
COPIRELEM
44e
Épinal
Colloque International
SUR LA FORMATION EN MATHÉMATIQUES DES PROFESSEURS DES ÉCOLES
13 > 15
juin
2017
Manipuler,
représenter,
communiquer :
quelle est la place de la sémiotique dans
l'enseignement et l'apprentissage
des mathématiques ?

Actes

C O P I R E L E M

44e colloque international sur la formation en mathématiques des Professeurs des Écoles

Actes

Manipuler,
représenter,
communiquer :

quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?

Épinal, 13, 14 et 15 juin 2017

SOMMAIRE

COMITÉ SCIENTIFIQUE

Édith PETITFOUR, Maître de Conférences, ESPE de Mont-Saint Aignan, Université de Rouen Normandie, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), COPIRELEM, Présidente du Comité Scientifique

Anne BILGOT, Formatrice, ESPE de Paris, Université de Paris 4, Paris Sorbonne, IREM de Paris 7, COPIRELEM

Richard CABASSUT, Maître de Conférences, Laboratoire interuniversitaire des Sciences de l'Education (LISEC), Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg, COPIRELEM

Valentina CELI, Maître de Conférences, ESPE d'Aquitaine, Laboratoire Cultures, Éducation, Sociétés (LACES), Université de Bordeaux COPIRELEM

Renaud DEHAYE, Formateur, ESPE de Lorraine, Université de Lorraine, IREM

Pierre EYSSERIC, Formateur, ESPE de l'académie d'Aix-Marseille, Aix-Marseille Université, IREM de Marseille, COPIRELEM

Pascale MASSELOT, Maître de Conférences, ESPE de Versailles, COPIRELEM, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR)

Arnaud SIMARD, Maître de Conférences, ESPE de Franche-Comté, IREM de Franche-Comté, COPIRELEM

André STEF, Maître de Conférences, Institut Elie Cartan de Lorraine (IECL), Université de Lorraine, Directeur de l'IREM de Lorraine

Claire WINDER, Formatrice, ESPE de l'Académie de Nice, Université Nice-Sophia Antipolis, COPIRELEM

COMITÉ D'ORGANISATION

Nicolas DE KOCKER, Formateur, Université de Lorraine, ESPE, COPIRELEM

Édith PETITFOUR, Maître de Conférences, Université de Rouen, ESPE, COPIRELEM

François BIHRY, Responsable des services administratifs et de gestion du site d'Epinal

Renaud DEHAYE, Formateur, Université de Lorraine, ESPE, IREM

Gilles LEUVREY, Formateur, directeur du site d'Epinal, Université de Lorraine, ESPE

Marie ROBIN, Secrétaire de gestion du site d'Epinal

Sylvie SPERNER, Secrétaire de l'IREM de Lorraine

BILAN SCIENTIFIQUE

Le 44e colloque de la COPIRELEM intitulé « ***Manipuler, représenter, communiquer : quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?*** » s'intéresse à la question sémiotique des liens entre action, représentation et conceptualisation.

Dans ce colloque, nous avons cherché notamment à identifier les ressources sémiotiques (langage verbal, représentations écrites, actions avec du matériel, gestes, etc.) à disposition de l'enseignant dans des activités d'enseignement et d'apprentissage dans différents domaines des mathématiques. Nous nous sommes intéressés à la manière dont ces ressources sont ou peuvent être articulées. Nous avons interrogé le rôle des ressources sémiotiques dans des stratégies d'enseignement, dans l'enrichissement des connaissances des élèves, en particulier de ceux qui rencontrent des difficultés d'apprentissage.

La conférence d'ouverture questionne l'idée répandue dans les pratiques et la formation d'enseignants spécialisés que les élèves en difficulté ou en situation de handicap doivent manipuler pour apprendre des mathématiques dans des situations le plus simplifiées possibles. Teresa Assude (Aix-Marseille) montre, à travers une analyse d'exemples, l'insuffisance de la manipulation pour faire des mathématiques et l'importance de la dimension sémiotique de l'activité mathématique.

La seconde conférence explore le rôle de l'articulation de registres de représentation sémiotique, graphique et langagier, dans l'apprentissage de la géométrie à l'école. Anne-Cécile Mathé (Clermont Auvergne) et Caroline Bulf (Bordeaux) étudient les interactions entre *agir*, *parler* et *penser* en s'intéressant à la place du langage dans la construction des connaissances et l'émergence des savoirs géométriques.

La troisième conférence s'intéresse au rôle des gestes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, ainsi qu'à leur articulation avec d'autres types de ressources sémiotiques (dont le discours en particulier). Cristina Sabena (Torino – Italie) étudie le support que les gestes peuvent offrir aux processus d'argumentation mathématique et elle propose des implications pratiques possibles pour la formation des enseignants.

Les textes de ces trois conférences figurent dans la Brochure des Actes.

Le colloque a donné lieu à de nombreux ateliers et communications. Les ateliers ont permis aux participants de travailler sur des questions relatives aux apprentissages mathématiques et à la formation des enseignants en lien avec le thème du colloque. Les communications ont présenté des pratiques de formation des Professeurs des Écoles ou des recherches universitaires liées à l'enseignement des mathématiques à l'école. Les textes produits ont été examinés par le Comité Scientifique. Les textes retenus sont disponibles sur le site de l'ARPEME, une fiche descriptive les annonce dans la Brochure des Actes.

Merci aux conférencières, merci à tous les animateurs d'atelier et auteurs de communication (orale ou affichée) pour leur travail d'écriture. Merci à tous les membres du Comité Scientifique pour leur travail de relecture et de conseils aux auteurs. Merci aux membres de la COPIRELEM pour leur relecture des textes. Au nom du Comité Scientifique, j'adresse aussi un grand merci au Comité d'Organisation qui a joué un rôle essentiel dans la réussite de ce colloque.

Édith Petitfour
Présidente du Comité Scientifique

CONFERENCES

ATELIERS

COMMUNICATIONS ORALES

COMMUNICATIONS AFFICHÉES

CONFÉRENCES

RELATIONS ENTRE SYSTÈMES SÉMIOTIQUES, MILIEUX ET TECHNIQUES MATHÉMATIQUES : MALENTENDUS, HYBRIDITÉ, INVENTIVITÉ

Teresa ASSUDE
Professeure des universités, Aix-Marseille Université
EA 4671 ADEF
teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr

Résumé
Une idée souvent répandue dans les pratiques et la formation d'enseignants spécialisés est que les élèves en difficulté ou les élèves en situation de handicap doivent manipuler pour apprendre des mathématiques. Ainsi, le recours au concret et à la manipulation est vu comme une priorité et un leitmotiv dans la justification du choix des situations proposées à ces élèves, situations qui sont souvent le plus simplifiées possibles. Or la manipulation ne suffit pas pour faire des mathématiques et l'importance de la dimension sémiotique de l'activité mathématique a été maintes fois mise en évidence par divers chercheurs.
À partir d'exemples pris dans le cadre de recherches sur les pratiques inclusives en mathématiques, nous soulignons l'importance pour le travail mathématique de la sémioticité des différents milieux (matériels ou autres) proposés aux élèves. En particulier, nous montrons comment les systèmes sémiotiques à l'œuvre permettent l'émergence de techniques pour l'accomplissement des types de tâches proposés aux élèves. Nous questionnons ensuite la formation des enseignants spécialisés au regard de ce problème.

I - INTRODUCTION

Une doxa qu'on peut retrouver dans le champ d'intervention auprès des élèves en difficulté ou en situation de handicap est que leurs difficultés viennent en partie d'un manque de manipulation et qu'il faut les faire manipuler, et ainsi on leur propose des situations concrètes avec des objets matériels. Dans un travail de recherche sur ce qu'on apprend dans les Instituts médico-professionnels (IMPro), Horvais (2012) montre que les professionnels enquêtés affirment tous que, pour ces élèves, il faut du concret, et encore du concret, parce que ces élèves ont besoin de toucher, de manipuler. Cet exemple, parmi d'autres, indique que cette doxa s'appuie sur une opposition concret/abstrait qui laisse souvent dans l'ombre le fait que la manipulation matérielle n'est pas suffisante pour faire des mathématiques. Et pourtant les programmes insistent sur l'articulation entre le concret et l'abstrait, entre l'action et la représentation. Voilà ce que disent les programmes du cycle 2 à ce propos[1] : « *Au cycle 2, on ne cesse d'articuler le concret et l'abstrait. Observer et agir sur le réel, manipuler, expérimenter, toutes ces activités mènent à la représentation, qu'elle soit analogique (dessins, images, schématisations) ou symbolique, abstraite (nombres, concepts). Le lien entre familiarisation pratique et élaboration conceptuelle est toujours à construire et reconstruire, dans les deux sens.* » Dans des sphères proches du système d'enseignement de mathématiques, nous trouvons aussi ce type de prise de position à ce sujet. Par exemple, dans un ouvrage destiné aux professionnels intervenant auprès d'élèves dyscalculiques, Hélayel et Causse-Mergui (2011) affirment : « *Tout le monde de nos jours a entendu parler de cette nécessité de faire « manipuler » les enfants. Mais beaucoup oublient que cela n'a qu'un but : pouvoir s'en passer.* » (p. 21)

Cette opposition concret/abstrait où le rôle de la manipulation est vu comme central ne date pas d'aujourd'hui. Par exemple, dans le dictionnaire pédagogique de Ferdinand Buisson (édition 1911), destiné aux acteurs de l'enseignement primaire, une entrée « manipulation » est consacrée à la place de la manipulation dans l'enseignement scientifique. Dans l'entrée « mathématiques », le double but « utilitaire et éducatif » de l'enseignement mathématique au primaire est d'emblée indiqué sans les opposer. Mais le

[1] B.O. spécial n°11 du 26 novembre 2015. Annexe 1 - Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2).

rapport à la pratique et au concret est davantage mis en avant, comme on peut le voir dans le choix des problèmes mathématiques à proposer aux élèves :

« *L'arithmétique, devant contribuer, même à l'école primaire, à l'éducation générale de l'esprit, tout exercice qui force l'enfant à réfléchir, à chercher, à comparer, à déduire, à juger, semble à ce titre être du domaine de l'enseignement primaire. C'est, là, il nous semble, une grave illusion. Il ne faut pas perdre de vue que l'enseignement donné dans nos écoles primaires s'adresse aux masses profondes des populations scolaires rurales, vouées de très bonne heure au travail des champs, et aux enfants des classes ouvrières des villes, que réclament aussi dès l'âge le plus tendre l'atelier, l'usine ou le comptoir (…) L'arithmétique ne peut pas faire exception. Avant tout, l'enfant doit savoir calculer sûrement et rapidement et résoudre toutes les questions pratiques qu'il peut être appelé à rencontrer sur sa route pendant sa vie. Tel est le caractère que doivent avoir les problèmes à l'école primaire ; et la marge est grande encore sans qu'on ait besoin de se jeter sur les curiosités de la science, sur les propriétés abstraites des nombres, sur les problèmes fantaisistes et compliqués à plaisir.* »

La prégnance du rôle de la manipulation et du concret dans les discours (et aussi dans les pratiques) des intervenants auprès des élèves en difficulté et en situation de handicap fait partie d'une tradition qui a des racines dans un rapport empiriste, sensualiste et intuitif de la connaissance à la réalité. Notre but est de montrer que, même dans un tel type de rapport, la place des représentations, du langage, de la sémiotique, est consubstantielle au travail mathématique de l'élève. Pour cela, nous présentons d'abord quelques outils théoriques pour aborder ce problème, et ensuite nous montrons quatre exemples qui nous permettent de mettre en exergue quelques fonctions et malentendus de l'usage des systèmes sémiotiques.

II - OUTILS THÉORIQUES ET QUESTIONS

La question de la dimension sémiotique de l'activité mathématique est présente dans la plupart des approches théoriques des recherches en didactique des mathématiques. Comme le dit Radford (2014) : « *The problem of knowledge representation has been one of the most investigated and most discussed problems in mathematics education. And it has also been one of the most controversial ones.* » (p. 406) Effectivement les réponses théoriques et empiriques à cette question ne sont pas les mêmes selon les approches. Dans le cas de la théorie des situations didactiques, Brousseau prend en compte cette dimension à travers plusieurs outils, en particulier il modélise la notion de représentation (Brousseau, 2004). Dans la théorie des champs conceptuels, cette dimension est présente dans la définition même de concept et de champ conceptuel (Vergnaud, 1990). L'épistémographie est aussi une construction théorique qui place les outils sémiotiques au centre de son modèle (Drouhard, 2007, 2012). Les travaux de Radford (2014) sur la théorie de l'objectivation, les travaux d'Arzarello (2006) sur la notion de faisceau sémiotique, la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008) en sont encore quelques exemples. Notre but n'est pas de faire un inventaire de tous les travaux de recherche à ce propos. Encore très récemment, l'étude de (Presmeg, Radford, Roth & Kadunz, 2016) fait un inventaire de travaux tenant compte de cette dimension. Nous n'allons pas mettre en débat ces approches les unes par rapport aux autres : nous nous bornerons à présenter certains outils théoriques issus de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1994), des registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993, 1995) et de la sémiotique de Peirce (Neveu, 2011) qui nous permettront par la suite d'analyser nos épisodes et de montrer certains phénomènes.

1 Noésis et sémiosis

Dans l'introduction, nous avons vu que, dans certains discours, l'insistance sur la manipulation pour pallier les difficultés des élèves tend à minorer le rôle des représentations dans le travail mathématique. Or cette position est difficilement défendable lorsqu'on observe quels sont les ingrédients de ce travail. Duval (1993) parle du paradoxe cognitif de la pensée mathématique pour indiquer que : « *d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible* » (p. 38) Cet auteur reformule alors ce paradoxe cognitif de la manière suivante : « *Si on appelle **sémiosis** l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique, et **noésis** l'appréhension conceptuelle d'un objet, il faut affirmer que la noésis est inséparable de la sémiosis* ». (p. 39-40)

Duval indique que trois activités cognitives liées à la sémiosis sont nécessaires pour qu'un système sémiotique devienne un registre de représentation. Il s'agit d'abord de la *formation* d'une représentation comme étant une représentation identifiable dans un registre donné. Ensuite le *traitement* d'une représentation implique la transformation de cette représentation dans le registre où elle a émergé. Finalement la *conversion* d'une représentation est la transformation d'une représentation de l'objet ou situation dans une représentation d'un autre registre que celui de départ, comme par exemple la transformation d'une droite dans le registre géométrique en une équation dans le registre algébrique. Ces différentes activités cognitives sont réglées en fonction des registres et du travail mathématique à faire. Par exemple, des règles de conformité doivent être suivies pour constituer une expression numérique (pour désigner la somme de 2 et 3, on peut écrire 2 + 3 mais non 2 3 +) ou des règles de traitement propres à un registre donné (on peut transformer l'expression $2x - 4 = 10$ en $2x = 10 + 4$, parce qu'il y a une règle qui permet de le faire).

2 Ostensifs et non ostensifs

Cette articulation entre objet mathématique et représentations sémiotiques dans l'activité mathématique est pensée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique comme une dialectique entre ostensifs/non ostensifs. Chevallard (1994) indique que faire des mathématiques consiste à manipuler des ostensifs qui permettent l'émergence de non ostensifs dans le cadre d'une pratique réglée :

« D'un côté, il y a ainsi des objets que je nomme ostensifs, tels un nom, une notation, un graphe, ou encore un schéma gestuel, qui peuvent être réellement présents et que l'on peut effectivement manipuler dans leur matérialité. D'un autre côté, il y a les objets non ostensifs, que je nomme aussi émergents, et que l'on peut seulement évoquer à l'aide d'objets ostensifs. Lorsqu'un mathématicien dit qu'il manipule la fonction logarithme, c'est en vérité certains des objets ostensifs associés qu'il manipule. Bien entendu objets ostensifs et non ostensifs viennent à l'existence et vivent ensemble au sein d'une pratique mathématique qui les réunit : ils se déterminent réciproquement. » (p. 72)

La manipulation n'est pas ici simplement une manipulation d'objets matériels, c'est une manipulation d'ostensifs appartenant à un ou plusieurs registres. Les ostensifs ont une double valence : une valence instrumentale car ils permettent de faire ce qu'il y a à faire ; une valence sémiotique car ils permettent de montrer ce qu'on fait. Chevallard appelle instrument sémiotique un objet ostensif et sa double valence, et indique que le travail mathématique convoque une panoplie d'instruments sémiotiques d'un ou plusieurs registres.

Quatre registres d'objets ostensifs sont envisagés : le registre oral (le discours), le registre graphique ou scriptural (écrits, textes, graphiques,…), le registre gestuel (gestes, mimiques, regards,…) et le registre « matériel » des objets matériels. Ces registres ne sont pas indépendants, et peuvent être sollicités en simultané. Pourtant les différents registres n'ont pas la même valeur culturelle ou mathématique. Le registre gestuel est peu valorisé (par exemple, compter avec les doigts), le registre oral peut être plus valorisé dans une culture donnée, étant considéré comme plus proche de la pensée. L'écrit est le registre le plus valorisé en algèbre. Dans l'évolution de l'activité mathématique, il y a une réduction de l'épaisseur ostensive avec une prédominance du registre graphique/scriptural (Chevallard, 1994 ; Bosch & Chevallard, 1999).

Ces instruments sémiotiques et registres ostensifs sont des ingrédients de l'activité mathématique mais ils permettent aussi de décrire les techniques mises en œuvre pour accomplir des types de tâche, ou de décrire les technologies ou théories permettant de justifier ces techniques. Autrement dit, les instruments sémiotiques sont des ingrédients pour décrire des praxéologies mathématiques qui elles-mêmes permettent d'analyser l'activité mathématique (Chevallard, 1992).

Les outils théoriques issus des travaux de Duval nous aident à penser les activités cognitives liées à la sémiosis comme la formation, le traitement et la conversion des représentations sémiotiques. Les éléments issus de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard) nous permettent d'étudier l'activité mathématique par les instruments sémiotiques en lien avec les praxéologies mathématiques, les situations et les milieux dans lesquels vivent ces praxéologies mathématiques. La notion de milieu est considérée comme étant « ce sur quoi agit l'élève et qui agit sur lui » (Brousseau, 1998).

3 Dynamique du processus sémiotique

Une troisième dimension de notre instrument d'analyse concerne ce qui a trait aux signes et leur relation avec les objets et situations. Un certain nombre de travaux en didactique des mathématiques (Otte, 2005), et plus spécifiquement certains travaux sur les élèves en difficulté, utilisent la sémiotique de Peirce en tant que cadre d'analyse (Bloch, 2008 ; Conne, 1999 ; Giroux, 2008 pour ne citer que certains). Peirce définit le signe comme une relation triadique entre *l'objet* (entité mentale ou physique), le *representamen* (ce qui fait signe), et *l'interprétant* qui met en relation l'objet et le representamen : « Ma définition est la suivante : un representamen est sujet d'une relation triadique avec un second appelé son objet, pour un troisième appelé son interprétant, cette relation triadique étant telle que le representamen détermine son interprétant à entretenir la même relation triadique avec le même objet pour quelque interprétant. » (Peirce, 1978) Cette structure triadique est constitutive du modèle de Peirce fondée sur trois catégories philosophiques - des « conceptions de l'être » (Everaerd-Desmedt, 1990), - qui sont la priméité, la secondéité et la tiercéité.

Nous n'allons pas présenter tous les types de signes dégagés mais seulement ceux qui tiennent compte du mode de renvoi du representamen à l'objet. Dans ce cas, trois types de signes sont définis en fonction de deux variables : arbitraire/non arbitraire et motivation. Ces types de signes sont l'indice, l'icône et le symbole. Lorsqu'un signe est un indice, la relation objet/representamen est non arbitraire et la motivation est causale car il y a une relation de cause à effet avec les objets du monde : par exemple, la fumée est un indice de feu. Lorsqu'un signe est une icône, la relation objet/representamen est non arbitraire et la motivation est celle de ressemblance avec les objets du monde : par exemple, les onomatopées. Un signe est un symbole si la relation est arbitraire et la motivation conventionnelle : par exemple, le mot « chat » est arbitraire et conventionnel par rapport à l'animal « chat ». Par ailleurs, étant donné que l'interprétant met en relation les deux autres termes, le contexte d'interprétation est important. Peirce ne distingue pas penser et signifier, et la sémiose est un processus interprétatif et signifiant où representamen, objet et interprétant sont des fonctions (et pas des attributions) qui peuvent changer dans la dynamique du processus sémiotique.

4 Cadre d'analyse et questions

Pour terminer, un dernier élément nous paraît important pour notre cadre d'analyse. Actuellement, la sémiotique est définie comme la science des signes qui étudie la production, la codification et la communication des signes (Neveu, 2011). D'une manière plus restrictive, si nous prenons le sens étymologique de ce terme, il renvoie à ce qui est apte à noter, qui concerne l'observation. Il nous semble intéressant de faire le lien entre « sémiotique » en tant qu'adjectif et trois termes : agir – observer – noter. Des instruments sémiotiques permettent d'agir, d'observer l'action (la sienne mais aussi celle des autres) et de noter ce qui est signifiant de ces actions et observations.

Notre cadre d'analyse comporte trois dimensions :

- la dimension cognitive à travers trois activités cognitives qui sont la formation, le traitement et la conversion de représentations sémiotiques. Nous nous focaliserons ici surtout sur la formation de représentations sémiotiques dans une pluralité de registres (oral, scriptural, gestuel et matériel).
- la dimension mathématique et institutionnelle : nous étudierons sous cet angle les représentations sémiotiques comme éléments de techniques permettant d'accomplir des types de tâches dans des situations, des milieux et contrats déterminés.
- la dimension proprement sémiotique, relative aux types de signes convoqués par les élèves et les enseignants dans l'émergence des techniques en lien notamment avec la sémioticité des milieux. Pour cela, nous regarderons non seulement les actions et les discours mais aussi les observations et ce qui permet de les noter.

