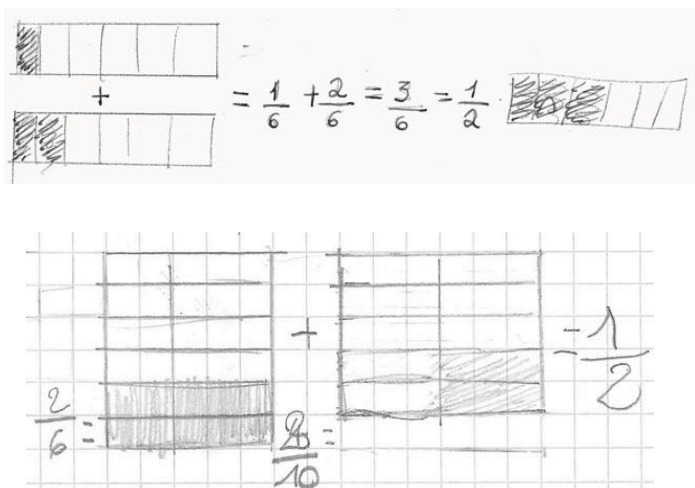


Figure 20. Deux productions d'élèves

⁸ Cette partie concernant la somme de fractions a été relatée dans le récent ouvrage du Groupe d'Enseignement Mathématique, *Le plaisir de chercher en mathématiques* (Gilbert & Ninove, 2017).

⁹ Le défi initial vient de P. Sullivan et P. Lilburn (2010), *Activités ouvertes en mathématiques*, Chenelière Éducation. Les autres consignes ont été créées au GEM en 2016.

Dans la suite du travail avec les élèves, nous proposons des vignettes qui font naturellement émerger la *somme* de fractions. On y trouve deux parties colorées, ou éventuellement une, qu'il faut mentalement décomposer (figure 21). L'ingrédient-clé de la technique opératoire de l'addition – à savoir la recherche de sous-unités communes aux différentes parties et à l'unité – est alors évoqué. Il s'agit dès lors de se concentrer sur ce point pour avoir une chance de montrer le sens de la procédure que les élèves vont devoir construire.

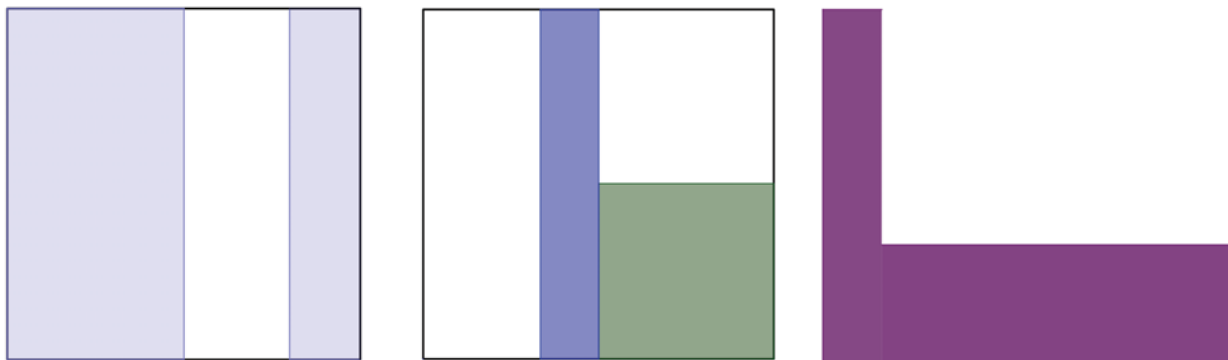


Figure 9. Somme de deux fractions

Lors de l'atelier, nous avons plutôt travaillé la consigne suivante, qui s'adresse aux enseignants. Ceux-ci sont invités à concevoir eux-mêmes des vignettes permettant de travailler les difficultés typiques de l'addition de fractions.

« 2. Construisez des parties colorées qui permettent de faire émerger l'addition de fractions.