Nos questions sont celles de savoir **comment un élève entre ou non dans un contrat didactique qui tienne compte de la dimension sémiotique de l'activité mathématique**. **Qu'est-ce qui fait signe dans les différents milieux et comment l'élève s'en saisit-il pour mettre en œuvre des techniques mathématiques et accomplir des types de tâches mathématiques ? Quels sont les malentendus qui peuvent surgir et comment peuvent-ils se transformer en obstacle pour l'apprentissage ?**

III - ANALYSE DE QUATRE EXEMPLES

Nous avons pris quatre exemples dans nos travaux de recherche pour montrer un certain nombre de phénomènes sur la place de la sémiotique dans l'activité mathématique. Nous indiquerons, pour chaque exemple, le contexte du travail, la description et l'analyse d'un ou plusieurs épisodes. Le but n'est pas ici de présenter les recherches en question mais de montrer quelques épisodes significatifs relatifs à notre propos.

1 Paradoxe entre difficulté à conceptualiser et symbolisation abrupte

1.1 Contexte

Ce premier exemple est issu d'une recherche menée dans une classe CLIS[2] (Classe pour l'inclusion scolaire) destinée à des élèves sourds et malentendants. Le groupe d'élèves que nous avons observé était constitué par cinq élèves âgés de 8 à 10 ans de niveau CE2. Il s'agissait de reprendre les tables de multiplication car ils avaient des difficultés à les mémoriser selon l'enseignante. La situation mathématique était constituée par un type de tâche T1 « décomposer un nombre en un produit de deux nombres » et d'un milieu matériel constitué par des « bandes de papier de n carreaux », des ciseaux, du papier blanc et des stylos. Les épisodes choisis se passent lors de la première séance dont le synopsis est le suivant :

Temps	Types de tâches/Milieu matériel	Tâches des élèves : nombres choisis par l'enseignante
0- 8min	T1 avec des bandes	Paul : 20 Charlotte – Marie – Zénon : 12 Ruth : 8
8min - 14min	T1 avec des jetons	Mêmes nombres avec des jetons
14min - 23min	T1 avec des bandes et jetons	Paul : 9 Charlotte - Zénon : 10 Marie : 12 Ruth : 6

Cette séance peut être découpée en trois étapes. Dans la première étape (0 à 8 min), le type de tâche est T1 : bandes de carreaux à découper avec des valeurs différentes selon les élèves (8, 12 ou 20). La consigne est la suivante : « *Je veux que, dans cette bande, vous me découpiez des morceaux, mais il faut que ces morceaux soient tous pareils.* » Dans la deuxième étape (8 à 14 min), le même type de tâche est proposé aux élèves mais le milieu matériel change car il s'agit de partager un ensemble de jetons en parts égales. Dans la troisième étape (14 à 23 min), il s'agit d'une tâche du même type avec d'autres nombres.

1.2 Description des épisodes

Les deux épisodes 1 et 2, celui de Charlotte et celui de Paul, se passent pendant la première étape.

[2] Actuellement ces classes n'existent plus en tant que telles, elles ont été transformées officiellement en ULIS école (Unités Localisées d'Inclusion Scolaire) pour l'école primaire.

Épisode 1 – Charlotte	
Maîtresse : Tu as fait des paquets de combien ? Charlotte : 6 Maîtresse : et l'autre paquet ? Charlotte : 6 Maîtresse : Combien de paquets ? Charlotte : 2 Maîtresse : 12 c'est égal à quoi ? (elle indique avec le doigt un paquet de 6) Charlotte : 6 La maîtresse indique l'espace vide entre les deux paquets, trois fois, et ensuite l'autre paquet de 6 Charlotte : + 6 Maîtresse : écris-le ***Charlotte écrit 66.***	

Dans cet épisode, on observe que Charlotte découpe la bande en deux paquets de 6 carreaux chacun, mais n'arrive pas à écrire ce que la maîtresse attend, à savoir 12 = 6 + 6. À aucun moment une consigne explicite n'est donnée dans ce sens. La maîtresse indique d'une manière ostensive, par des gestes, ce qu'il faut écrire. Malgré ces indications, Charlotte ne répond pas aux attentes et écrit 66.

Dans l'épisode 2, on observe que Paul a bien découpé la bande de 20 carreaux, il colle les morceaux sur une feuille de papier, il écrit 20 dans sa feuille et 4 sous chaque morceau. La maîtresse lui demande « *20 égal quoi ?* », et Paul répond « *20 + 4* ».

À la suite de ces deux épisodes, la maîtresse prend une décision qui n'était pas prévue au départ. Elle remplace les bandes de carreaux par des jetons et propose le même type de tâche aux élèves. Le milieu matériel change, et les élèves manipulent les jetons pour faire des paquets ayant le même nombre de jetons. L'épisode 3 se passe avec Paul dans cette deuxième étape de la séance.

Épisode 3 – Paul	
Maîtresse : Paul, alors 20 c'est égal à combien ? Paul commence à compter les jetons. Maîtresse : Pourquoi tu recomptes ? Combien tu en as ? Paul : 20 Maîtresse : Combien tu as fait de paquets ? Combien tu as mis dans chaque paquet ? Paul : 4 Maîtresse : Combien tu as fait de paquets de 4 ? Paul : 5 Maîtresse : Voilà tu as compris, donc 20 c'est égal à combien ? Paul ne répond pas tout de suite mais la maîtresse indique chaque paquet de jetons et l'espace vide entre chaque paquet pour lui faire dire « plus ». Paul répond au fur et à mesure de ces indications : 4 + 4 + 4 + 4 + 4	

Dans cet épisode, on observe que Paul partage sans problème les 20 jetons en 5 paquets de 4 jetons chacun. La maîtresse ne donne pas d'autre consigne concernant la représentation attendue. Par des questions telles que « combien tu as de paquets ? Combien tu as mis dans chaque paquet ? », et par ostension avec des gestes, elle arrive à ce que Paul donne une réponse acceptable par elle : 4 + 4 + 4 + 4 + 4.

L'épisode 4 implique Zénon, un autre élève de la classe. Nous observons le même type de fait. Zénon sait partager 10 jetons en parts égales. Il fait 5 paquets de 2 jetons. Il n'écrit pas, et par le même procédé (ostension avec des gestes et questions ciblées), la maîtresse arrive à ce que Zénon écrive la relation : 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10. Nous observons aussi que Zénon a des difficultés pour répondre aux deux questions : « Combien tu as de paquets ? Combien tu as mis dans chaque paquet ? ». Il confond l'une et l'autre de ces questions mais arrive à donner les bonnes réponses après reprise des questions par la maîtresse.

1.3 Analyse des épisodes

Ces épisodes nous montrent un décalage entre ce que l'enseignante attend que les élèves écrivent et ce que les élèves comprennent de la situation. L'enseignante attend que les élèves écrivent une relation du type « 20 = 4 x 5 » ou « 20 = 5 x 4 ». Or la consigne donnée par la maîtresse ne précise pas qu'ils doivent écrire une relation qui correspond au partage égal qu'ils obtiennent par la manipulation. Il s'agit là d'un implicite qui pose des problèmes aux élèves et à l'enseignante. Et c'est par ostension que l'enseignante arrive à dépasser cet implicite en acceptant une autre représentation qui n'est pas celle attendue mais qui est acceptable pour elle. Il y a là un premier malentendu qui est contractuel.

Le deuxième élément à signaler est celui du changement de milieu matériel, des bandes de carreaux aux jetons, pour le même type de tâche. Les élèves n'ont eu aucun problème pour manipuler les bandes et répondre à la consigne. Et pourtant l'enseignante décide de les faire encore manipuler car elle estime que les difficultés des élèves viennent de leur difficulté à conceptualiser. Pendant un entretien, l'enseignante nous dit explicitement : « *parce qu'ils sont sourds ou malentendants ils ont des difficultés pour conceptualiser, donc il faut les faire beaucoup manipuler et visualiser* ». La décision de l'enseignante est fondée sur cet *a priori* sur les difficultés que les élèves sourds et/ou malentendants peuvent avoir sans tenir compte de l'observation de cette situation en particulier. Car les difficultés de ces élèves ne viennent pas forcément de la compréhension de la situation de partage mais probablement de deux facteurs : le premier est relatif aux malentendus contractuels, le deuxième est relatif à la symbolisation abrupte qui était celle attendue par l'enseignante. La relation formelle attendue n'est pas forcément celle que les élèves peuvent observer à partir du milieu et des actions sur le milieu. La sémioticité du milieu matériel aurait pu mener à la formation d'une représentation sémiotique mais pas celle attendue, et surtout si cela n'est pas dit explicitement dans la consigne. Nous voyons Charlotte écrire « 66 » probablement pour écrire « un paquet de 6 et un paquet de 6 », ou Paul écrire « 20 + 4 » pour indiquer probablement « la bande de 20 carreaux et un paquet de 4 carreaux ». Ces représentations dans le registre de l'écrit correspondent aux techniques qui ont permis d'accomplir la tâche dans le registre matériel. Que faire de ces représentations intermédiaires qui correspondent à ce qui fait signe pour les élèves face au milieu matériel et aux actions produites dans ce milieu ?

Dans l'exemple observé, l'enseignante guidée par ses conceptions *a priori* sur les difficultés d'élèves sourds, prend la décision de revenir sur la manipulation, ce qui ne résout pas vraiment le problème qu'elle avait pourtant observé (celui que les élèves n'arrivent pas à écrire la relation attendue).

2 « Malentendu sémiotique » ?

2.1 Contexte

Le deuxième exemple est pris dans le cadre d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté qui est l'aide pédagogique complémentaire (APC) proposée par l'institution scolaire. Notre exemple concerne 6 élèves de CM1 en difficulté. Il s'agit d'une situation d'introduction des fractions en tant que codage de la mesure de longueurs. Deux types de tâches sont proposés aux élèves : T1 - mesurer la longueur d'un segment en utilisant une unité non conventionnelle ; T2 - coder la mesure obtenue sous la forme d'une fraction (ou somme de fractions). Le milieu matériel est constitué par une bande-unité en papier, et par une feuille où sont représentés des segments, et où certains codages sont proposés. Les élèves doivent associer la mesure obtenue avec l'un de ces codages.

L'organisation de la séance d'APC est la suivante :

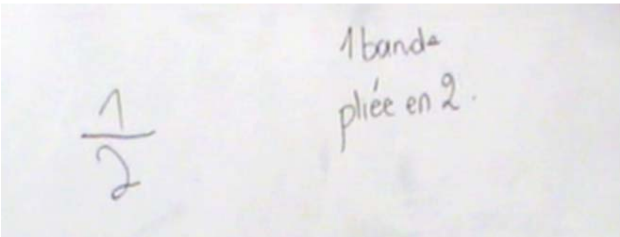
Synopsis	
Étape 1	Travail individuel de lecture de la consigne écrite sur la feuille
Étape 2	En groupe, vérification de la compréhension de la consigne
Étape 3	Travail individuel pour mesurer la longueur d'un segment en utilisant une bande-unité en papier
Étape 4	Dialogue au tableau élèves-enseignante autour d'un exemple fait par les élèves au tableau et sur les écritures proposées par les élèves. Il s'agit de coder la mesure d'un segment de longueur 2u + ½ u, u étant la longueur de la bande-unité.

2.2 Description de l'épisode

L'épisode choisi se déroule dans l'étape 4 où le travail se fait au tableau dans un dialogue enseignante-élèves. Les élèves doivent décrire la technique utilisée pour mesurer la longueur d'un segment et coder au fur et à mesure des actions décrites. La technique est ainsi racontée :

- on reporte une fois, deux fois la bande unité
- on plie en deux parts égales la bande unité lorsqu'on ne peut plus reporter une unité entière
- on reporte une part de cette bande-unité autant de fois que possible
- sinon, on plie encore en deux, et on reporte

Les élèves ont déjà vu des écritures du type 1u, 2u, 3u, et l'élève au tableau écrit « 1u » au-dessous des parts correspondantes à des bandes-unités. La question importante est celle posée par Pierre : « *Comment on écrit une bande à moitié?* ». L'enseignante demande aux élèves de proposer des écritures et plusieurs propositions sont écrites au tableau. Héloïse propose « ½ » au tableau :



L'enseignante dit alors : « *Héloïse propose cette écriture là (1/2). C'est exactement ça. Cette écriture, elle raconte précisément ça. J'ai pris une bande pliée en deux, j'ai pris un morceau de cette bande pliée en deux.* »

2.3 Analyse de l'épisode : quelle histoire raconte-t-on ?

Pour Héloïse (et aussi pour les autres élèves), l'écriture « ½ » représente et raconte une action qui est celle d'une « bande-unité pliée en deux » tandis que, pour l'enseignante, l'histoire est autre car cette notation représente « un morceau d'une bande-unité pliée en deux morceaux ».

Il y a un malentendu sémiotique entre l'enseignante et les élèves car cette représentation sémiotique ne raconte pas la même histoire. Ce malentendu a continué pendant cette séance et aussi pendant les deux séances de classe et une autre séance d'APC. Pour ces élèves, et aussi pour d'autres élèves de la classe, cette notation représente une action, tandis que pour l'enseignante cette notation correspond à une relation partie-tout. Or l'enseignante nous a parlé ensuite de la difficulté des élèves pour comprendre les fractions et pourtant ils arrivent à coder l'action de mesurage sous la forme d'une fraction. La difficulté des élèves venait surtout du décodage : ils arrivaient à identifier le dénominateur comme étant le partage de l'unité en x parts égales, mais ils n'arrivaient pas à identifier le numérateur comme le nombre de parts prises.

Des deux formulations « une bande pliée en deux » et « un morceau d'une bande pliée en deux morceaux », la plus proche du déroulement de l'action est celle de l'élève. Peut-être que, pour l'élève, le signe « ½ » est encore un signe iconique proche de l'action : 1 pour une bande unité, le trait correspond au pli, au partage, et le 2 pour le pli en deux morceaux. Pour l'enseignante, cette notation correspond plutôt à un signe symbolique qui représente une relation « partie-tout ».

Le malentendu sémiotique correspond à des significations différentes d'une même représentation sémiotique, ce qui peut devenir un obstacle pour les élèves et pour l'enseignante car pour les uns et les autres la notation est signifiante et il n'est pas évident de voir que ce n'est pas forcément la même signification en raison de la subtilité de cette différence.

3 Inventivité et hybridité sémiotique

3.1 Contexte

Le troisième exemple est pris dans le cadre d'une recherche sur une ULIS Collège (Unité Localisée pour l'Inclusion Scolaire) destinée à des élèves dyslexiques. Nous avons observé des élèves de cette ULIS qui étaient accueillis dans une classe de troisième en mathématiques. Nous avons proposé à l'enseignant de mathématiques et au coordonnateur de l'ULIS de travailler sur des problèmes mathématiques et sur le raisonnement. Les problèmes choisis ont déjà été travaillés dans des travaux de recherche (Hersant, 2008, 2010 ; Douaire, Argaud, Dussuc, Hubert, 2003 ; Ermel, 1999) pour que nous puissions comparer les techniques et les raisonnements mis en œuvre par ces élèves par rapport à d'autres élèves. Le théorème proposé est le suivant : la somme de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de trois. La situation proposée suivait les différentes étapes proposées par Ermel (1997) et les élèves travaillaient en groupe. Dans un premier temps, on demande aux élèves de trouver trois nombres consécutifs dont la somme est S, S étant un multiple de 3. Dans un deuxième temps, la question est la même avec S non multiple de 3. Dans un troisième temps, il s'agit de formuler une conjecture qui réponde à la question : à quelles conditions le problème a-t-il toujours une solution ? Le quatrième temps est celui de la preuve.

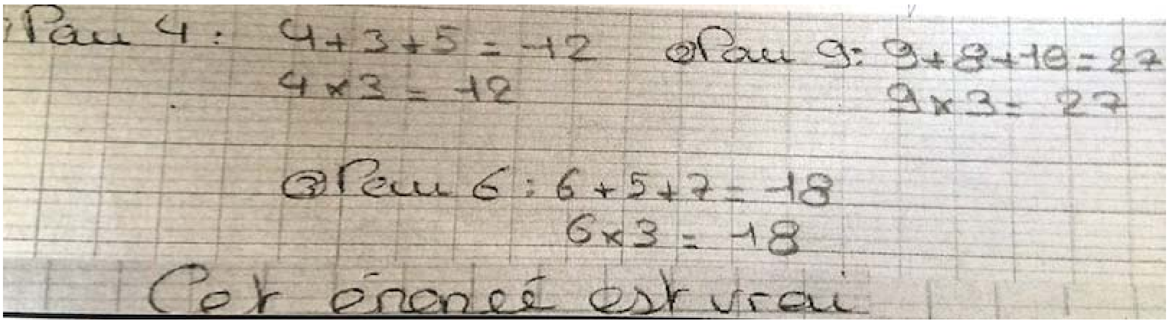
Nous ne présentons pas les détails des raisonnements et des techniques mis en œuvre par les élèves car nous intéressons à la quatrième étape et aux preuves proposées par les élèves qui ont travaillé en groupe.

3.2 Description des différents types de « preuves »

Plusieurs types de preuve[3] sont apparus mais le plus fréquent était la preuve pragmatique (Balacheff, 1987) avec des exemples numériques. Un deuxième type de preuve était une preuve discursive en utilisant le « nombre du milieu » : « si on additionne un nombre, plus celui d'avant, plus celui d'après, la somme c'est trois fois le nombre ». Le troisième type de preuve correspond aux preuves algébriques où on utilise les expressions littérales.

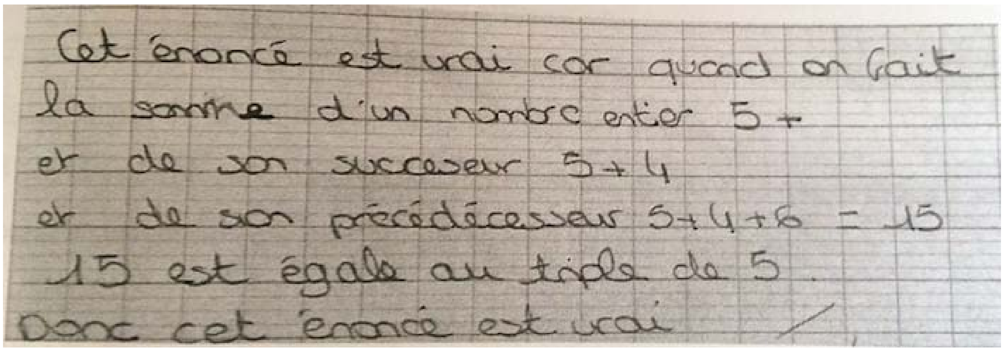
Pour illustrer les différents types de preuve, nous avons choisi quatre productions d'élèves qui nous paraissent significatives.

Preuve A - preuve pragmatique avec quelques exemples numériques

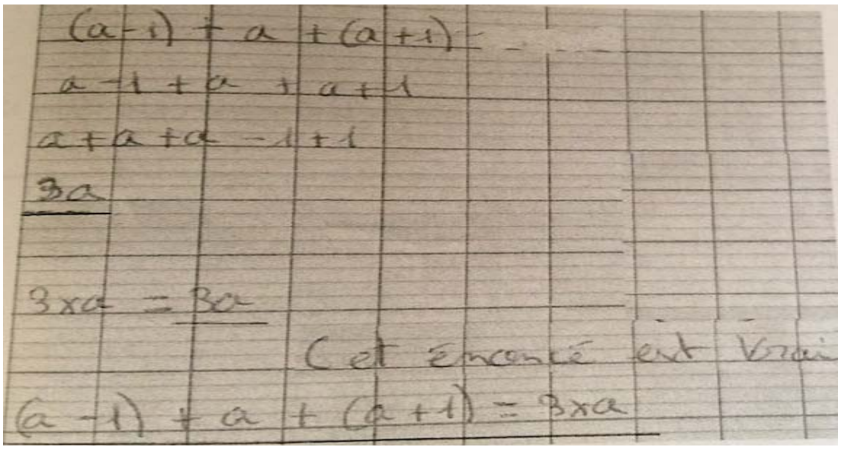

Pau 4 : 4+3+5 = 12
4×3 = 12
Pau 9 : 9+8+10 = 27
9×3 = 27
Pau 6 : 6+5+7 = 18
6×3 = 18
Cet énoncé est vrai

[3] Nous distinguons preuve et démonstration en suivant les travaux de Balacheff (1987).

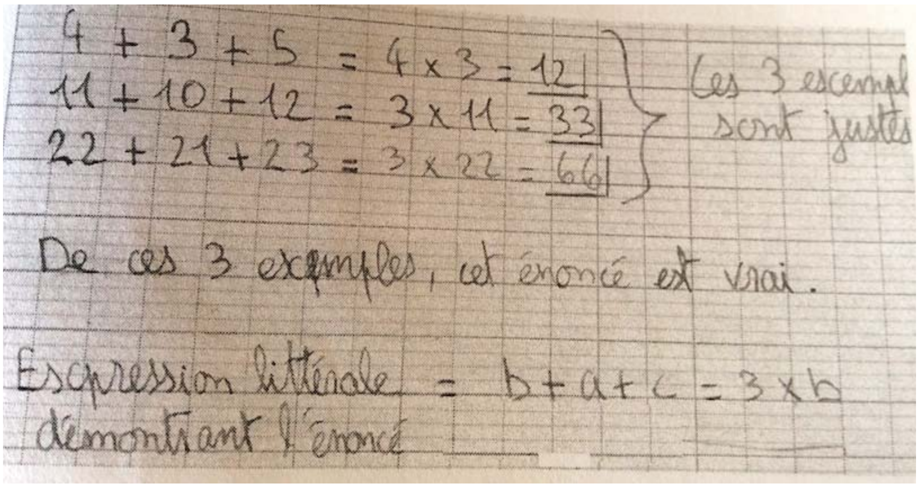
Preuve B - preuve discursive avec un exemple numérique



Preuve C - preuve algébrique



Preuve D - preuve « exemple générique » avec trois exemples numériques et une expression littérale



3.3 Analyse des productions : inventivité et hybridité sémiotiques

Dans les productions des élèves, plusieurs registres sémiotiques sont utilisés. Dans la preuve A, les élèves calculent les sommes à partir du « nombre du milieu » : pour 4, pour 9 et pour 6 en calculant la somme et en calculant le produit par 3. Ils concluent que l'énoncé est vrai. Dans ce cas, le registre numérique est le registre prédominant.

Dans la preuve B, deux registres sont utilisés : le langage naturel et le registre numérique, mais avec la prédominance d'un discours écrit. Les mots *successeur* et *prédécesseur* sont utilisés (même si les élèves se trompent) ce qui aurait pu être généralisable mais ensuite les élèves utilisent un exemple pour conclure que l'énoncé est vrai.