- a) Au moins une des figures construites doit permettre aux élèves de penser à une somme de fractions de dénominateurs différents.
- b) Au moins une des figures construites doit permettre aux élèves de penser à une somme de fractions
 - de dénominateurs différents,
 - non multiples l'un de l'autre,
 - mais dont le "dénominateur commun" peut facilement être mis en évidence. »

Essayons de représenter $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$. Si on place les parties représentant les fractions comme à la figure 22, il est difficile de déterminer la fraction correspondant au tout. Si on croise les deux parties dans le carré unité (figure 23), il faut tenir compte de la superposition partielle des deux bandes. Mais les participants construisent aussi des vignettes sans superposition et où le dénominateur commun est tout aussi accessible par croisement des transparents (figure 24).

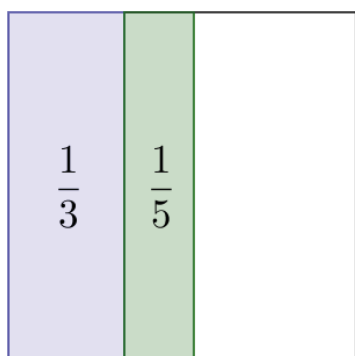


Figure 10

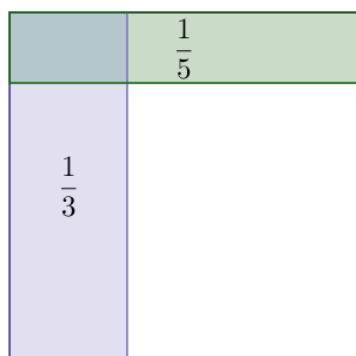


Figure 11

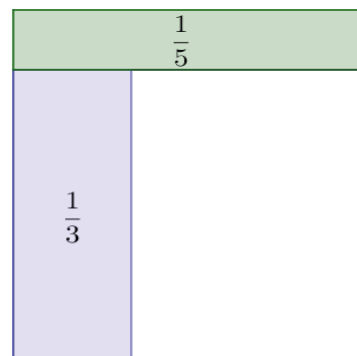


Figure 12

C'est aussi le cas de celles que nous proposons. La figure 21, à gauche, fait apparaître la somme $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$, avec le dénominateur commun 10 (la sous-unité commune $\frac{1}{10}$) facilement accessible par superposition des transparents (ou en choisissant directement la grille "10"). Au milieu est représentée la somme $\frac{1}{6} + \frac{1}{4}$. Les $\frac{1}{12}$ sont disponibles par croisement des transparents "6" et "2". Certains participants ont plutôt visualisé des $\frac{1}{24}$, ce qui permet de souligner que le dénominateur commun n'est pas unique.

Enfin nous terminons par une discussion autour de la vignette de la figure 25, qui permet de synthétiser les découvertes.



Figure 13.

Des essais avec différentes grilles (figure 26) nous mettent rapidement sur la piste de trois "morceaux" :

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{7} + ? .$$

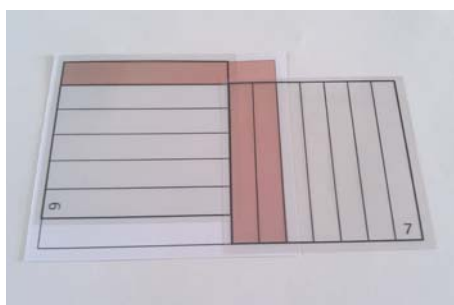


Figure 26. Choix des transparents « 6 » et « 7 »

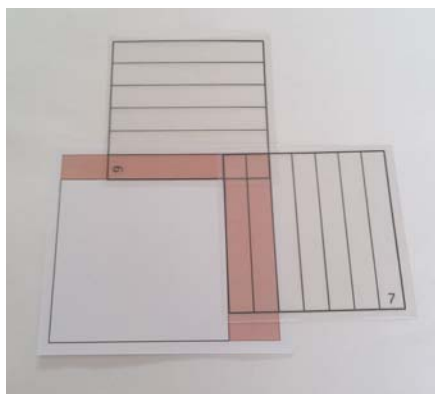


Figure 27. Détermination du dénominateur commun

Étant donné la disposition des grilles, on peut penser à les croiser pour obtenir le morceau inconnu, qui vaut donc $\frac{2}{42}$ (**Erreur ! Nous n'avons pas trouvé la source du renvoi.**). Voilà les $\frac{1}{42}$ disponibles pour exprimer la somme par une seule fraction :

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{2}{42} = \frac{7}{42} + \frac{12}{42} + \frac{2}{42} = \frac{21}{42} .$$

Le fait de s'autoriser à "sortir du carré" est ici un atout, car il permet de représenter les sommes et de repérer naturellement le dénominateur commun sans superpositions gênantes, comme ce serait le cas dans une représentation plus classique à l'intérieur du carré-unité (figure 23).

Certains ne manqueront pas de remarquer que la vignette de la figure 25 représente finalement la fraction $\frac{1}{2}$. L'utilisation du matériel ne nous mène donc pas à la solution simplifiée, mais ce n'est pas gênant, car la manipulation doit petit à petit céder le pas à l'argumentation mathématique. Après le travail réalisé sur l'équivalence de fractions, on peut à présent être convaincu que $\frac{42}{21} = \frac{1}{2}$ sans avoir besoin de le "voir".

III - CONCLUSION

Tout au long de cet atelier, nous avons voulu mettre en évidence l'importance que nous accordons à la *construction du sens* dans les apprentissages en mathématiques. Par les activités concrètes proposées – réalisables dans nos classes – nous avons voulu montrer comment, dans le domaine des fractions et des opérations sur les fractions, ce sens peut progressivement s'installer, soutenu par des activités de *manipulation*, de *représentation* et d'*expression*.

Ces trois facettes de l'activité mathématique en jeu ici sont à nos yeux indissociables. Manipuler ne suffit pas ; pour s'ancrer, les notions ont besoin d'être représentées et exprimées. Le va-et-vient entre manipulations, représentations et verbalisation va contribuer à la création d'images mentales, qui resteront disponibles, en toile de fond, pour les apprentissages futurs, permettant *in fine* à l'élève d'utiliser le savoir acquis.

Mais, réciproquement, le seul accès à des constructions théoriques – telles que des définitions et descriptions de procédures reprises dans un manuel – même accompagné de représentations et d'"explications", si performantes soient-elles, ne suffit pas non plus. L'élève doit, d'une manière ou d'une autre, *s'approprier* ces explications. L'enjeu ici était de montrer comment des activités de manipulation peuvent le soutenir efficacement dans ce travail.

Il n'est évidemment pas question de sortir des transparents chaque fois qu'on voudra additionner deux fractions ! À terme, l'utilisation efficace des savoirs acquis suppose que l'élève puisse se *détacher du matériel* qui a contribué à la naissance de ces savoirs, même s'il peut l'évoquer mentalement aussi souvent que nécessaire.

N'oublions pas de dire également quelques mots sur les limites de ce matériel et des séquences d'apprentissage qui l'accompagnent. Nous n'avons pas la prétention ici de présenter un outil "clé sur porte" qui serait la solution pour l'enseignement des fractions et le remède miracle à toutes les difficultés évoquées en commençant. Il s'agit d'un matériel parmi d'autres, dont nous avons tenté de faire découvrir les spécificités et atouts. Il sera de toute manière toujours préférable de varier les contextes d'apprentissage et d'utiliser plusieurs outils complémentaires.

Le présent matériel vise principalement deux aspects de l'objet "fraction", celui de la *fraction-opérateur* et de la *fraction-mesure*. Il permet la découverte des fractions comme portions d'une aire-unité. Dans ce cadre on rencontre naturellement l'équivalence, mais aussi l'addition et la multiplication, ainsi que la comparaison de fractions. Les activités vécues dans cet atelier ne sont qu'un petit aperçu des activités existantes. La fraction-rapport, par exemple, n'y a pas été abordée.

Il reste également à intégrer les présentes activités dans le continuum des apprentissages visant les fractions, qui s'étale sur plusieurs niveaux. Ce matériel n'a pas été conçu pour entamer le travail sur les fractions, ni pour le clôturer. Nous ne proposons ici ni exercices de fixation, ni problèmes d'application qui montreraient l'utilité des fractions au quotidien ou dans les mathématiques. L'idéal serait que l'élève puisse à terme résoudre des problèmes faisant intervenir des fractions, en convoquant si nécessaire des images que le matériel a contribué à construire.

Enfin, nous remercions les participants à l'atelier pour leur intérêt, leurs remarques pertinentes et la rédaction du rapport. Certains d'entre eux nous ont fait part de leur intention de tester le matériel. Nous serons ravies de recevoir un écho de leurs expérimentations mathématiques.