Dans la preuve C, le registre algébrique est prédominant. Dans ce cas, la lettre est utilisée pour désigner des objets (le nombre a), des relations (le prédécesseur $a - 1$ et le successeur $a + 1$, la somme de ces trois nombres génériques, multiple de 3). La lettre est un objet de calcul et des traitements des expressions (au sens de Duval) sont effectués pour arriver à des formes équivalentes qui permettent de démontrer le théorème.

La preuve D est tout à fait intéressante car elle montre un état intermédiaire entre une preuve par des exemples numériques et une démonstration. Deux registres sont utilisés, le registre numérique et le registre littéral. Les trois exemples numériques montrent, dans leur disposition spatiale, le rôle du « nombre du milieu ». Dans ces exemples, les élèves calculent et montrent que la somme des trois nombres consécutifs est un multiple du nombre du milieu. Cela est fait pour 4, 11 et 22, et ils concluent que l'énoncé est vrai. La suite de la preuve utilise les lettres pour généraliser. Dans ce cas, les premières lettres de l'alphabet a, b et c représentent les trois nombres consécutifs. Cela reste implicite car les relations mathématiques ne sont pas vraiment établies. Mais cela indique que l'élève n'a pas choisi ces lettres au hasard. La lettre b désigne le nombre du milieu, la lettre a le prédécesseur et la lettre c le successeur. La disposition spatiale reprend la disposition spatiale des exemples numériques. La conversion (au sens de Duval) du registre numérique dans le registre littéral conserve l'ordre : l'ordre des nombres consécutifs devient l'ordre alphabétique des lettres. La lettre n'est pas encore un objet de calcul mais elle montre déjà des relations.

Ce dernier exemple montre une certaine inventivité sémiotique par le groupe d'élèves qui utilisent les lettres dans l'ordre alphabétique pour indiquer des relations entre un nombre, son prédécesseur et son successeur. Cette inventivité peut être un élément important dans l'apprentissage du raisonnement, et peut être valorisée dans la classe. Certes, ce n'est pas encore une démonstration mais le processus de généralisation est déjà en marche, et l'usage d'une analogie est parlant.

Dans cet exemple, nous voyons que les représentations sémiotiques « intermédiaires » ont un rôle important. Elles sont « hybrides » car appartenant à des registres différents mais permettent de généraliser par analogie. La lettre représente un objet mais n'est pas encore un objet de calcul. En revanche, elle est aussi une lettre de l'alphabet, et l'ordre alphabétique est un élément pour montrer la relation de trois nombres consécutifs. Les lettres a, b et c utilisées sont des signes iconiques : le choix est non arbitraire et la relation de succession est motivée par l'ordre alphabétique.

Nous pouvons ainsi observer ce que les élèves savent déjà et pas seulement l'écart par rapport à l'attendu : la démonstration dans le registre algébrique. La réduction de l'épaisseur sémiotique dont parle Chevallard est ici à l'œuvre, mais l'analyse du processus de preuve montre que le système sémiotique employé est varié, recourt à plusieurs registres, et même à celui d'un domaine *a priori* extérieur aux mathématiques qui est celui des savoirs sur l'écriture alphabétique.

4 Prise de conscience de la place de la dimension sémiotique

L'exemple 4 est relatif au changement d'une enseignante par rapport aux situations proposées aux élèves d'une année à l'autre et à l'importance de la dimension sémiotique[4]. Dans le cadre d'un dispositif formation-recherche, nous avons travaillé avec quatre enseignantes spécialisées où des séances de formation alternaient avec des séances d'observation des classes et des séances d'analyse de ces séances de classe. Dans ce cadre, nous avons proposé à l'une des enseignantes d'analyser conjointement deux séances menées par elle et réalisées à trois ans d'intervalle sur le même type de tâche (dénombrer une collection d'objets) et le même support (usage d'une boîte métallique et de jetons). Cette enseignante intervenait dans une classe CLIS TFC (Troubles des Fonctions Cognitives). Nous allons rendre compte de ce que l'enseignante dit après visionnement de ces deux séances mais d'abord, nous présentons les éléments essentiels de comparaison entre ces deux séances sous la forme d'un tableau :

[4] Pour plus de détails, voir Assude, Tambone & Vérillon 2014.

La situation de la boîte (année n)	*La situation de la boîte (année n +3)*
Groupe de 4 élèves face au professeur Matériel : boîte et jetons Description : L'enseignante mettait un jeton à chaque fois en les dénombrant et les élèves devaient dire à la fin le nombre de jetons qui étaient dans la boîte. Ensuite l'un des élèves vérifiait en sortant les jetons et en les dénombrant.	Groupe de 3 élèves assis autour d'une table avec l'enseignante Matériel : Boîte, cubes rouges et bleus, bandes blanches pour que les élèves représentent les cubes, stylos de couleur rouge et bleue, bande numérique Description : L'enseignante mettait dans la boîte des cubes un à un. Les élèves avaient des bandes où ils dessinaient un rond pour chaque cube mis dans la boîte. D'abord l'enseignante mettait des cubes rouges et les élèves dessinaient des ronds rouges et écrivaient ce nombre sous les ronds, ensuite l'enseignante mettait des cubes bleus, les élèves dessinaient des ronds bleus et écrivaient le nombre de cubes bleus. Ensuite l'enseignante demandait le nombre de cubes rouges, le nombre de cubes bleus et le nombre total de cubes qui étaient dans la boîte. Les élèves avaient aussi une bande numérique personnelle où ils entouraient le nombre global de cubes.

Dans séance *n*, les élèves écoutaient les sons et dénombraient au fur et à mesure. Le registre convoqué est essentiellement le registre auditif. Lorsque les élèves avaient un moment d'inattention, ils n'avaient plus de moyen pour rattraper le dénombrement. Dans le cas de la séance *n*+3, les registres convoqués sont l'auditif, le gestuel et le scriptural. La correspondance entre un son et un dessin permet aux élèves de garder trace même si certains se sont trompés.

L'enseignante a pris conscience de la différence essentielle entre la séance *n* et la séance *n*+3 trois ans après. Elle nous dit: « *Là je me rends compte que la phase que j'ai faite avec les nouveaux élèves de dessiner me paraît importante là je ne l'ai pas faite avec ces élèves j'ai passé directement, dessiner les jetons de deux couleurs différentes c'est quand même important.* » Et un peu plus loin : « *Ce qui a changé par rapport à cette situation c'est le passage à la symbolisation, oui quand ils tracent* ». L'enseignante a identifié un savoir professionnel acquis pendant notre dispositif de formation-recherche dans le fait de proposer des situations qui permettent aux élèves de passer à la symbolisation puisque cela est essentiel pour les élèves mais aussi en tant qu'outil d'observation du travail de l'élève (la double valence des ostensifs).

Dans ce cas, le milieu matériel constitué par la boîte, les cubes, les sons a évolué en un milieu hybride (le même matériel plus les dessins tracés et les nombres écrits en chiffres). Les signes-dessins tracés par les élèves sont des signes iconiques car proches des objets réels. Ce changement a permis de faire évoluer aussi les attentes par rapport aux objets de savoir. D'une part, de nouveaux enjeux de savoir (autres que le dénombrement) ont pu être proposés tels que les problèmes additifs (addition, soustraction, relation partie-tout). D'autre part des objets en train d'être acquis ou anciens (comme le dénombrement) ont pu être retravaillés à nouveau. Le changement de contrat didactique est devenu possible car le milieu hybride comporte non seulement les objets réels mais ces signes qui font mémoire et sur lesquels on peut revenir, soit pour retravailler, soit pour valider ce qu'on a fait.

IV - CONCLUSION : CE QUE LES EXEMPLES NOUS APPRENNENT

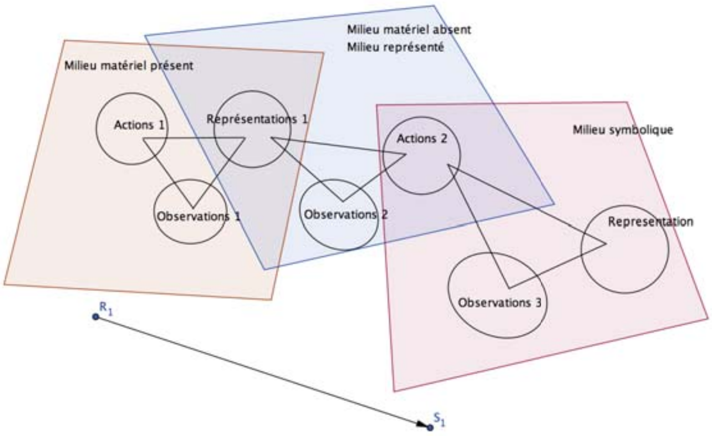
Notre point de départ a été le fait que le recours au concret et à la manipulation est vu comme une priorité et un leitmotiv dans la justification du choix des situations proposées aux élèves handicapés ou en difficulté, situations qui sont souvent le plus simplifiées possibles. Or la manipulation ne suffit pas pour faire des mathématiques et l'importance de la dimension sémiotique de l'activité mathématique a été maintes fois mise en évidence par divers chercheurs.

Le premier exemple montre que le retour à la manipulation mis en place par l'enseignante ne résout pas les difficultés des élèves qui n'ont pas de problème pour faire le partage en parts égales de la bande de carreaux ou de l'ensemble de jetons. L'écart est paradoxal entre la représentation de l'enseignante par rapport aux difficultés de conceptualisation des élèves sourds et la demande pressante de symbolisation « abrupte » sans consigne explicite dans ce sens. Le résultat de ce paradoxe est bien que les élèves se trouvent en difficulté, n'arrivent pas à entrer dans les attentes de l'enseignante et donnent des réponses induites par celle-ci. Le passage par un « moment iconique » et l'explicitation des attentes auraient pu être des facteurs importants pour que ces élèves puissent entrer dans le travail souhaité mais ceci serait à vérifier.

Le deuxième exemple nous a permis de mettre l'accent sur les malentendus sémiotiques entre enseignante et élèves. Tous racontent une histoire à propos de ce qui fait signe dans la notation « ½ » mais l'histoire n'est pas la même pour l'enseignante et les élèves. Pour ceux-ci, cette notation reste proche de l'action (une bande-unité partagée en deux parts égales) tandis que pour l'enseignante cette fraction code une relation « partie-tout ». Dans ce cas, le signe n'est pas le même étant donné que les interprétants sont différents par rapport au representamen « ½ ». Le malentendu sémiotique peut être pris comme un décalage entre interprétants du signe.

Le troisième exemple montre l'inventivité sémiotique des élèves face à un problème de preuve. Cette inventivité s'appuie dans notre cas sur l'hybridité des systèmes sémiotiques constitués par des éléments qui font signe dans des registres variés. Même si les attentes de l'enseignant correspondent à la preuve algébrique, et dans ce sens il y a une réduction de l'épaisseur sémiotique, les parcours sémiotiques des élèves doivent être pris en considération. Ces parcours sémiotiques, de formation, de traitement ou de conversion de représentations sémiotiques sont consubstantiels au travail mathématique de l'élève et se déroulent relativement aux objets, aux actions et aux observations des différents milieux auxquels les élèves sont confrontés. L'évolution de ces différents milieux – du milieu matériel à un milieu hybride ou un milieu symbolique – peut être une condition favorable pour aller vers la formalisation, la généralisation et la démonstration.

Un schéma de ces parcours pourrait être donné par :



Le travail mathématique de l'élève, comme le dit Chevallard, est constitué par une panoplie d'instruments sémiotiques qui lui permettent de mettre en œuvre des techniques (et plus généralement des praxéologies) pour accomplir différents types de tâches en lien avec différents milieux, ce qui constitue la situation mathématique pour l'élève. Ces milieux, et même le milieu matériel, portent en eux une sémioticité qui est virtuelle et va s'actualiser dans le travail. Qu'est-ce qui fait signe dans tel milieu pour tel élève ? Ce qui fait signe peut être donné non seulement par les actions sur le milieu mais aussi par les observations. Selon Peirce, le sens du signe est donné par la mise en relation de l'objet et du représentamen par l'interprétant dans des situations, à travers actions, observations et interprétations. Le rôle de l'action est essentiel dans le travail mathématique de l'élève, il a été maintes fois souligné dès les travaux de Piaget. Le rôle de l'observation aussi, mais nous voulons insister sur cet aspect. L'observation nous semble être un levier dans le travail de l'élève, et il ne s'agit pas seulement d'observations « naturalistes ». Il s'agit aussi de favoriser l'« apprendre à observer » comme moyen de valoriser la dimension sémiotique du travail mathématique : ce qui est propice à notation et concerne l'observation. C'est cela qui est indiqué dans notre schéma.

Les parcours sémiotiques commencent dès la manipulation matérielle, et les processus de signification sont des processus dynamiques où les signes sont en mouvement, comme l'indique Peirce qui ne distingue pas penser et signifier. Ces parcours sémiotiques évoluent et il incombe à l'enseignant de proposer d'autres milieux pour que la dialectique absence-présence puisse être un levier pour le travail mathématique de l'élève. Les objets matériels devenant absents, ce sont les représentamen-signes qui deviennent à leur tour des objets de l'activité mathématique. Les milieux « hybrides » deviennent alors les milieux pour l'action, pour l'observation, et pour ce qui peut advenir en tant que signe dans un processus d'interprétation.

Ces milieux « hybrides » peuvent ensuite devenir des milieux symboliques, des milieux condensant les processus interprétatifs antérieurs. Les recherches épistémologiques de Serfati (2005) sur le symbolisme mathématique montrent que l'avènement de l'écriture symbolique mathématique a été à l'origine d'une révolution dans les modes de pensée mathématique et dans la création de nouveaux objets mathématiques. Les difficultés du passage au symbolisme mathématique ne doivent pas être sous-estimées mais peuvent être prises en compte dans la conception des situations (voir un exemple pour les élèves en difficulté dans le travail de Giroux (2008)).

Dans nos exemples, et c'est pour ça que nous avons pris en compte cette dimension dans la sémiotique de Peirce, le mode de renvoi à l'objet apparaît comme très important, notamment lorsque les élèves doivent représenter les manipulations ou raconter les actions. La fonction du signe en tant qu'icône est importante par la ressemblance (en dépit des différences) entre objet et représentamen. Le moment « iconique » semble être un moment du processus interprétatif dans le cas du travail mathématique. Sans parler en ces termes, Serfati (2009) indique que : « *La reconnaissance visuelle d'une certaine permanence du symbolisme, comme immédiate, et libérée, dans un premier temps tout au moins, des nécessités de sens, est ainsi une conception épistémologiquement essentielle. Elle se range au registre de la synthèse, mais d'une synthèse particulière, synoptique.* » (p.1205) Telle notation mathématique peut raconter des histoires différentes pour tel élève, et des représentations intermédiaires (comme celle que nous avons vu dans l'exemple 3) peuvent être une étape dans le processus de symbolisation. Outre la dialectique entre présence/absence, une deuxième dialectique nous semble aussi à l'œuvre : celle entre connu/inconnu. Nos exemples ne nous permettent pas de montrer en acte cette dialectique mais les malentendus sémiotiques que nous avons observés peuvent bien être compris comme le difficile passage entre ce qui est observable et connu, et ce qui est inconnu ou n'est pas observable. Laisser advenir une certaine inventivité sémiotique peut être une étape importante pour l'élève si l'enseignant valorise ces « inventions » dans la classe, ce qui renvoie au rôle de l'enseignant et aux savoirs professionnels à ce propos.

Le quatrième exemple montre comment une enseignante a pris conscience de l'importance de la dimension sémiotique dans le travail mathématique de l'élève, même s'il est en difficulté. Cette enseignante est allée au-delà de la manipulation comme seule proposition et justification des situations proposées à l'élève, et des savoirs professionnels ont été construits. Ces savoirs, entre autres, sont relatifs au choix et à la gestion des situations à proposer aux élèves, des situations qui tiennent compte de la représentation, non seulement comme mémoire mais aussi comme moyen intrinsèque du travail mathématique de l'élève. Par ailleurs, ces milieux hybrides deviennent des lieux d'observation pour l'enseignant du travail de l'élève et de l'élève pour son propre travail et pour son évolution. La double valence des ostensifs apparaît donc pour l'élève et pour l'enseignant : ces signes permettent de faire mais aussi de voir ce que l'on fait.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARZARELLO F. (2006) Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking, 267–299.

ASSUDE T. & TAMBONE J. (2016). Épisodes biographiques d'une élève dyslexique relatifs à la résolution d'un problème mathématique. *Recherche en Education, 24*, 147-163.

ASSUDE T., TAMBONE J. & VERILLON A. (2014). Quels savoirs professionnels en mathématiques pour des enseignants de CLIS ? *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 65, 141-150.

BALACHEFF N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

BARTOLINI-BUSSI M. & MARIOTTI M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd edition) (pp. 746-783). New York: Routledge, Taylor and Francis.

CONFÉRENCE 1

BLOCH I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. Étude d'une progression sur la multiplication en SEGPA. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'ère nouvelle*, 41, 91-113.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19-1, 77-124.*

BROUSSEAU G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, XXX-2, 241-277.

BUISSON F. (1911). Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Paris : Hachette.

CHEVALLARD Y. (1994). Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Revue SKOLE*, 1, 51-81.

CONNE F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, et regarder ce que ça donne. In F. Conne & G. Lemoyne (éds.). *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 31-69). Montréal : Presses Universitaires de Montréal.

DOUAIRE J., ARGAUD H-C., DUSSUC M-P. & HUBERT C. (2003). Gestion des mises en commun par les maîtres débutants. In J. Colomb, J. Douaire, R. Noirfalise, *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse des pratiques enseignantes* (pp.53-69). Lyon : INRP.

DROUHARD J-P. (2007). *Epistémographie*. Projet de Note de Synthèse pour l'HDR (non publié).

DROUHARD J-P. (2012). *L'épistémographie. Mise au point d'un outil au service de la didactique*. Actes du Séminaire national de Didactique des Mathématiques, pp.129-133.

DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

DUVAL R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Bern : Peter Lang.

ERMEL (1997), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Paris : Hatier.

ERMEL (1999), *Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve au cycle 3*. Paris : INRP.

EVERAERT-DESMEDT N. (1990), *Le processus interprétatif. Introduction à la sémiotique de Ch.S. Peirce*. Liège : Mardaga.

GIROUX J. (2008). Conduites atypiques d'élèves du primaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 28 (1)*, 9-62.

HELAYEL J. & CAUSSE-MERGUI I. (2011). *100 idées pour aider les élèves « dyscalculiques » et tous ceux pour qui les maths sont une souffrance*. Paris : Editions Tom Pousse.

HERSANT M. (2008). « Problèmes pour chercher ». Des conduites de classe spécifiques. *Grand N*, 81, 57-75.

HERSANT M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3 : vers la preuve en mathématiques.* Habilitation à diriger des recherches, Nantes : Université de Nantes.

HORVAIS J. (2012) *Qu'apprend-on en IMPro ? Les apprentissages proposés aux adolescents déficients intellectuels dans les IMPro : quels choix, quelles pratiques, pour quoi faire ?* Thèse de l'université de Lyon 2, Lyon. http://fr.calameo.com/read/00094958849ac565104ba

NEVEU F. (2011). *Dictionnaire des sciences du langage* (2ème édition). Paris : Armand Colin.

OTTE M. (2005). *Mathematical epistemology from a peircean point of view*. Utrecht : PME.

PEIRCE C.S. (1978). *Écrits sur le signe*. Paris : Seuil.

PRESMEG N., RADFORD L., ROTH W. & KADUNZ G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Switzerland: Springer.

RADFORD L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132- 150.

RADFORD L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 405-422.

SERFATI M. (2005). *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris : Pétra.

VERGNAUD G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2, 133-170.

AGIR-PARLER-PENSER EN GÉOMÉTRIE UN POINT DE VUE SÉMIOTIQUE SUR L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMETRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Caroline BULF
Enseignante-chercheure, Université de Bordeaux
ESPE d'Aquitaine, Lab-E3D, EA7441
caroline.bulf@u-bordeaux.fr

Anne-Cécile MATHÉ
Enseignante-chercheure, Université Clermont Auvergne
ESPE Clermont-Auvergne, Laboratoire ACTé
a-cecile.mathe@uca.fr

Résumé
L'enseignement de la géométrie à l'école primaire s'appuie très largement sur un travail portant sur des dessins, qu'il s'agisse de les construire, de les reproduire ou de les décrire. Son objectif est de construire des savoirs portant sur des objets géométriques théoriques, leurs relations et propriétés. Un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie consiste donc, tout au long de l'école, à modifier le rapport des élèves aux dessins, d'objets matériels à représentations sémiotiques d'objets théoriques. Comment comprendre les leviers possibles de cette évolution ? Nous proposons d'explorer le rôle de l'articulation de registres de représentation sémiotique, graphique et langagier, dans l'apprentissage de la géométrie à l'école. Dans le prolongement de recherches menées en didactique de la géométrie ces dernières années (Duval, 2005; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2013; Perrin-Glorian & Godin, 2014; Perrin-Glorian, Mathé, & Leclercq, 2013), nous envisageons d'abord la manière dont il est possible de faire évoluer le regard des élèves sur les dessins, via des contraintes portées sur leurs traitements instrumentés en situation de reproduction de figures. Posant ensuite la question des interactions entre *agir*, *parler* et *penser* (Bernié, 2002), nous nous intéressons au rôle et à la place du langage dans la construction de connaissances et l'émergence de savoirs géométriques (Barrier & Mathé, 2014 ; Barrera Curin, Bulf & Venant 2016; Bulf, Mathé & Mithalal 2014). Nous complétons alors nos analyses de moments de classe et esquissons des pistes pour un travail dans et sur le langage, en appui sur des situations d'action, en géométrie à l'école.

Pourquoi (encore[1]) s'intéresser à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie plane à l'école, dans ce colloque dédié à la formation des enseignants ? Que peut apporter une approche sémiotique à la clarification des enjeux possibles de cet enseignement à l'école ? Quels outils peut-on en dégager pour l'enseignement et la formation ?