IV - BIBLIOGRAPHIE

CARETTE V., CONTENT A., REY B., COCHE F., GABRIEL FL. (2009) *Étude de l'apprentissage des nombres rationnels et des fractions dans une approche par compétences à l'école primaire, Rapport final de la recherche n°126/07 financée par la Communauté française*. Bruxelles : Université libre de Bruxelles (ULB).

GEM (1999) De la fraction-tarte au nombre, in *Proceedings de la 3e université d'été européenne "Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique"*, Louvain-La-Neuve, 261-318.

GERON C. & AL. (2016) À la liaison primaire-secondaire : l'apprentissage des fractions, *Losanges*, **32**, 3-18.

GERON C. & AL. (2015) À la liaison primaire-secondaire : la fraction dans tous ses états, *Losanges*, **31**, 8-17.

GILBERT T., NINOVE L. (dir.) et le Groupe d'enseignement mathématique (2017) *Le plaisir de chercher en mathématiques, de la maternelle au supérieur, 40 problèmes*. Louvain-la-Neuve, Belgique : PUL.

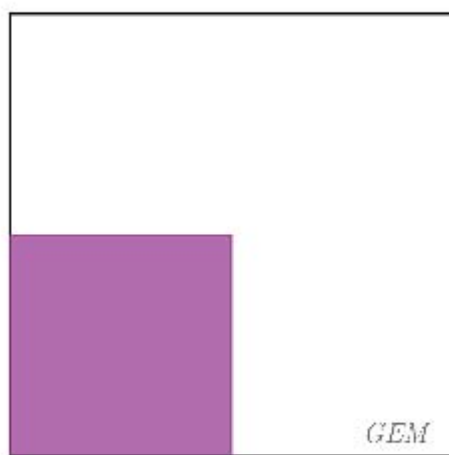
Nguyen T.-L. (2015) *Quel matériel (concret ou informatique) utiliser pour comprendre les fractions et les identités remarquables ?* Travail de fin d'études, Haute École Galilée (ISPG), Bruxelles.

KINDT M. (2004) *Positive Algebra, a collection of productive exercices*, on <http://www.primas-project.eu>, Freudenthal Instituut, 103-114.

ROUCHE N. (1998) *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.