S'intéressant à la question de la formation des enseignants, Houdement et Kuzniak pointaient, à la fin des années 90, que « la géométrie concentrait (…) plusieurs handicaps : un déficit de connaissances chez les étudiants, peu de travaux en didactique, auxquelles s'ajoutait un désamour, non seulement des étudiants, mais aussi des enseignants de l'école primaire que ce domaine n'inspirait guère. » (Houdement, 2013, p.28). Aujourd'hui encore, force est de constater que l'enseignement de la géométrie à l'école reste un domaine souvent mal-aimé voire peu investi des enseignants du premier degré. Notre métier de

[1] XL^{e} Colloque de la Copirelem à Nantes (2013)

formatrices en ESPE[2] et nos échanges réguliers avec des professeurs des écoles, nous laissent à penser que ceux-ci éprouvent majoritairement des difficultés à en cibler les enjeux, rabattant alors souvent les objectifs d'apprentissage à l'acquisition de vocabulaire permettant de désigner des objets supposés déjà là ou à des exigences de motricité fine concernant l'usage d'instruments et la précision de tracés. Cette difficulté de la profession peut sans nul doute trouver ses origines dans plusieurs facteurs. Les recherches en didactique de la géométrie ont avancé depuis les années 90, notamment sous l'impulsion des travaux développés par le groupe dit « de Lille »[3] ces quinze dernières années (Duval, 2005; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2013; Perrin-Glorian & Godin, 2014; Perrin-Glorian, Mathé, & Leclercq, 2013). Nous ne pouvons toutefois que constater l'encore faible imprégnation de la formation initiale et continue des enseignants de résultats de recherches en didactique de la géométrie récents, et il nous faut reconnaître le temps, long, nécessaire à la transformation de résultats de recherche en outils opératoires pour les enseignants. Enfin, les ressources à disposition des enseignants nous semblent encore avoir du mal à constituer des outils qui puissent leur permettre d'enrichir les pratiques en géométrie (Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014 ; Bulf & Celi, 2015). S'efforcer de montrer dans quelle mesure des recherches récentes en didactique de la géométrie peuvent contribuer à la clarification d'enjeux possibles de l'enseignement de la géométrie plane à l'école et faire de résultats de recherches des outils pour les enseignants du premier degré et leur formation nous semblent donc constituer un chalenge d'actualité. Nous espérons, dans ce texte comme dans l'exposé auquel il fait suite, contribuer à notre modeste mesure à cette entreprise. Plus précisément, nous avons souhaité montrer qu'une approche sémiotique pouvait éclairer des questions de finalités et moyens d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie plane, pensés dans une continuité de la maternelle à la fin de l'école primaire.

Dans cette perspective, nous proposerons de revisiter les travaux du groupe de Lille en replaçant ses fondements théoriques dans le cadre d'une problématique sémiotique, en lien avec les travaux de Duval (1995, 2005) qui ont largement nourri les travaux du groupe. Nous mettrons en rapport le travail mené autour de la recherche d'une situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessin (les situations de reproduction de figures) et la réflexion autour des liens entre interprétation et traitement graphique des dessins sur laquelle il repose. Nous illustrerons la manière dont ces travaux ont permis la déclinaison de situations d'action visant l'émergence d'objets et de propriétés géométriques divers, à travers l'exemple d'un travail mené autour du disque, le cercle et de leurs caractérisations, de la maternelle au cycle 3 (Bulf & Celi, 2016).
Nous proposerons ensuite un prolongement de cette approche en abordant la question de l'articulation entre registres sémiotiques graphique et langagier dans la construction de connaissances-savoirs géométriques à l'école. Comment mieux comprendre le rôle du langage, oral ou écrit, dans les processus d'apprentissage autour de situations d'action en géométrie ? Nous proposerons d'aborder cette question, large, en suivant deux pistes de réflexion.

Nous nous intéresserons d'abord au rôle du langage dans les processus d'évolution du rapport des élèves aux dessins lors de leurs confrontations à des situations d'action telles que celles évoquées précédemment. Nous illustrerons, à travers un exemple de moment de classe, la manière dont les moteurs de l'évolution des manières de voir le dessin des élèves résident alors à la fois dans l'évolution de leur manière d'agir et de leurs manières de parler.

Nous interrogerons ensuite les manières dont il est possible d'accompagner les élèves de la mobilisation de connaissances pour l'action (reproduire, construire un dessin) à l'identification des connaissances géométriques mises en jeu. Comment accompagner la transformation des connaissances, personnelles et contextualisées, en savoirs géométriques ? Nous présenterons alors quelques pistes explorées de manière

---

[2] École Supérieure du Professorat et de l'Éducation

[3] Nous appellerons groupe de Lille un groupe de recherche du Nord de la France, actif de 2000 à 2010, auxquels ont participé M.-J.Perrin-Glorian, R.Duval, M.Godin, J-R. Delplace, O.Verbaere, B.Keskessa, C.Mangiante, T.Barrier, R.Leclercq, A.-C.Mathé. Le travail continue depuis 2010 sous des formes diverses.

plus récentes, autour de l'élaboration de situations de formulation et de validation en appui sur les situations de reproduction de figures. Nous évoquerons les spécificités, les potentialités de l'enchâssement de ces types d'activité mais aussi la grande variété des situations possibles.

I - D'UNE GEOMETRIE PHYSIQUE A UNE GEOMETRIE THEORIQUE : UNE MODIFICATION PROFONDE DU RAPPORT AUX DESSINS

Nous devons tout d'abord situer nos propos. Le thème de la géométrie (appelé « Espace et géométrie » dans les programmes de 2015 recouvre un domaine large, relevant de champs de connaissances divers. Parmi les attendus de l'école, nous pouvons ainsi distinguer (Berthelot et Salin, 1993) :

- des connaissances dites spatiales permettant de se repérer dans l'espace, de représenter des espaces ou des déplacements dans ces espaces, de maîtriser ses rapports avec l'espace sensible.
- des connaissances géométriques portant, elles, sur des objets théoriques, idéaux[4] tels que des solides, des figures planes, le segment, la droite, le point sur des propriétés de ces objets ou des relations entre ces objets (alignement, angle droit, perpendicularité…)

L'on sait depuis les travaux fondateurs de Berthelot et Salin (op.cité) l'importance d'un travail sur les connaissances spatiales à l'école et de leur articulation avec les connaissances géométriques, permettant de faire de ces connaissances un outil pour résoudre des problèmes pratiques. Nous ne négligeons pas cet aspect de l'enseignement de la géométrie à l'école. Toutefois, nous nous centrons ici sur la finalité théorique de cet enseignement à l'école, c'est-à-dire en ce qu'il vise la construction des connaissances et savoirs géométriques portant sur les objets idéaux de la géométrie. Nous nous restreignons même dans ce texte à une partie de cette finalité : celle portant sur la construction de connaissances sur des objets du plan (la géométrie plane). C'est donc à un aspect complémentaire de l'enseignement de la géométrie auquel nous nous intéressons ici, et dans nos travaux de manière plus générale. Nous partons d'une modalité de travail sans doute plus courante dans les pratiques et envisageons le travail en géométrie à partir de problèmes, divers, portant sur des formes ou des dessins, déjà là. Ces objets matériels ne sont bien sûr pas des objets du monde qui nous entoure, mais les élèves comme l'enseignant n'interrogent pas nécessairement leurs liens avec des objets de l'espace sensible et la nature de la modélisation dont ils sont issus. Ces formes, ces dessins, sont des objets donnés aux élèves, sur lesquels on leur propose de travailler, et qui sont acceptés comme des objets culturellement partagés.

Dans ce cadre, notre objectif consiste à mieux comprendre les enjeux et difficultés d'un enseignement de connaissances et savoirs géométriques, portant sur des objets théoriques, en appui sur des objets matériels tels que les formes et les dessins. Ce sont donc bien des questions d'ordre sémiotique que nous posons : Comment permettre à des élèves de voir dans ces objets matériels des représentants d'objets géométriques, idéaux ? Comment accompagner les élèves dans la construction de connaissances sur ces objets théoriques via un travail essentiellement placé dans le registre graphique des formes et des dessins ?

1 L'enseignement de la géométrie : le rôle central des dessins

Reprenant la célèbre distinction entre dessin et figure proposée par Arsac (1989), Parsysz (1989), Laborde et Capponi (1994) ou encore Chaachoua (1997), nous appelons dessin un objet matériel que l'on peut regarder, analyser à l'aide d'instruments, reproduire, construire… Ces dessins peuvent être des tracés sur une feuille de papier ou sur un écran d'ordinateur. Nous incluons aussi dans cette catégorie les formes géométriques, en bois ou en plastique, qui constituent des objets de travail courants au début de l'école.

[4] Nous parlons d'objets idéaux car ces objets n'ont pas d'existence dans le monde sensible qui nous entoure : les figures planes sont des objets du plan, sans épaisseur, les segments et droites sont des objets de dimension 1 (ligne sans épaisseur), la droite est un objet infini, etc.

Nous distinguons cet objet matériel que constitue le dessin de la figure, objet mathématique, théorique, dont le dessin est une représentation.

Pour les élèves, le dessin peut ou non représenter une figure. Dans l'activité géométrique des élèves, le dessin peut en effet avoir différents statuts, en lien avec la nature du travail engagé sur ce dessin et le mode de validation opéré (adapté de Chaachoua, 1997, p.19). Objet matériel étudié pour lui-même et lieu d'une expérimentation directe au début de l'école, le dessin est ensuite vu comme représentation sémiotique d'autres objets matériels, visés par la géométrie. Le travail est alors perçu comme un travail expérimental sur une classe d'objets, dont le dessin est un exemple générique. A la fin de l'école et surtout au collège, le dessin doit enfin être considéré comme représentation sémiotique, dans le registre graphique, d'objets théoriques de la géométrie. Le travail géométrique s'opère alors hors de l'expérimentation, dans le registre langagier, et vise la construction de preuves intellectuelles.

Ainsi donc, le dessin occupe une place centrale dans la géométrie de l'école comme du collège et l'un des enjeux majeurs de l'enseignement de la géométrie va consister, de la maternelle au collège, à accompagner les élèves vers un rapport *géométrique* à ces dessins. Mais que signifie exactement construire un rapport *géométrique* aux dessins ? Quelles conditions président la capacité à interpréter les dessins comme représentants sémiotiques d'objets, de propriétés et de relations géométriques ?

Tout d'abord, tout le monde pourra s'accorder sur le fait que *la* géométrie n'est pas épistémologiquement *une* mais est polymorphe et poser la question d'un rapport *géométrique* hors contexte n'a pas de sens. Nous proposons ainsi de nous donner pour point de mire de la géométrie plane de l'école l'entrée dans la géométrie déductive du collège. Ce que nous entendons par *rapport géométrique aux dessins* désigne donc un rapport aux dessins idoine à l'entrée dans la géométrie déductive du cycle 4. La question que nous posons est alors celle de la caractérisation de ce *rapport géométrique aux dessins* et de la nature de la modification du rapport aux dessins, enjeu de l'enseignement de la géométrie plane à l'école. À quoi doit-on préparer les élèves de l'école ?

Duval (1995) propose deux niveaux d'appréhension des dessins :

- la perception (que nous désignerons dans la suite par « la manière de voir » les dessins),
- les modalités et règles de traitements et de modifications (« les manières d'agir » sur ces dessins)

Dans la suite de ce texte, nous explorons successivement les questions suivantes. Que doit-on être capable de « voir » dans un dessin pour entrer dans la géométrie déductive au collège ? Que doit-on savoir faire sur un dessin pour pouvoir faire des démonstrations ?

2 La géométrie : une manière spécifique de voir les dessins

L'étude des interprétations possibles d'un dessin, en fonction de la manière de voir ce dessin mobilisée, et de la spécificité d'un regard géométrique sur les dessins est au cœur des travaux du groupe de Lille. Celle-ci a déjà fait l'objet de nombreuses publications (par exemple Duval & Godin, 2005, Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2013; Perrin-Glorian & Godin, 2014; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013). Nous devons toutefois revenir dans ce texte, de manière synthétique, sur cette étude car elle fonde notre travail. En appui sur les travaux de Duval (1995), notre propos vise en particulier ici à mettre en évidence les fondements sémiotiques de cette étude.

De manière générale, la perception d'un dessin est guidée par l'identification et la prise en compte de différents éléments constitutifs de ce dessin. Cette analyse est susceptible de variations visuelles, de deux types : des variations liées à la dimension des objets considérés (des surfaces - de dimension 2, des lignes - de dimension 1 ou des points – de dimension 0) ; ou des variations qualitatives : la nature des formes considérées ou bien encore des questions de taille, d'orientation, de couleur, etc. Ces distinctions permettent de définir des éléments constitutifs d'un dessin. Celui-ci est vu comme une combinaison de valeurs pour chacune de ces variations, à partir desquelles on détermine des unités figurales élémentaires (Duval, 1995). Il existe donc une pluralité de manières possibles de voir les dessins. Et à la différence d'autres registres de représentation d'objets mathématiques (numération, arithmétique…), un dessin a une interprétation perceptive immédiate et quasi-automatique, mais celle-ci diverge de l'interprétation géométrique de ce dessin.

Prenons l'exemple des trois dessins de la figure 1. Hors de la géométrie, chez de jeunes élèves, la perception spontanée des dessins est guidée par la discrimination de formes ou surfaces (Duval & Godin, 2005). Un dessin, simple ou complexe, est d'abord interprété comme une surface ou un assemblage de surfaces juxtaposées (autant de formes que de contours fermés), comme illustré en figure 2. La prise en compte des couleurs, de l'orientation, de la taille joue un rôle important dans cette lecture spontanée des dessins. Ce sont sur ces valeurs sur lesquelles l'on s'appuie pour établir des liens de ressemblance, ou des relations d'ordre entre dessins.

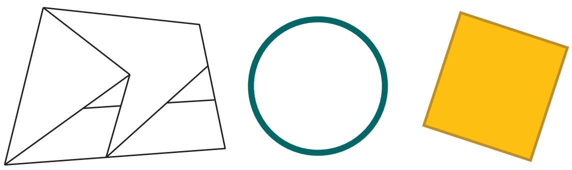


Figure 1

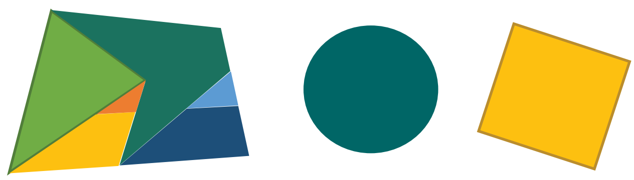


Figure 2

L'interprétation géométrique des dessins s'appuie quant à elle sur une manière de voir ces dessins bien différente. Nous illustrons en figure 3 ce que pourrait être une manière géométrique de voir ces trois dessins à la fin de l'école ou au début du collège.

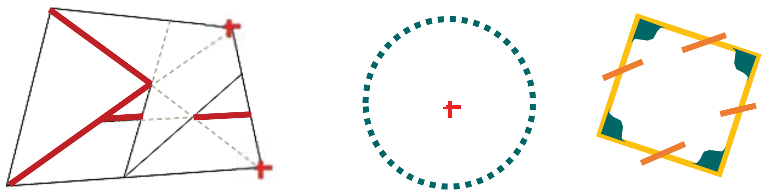


Figure 3

Il y a moins de variables visuelles pertinentes pour une interprétation géométrique des dessins, et les règles de prise en compte de ces variables ne sont pas homogènes. De manière générale, les couleurs ou orientations ne sont plus pertinentes car elles ne sont pas susceptibles d'accéder à des caractérisations géométriques des figures, ni de représenter des relations géométriques. Ces variables peuvent toutefois être utilisées pour faciliter la lecture géométrique d'un dessin, comme nous le faisons en figure 3. Le critère de la taille est lui plus complexe, il n'est en général pas à prendre en compte, sauf lorsque l'on s'intéresse à des relations entre des longueurs (par exemple pour caractériser les carrés parmi les rectangles).

La caractérisation des objets géométriques, celles de la fin de l'école et au début du collège tout au moins, s'appuie sur une prise en compte de propriétés portant sur des bords de surfaces (égalités de longueurs de côtés), des coins (angles droits), voire des lignes et des points (cercle comme une ligne, puis comme ensemble de points, à équidistance d'un centre par exemple). Les propriétés et relations géométriques ne portent pas sur des surfaces mais sur des objets de dimension 1 – des segments (égalités de longueurs) ou des droites (perpendicularité, parallélisme…) – ou de dimension 0 – des points (alignement, appartenance, équidistances…). Ainsi, porter un regard géométrique sur les dessins et identifier les objets et relations géométriques qu'ils représentent signifient être capable d'enrichir considérablement la manière de voir les dessins. Une analyse géométrique d'un dessin nécessite une capacité à un jeu complexe entre des unités figurales de dimensions 2, 1 et 0, appelé *déconstruction et recomposition dimensionnelles*. Notons que sur les dessins d'origine (figure 1), aucune variable visuelle ne peut représenter directement une propriété géométrique. Nous avons parfois besoin d'un codage pour rendre visible l'articulation entre manière de voir le dessin et définition dans registre langagier, comme nous le voyons dans la figure 3.

Interpréter les dessins comme représentations graphiques d'objets et de relations géométriques nécessite ainsi une modification profonde du rapport perceptif au dessin. Ceci constitue pour nous un des enjeux fondamentaux de l'enseignement de la géométrie à l'école.

3 La géométrie : des modalités de traitement des dessins spécifiques

Poursuivons notre effort de clarification de la teneur de la modification du rapport aux dessins que l'on peut viser tout au long de l'école, dans le but d'accompagner les élèves vers la géométrie de la fin de l'école et du début du collège. Intéressons-nous maintenant à la question des modalités de traitements des dessins. Que doit-on savoir faire sur un dessin en géométrie (du cycle 4) ? Quelles modalités de traitement et quelles modifications, internes au registre graphique, doit-on être capable d'effectuer sur un dessin pour mener à bien des démonstrations ?

Nous nous appuierons dans ce paragraphe sur un exemple de problème, que nous empruntons à Balacheff & Soury-Lavergne (1996, p.5), Mathé & Mithalal (à paraître). L'énoncé du problème est le suivant.

> *ABC est un triangle, P un point du plan qui n'est pas un sommet du triangle.*
> *P1 le symétrique de P par rapport à A;*
> *P2 le symétrique de P1 par rapport à B;*
> *P3 le symétrique de P2 par rapport à C;*
> *I le milieu de [PP3].*
> *Que dire du point I ?*[5]

Nous conviendrons dans un premier temps qu'explorer ce problème rend bien sûr nécessaire de faire un dessin, qui permette, comme évoqué précédemment, d'illustrer cet énoncé et de représenter, dans le registre graphique, la figure définie. Ce dessin pourra alors constituer un lieu d'expérimentation, de formulation de conjectures.

Toutefois, représenter les objets et propriétés géométriques de la figure dans un dessin n'est pas tout à fait suffisant… Construisons un triangle ABC, plaçons un point P tel que décrit, et construisons les points P1, P2, P3 puis le point I.

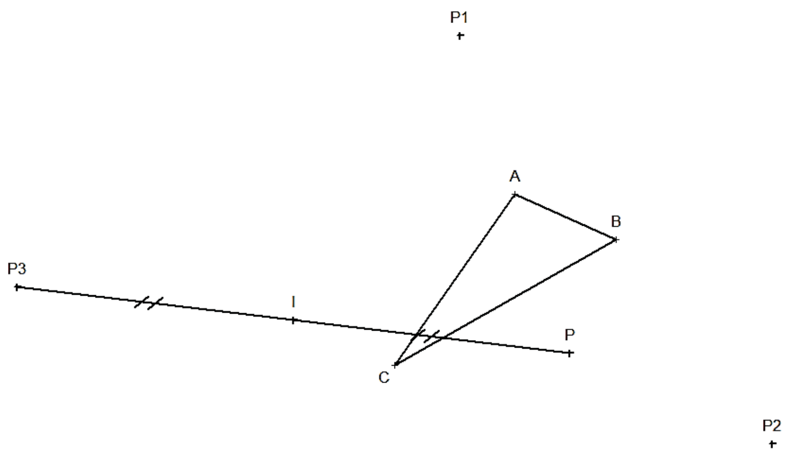


Figure 4

[5] La question est volontairement ouverte, cette formulation est bien sûr discutable si l'on considère le problème posé tel quel à des élèves de collège.

Cette représentation permet-elle de formuler une conjecture sur ce que peut représenter le point I par rapport aux points déjà construits ? Pas vraiment…

Explorer le dessin afin de parvenir à formuler une conjecture va nécessiter un traitement géométrique du dessin, c'est-à-dire d'agir sur le dessin pour faire apparaître des configurations qui nous permettent de raisonner.

L'on pourra par exemple tracer le quadrilatère ABCI et envisager l'idée que ce quadrilatère pourrait être un parallélogramme. Si l'on cherche maintenant à démontrer cette conjecture, on pourra être amené à tracer les deux triangles PP_1P_3 puis $P_1P_2P_3$. Ceci nous permettra de reconnaître des configurations dans lesquelles nous pouvons appliquer le théorème de la droite des milieux et démontrer que ABCI a deux côtés parallèles et de même longueur.

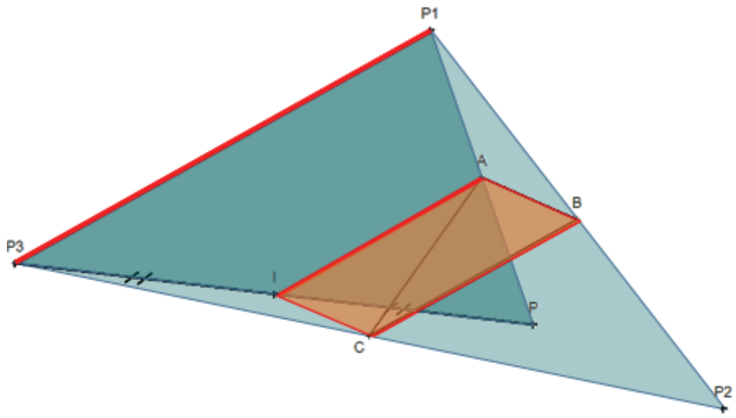


Figure 5

Nous le voyons à travers ce rapide exemple, l'activité de démonstration telle que visée au collège nécessite la capacité non seulement à opérer à un jeu complexe du regard porté sur les dessins, en termes de déconstruction et recomposition dimensionnelles, mais aussi à transformer le dessin par des règles propres à la géométrie. Les opérations de traitement du dessin, internes au registre sémiotique graphique et nécessaires à l'activité de démonstration, sont alors de différents types. Nous retiendrons en particulier ici que les élèves doivent être capables de rendre visible de l'implicite : faire apparaître des sous-dessins (et des « sur-dessins ») et unités figurales de différentes dimensions (segments, points, droites, surfaces) qui permettent de raisonner.

4 Premier bilan : des enjeux de l'enseignement de la géométrie plane à l'école

Dans cette première partie, nous interrogions les conditions, cognitives, présidant une entrée dans une géométrie théorique, portant sur des objets, propriétés, relations géométriques idéaux, en appui sur un travail portant sur des objets matériels tels que les formes, les dessins. Nous avons alors mis en évidence qu'entrer dans la géométrie de la fin de l'école et du collège nécessite d'apprendre à voir et à traiter les dessins de manière spécifique. Or dans quelle mesure prépare-t-on les élèves de l'école à la géométrie du collège ? Quand et comment apprend-on aux élèves de l'école à voir et à traiter géométriquement un dessin ? Construire un rapport géométrique aux dessins, c'est-à-dire apprendre à analyser, interpréter, traiter géométriquement des dessins, constitue pour nous un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie à l'école.

Dans une perspective de formation, ces éléments de réflexion nous semblent susceptibles d'aider les enseignants du premier degré à clarifier des enjeux de l'enseignement de la géométrie plane à l'école. Ils constituent également des outils leur permettant d'interpréter les programmes et de penser des progressions cohérentes en géométrie plane, à l'échelle de l'école, d'un cycle ou d'un niveau. Enfin, faire de ces enjeux généraux des objectifs d'enseignement permet d'engager un travail autour de la question des situations d'apprentissage. Quelles sont les situations susceptibles de favoriser un enrichissement du regard des élèves sur les dessins et de leur apprendre à construire un rapport géométrique aux dessins ?

Nous présenterons, dans la suite de ce texte, différentes pistes didactiques explorées au sein du groupe de Lille mais aussi dans d'autres travaux s'inscrivant dans leur prolongement.

II - PREMIERE PISTE DIDACTIQUE : INTERACTIONS ENTRE MANIERES DE VOIR ET MANIERES D'AGIR

1 Les situations de reproduction de figures comme situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessins et l'importance des instruments

Le groupe de Lille et un certain nombre de recherches prolongeant ses travaux (Barrier, Hache & Mathé, 2014 ; Bulf & Celi, 2015, 2016) se sont donnés pour objectifs l'élaboration et l'analyse de situations visant à accompagner les élèves dans une évolution de leur rapport aux dessins. Ce travail peut aujourd'hui être interprété comme la recherche d'une situation fondamentale (au sens de Brousseau, 1998) de l'analyse géométrique de dessins. L'enjeu consistait ainsi à déterminer une famille de situations qui, par la nature du problème posé et les contraintes portées sur ce problème, pouvait amener les élèves à enrichir leur regard sur les dessins, vers la construction d'un rapport géométrique à ces dessins (au sens développé ci-dessus). L'intérêt de ces recherches s'est alors porté sur les situations de reproduction de figures, en prêtant une attention particulière au rôle des instruments mobilisés dans ce type d'activité.

Que signifie reproduire une figure ? Le problème générique consiste à réaliser une copie d'un dessin modèle donné (forme ou dessin, simple ou assemblage). Cette copie peut être à la même échelle que le dessin donné ou non. La reproduction du dessin peut se faire à partir d'une amorce (partie du dessin modèle) ou non, d'échelle ou d'orientation différentes ou non. Enfin, cette reproduction s'effectue à l'aide d'instruments imposés ou non. Ceux-ci peuvent être variés : gabarits, pochoirs, papier calque, règle, équerre … Un système de coûts sur l'usage des instruments peut même être envisagé, afin d'amener les élèves à mobiliser certains instruments plutôt que d'autres. Le problème générique de reproduction de figures donne ainsi lieu à une très grande variabilité de situations didactiques, selon la nature du dessin à reproduire, l'amorce éventuelle et, surtout, du type instruments mis en jeu. Soulignons que le dessin pouvant être reproduit à une échelle différente, dans une orientation différente, ce sont bien les caractéristiques géométriques du dessin que l'on cherche à reproduire, soit la *figure* géométrique qu'il représente. Nous parlons donc de reproduction de *figures*.

Attardons-nous un bref instant sur la question des instruments, variable didactique-clé de ces situations de reproduction. Par instruments, nous entendons les instruments de géométrie « classiques » (le crayon, la règle, la règle graduée, l'équerre, le compas…) mais aussi des gabarits (formes en carton, en plastique), des pochoirs, de la peinture… L'idée sous-tendant ce travail d'élaboration de situations est qu'il existe un lien étroit entre les instruments utilisés pour analyser et reproduire une figure et la manière de voir le dessin (les unités figurales identifiées, leurs propriétés et les relations perçues). Parmi ces instruments, nous pouvons en effet identifier des instruments mobilisant des informations sur des surfaces : les gabarits utilisés comme des pièces de puzzles, les pochoirs dont on colorie ou peint l'intérieur, l'équerre utilisée comme gabarit d'angles droits (vus comme coins). Nous les appelons instruments 2D. Nous pouvons également identifier des instruments permettant de tracer des lignes et mobilisant donc une déconstruction des dessins en termes de bords de surfaces (1D/2D), de segments, voire de droites des dessins. Il en est par exemple ainsi lorsque l'on utilise des gabarits ou des pochoirs pour tracer le contour de formes, lorsque l'on trace un dessin à la règle, un cercle au compas par exemple. Nous les appelons instruments 1D.

Penser ainsi le lien entre le traitement instrumenté et l'interprétation d'un dessin, en termes de surfaces, de lignes et/ou de points permet d'envisager des progressions, de la maternelle au cycle 3, visant à apprendre aux élèves à construire progressivement leur rapport à ces dessins, c'est-à-dire à leur apprendre à voir/analyser et traiter géométriquement ces dessins.

La présentation et l'analyse de progressions autour de telles situations a fait l'objet de nombreuses publications (Keskessa, Perrin-Glorian & Delplace, 2007; Offre, Perrin-Glorian & Verbaere, 2007; Perrin, Mathé, Leclercq, 2013 ; Mangiante & Perrin-Glorian, 2014 ; Perrin-Glorian & Godin, 2014). Nombre de situations proposées dans ces textes porte sur la reproduction de figures complexes et se donnent pour objectif d'apprendre aux élèves à

- passer d'une vision en termes surfaces à un jeu entre visions en termes de surfaces, de lignes (segments et droites) et de points ;
- identifier et utiliser pour résoudre le problème de reproduction des relations d'alignement (de segments, de segment et de points, de points) et d'appartenance (d'un segment à une droite, de point à une droite…).

En prenant appui sur une analyse spontanée de dessins complexes puis, par des contraintes portées sur les instruments, en amenant les élèves à enrichir leur analyse des dessins, ces situations visent ainsi l'émergence des objets géométriques élémentaires (le segment, la droite et le point) et la mobilisation de relations d'alignement et d'appartenance entre ces objets.

D'autres travaux ont également porté sur l'élaboration, l'expérimentation et l'analyse de progressions et de situations sur d'autres thèmes de la géométrie plane, au programme de l'école. Parmi ceux qui ont fait l'objet d'une publication, nous pouvons par exemple citer – de manière non exhaustive - les travaux autour du passage de la notion d'angle droit à celle de droites perpendiculaires (Barrier, Hache & Mathé, 2014), autour de la symétrie axiale (Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013).

Nous ne souhaitons pas reprendre ici la présentation et l'analyse de situations déjà présentées à maintes reprises dans les textes cités ci-dessus. Nous choisissons dans ce texte d'illustrer la nature de ce travail autour de situations visant à modifier l'interprétation des élèves des dessins vers une analyse géométrique de ceux-ci, via la présentation d'une situation de reproduction dont nous avons étudié un certain nombre de variations dans le cadre d'une progression visant l'enseignement et l'apprentissage du cercle du cycle 1 au cycle 3 (Bulf & Celi, 2016).

2 Exemple de variations autour d'une situation de reproduction de dessin, du disque au cercle

Un examen approfondi des problèmes de reproduction de figures planes dans les manuels français sur ces trente dernières années (Bulf & Celi, 2015) nous avait permis de relever un nombre important d'énoncés sur le cercle et le compas. Pour autant, nous avions mis en évidence le peu d'articulation entre différents usages du compas (traceur de ligne, reporteur d'une longueur de segment ou d'une distance entre deux points) et le fait que les différentes conceptions possibles du cercle (Artigue et Robinet, 1982) n'étaient que peu ou pas convoquées. Ce bilan nous a alors amenées à proposer des variations autour de situations de reproduction de figures visant à faire évoluer le regard géométrique des élèves sur l'objet cercle et à articuler différentes conceptions de ce dernier.

2.1 Principes adoptés et éléments d'analyse a priori

Dans le prolongement des travaux évoqués précédemment, notre travail est guidé par plusieurs « principes » relevant de travaux antérieurs en didactique des mathématiques : les travaux sur les conceptions du cercle d'Artigue et Robinet (1982), les travaux de Duval sur la visualisation (2005) et les travaux du groupe de Lille.

Les différentes façons de voir le cercle

Les travaux précurseurs d'Artigue et Robinet (1982) ont mis au jour différentes conceptions du cercle que nous avons reprises et adaptées dans le cadre de notre progression qui concerne l'école primaire (cycle 1 au cycle 3). Nous retiendrons pour notre travail que le cercle peut être vu comme :

- une forme arrondie dont on reconnaît l'allure générale (vision iconique)

- le contour d'un disque

- une surface délimitée par une ligne de courbure constante
- une ligne de courbure constante
- une ligne située à une distance constante (le rayon) d'un point donné (le centre)
- un ensemble de points situés à une distance donnée (le rayon) d'un point donné (le centre)
- une ligne ayant une infinité d'axes de symétrie
- une figure invariante par rotation

…

Ces différentes conceptions du cercle mobilisent des unités figurales (au sens de Duval) de dimensions différentes (surfaces 2D, contours de surface 1D/2D[6], lignes 1D, points 0D) pouvant être mises en relation de façon différente (par exemple : ligne de courbure constante *vs* ligne à égale distance d'un point donné). Cette caractérisation des conceptions du cercle en fonction des unités figurales considérées est cruciale pour la construction de la cohérence de notre progression. En effet, conformément aux apports des travaux du groupe de Lille, celle-ci vise à faire évoluer le regard des élèves sur l'objet disque ou cercle d'une vision en terme de surface à une vision entre terme de ligne vue comme contour d'une surface, ligne de courbure constante, ligne à équidistance d'un centre, jusqu'à l'appréhension de points appartenant à cette ligne et situés à équidistance du centre (figure 6).

Figure 6. Évolution et articulation des différentes façons de voir le cercle à l'école primaire.

Déjà à l'époque, Artigue et Robinet concluaient qu'« [i]l semble souhaitable que les objectifs de cet enseignement soient plus formulés en termes d'enrichissement et d'organisation cohérente de conceptions variées du cercle, tant ponctuelles que globales, statiques que dynamiques » (Ib., p.63).

Une même figure modèle comme témoin de l'évolution du regard

Nous avons choisi d'explorer une seule et même figure (figure 7) d'une part car celle-ci se retrouve de façon récurrente dans de nombreuses ressources pédagogiques (Bulf et Celi 2015, 2016) mais aussi de par les propriétés mathématiques et visuelles qu'elle offre et que nous détaillons dans la partie suivante.

---

6 Nous rappelons la nomenclature de Duval (2005) : le dénominateur indique la dimension du support considéré, ici 2D renvoie à la dimension de surface, et le numérateur indique l'unité figurale désignée, autrement dit ici 1D désigne des lignes et 0D des points.

Figure 7. Figure-modèle.

L'on peut discerner une pluralité de manières possibles de voir et d'interpréter ce dessin, en fonction de la dimension et de la nature des sous-éléments considérés (Bulf et Celi, 2016). En particulier, il peut être interprété comme un assemblage par juxtaposition, conformément à l'analyse perceptive spontanée des dessins évoqués en partie I.3. L'on perçoit alors la figure 7 comme un assemblage de pièces d'un puzzle ayant par exemple la forme d'un triangle arrondi et la forme d'un pétale. Il peut également être interprété comme un « assemblages par superposition » (Duval, Godin, 2005, pp. 9-10), si l'on considère plutôt qu'il s'agit d'un assemblage de quatre demi-disques transparents posés sur un carré.

Un jeu sur certaines valeurs de variables didactiques bien choisies (les couleurs, le recours à diverses pièces matérielles de type puzzle, des tracés supplémentaires, etc.) permet de faire basculer une vision d'un assemblage par juxtaposition à celle d'un assemblage par superposition (et réciproquement).

Si l'on cherche à reproduire cette figure avec des instruments comme un compas par exemple, la vision globale en termes de surface n'est plus opératoire, il devient nécessaire de procéder à une analyse de la figure comme dans la figure 8.

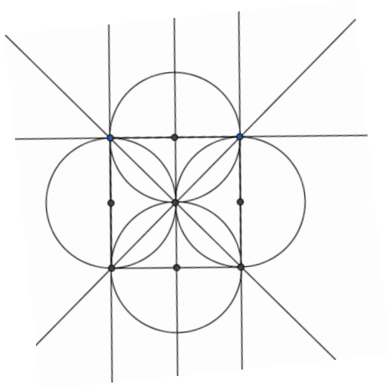


Figure 8. Analyse de la figure en faisant apparaître les unités figurales et leurs relations.

Aussi pour une visualisation non iconique, c'est-à-dire dépassant une simple reconnaissance de formes connues, il convient de dire que la figure est composée d'un carré et de quatre demi-cercles de centres respectifs les milieux des côtés du carré et passant chacun par le centre du carré. Chaque côté du carré est donc un diamètre d'un des demi-cercles. Les « tracés auxiliaires » favorisent la déconstruction dimensionnelle de la figure, nécessaire pour penser son éventuelle construction qui dépendra des instruments mis à disposition. Plusieurs relations entre ces unités figurales nous semblent donc intéressantes à exploiter dans le cadre de notre progression :

- le centre du carré, obtenu par intersection des diagonales du carré mais aussi comme point de concours des quatre demi-cercles ;

- les milieux des côtés du carré qui sont aussi centre des demi-cercles ;

- les côtés du carré qui sont aussi diamètre des demi-cercles.

En particulier la mobilité du regard sur ces différentes unités figurales et leurs mises en relation donnent les clés pour réussir sa reproduction.

Ainsi, les analyses visuelle et mathématique de ce dessin (figures 7 et 8) mettent en évidence une dialectique possible entre juxtaposition et superposition des formes mais aussi un travail intéressant des propriétés mathématiques intrinsèques. Ces analyses nous conduisent donc à retenir ce dessin pour dérouler notre progression autour des notions de disque et cercle.

Soucieuses de penser l'enseignement de la géométrie plane dans une continuité, tout au long de l'école, et d'articuler connaissances anciennes avec les connaissances nouvelles, nous ne pensons pas les différentes étapes de cette progression comme relevant d'un cycle particulier. Dans nos expérimentations en classe, le travail mené en cycle 3 reprend bien souvent les premières situations, elles-mêmes travaillées en cycle 1, puis les prolonge.

Au cœur de l'évolution de notre progression : l'évolution du rapport aux instruments

Comme évoqué précédemment, notre travail s'inscrit dans la lignée des travaux du groupe de Lille considérant le lien étroit entre *visualisation des formes* et *rôle des instruments*. La progression s'appuie sur les variables propres aux problèmes de restauration et plus largement ceux de reproduction, à savoir un support uni, une évolution de la nature de l'amorce, etc. Plus particulièrement l'évolution de notre progression se base sur celle des usages du matériel (le dessin étant toujours le même) : des gabarits de forme et leur superposition par transparence, aux contours de surface et intersections de lignes jusqu'à l'utilisation du compas.

Nous proposons, conformément aux travaux du groupe de Lille, une géométrie sans mesure centrée sur la recherche de levier permettant un changement de regard et la mise en relation des unités figurales qui composent la figure, tout en assumant une dialectique des différentes conceptions du cercle (au sens de Artigue et Robinet).

Trois types de variations sont proposés dans les parties suivantes. Ces différentes situations ont été également présentées dans Bulf et Celi (2016), certains éléments d'analyse sont directement repris de cette publication, d'autres sont issus d'expérimentations ultérieures, notamment au sein d'un groupe de l'IREM de Clermont-Ferrand[7].

2.2 Une première situation d'action avec des gabarits transparents de demi-disque pour une vision surface et contour de surface

Dans cette partie, nous rendons compte d'éléments d'analyse de la situation en tenant compte des conditions dans lesquelles elles ont été expérimentées (une classe CE1-CE2 de la région bordelaise[8], dans une classe de Grande Section[9] et une classe de CE2-CM1[10] d'Auvergne). Autrement dit, les éléments d'analyses *a priori* dont nous rendons compte garantissent le caractère reproductible des situations mais les éléments d'analyse *a posteriori* qui correspondent à ces expérimentations sont donc aussi dépendants des conditions de ces expérimentations.

Les élèves doivent reproduire la figure 7 qui a été donnée soit sous cette forme soit sous forme d'une photo avec le même matériel manipulable.

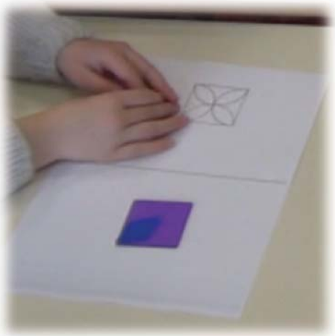
---

[7] Groupe « Géométrie à l'école » animé par Anne-Cécile Mathé depuis septembre 2016 et réunissant une dizaine d'enseignants du premier degré et trois enseignants de collège.
[8] Classe de Caroline Tuphile (séance menée par C.Bulf) école de Gensac (33), Avril 2015.
[9] Classe de Maire Gourjon, école de la Monne, Saint Saturnin (63)
[10] Classe de Valérie Maillot, école Paul Lapie, Chamalières (63)

En Grande Section de maternelle, le matériel mis à disposition des élèves comprend des gabarits transparents de forme variée : disque, demi-disque, quart de disque, carré, losange, triangle, rectangle, hexagone. Ces élèves travaillent sur une feuille blanche comprenant la figure-modèle.

Dans la classe de CE1-CE2 comme dans celle de CE2-CM1, les élèves travaillent sans support, directement sur la table, la figure-modèle non accessible, seulement sous une forme agrandie et projetée au tableau. En outre, ces élèves de CE1 ont à leur disposition que des demi-disques rouges transparents.

Quelles que soient les conditions initiales du problème posé, lors de la rencontre des élèves avec la figure-modèle, les élèves (qu'ils soient en cycle 1, 2 ou 3) reconnaissent spontanément diverses formes : des « pétales », « des triangles arrondis », « des rosaces », des « ballons de rugby », etc. Ces propositions verbales témoignent d'une vision première du dessin essentiellement en termes de surfaces juxtaposées. De manière concordante avec cette appréhension spontanée du dessin, lors de la première phase de recherche, les manières d'agir des élèves (quel que soit leur cycle) portent sur des essais de juxtaposition des formes mises à disposition (figures 9) ; les élèves éprouvent des difficultés à percevoir la superposition de demi-disques.



Exemple de procédure d'élève en GS : les gabarits transparents de losange sont juxtaposés sur le gabarit carré.

Exemple de procédure d'élève en CE1 : les quatre gabarits de demi-disques transparents sont juxtaposés sur la table.

Figure 9. Des essais de juxtaposition de formes

Dans la classe de CE1-CE2, c'est l'introduction du gabarit transparent carré et la contrainte de devoir faire rentrer les autres gabarits « sans que ça déborde » qui forcent les élèves à passer d'un assemblage par juxtaposition à un assemblage par superposition. Ce changement de milieu matériel participe de l'apparition de nouvelles manières d'agir. En effet, les élèves prennent en compte différemment les gabarits et considèrent maintenant leur position relative. Par exemple, de nombreux nouveaux agencements sont expérimentés :

- Le bord droit du demi-disque (1D/2D) est superposé avec un bord droit (côté) du carré
- Le bord courbe du demi-disque (1D/2D) touche un autre bord (1D/2D) :
    - soit un côté du carré
    - soit un bord droit d'un autre gabarit de demi-disque
    - soit un bord courbe d'un autre demi-disque
- Les extrémités du diamètre du demi-disque (0D/2D) correspondent aux sommets du carré (0D/2D) ou « touchent » un côté du carré (sans déborder).

A travers ces nouveaux repères de position (permis par des superpositions possibles entre les gabarits) apparaissent de nouvelles connaissances d'action par rapport à la première phase d'action qui engagent l'élève dans un traitement de la figure d'une autre nature. En effet, l'élève prend maintenant en compte de nouvelles surfaces et contours de surfaces obtenus par ces nouveaux agencements (des superpositions) et la mise en relation d'unités figurales de dimension inférieure (1D/2D). Le gabarit du demi-disque n'est plus placé de façon aléatoire ou guidé par la reproduction d'une vision surface (position des pétales).

Nous verrons plus loin sous quelles conditions les élèves de Cycle 1 ont également fait évoluer leur regard sur le dessin.

Ces premières superpositions permettent de faire apparaître les « premiers contours » visibles de la figure-modèle. En effet pour réussir la reproduction, l'élève doit répéter un agencement particulier du gabarit de demi-disque par rapport au carré et tenir compte de celui déjà placé ; les nouvelles surfaces obtenues au fur et à mesure par superposition des gabarits de demi-disque (les « pétales ») assurent la validation du traitement effectué. Le bon placement des gabarits se vérifie également par le fait que les bords courbes ne font que « se toucher » au niveau du centre du carré (cette manière d'agir agissant comme un moyen de validation). A terme, les élèves peuvent aller jusqu'à se rendre compte que le gabarit carré n'est pas nécessaire et reconnaissent les côtés droits des gabarits de demi-disques comme les côtés du carré.

2.3 Une deuxième situation d'action pour une vision ligne

Comme déjà évoqué précédemment une évolution de cette situation peut être pensée en modifiant les instruments mis à disposition des élèves, faisant ainsi évoluer les enjeux de la reproduction. L'on peut proposer par exemple un gabarit carré et un seul gabarit de demi-disque opaque (figure 10).