V - ANNEXE

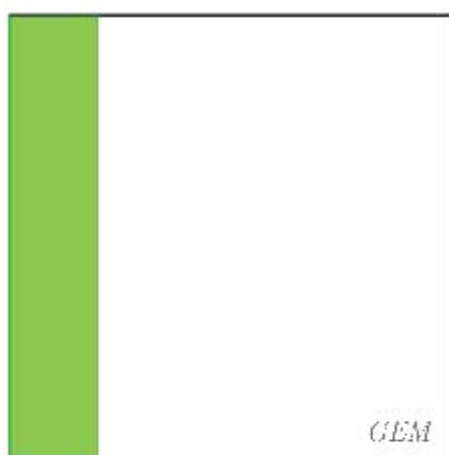
Fiche 1.1



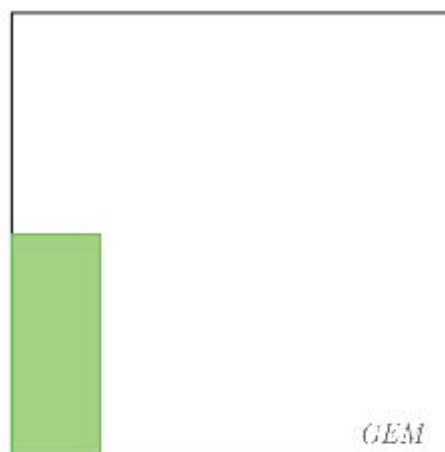
a



b



c

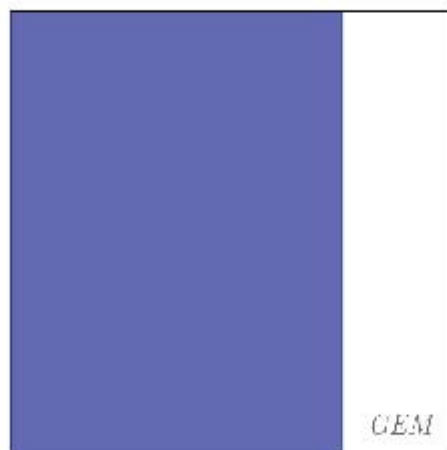


d

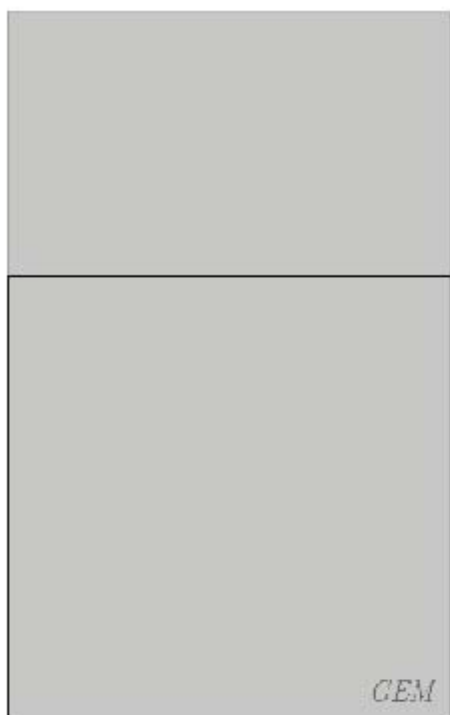
Fiche 2



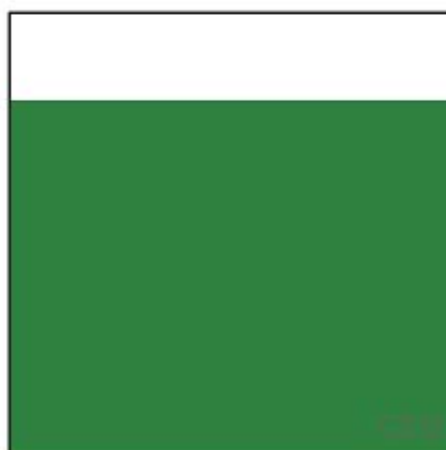
a



b

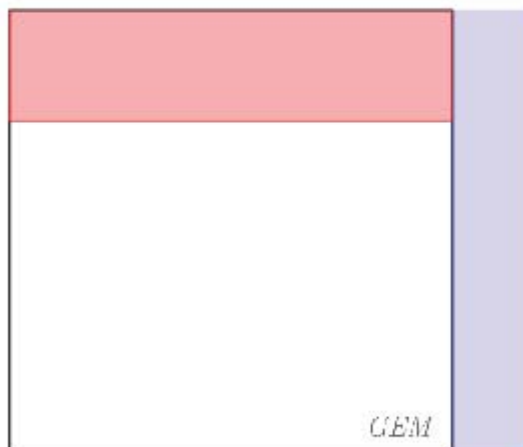


c

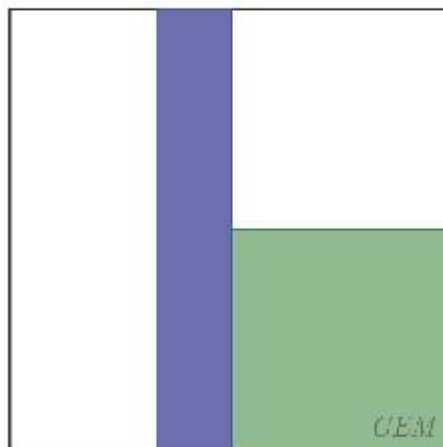


d

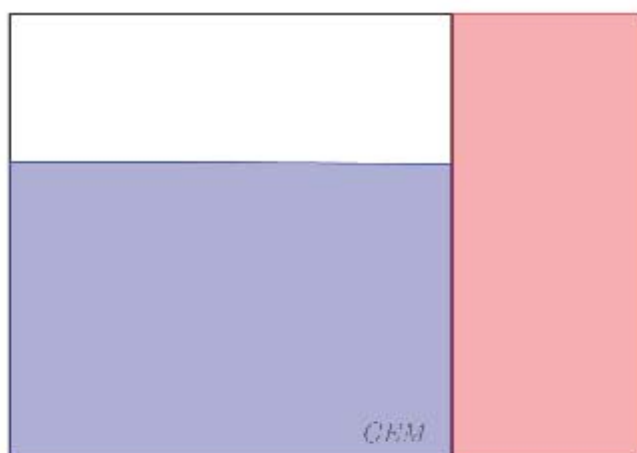
Fiche 3.3



a



b



c