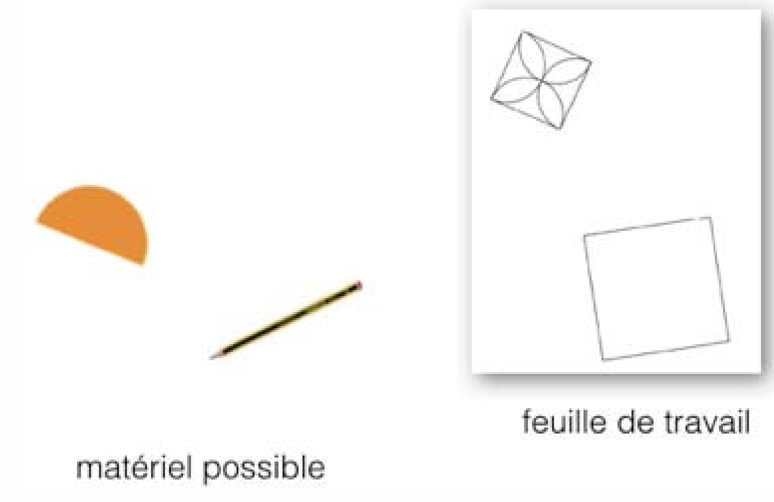


Figure 10. Deuxième situation d'action, pour une vision contour de surface et lignes

Cette fois l'enjeu de la reproduction réside dans le passage d'une vision surface à une vision contour de surface et lignes. Les élèves procèdent donc à un jeu de tracé de contours de surfaces et intersections de lignes avec cette fois un seul gabarit de demi-disque mobilisant la conception « courbure constante ». Les élèves devant reconnaître que le tracé de demi-cercle est obtenu par le tracé du contour avec le même gabarit en réitérant quatre fois le même traitement (du fait de l'isométrie du carré). Il s'agit de prendre en compte conjointement plusieurs contraintes :

- le côté du carré doit correspondre avec le bord droit du demi-disque ;

- les extrémités des bords droits du demi-disque doivent correspondre aux sommets du carré ;

- le tracé du contour du demi-disque doit passer par l'intersection des autres tracés d'arcs de cercle en un seul point (le centre du carré).

Ces différentes actions (placement des gabarits et tracés de contours) servent également de moyens de contrôle dans le traitement de la figure : en particulier si les arcs de cercle ne se coupent pas en un même point, les élèves perçoivent visuellement tout de suite que la reproduction est à reprendre. La nature de la figure (intersection des demi-cercles en un seul et même point qui est le centre du carré) se révèle un point d'appui essentiel pour faire fonctionner les allers-retours permanents entre déconstruction et reconstruction dimensionnelle : entre surface, bords de surface, contours, lignes et intersections de lignes (qui donnent un point).

Figure 11a. Exemple d'usage du gabarit de demi-disque pour reproduire la figure modèle.

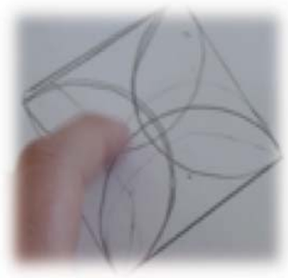


Figure 11b. Invalidation de la figure étant donné que les arcs de cercle ne sont pas concourants.

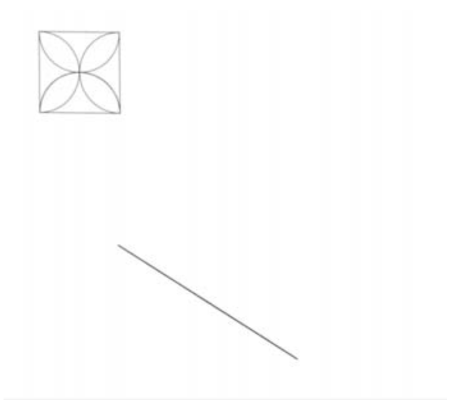
Figures 11. Contours de surface et intersections de lignes

L'analyse de ces deux situations d'action permet donc de mettre en évidence la façon dont le regard sur un même dessin évolue dès lors que les contraintes sur les instruments évoluent : d'une vision par juxtaposition à une vision par superposition (en introduisant le carré dans la première situation) ; d'une vision surface, contours de surface à une vision ligne, intersection de ligne (avec une réduction du nombre de gabarit - un seul gabarit de demi-disque opaque) et une amorce.

La troisième situation que nous proposons cherche maintenant à mettre en lien les unités figurales de la figure-modèle afin de pouvoir la reproduire avec un compas. Le cercle deviendra alors une ligne située à équidistance d'un centre…

2.4 Une troisième situation d'action pour une mise en relation des lignes et des points vers les propriétés du cercle

Cette situation de restauration, s'adresse à des élèves de fin de cycle 2 et/ou de cycle 3. Il s'agit toujours de présenter aux élèves la même figure-modèle (figure 7) en leur proposant de la reproduire à partir d'une amorce (figure 12). Différentes amorces peuvent être proposées.



Actions	Coûts	comptes
Règle Informable pour tracer un trait	0	
Règle Informable pour reporter une longueur	10	
Règle graduée	20	
Gabarit d'angle droit	5	
compas	1	

Figure 12. Troisième situation d'action, pour une mise en relation des lignes et des points vers les propriétés du cercle. La feuille de travail n'est pas à l'échelle.

Les élèves ont à leur disposition :

- une règle non graduée : par exemple, une bande de papier cartonné plastifiée avec laquelle on peut tracer des lignes droites ;

- une règle pour reporter des longueurs : par exemple, une bande de papier cartonné que l'on peut plier pour mémoriser une longueur, ou sur laquelle on peut marquer une longueur à l'aide d'un crayon dans le but de la reporter ;

- un gabarit d'angle droit (on évitera de donner l'équerre où il y a un côté gradué) ;
- une règle graduée ;
- un compas.

Les instruments peuvent être utilisés sur le modèle (pour prendre des informations ou pour ajouter des éléments supplémentaires) et pour tracer la figure à restaurer à partir de l'amorce fournie. Nous intégrons cependant ici un système de coût sur l'utilisation des instruments disponibles.

Sur la figure-modèle, le recours à un instrument, quel qu'il soit, est gratuit. En revanche, sur la figure à restaurer, les règles de coûts sont les suivantes :

- tracer une ligne droite avec la règle non graduée est gratuit ;
- reporter une longueur à l'aide de la règle prévue pour cet usage coûte 10 points ;
- utiliser un gabarit d'angle droit coûte 5 points ;
- reporter une longueur à l'aide de la règle graduée coûte 20 points ;
- utiliser le compas coûte 1 point, que ce soit pour tracer un cercle ou pour reporter une longueur (prise sur le modèle ou sur la figure en construction).

Le but du jeu est de cumuler le moins de points possible (voir figure 12 pour un exemple).

Un tel système de coût sur les instruments favorise les procédures mobilisant le compas comme outil permettant la conservation puis le report d'une longueur (rayon du cercle, côté du carré) mais aussi comme outil permettant de tracer un cercle.

La validation des productions des élèves peut s'effectuer classiquement par superposition avec la figure attendue tracée au préalable sur du papier calque même si nous considérons *a priori* que les propriétés intrinsèques de la figure suffisent à sa validation (notamment du fait que tous les arcs de cercle doivent passer par le centre du carré, ce qui constitue un moyen de contrôle des tracés) mais aussi par un comptage du nombre de points utilisés pour la restauration (on peut annoncer le coût minimal possible).

Nous nous permettons de renvoyer directement à l'article de Bulf et Celi (2016) pour avoir une analyse *a priori* détaillée de cette dernière séance en fonction d'un catalogue d'amorces. Ce que nous pouvons retenir de cette situation de manière un peu plus générale, c'est qu'elle cherche à aller plus loin dans la déconstruction de la figure, dans le sens où on vise maintenant la mise en relation entre les unités figurales de dimension inférieure (1D et 0D) à l'aide du compas afin de reproduire la figure à moindre coût.

Cette situation est pensée (dans le cadre de cette progression) de façon à ce que, au regard de l'amorce choisie et du coût retenu sur les instruments, les élèves mettent en jeu une mobilisation et une organisation différente des propriétés du cercle et du carré. Par les contraintes de la situation, les élèves sont amenés à enrichir leur regard sur les unités figurales : les côtés du carré (1D) vus aussi comme diamètres du cercle (1D) ; les sommets du carré (0D) vus aussi comme extrémités des diamètres des cercles, le milieu des côtés du carré (0D) comme centre d'un cercle (0D), le point d'intersection des arcs de cercle (0D) comme centre du carré, etc. Ces différentes mises en lien étant soutenues par des relations de perpendicularité, d'alignement et de milieu (figure 8).

Certaines amorces favorisent *a priori* davantage un jeu de déconstruction et reconstruction de la figure-modèle (2D ⇄ 1D ⇄ 0D) mettant en jeu une conception plutôt ponctuelle du dessin dans le but de mobiliser en particulier les propriétés du cercle et sa caractérisation par la relation de distance (*centre ; point du cercle*). Certaines mobilisent par ailleurs d'autres connaissances géométriques au-delà des propriétés du cercle : prolongement de droites, intersection de droites pour obtenir un point, relation d'incidence et d'alignement, *etc*.

3 Bilan et questions nouvelles

Nous nous sommes données pour objectif d'apprendre aux élèves à analyser (perceptivement) géométriquement des dessins pour y voir des représentations sémiotiques d'objets, de propriétés et de relations géométriques et à être capables de traitements géométriques de ces dessins. Explorer cette visée nous a amenées à penser une situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessins et des progressions autour de ces situations, via un jeu sur les instruments. Ce travail outille ainsi les enseignants pour penser des progressions dans la perspective d'une évolution cohérente du rapport des élèves aux dessins et choisir, analyser des situations didactiques.

Si l'on se réfère au cadre de la Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), les situations envisagées jusqu'à maintenant constituent des situations d'action. Les élèves interagissent directement avec un milieu (les dessins, les instruments, l'amorce éventuelle…) qui est capable de rétroactions (opérationnalité de l'analyse du dessin au regard des instruments disponibles ou du coût sur l'usage des instruments, validité de la production par perception directe ou validation par calque…). La confrontation des élèves au problème et les rétroactions du milieu visent à faire évoluer les stratégies des élèves vers une procédure contenant en germe les connaissances et savoirs géométriques visés. Ces situations permettent ainsi l'émergence de connaissances pour l'action : analyser le dessin en termes de surfaces, de bords, de lignes, de points ; être capable de rendre visible de l'implicite grâce à un traitement des dessins idoine et opératoire ; utiliser les instruments pour reproduire les objets, propriétés et relations géométriques identifiés sur les dessins modèles. Ces connaissances apparaissent comme des outils nécessaires pour résoudre le problème de reproduction posé.

Plusieurs questions restent cependant en suspens et vont guider la suite de ce texte. De manière générale, prolongeant les éléments de réflexion développés précédemment, soulever ces questions nous amène à aborder la question de l'articulation entre registres graphiques et registres langagiers dans les apprentissages en géométrie (plane) à l'école.

D'une part, la mise en œuvre de ces situations en classe met en évidence le rôle indéniable des interactions langagières orales dans l'évolution des stratégies des élèves, qu'il s'agisse d'interactions entre élèves pendant qu'ils essaient de reproduire la figure ou d'interactions avec l'enseignant, de manière individuelle ou collective. Au fil de la confrontation à la situation d'action, se développe un langage qui permet la verbalisation de l'analyse des dessins et des procédures instrumentées mises en œuvre. C'est également souvent dans ces interactions langagières orales que se négocie une interprétation partagée des dessins et du problème. Or ce rôle des interactions langagières, verbales et orales, n'est pas jusqu'alors anticipé *a priori*. Mettre en place ces situations en classe va toutefois nécessiter de la part de l'enseignant une vigilance particulière au travail dans et sur le langage qui se développe autour de ces situations d'action. Nous essaierons dans la suite de ce texte de faire de résultats de recherche développés autour de cette question des pistes de réflexion et outils pour les enseignants et leur formation.

D'autre part, subsiste la question fondamentale des modalités possibles de transformation des connaissances pour l'action émergeant de la confrontation à ces situations en savoirs géométriques, visés par l'enseignant. L'objectif de l'enseignant est en effet, à terme, la formalisation de savoirs géométriques. Au regard des enjeux d'enseignement développés précédemment, ces savoirs sont de deux types au moins. Il s'agit d'une part de la désignation, voire d'une définition (locale) d'objets géométriques (le segment, la droite, le point, le cercle), de propriétés et de relations (alignement, appartenance, équidistance à un point…). Il s'agit également de construire un langage géométrique permettant de rendre compte d'une analyse géométrique des figures. L'écart est bien sûr grand entre la capacité des élèves à utiliser les instruments donnés pour reproduire un dessin, en appui sur une analyse de ce dessin, et leur capacité à formuler ces savoirs décontextualisés. La question que nous explorerons à la fin de ce texte est ainsi celle de l'insertion de ces situations de reproduction de figures dans des progressions plus globales, prenant en compte ces enjeux de dépersonnalisation, décontextualisation et formulation des connaissances pour l'action en savoirs géométriques.

III - L'ARTICULATION ENTRE REGISTRES GRAPHIQUE ET LANGAGIER EN SITUATION D'ACTION

1 Vers une analyse en termes de modes *d'agir-parler-penser*

Notre approche consiste à considérer le langage comme partie prenante de l'activité du sujet en situation *via* la prise en compte de trois dimensions de cette activité : l'agir, le parler et le penser (Bernié, 2002). Les manifestations effectives (*a posteriori*) des modes d'agir-parler-penser d'un objet mathématique (baptisés *modes de fréquentation* dans (Bulf, Mathé, Mithalal, 2014)) cherchent à décrire un rapport du sujet à l'objet mathématique en jeu (ici *cercle* ou *carré*…), à un moment de la confrontation de l'élève à la situation. Notre travail vise alors à étudier la manière dont ces modes de fréquentation évoluent au cours du déroulement d'une situation et en particulier la manière dont les traitements des objets dans les registres graphiques et langagiers interagissent dans ces processus d'évolution. En appui sur une analyse *a priori* des rapports possibles aux objets mathématiques, en particulier en termes d'unités figurales repérables, de dimension des objets considérés et de relations possiblement perceptibles entre ces unités, nos analyses *a posteriori* prennent pour observables ce que font et disent les élèves et l'enseignant (gestes, regard, signes, langage oral, etc.).

Afin d'illustrer notre propos, reprenons le traitement de la situation de reproduction de la rosace à quatre branches dans le contexte de la classe de maternelle (GS) dans les conditions déjà décrites précédemment (voir paragraphe 2.2). Le matériel construit un contexte de manipulation d'objets singuliers dans lequel chaque élève interprète la tâche en fonction de ses propres intérêts et de sa vision du dessin. Comme décrit dans la partie II la vision par juxtaposition domine au début de la résolution. Se joue alors dans les échanges langagiers avec l'enseignante une confrontation des différentes manières de parler (bord arrondi *vs* bord droit) amenant l'élève sur de nouvelle façon d'agir (voir figure 9) :

> « *est-ce que les* ***bords du losange*** *c'est arrondi ?* »
>
> « *oui c'est droit et c'est pointu* » « *regardez sur votre figure-modèle, les formes que vous voyez* »
>
> « *le rond* » « *alors le rond, c'est quoi ?* »…

Ainsi, les élèves s'emparent du demi-disque et cherchent à le superposer à la figure modèle. L'avancée de la résolution du problème se fait à la fois par un retour direct avec le milieu (voir partie 2) et par les interactions langagières.

Au cours des différentes situations d'action observées, que ce soit en GS ou en Cycle 2, les situations d'action sont le lieu où se rencontrent différents modes de penser, en lien étroit avec différentes manières d'agir et de parler.

Penser	Agir		Parler
Vision surface (2D)	**Juxtaposition** de formes		« Fleur », « pétales », « rosace », « papillon »
	GS : gabarits de losange	CE1 : gabarits de demi-disques	
		+ gabarit carré	« bords » « traits droits, pointus » *vs* « traits arrondis »
Surfaces de demi-disques Vers bords et contours de demi-disque (1D/2D)	**Superposition** des formes		
	GS : Superposition des demi-disques sur le disque modèle	CE1 : Superposition des gabarits transparents faisant apparaître de nouvelles formes	« on cherche des lignes arrondis qu'on va superposer sur la figure modèle »

Tableau 1. Dynamique des déplacements des modes d'agir, de penser et de parler du cercle.

Nous avons synthétisé la dynamique de ces déplacements de modalités de traitement instrumenté (manières d'agir) et langagier (manières de parler), en lien avec différentes interprétations du dessin, dans le tableau 1.

Au début de cette situation, que ce soit en GS ou en C2, les élèves parlent de « fleur », « pétales », « rosace », « ailes de papillon » etc. Nos analyses montrent alors une cohérence entre cette manière de décrire verbalement le dessin et les manières d'agir d'abord mobilisées (losanges, formes des pétales…), qui nous permet de reconnaître que les élèves sont dans une vision surface juxtaposées 2D (et aussi dans une vision iconique) du dessin.

Au fil de la confrontation des élèves à la situation, s'opèrent alors des déstabilisations de la manière dont les élèves interprètent le dessin et l'objet cercle. Les moteurs de l'évolution des élèves, vers une interprétation plus géométrique du dessin en termes de demi-disques superposés, peuvent alors résider soit dans l'évolution des modalités de traitement graphique du dessin (sous les contraintes matérielles de la situation d'action), soit dans la négociation des manières de parler et de désigner les objets (comme décrit précédemment). C'est donc l'articulation du travail entre registres graphiques et langagiers qui permet la co-construction d'une manière partagée et opératoire d'analyser le dessin.

Nous retenons de ceci deux choses fondamentales. Premièrement, l'activité géométrique lors de la résolution d'un problème peut se concevoir comme relevant de manières spécifiques *de penser* les objets géométriques en jeu vivant au travers de manières *d'agir* sur un environnement matériel et des manières *de parler* (actes de langage). Et, deuxièmement, les moteurs de l'évolution des procédures des élèves en situation d'action relèvent d'au moins de deux types d'interactions :

- interactions matérielles entre sujet et milieu,

- interactions langagières orales hors de cette situation adidactique.

2 Des pistes de réflexion pour la mise en œuvre de situations d'action en classe : verbalisation autour des situations d'action et secondarisation

Notre travail amène à porter une attention accrue à l'activité de désignation des objets (explicitations des unités figurales en jeu et de leurs relations) et son articulation avec les procédures d'action sur les objets mises en œuvre. Il nous aide à penser et anticiper les potentialités offertes par un travail dans et sur le langage lors des phases de verbalisation, au moment des mises en commun intermédiaires ou concluant les phases de recherche. Lors de la mise en œuvre des situations d'action en classe, ces moments constituent un lieu riche de construction d'un vocabulaire permettant la désignation des objets géométriques mobilisées pour l'action et les prémisses de la construction d'un langage permettant de verbaliser les procédures développées pour l'action. C'est dans le langage que l'enseignante appelle à une autre façon de parler, de faire et de voir : des relations sont formalisées, reprises, approfondies, permettant aux élèves de lever des implicites, de se mettre d'accord sur la façon d'agir et de parler. Dans ces mises en commun observées lors des différentes situations de la rosace décrites précédemment, l'enseignante questionne, fait formuler (reformuler), cherche à faire généraliser les élèves : on passe par exemple d'une formulation fortement ancrée dans un contexte d'action « j'ai fait ça, comme ça » à une formulation désignant la forme (2D) et les traits (1D) ; on passe de la formulation désignant l'action « on fait le contour du disque » à une reconnaissance explicite du « trait » ou de la « ligne » pour parler d'un « demi-cercle ». La dimension des objets en jeu évolue (passant des surfaces aux lignes), on met en mot, on convoque dans le langage les modes d'agir, faisant bouger les façons de penser et de parler des objets.

Dans le prolongement des phases d'action, ces mises en commun participent du processus qui consiste en la transformation des modes d'agir-penser-parler. Ces déplacements à la fois cognitifs et langagiers sont des témoins du processus, en cours, de secondarisation[11] des discours (Bernié 2002 ; Jaubert, Rebière 2012).

[11] La façon d'agir sur le matériel (ou dessins), les façons de parler, et les façons de penser, se transforment tout au long du processus d'apprentissage. C'est ce qu'on appelle la secondarisation des discours qui repose sur des déplacements à la fois langagiers et cognitifs via la mise en œuvre d'un discours spécialisé caractérisant la

IV - POTENTIALITES DE SITUATIONS DE FORMULATION ET DE VALIDATION EN GEOMETRIE

Dans le paragraphe précédent, nous avons mis en évidence le rôle, non négligeable, des interactions langagières, verbales et orales, qui se développent autour de la reproduction de dessins. Participant de l'évolution des stratégies des élèves tout comme les rétroactions pragmatiques du milieu, ces interactions langagières orales constituent un lieu d'expression et de négociation de l'interprétation des dessins et des modalités possibles de traitement de ces dessins au regard du problème posé. Avoir en tête le rôle de ces interactions langagières nous semble ainsi participer à une meilleure compréhension des moteurs de l'évolution effective des stratégies des élèves. Organiser un travail dans le langage lors de la mise en œuvre de ces situations participe également à faire de ces interactions langagières un lieu d'apprentissage, visant la verbalisation des connaissances émergeant pour l'action et la construction d'un vocabulaire et de références partagées.

Malgré tout, ce travail dans et sur le langage autour de la reproduction de figures ne saurait permettre à lui seul la transformation de connaissances développées pour l'action en savoirs visées par ces situations de reproduction de figures. Revenons à la nature de ces savoirs visés.

Comme évoqué dans la partie I de ce texte, les enjeux de savoirs de ces situations sont pour nous d'une double nature.

(i) Il s'agit de faire émerger les objets et relations géométriques comme des outils pour résoudre des problèmes portant sur des dessins. Les savoirs visés relèvent alors de la désignation de ces objets (vocabulaire) et d'une définition, parfois locale et fonctionnelle, de ces objets. On pourra ainsi dire qu'un segment est porté par une droite, qu'une droite est un trait rectiligne n'ayant ni début ni fin, qu'un cercle est une ligne située à une distance R (le rayon) d'un point (le centre) …

(ii) Il s'agit également de la construction d'un rapport géométrique aux dessins et à la capacité à développer une analyse géométrique de ces dessins en figures. Ceci suppose la capacité à coordonner représentation de la figure dans le registre graphique (en lien avec analyse géométrique perceptive du dessin) et dans le registre langagier (être capable de formuler une analyse géométrique du dessin). Nous convenons que ces savoirs sont aujourd'hui des savoirs transparents à l'école (Margolinas & Laparra, 2011), où l'on estime très souvent qu'acquérir le vocabulaire suffit à être capable d'une analyse, à la fois perceptive et langagière, des figures. Or l'articulation entre analyse perceptive des dessins, dans le registre graphique et analyse discursive des figures, dans le registre langagier, ne va pour nous pas de soi. C'est par ailleurs très largement dans une articulation entre analyse perceptive des dessins, dans le registre graphique, et analyse portée par le langage que se développeront les activités géométriques attendues au collège et en particulier les activités de démonstration (voir l'exemple donné en partie I.3).

Ainsi donc, le travail dans le langage autour des situations d'action permet un premier mouvement de secondarisation vers la construction d'un vocabulaire partagé permettant de désigner les objets mobilisés et certaines actions sur ces objets. Il s'agit malgré tout essentiellement d'un langage de communication, contextuel et fonctionnel, en lien fort avec les traitements instrumentés du dessin développés. Un mouvement de dépersonnalisation et de décontextualisation est encore nécessaire pour permettre la transformation de ces connaissances pour l'action en savoirs géométriques. La construction d'un langage géométrique capable de porter l'analyse de figures reste également objet de travail. Forts des outils livrés par la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), cette réflexion nous a ainsi conduits à explorer

communauté discursive des mathématiques à l'école : « les formes secondarisées témoignent d'une modification de sa compréhension [celle de l'élève] de l'activité en cours, de son rapport au monde, de la prise en compte de nouveaux éléments jusqu'alors ignorés, de ses déplacements énonciatif et cognitif, et de son institution en tant qu'acteur social dans le nouveau contexte » (Jaubert & Rebière 2012 p.6).

les potentialités de l'insertion de ces situations de reproduction de figures (situations d'action) dans des progressions plus globales articulant situations de formulation et de validation.

1 Situations de formulation autour de la reproduction de figures

D'un point de vue général, les situations dites de formulation, au sens de Brousseau (1998), sont des situations qui mettent en rapport au moins deux actants avec un milieu. Dans ces situations, l'action directe de l'un des actants sur le milieu n'est plus possible, car mise à distance. Leur succès commun exige que l'un formule les connaissances utiles à la résolution du problème à l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu. Par ces contraintes, la situation rend ainsi nécessaire l'identification puis l'explicitation des connaissances nécessaires pour l'action, dans un langage partagé.

Dans notre cas, un élève (ou groupe d'élèves) sera confronté à un problème de reproduction d'un dessin modèle, avec contraintes sur les instruments, comme développé précédemment. Sa mission sera de formuler un message qui devra permettre à quelqu'un de reproduire la figure représentée par ce dessin modèle, avec les mêmes instruments, sans avoir vu le dessin modèle. Ces situations donnent lieu à une phase de validation dans laquelle on pourra mettre en regard le dessin modèle et le dessin produit et engager un travail autour des messages élaborés (informations manquantes, langage partagé…)

Bien évidemment, de nombreuses variations autour de cette situation de formulation générique sont envisageables, en fonction du niveau des élèves et des objectifs d'apprentissage langagiers. Ainsi, la formulation des connaissances par les élèves peut être orale ou écrite, verbale ou non verbale. Le récepteur peut-être un autre élève ou l'enseignante.

Nous présentons dans la suite quelques exemples de situations expérimentées en classe. Par souci de cohérence, nous reprenons ici le thème disque et cercle. Les situations présentées (succinctement) ci-dessous font suite à un travail de reproduction d'assemblages de formes et de dessins complexes (dont la situation de « la rosace » présentée ci-dessus).

1.1 Analyse d'une forme complexe en termes de surfaces superposées et désignation de ces sous-éléments 2D, formulation orale

La situation que nous présentons dans ce paragraphe fait suite à un travail de reproduction de figures complexes à l'aide de gabarits, faisant suite aux deux premières situations autour de la rosace présentées ci-dessus. Les élèves ont ainsi été amenés à identifier des disques, demi-disques, quarts de disque dans des dessins complexes et à les reproduire à l'aide de gabarits surfaces (sur le modèle ou à côté du modèle) ou de gabarits comme instruments de tracé de cercles, demi-cercles ou quarts de cercle. L'analyse des dessins s'est alors opérée en termes d'assemblages de formes juxtaposées et/ou superposées. Les élèves disposaient des gabarits et de crayons sur leur table.

Une première situation de formulation, en appui sur ces situations de reproduction de figures, consiste à proposer aux élèves un problème de reproduction analogue mais, cette fois-ci, en éloignant les gabarits de leur table de travail. Les élèves vont devoir commander à la personne détenant les gabarits la nature des formes souhaitées. La formulation est ici orale, le récepteur de la commande peut être l'enseignant ou un autre élève.

Nous ne nous attarderons pas dans ce texte sur cette situation, car c'est une situation rencontrée de manière assez classique dans les classes, parfois sous le nom de « jeu de la marchande ». À travers ce premier exemple, nous voulons surtout rattacher ce type de situation à la famille des situations de formulation autour de reproductions de figures que nous évoquons ici. Retenons tout de même que les enjeux de formulation portent ici sur la désignation des formes. Il s'agit de construire, utiliser, éprouver un vocabulaire qui permette de désigner sans ambiguïté les formes (2D) identifiées dans l'analyse des dessins et nécessaires à leur reproduction.

En fin de cycle 1 et début de cycle 2, des contraintes langagières imposées par l'enseignant lorsque les élèves viennent commander des formes pour reproduire un assemblage de formes à côté du modèle peuvent par ailleurs amener les élèves à distinguer surfaces et contours. Dans certaines classes de Grande Section et de CP d'Auvergne, les enseignants formulent par exemple une exigence sur la forme de la commande, demandant aux élèves de préciser : la forme souhaitée (gabarits-surface) et le nom de la forme que l'élève souhaite tracer. S'engage alors un travail extrêmement riche, qui amène les élèves à prendre en compte explicitement deux objets différents : la surface et son contour et pose la question de la désignation de ces deux objets. Si surfaces et contours sont désignés par le même mot dans le cas des carrés, des rectangles ou encore des triangles, nous disposons de deux mots différents pour désigner la surface et le contour d'un « rond » : le disque et le cercle.

1.2 Analyse d'une forme complexe en termes de surfaces superposées et représentation des relations ces sous-éléments 2D, formulation écrite

Une autre variante de situation de formulation, en appui sur la reproduction de figures complexes, consiste à engager les élèves dans une tâche de reproduction de figures, à l'aide de gabarits, puis à leur demander de produire un dessin qui permette à un élève n'ayant pas vu l'assemblage réalisé de le reproduire, ou de le reconnaître parmi un lot d'assemblages.

Dans l'exemple qui suit, extrait d'un travail mené en fin de cycle 1 et début de cycle 2, les élèves ont dans un premier temps à reproduire une forme sur le modèle à l'aide de gabarits. La forme et les gabarits donnés sont choisis de façon à amener les élèves à une décomposition / recomposition sous forme d'assemblage par superposition. Dans le prolongement du travail effectué en amont de cette séance, cette activité vise à faire acquérir aux élèves une mobilité de regard sur les dessins et la capacité à identifier des implicites et des prolongements de bords possibles. La figure 13 présente deux exemples de formes données et d'assemblages produits.

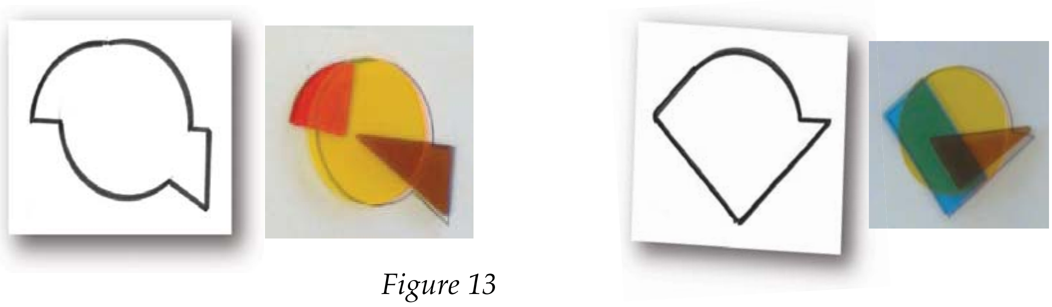


Figure 13

La seconde étape du travail consiste pour les élèves à produire un message écrit (sous forme de dessin) qui doit permettre à un autre élève de refaire l'assemblage produit, sans avoir un accès direct à cet assemblage. Les élèves ont alors très majoritairement utilisé les gabarits comme instruments de tracés de contours. Puis s'est posée la question de la manière de permettre aux élèves d'identifier les formes utilisées. La figure 14 présente des dessins réalisés.

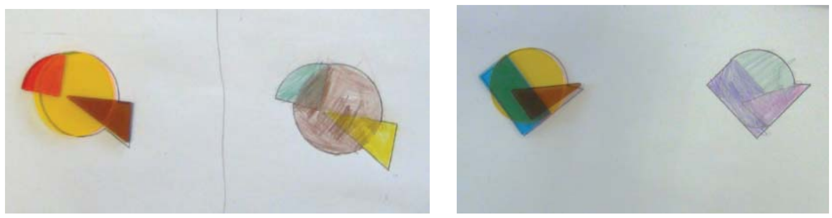


Figure 14

Les enjeux de formulation sont ici bien différents de ceux de la situation précédente. Il ne s'agit plus de construire et faire fonctionner en situation un vocabulaire partagé, mais de trouver un langage, écrit, permettant de rendre compte non seulement de la nature des formes en jeu mais aussi leurs positions relatives. Les élèves ont par exemple utilisé ici les gabarits comme instruments de tracé de contours puis ont dû trouver un moyen de distinguer, par un code graphique (la couleur), la juxtaposition ou la superposition des formes. Au cours de la phase de validation, des connaissances portant sur le nom des formes et à leurs positions relatives peuvent être verbalisées.

1.3 Déconstruction dimensionnelle d'une figure complexe et formulation d'une analyse géométrique de figures, formulation écrite

La dernière situation de formulation présentée vise à articuler l'analyse perceptive et instrumentée des dessins, dans le registre graphique, avec l'analyse discursive des figures. La situation générique est alors proche des situations d'émetteur –récepteur bien connues en formation des enseignants, mais nous l'intégrons ici dans une progression plus globale, prenant appui sur le travail préalable autour de reproductions de figures présentés précédemment. Dans ces situations, il s'agit pour les élèves de reproduire une figure (à partir d'une amorce ou non) puis de rédiger un message permettant à quelqu'un n'ayant pas vu le dessin modèle de construire la figure (à partir de la même amorce, à une échelle et dans une orientation différente). Nous retrouvons ici les objectifs de la situation de formulation précédente, mais la formulation visée est ici langagière, et nous avons fait le choix d'une formulation écrite.

Voici un exemple de mise en œuvre d'une telle situation dans une classe de CE2-CM1 d'Auvergne[12], proposée dans prolongement du travail amorcé par la situation présentée en partie II.2 de ce texte. Amenant à reproduire les demi-disques de la rosace à l'aide du compas, cette situation avait notamment permis aux élèves de voir le cercle comme une ligne située à équidistance d'un point, son centre. En appui sur la verbalisation des procédures de reproduction de la figure, l'enseignante avait institutionnalisé deux caractérisations du cercle, en ces termes :

- *Le cercle est le contour d'un disque*
- *Le cercle est une ligne qui est toujours à la même distance d'un point, appelé le centre du cercle. Cette distance s'appelle le rayon du cercle.*

  Attention : le mot « rayon » désigne à la fois cette distance et les segments joignant le centre et le cercle.

Comme évoqué précédemment, l'institutionnalisation permise par un travail dans le langage autour de la verbalisation des procédures instrumentées de reproduction de figures porte essentiellement sur le vocabulaire permettant de désigner le disque, le cercle, ses sous-éléments et une caractérisation du cercle via les relations entre ces objets (de dimensions 2, 1 et 0).

La suite du travail mené avec les élèves vise la construction d'un langage géométrique susceptible de rendre compte de l'analyse géométrique de figures contenant des cercles ou parties de cercles. Il s'agit de proposer des situations de formulation rendant nécessaire la désignation à la fois de sous-éléments de la figure, de dimensions 2, 1 et 0 mais aussi la caractérisation de positions relatives entre ces sous-éléments et la caractérisation de cercles ou parties de cercle par un centre et un rayon (ou un point passant par). Voici un exemple de telles situations proposées aux élèves dans la perspective de ce travail. Précisons qu'il s'agissait pour nous d'une première situation de formulation, proposant une figure supposée simple. À l'instar de la situation de la rosace (2.3), un groupe d'élèves dispose d'une fiche contenant un dessin modèle et une amorce (figure 15).

---

[12] Classe de Valérie Maillot, école Paul Lapie, Chamalières (63)

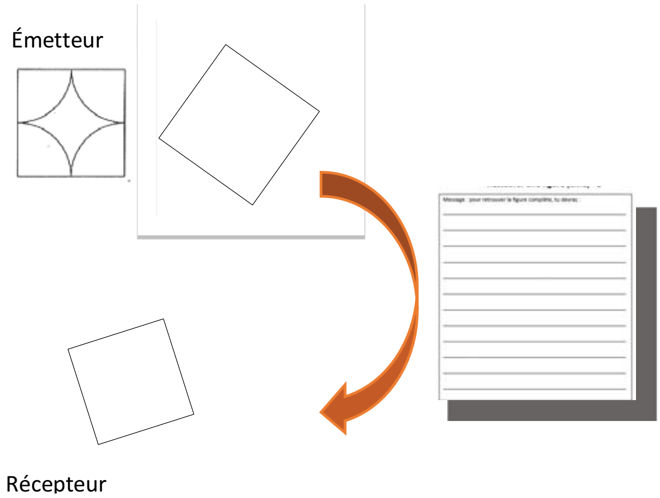


Figure 15

Ils n'ont à leur disposition qu'un compas et un morceau de papier (pliable). Leur première tâche consiste à reproduire la figure à partir de l'amorce donnée. Notons que l'amorce choisie impose une reproduction à une échelle et selon une orientation différente du dessin modèle. Le groupe a ensuite pour mission d'écrire un message permettant à un autre groupe de reproduire à son tour la figure modèle à partir uniquement d'une amorce de même nature (mais à une échelle et dans une orientation différente). Le message ne doit pas faire mention d'instrument et ne peut contenir de dessin. Après échange des messages produits, les élèves (ou groupe d'élèves) récepteurs complètent une amorce semblable à celle des émetteurs (à échelle et orientation différente) à l'aide des messages.

Dans une phase de validation, collective, l'enseignant affiche au tableau les dessins-modèles. En appui sur la comparaison des figures produites avec ces figures modèles mais aussi sur les commentaires des récepteurs à propos des messages, s'opère alors un travail, dans le langage, autour des messages produits : informations nécessaires pour retrouver sans ambiguïté la figure modèle, ordre de la description.

Pour cette figure, le type de message attendu est le suivant :

Construire quatre quarts de cercle à l'intérieur du carré. Les centres de ces quarts de cercle sont les sommets du carré. Leur rayon est égal à la moitié de la longueur des côtés du carré.

Sur cet exemple relativement simple, nous pouvons d'ores et déjà pointer les opérations de désignation nécessaires à la rédaction de ce message :

- Désigner des sous-éléments de la figure de dimension 2, 1 ou 0 (carré, sommets, cercle, côtés, milieu, centre)
- Expliciter des relations entre ces objets via la capacité de désignations multiples d'un même objet : le milieu d'un côté du carré est aussi centre d'un demi-cercle, les sommets du carré sont aussi centres des quarts de cercle…mais aussi caractériser les demi et quarts de cercles par leur centre et leur rayon

Cette situation prolonge ainsi l'activité de reproduction instrumentée de dessins en mettant en scène un travail de concordance de l'analyse géométrique de la figure dans les registres graphique et langagier.

L'expérimentation de ce type de situation en classe révèle à la fois la richesse et la difficulté de la mise en œuvre de ces situations. Malgré le travail important mené autour de la reproduction de figures, le travail dans le langage engagé autour du traitement instrumenté des dessins et l'institutionnalisation de caractérisations du cercle, les premiers messages produits par les élèves sont majoritairement très lacunaires, comme en témoigne l'exemple (figure 16).

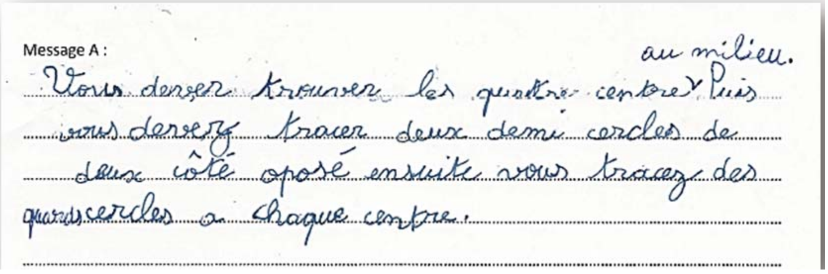

Message A :
Vous devez trouver les quatre centre au milieu. Puis vous devesz tracer deux demi cercles de deux côté oposé ensuite vous traçez des quardscercles a chaque centre.

Figure 16

Cette situation rend nécessaire un langage qui permet non plus de décrire la figure à reproduire mais de la définir. Ceci représente bien sûr toutefois un saut cognitif important pour les élèves et ce travail, pour être mené à bien, nécessite l'articulation de telles situations de formulation avec des situations de validation. Nous présentons, très succinctement ici, un exemple de telle situation.

2 Situations de validation autour de la reproduction de figures

Les situations de validation envisagées visent à dévoluer aux élèves la question la validité de l'analyse géométrique formulée, et à engager un travail autour de son caractère nécessaire et suffisant. Voici un exemple de situation mise en œuvre dans le prolongement de la situation de formulation présentée dans le paragraphe précédent.

La première étape consiste pour les élèves à restaurer une figure à partir d'un message fourni par l'enseignant et d'une amorce donnée. Le message, volontairement lacunaire, a été élaboré par l'enseignante sur le modèle des messages incomplets produits par les élèves dans la situation de formulation précédente. Dans une deuxième étape, l'enseignante organise une mise en commun des dessins produits, et une mise en regard de ces productions avec le dessin modèle attendu.

S'engage alors, dans une troisième étape, un travail autour du message, vers la formulation propriétés de la figure et relations entre des sous-éléments nécessaires à une description définitoire de la figure.

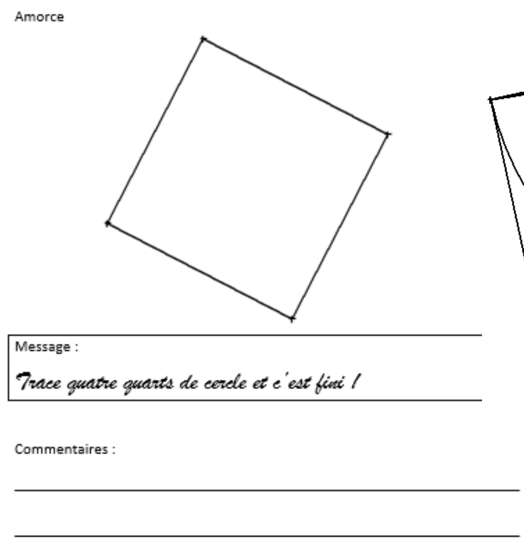
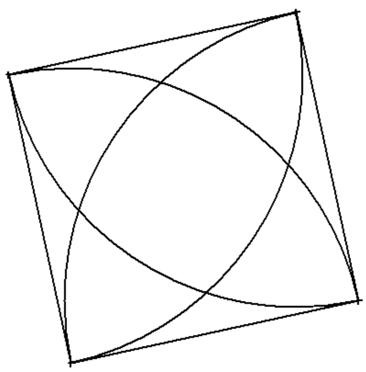
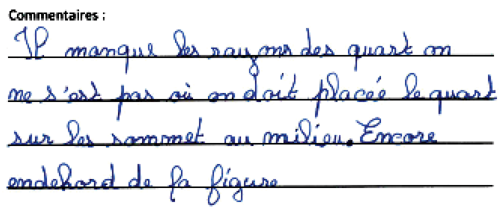
Etape 1	Etape 2	Etape 3
	 n modèle	Travail sur le texte, en appui sur les productions et commentaires des élèves 

Figure 17

Dans les situations de reproduction de figures présentées précédemment, le dessin est considéré comme représentation principale, autosuffisante de la figure : l'analyse langagière développée dans les phases de verbalisation remplit une fonction de description. Dans les situations de formulation comme celles décrites ci-dessus, *l'analyse langagière est considérée comme représentation principale, autosuffisante de la figure* (Duval, 2005, p.34): le dessin à une fonction d'illustration comme exemple ou contre-exemple. S'opère alors un nécessaire renversement du statut des énoncés produits sur le dessin : d'une description pragmatique de la figure, à une description définitoire de celle-ci. Ce travail nous semble ainsi extrêmement riche, participant d'un basculement dans l'interprétation du dessin et de l'objet de travail, du dessin à la figure. Nous entrevoyons là des pistes de réflexion vers un travail autour de la distinction entre dessins et figures, en appui sur l'articulation entre traitement instrumenté des dessins, dans le registre graphique, et traitement des dessins dans le registre langagier.

V - CONCLUSION

À travers ce texte, reprenant notre exposé lors de ce colloque, nous souhaitions rendre compte et articuler des recherches développées en France autour de l'enseignement de la géométrie ces quinze dernières années. Nous espérons avoir mis en évidence à la fois la forte cohérence et la complémentarité des approches sémiotiques proposées par ces recherches. Faisant de la construction d'une interprétation géométrique des dessins un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie plane à l'école, nous avons proposé des pistes explorant les potentialités d'une articulation entre construction d'un rapport géométrique aux dessins et travail visant l'évolution de modalités de traitements instrumentés et langagiers de ces dessins.

Les recherches que nous menons, en collaboration étroites avec des équipes d'enseignants, sont avant tout compréhensives. Elles nous livrent cependant des outils pour la formation des enseignants en didactique de la géométrie.

Prendre conscience de la spécificité que représente une interprétation géométrique des dessins et penser l'apprentissage de la géométrie comme la construction progressive d'un rapport géométrique aide en premier lieu à cerner des enjeux possibles de l'enseignement de la géométrie à l'école. Cela permet de comprendre les implicites des nouveaux programmes de 2015 et aide à penser des programmations et progressions possibles, de la maternelle au début du collège. La considération des liens étroits qu'entretiennent interprétation et traitements instrumentés des dessins permet ensuite de mieux comprendre les potentialités de situations de reproduction de figures, le rôle central des instruments et les jeux de variables possibles autour de ces situations. Enfin, un appui sur ces recherches nous permet d'attirer l'attention des enseignants sur le rôle crucial d'un travail dans et sur le langage, situé, dans les processus d'apprentissage en géométrie. Il nous permet d'une part un travail d'anticipation de phases de verbalisation lors de la mise en œuvre de situations de reproduction de figures en classe. Il nous permet également d'envisager, avec les enseignants, l'insertion de situations de reproduction de figures dans des progressions plus globales articulant situations d'action, de formulation et de validation, de la maternelle au cycle 3. Nous espérons ainsi suggérer des pistes vers de possibles éléments de formation visant à outiller les enseignants pour le choix et l'analyse de problèmes riches pour les classes.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. (1989) La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans. *Actes de la 13ème conférence Psychology of Mathematics Education,* **I**, 85-92.

ARTIGUE M., ROBINET J. (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherche en Didactique des Mathématiques***, 3.2**, 5-64.

BALACHEFF N., SOURY-LAVERGNE S. (1996) Explication et préceptorat... Baron M. (ed.) *Explication et EIAO Rap. LAFORIA,* **96/33**, 37-50. Paris: Uni. Blaise Pascal

BAKTHINE M. (1984) *Esthétique de la création verbale.* Paris : Gallimard.

BARRERA CURIN I. R., BULF C., VENANT F. (2016) Didactique, Sémantique et métaphores : analyses de langages en classe de géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **21**, 39-78.

BARRIER T., MATHE A.C. (éds) (2014) *Langage apprentissage et enseignement des mathématiques*, *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, **54**.

BARRIER T., HACHE C., MATHE A.-C. (2014) Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves. *Grand N,* **93**, 13-37.

BERNIE J.P (2002) L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ? *Revue française de Pédagogie,* **141**, 77-88.

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1993) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, **53**, 39-56.

BULF C., CELI V. (2015) Une étude diachronique des problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3*, Grand N,* **96**, 5-33.

BULF C., CELI V. (2016) Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire - une articulation clé : gabarit-compas, *Grand N*, **97**, 21-58.

BULF C., MATHE A.C., MITHALAL J. (2014) Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, **54**, 29-48.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHAACHOUA H. (1997) *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*. Université Joseph Fourier, Grenoble.

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, **17**, 121-138.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Peter Lang, Bern.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **10**, 5-53.

DUVAL, R., GODIN, M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

HOUDEMENT C. (2013) Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques. *Note pour l'Habilitation à Diriger des Recherches*. Université Paris Diderot.

JAUBERT M, REBIERE M. (2012) Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative, *forumlecture.ch, plate-forme internet sur la littératie*, http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.-J. & DELPLACE J.-R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, **79,** 33-60.

LABORDE C & CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **14 (1)**, 165-210.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2015) Programmes d'enseignement de l'école, *BO spécial n° 11 du 26 novembre 2015.*

MANGIANTE-ORSOLA C. & PERRIN-GLORIAN M.J. (2014) Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres, *Actes du XLème colloque de la COPIRELEM*, Nantes 2013.

MARGOLINAS C. & LAPARRA M. (2011) Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. *La construction des inégalités scolaires* (dir. J.-Y Rochex et J. Crinon), 19-32.

MATHE A.C & MITHALAL J. (*à paraître*) L'usage des dessins en géométrie, quelques enjeux pour l'enseignement, *Actes de la XIXème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Paris 2017.

OFFRE, B., PERRIN-GLORIAN, M.-J., VERBAERE, O. (2007) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, **77**, 7-34.

PARSYSZ B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse. Paris : Université Paris-7.

PERRIN-GLORIAN M.J., GODIN M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école,* **222**, 26-36.

PERRIN-GLORIAN, M.-J., MATHE, A.-C., LECLERCQ, R. (2013) Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM,* **90**, 7-41.

EXPLORER L'APPORT DES GESTES DANS LES PROCESSUS D'ARGUMENTATION MATHÉMATIQUE DANS UNE PERSPECTIVE SÉMIOTIQUE

Cristina SABENA
Professeur associé en didactique des mathématiques
Département de philosophie et sciences de l'éducation, Universita di Torino (Italie)
cristina.sabena@unito.it

Résumé
L'intérêt pour le rôle des gestes dans les activités mathématiques et dans l'apprentissage des mathématiques se situe dans le thème plus large de la multimodalité de l'apprentissage, qui considère le rôle du corps et de l'activité avec signes et instruments dans la formation de la pensée. La perspective multimodale adoptée est intégrée dans une approche sémiotique. Cette approche considère une notion large de signe s'appuyant sur les travaux de Vygotsky (1931-1978) et elle encadre les signes dans un modèle systémique et dynamique : le modèle du « semiotic bundle » (« faisceau sémiotique »). Dans ce cadre, cette présentation[1] se focalise sur le rôle des gestes dans leur interaction avec les autres signes (le discours, en particulier) et étudie le support qu'ils peuvent offrir aux processus d'argumentation mathématique. Une étude de cas à l'école primaire dans le contexte des jeux d'interaction stratégique fournit les données pour montrer que les gestes peuvent soutenir les élèves dans le développement d'argumentations qui s'appuient sur des considérations empiriques pour passer à un plan hypothétique où l'on approche la généralité. À partir de là, des implications pratiques possibles pour les enseignants de mathématiques sont proposées.

I - LA MULTIMODALITE ET SES RACINES AU SEIN ET EN DEHORS DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Les origines de l'attention portée à la multimodalité dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques peuvent se retrouver dans d'importants travaux de recherche en didactique des mathématiques et pas seulement. Spécifiquement, ces travaux ont porté l'attention sur les processus d'apprentissage et d'enseignement ainsi que sur la nature de ces processus.

Dans le domaine de la didactique des mathématiques, l'attention portée aux processus a émergé dans les années 1990. J'aime, à ce propos, citer Hans Freudenthal dans ses conférences de Chine (China Lectures), là où il attire l'attention sur les processus au cœur de la recherche en didactique des mathématiques :

> "…the use and attention to processes is a didactical principle." [...l'utilisation et l'attention aux processus est un principe didactique]

À partir de cette période, beaucoup de travaux ont visé les processus de conceptualisation, d'apprentissage, de résolution problèmes, etc. des élèves de différents niveaux scolaires, en se focalisant sur les pratiques discursives et sur les transformations entre différents registres sémiotiques, oral ou écrit (Duval, 1995).

Mais, si l'on considère la phénoménologie des processus d'apprentissage dans la classe de mathématiques, on voit une variété d'actions et de productions activées par les élèves et par l'enseignant en utilisant simultanément des ressources différentes : bien sûr les mots (prononcés ou écrits) et les représentations écrites, mais aussi des formes d'expression extra-linguistiques (gestes, regards, ...) et l'utilisation de différents outils. En effet, au cours des dix dernières années, dans la recherche

[1] Une version de ce travail a été présentée dans une *Invited* Lecture à ICME13 à Hambourg, en juillet 2016. Les actes, en anglais, seront bientôt publiés.

internationale en didactique des mathématiques, plusieurs travaux soulignent l'importance et la coexistence mutuelle d'une variété de modalités ou de ressources cognitives, matérielles et perceptives, dans les processus d'enseignement-apprentissage en mathématiques et plus généralement dans la pensée mathématique (Radford, Edwards & Arzarello, 2009). L'hypothèse de travail qui unit ces travaux est que ce type de ressources joue un rôle important non seulement dans la communication mais aussi dans les processus cognitifs, qui sous-tendent la production de la signification mathématique.

L'attention portée à la multimodalité provient cependant de travaux menés en dehors de la didactique des mathématiques, en particulier dans les domaines de la psychologie, de la psycholinguistique et des neurosciences ainsi que de travaux en sciences de la communication.

Dans les sciences cognitives, l'*embodied cognition* (« la cognition incarnée ») est une perspective qui attribue au corps un rôle central dans la formation de l'esprit. Lors du passage au nouveau millénaire, en 2000, l'ouvrage provocateur « Where Mathematics Comes From » de George Lakoff et Rafael Núñez a souligné le rôle crucial des aspects perceptuels et matériels dans la formation de concepts abstraits, y compris les concepts mathématiques. Ce nouveau point de vue a mis l'accent sur les fonctions sensorielles et motrices ainsi que sur leur importance pour la réussite de l'interaction avec l'environnement. En critiquant l'idéalisme platonicien et le dualisme cartésien entre le corps et l'esprit, Lakoff et Núñez (2000) préconisent que tous les types d'idées, y compris les idées mathématiques les plus sophistiquées, sont fondées sur nos expériences corporelles et se développent à travers des mécanismes cognitifs métaphoriques.

Cela a également ouvert un grand débat sur l'éducation mathématique au cours de ces années et a suscité une réflexion sur les origines des idées mathématiques dans l'homme, et (même) après ce déclencheur, plusieurs recherches ont souligné le rôle des expériences corporelles et kinesthésiques dans l'apprentissage des mathématiques (Arzarello & Robutti, 2008; de Freitas & Sinclair, 2014; Nemirovsky 2003; Radford et al., 2007; Roth, 2009; pour une vue d'ensemble voir Gerofsky, 2015).

L'idée que le corps joue un rôle dans la formation de la pensée n'est pas complètement nouvelle : pour cela, il suffit de relire les travaux de Piaget, Vygotsky, Montessori en psychologie et les perspectives phénoménologiques de Husserl et Merleau-Ponty. Quoi de nouveau dans l'*embodiment* ? Surement le rôle assigné aux métaphores en tant que les principaux mécanismes cognitifs pour l'abstraction. L'exemple classique est celui du temps conceptualisé comme espace (quand on dit « Noël approche », on parle en termes spatiaux d'un objet temporel) ou, en mathématiques, les ensembles comme des contenants (« l'élément est dans l'ensemble », on parle d'objets immatériels en termes d'objets matériels).

Plus récemment, la perspective de l'*embodiment* semble être confirmée par les résultats neuroscientifiques portant sur les « neurones miroirs » et sur les « neurones multimodaux » qui s'activent lorsque le sujet accomplit une action, lorsqu'il observe quelqu'un d'autre faire la même action, ainsi que lorsqu'il imagine cette action (Gallese et Lakoff, 2005). Sur la base de ces résultats, Gallese et Lakoff (*ib.*) offrent un nouvel apport théorique sur le fonctionnement du cerveau, selon lequel « action et perception s'intègrent au niveau du système sensori-moteur et non pas par le biais d'aires d'association supérieure » (*ib.*, p. 459). En particulier, un tel résultat apparaîtrait comme crucial non seulement pour contrôler le mouvement mais aussi pour planifier les actions, une activité typique de ce qui est généralement conçu comme « penser ».

Les termes 'multimodal' et 'multimodalité' reviennent alors à indiquer une caractéristique de la cognition humaine opposée à la 'modularité'. D'autre part, dans le champ de la communication le terme « multimodal » est utilisé en référence à des modalités multiples que nous avons pour communiquer et exprimer des significations auprès de nos interlocuteurs : mots, sons, images, etc. (Kress, 2004). De nombreuses études sur le rôle des gestes dans la communication et la cognition suggèrent une sorte de relation entre les différentes modalités. Par exemple, selon Calbris (2011) :

> One uses parallel sensory pathways, audio-oral and visuo-gestural, which interact in multimodal communication, that is, the ensemble of spoken linguistic, prosodic, intonational, gestural, postural, and facial activity that participants engage in when they 'talk'.

Ces potentialités communicatives attirent une attention croissante grâce à la diffusion de nouvelles potentialités technologiques, qui développent constamment de nouvelles possibilités d'interaction à travers nos corps (par exemple, les appareils touch-screen).

À l'instar de Radford, Edwards et Arzarello (2009), je considère la multimodalité comme se référant à l'importance et à la coexistence mutuelle d'une variété de modalités ou de ressources cognitives, matérielles et perceptives dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, et plus généralement dans la construction du sens des concepts mathématiques :

> Ces ressources ou modalités incluent à la fois la communication symbolique orale et écrite ainsi que le dessin, le geste, la manipulation d'artefacts matériels et numériques, et plusieurs types de mouvements du corps. (*ib.*, pp. 91-92)

D'autre part, l'intérêt pour les aspects *embodied* et multimodaux nécessite la prise en compte des aspects sociaux, historiques et culturels dans la genèse des concepts mathématiques, qui ont été négligés par les perspectives qui réfèrent à l'*embodiment* (pour une critique, cf. Schiralli et Sinclair, 2003 ; Radford et al., 2005). Les mathématiques sont en effet « inséparables des instruments symboliques » et l'acte de savoir est un phénomène « culturellement modelé » (Sfard et McClain, 2002, p. 156) dans lequel l'utilisation des instruments et des signes joue un rôle important.

Cette limite principale de l'*embodiment* peut être surmontée en adoptant une approche sémiotique dans laquelle les dimensions sociales et culturelles sont considérées, et notamment je vais m'appuyer sur l'idée vygotskienne de signe, présentée dans la section suivante.

II - UNE APPROCHE SEMIOTIQUE POUR LA MULTIMODALITE

Dans la perspective vygotskienne sur le développement cognitif humain (ou développement culturel), les signes jouent un rôle crucial (Vygotsky, 1931-1978). Un tel processus général, qui tient compte de la formation de la conscience humaine par l'individualisation progressive des fonctions sociales inhérentes, s'appelle l'internalisation. En particulier, selon la loi génétique du développement culturel, il y a un passage des fonctions interpsychiques, qui sont partagées au niveau social, aux intrapsychiques, qui se rapportent à la personne au niveau individuel.

Grâce à leur signification sociale, les signes servent à l'individu pour exercer un contrôle volontaire sur son comportement, comme les signaux routiers signalent aux individus les événements permettant de régler leur conduite. Par analogie avec les outils dans le milieu du travail, les signes fonctionnent, sur le plan psychologique individuel, comme « moyens stimulants » qui représentent des caractéristiques ou des aspects de l'expérience socialement partagée et pilotent les processus mentaux de l'individu :

> L'invention et l'utilisation des signes comme moyens auxiliaires pour résoudre un problème psychologique (se rappeler, comparer quelque chose, rendre compte, choisir etc.) est analogue à l'invention des outils d'un point de vue psychologique. Les signes agissent comme instruments d'activité psychologique de la même façon que le rôle d'un outil de travail (*ib.*, p. 52).

Dans cette perspective, les signes sont considérés dans leur rôle fonctionnel en tant qu'outils psychologiques, permettant au sujet de réfléchir et planifier ses actions, et en tant que médiateurs culturels (Radford & Sabena, 2015).

Cela est une idée très générale du signe – qui diffère des cadres sémiotiques classiques, souvent adoptée dans la recherche en didactique des mathématiques, comme la notion de registre de représentation sémiotique de Duval (1995) – puisqu'elle ne pose pas de prescriptions sur ce que peut être un signe et sur les caractéristiques qu'il peut avoir : les gestes peuvent alors être considérés en tant que signes, comme Vygotsky (1931-1978) même l'a souligné dans son célèbre exemple du geste de *pointage* pour illustrer le processus d'internalisation à partir de la signification qu'une mère assigne au mouvement de la main de son enfant.

En prenant l'idée de signe vygotskienne, dans le but d'inclure des gestes ainsi que d'autres registres plus classiques, je me sers de l'outil « semiotic bundle » ou « faisceau sémiotique » (Arzarello, 2006 ; Arzarello et al., 2009 ; Sabena et al., 2012) comme un système composé de signes (ou ressources sémiotiques) différents et de leur relations mutuelles, qui sont produits par les élèves et éventuellement par l'enseignant durant l'activité mathématique : mots (prononcés ou écrits), schémas écrits, gestes, outils, etc. De façon similaire à l'idée de « système sémiotique », au sens de Radford (2002), le faisceau sémiotique inclut à la fois les registres classiques avec des règles de production et de transformation précises et codifiables (Duval, 2006), et les registres *embodied*, qui nous permettent de rendre compte en termes sémiotiques des processus multimodaux se produisant dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Un exemple peut être constitué par les mots, les gestes et les figures dessinées par les élèves pendant la résolution d'un problème géométrique.

Le faisceau sémiotique est caractérisé par deux aspects-clés :

- un caractère systémique, révélé par une analyse synchronique des relations entre les différents types de signes à un moment donné (comme une sorte de « photo sémiotique ») ;
- une nature dynamique, révélée par une analyse diachronique se focalisant sur les évolutions des signes et de leurs transformations dans le temps (une sorte de « film sémiotique »).

Les analyses synchroniques et diachroniques—qui ne sont distinguées que pour l'analyse—sont effectuées en regardant en détail les vidéos des activités de classe où les élèves sont engagés, avec leurs transcriptions multimodales, c'est-à-dire des transcriptions qui incluent non seulement les mots mais aussi l'enregistrement des gestes et d'autres types de signes.

Dans cette analyse, les gestes se manifestent de façon évidente comme des ressources multimodales présentes dans les processus d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. La section suivante est consacrée à l'approfondissement de cette question d'un point de vue théorique.

III - LES GESTES COMME RESSOURCES MULTIMODALES

Le fait d'inclure les aspects *embodied* dans l'analyse de la pensée et de l'apprentissage mathématique a fait émerger l'étude des gestes comme une composante cognitive et communicative importante.

Les gestes accompagnant le discours sont un phénomène commun, comme le travail précurseur de Kendon (1980) l'a souligné. En linguistique, pour la première fois, il a commencé à considérer les gestes comme un aspect constitutif de la communication, dans un contraste marquant avec les perspectives antérieures, qui les considéraient comme de simples ornements du discours, de rhétorique ou comme des moyens de décharge d'énergie excessive. La recherche s'est depuis intéressée à l'étude des gestes spontanés, qui sont habituellement faits dans un espace devant soi, nommé l'« espace gestuel », avec des mouvements souvent symétriques des mains, qui partent d'un état de repos, et reviennent à un état de repos. Plusieurs études psychologiques et psycholinguistiques ont mis en avant que le discours et les gestes spontanés — que l'on appellera simplement gestes dans la suite — sont étroitement liés et que faire des gestes est important non seulement dans les processus de communication mais aussi dans les processus liés à la pensée (McNeill, 1992, 2005 ; Goldin-Meadow, 2003).

Le discours et les gestes sont étroitement liés à plusieurs égards (McNeill, 1992) car ils sont temporellement simultanés :

- dans les aspects phonologiques (la phase centrale du geste coïncide avec le sommet de la phrase phonologique),
- dans les aspects sémantiques (au niveau de la signification),
- dans les aspects pragmatiques (leur fonction dans le discours).

Même dans le développement de l'enfant, le geste et le discours évoluent ensemble. Au niveau cognitif, les experts identifient la fonction importante d'alléger la mémoire de travail, en donnant la possibilité de mieux réorganiser les ressources cognitives (Goldin-Meadow et al., 2001).

Si déjà Vygotsky (1934-1986, p. 218) a souligné le rôle constitutif du langage dans la pensée, en affirmant qu'« une pensée n'est pas simplement exprimée par les mots ; elle naît avec eux », en psychologie, plusieurs travaux sur les gestes visent à élargir ce rôle constitutif du langage à l'unité discours-gestes. Citant McNeill (1992), on peut dire que « les gestes non seulement reflètent la pensée mais ont un impact sur la pensée. Les gestes, avec le langage, aident à constituer la pensée" (p. 242, souligné comme dans l'original). C'est dans cette hypothèse vygotskienne que je considère le rôle des gestes dans les activités mathématiques.

Ces interprétations cognitives offrent les éléments pouvant expliquer, par exemple, pourquoi nous faisons des gestes durant les conversations téléphoniques (Ruiter, 1995) ; pourquoi, lorsqu'il nous est empêché de faire des gestes, notre discours devient moins fluide ; ou pourquoi même les aveugles de naissance utilisent les gestes pendant qu'ils parlent. Ces phénomènes ne peuvent pas être expliqués seulement en termes de dimension communicative interpersonnelle : les gestes assument ainsi un rôle constitutif dans les processus de la pensée.

Les travaux sur les gestes ont fourni d'autres outils d'analyse, notamment, McNeill (1992) identifie quatre types de gestes :

- le geste iconique, s'il entretient une relation de ressemblance avec le contenu sémantique du discours (par exemple, incliner deux mains pour indiquer un toit) ;
- le geste métaphorique, similaire au geste iconique, mais avec un contenu visuel présentant une idée abstraite qui n'a pas de forme physique (un exemple classique est la main dans l'acte de tenir un objet, lorsqu'on fait référence à l'idée d'un « sujet donné » dans le discours) ;
- le geste déictique, s'il indique un objet, un événement, ou un lieu dans le monde concret ;
- le geste qui contribue à souligner des parties du discours (en anglais, 'beats').

Les gestes déictiques sont effectués généralement avec l'index levé (parfois avec des objets tenus dans la main, comme un stylo) et sont aussi appelés *pointage*. Apparemment simple, montrer du doigt est au contraire un acte complexe. En plus des *pointages* concrets (comme indiquer un livre sur la table), la recherche a identifié aussi des *pointages* abstraits, quand la main ou les doigts sont levés dans l'espace comme s'ils indiquaient quelque chose, alors que l'espace semble être vide. Selon l'interprétation de McNeill (ib., p. 173) :

> L'orateur semble montrer quelque chose du doigt dans l'espace vide, mais en effet l'espace n'est pas vide ; il est plein de signification conceptuelle. Cette déixis abstraite implique une utilisation métaphorique de l'espace dans lequel des formes spatiales sont données aux concepts.

Les types de gestes identifiés par McNeill (ib.) ne prennent pas en compte leurs caractéristiques physiques mais considèrent les relations avec l'information contextuelle : cela implique que le processus interprétatif nécessite la prise en compte du contexte plus large où le geste est effectué. En outre, il est important de souligner qu'un même geste peut être à la fois de diverses natures.

De plus, les gestes sont parfois caractérisés par la répétition : des caractéristiques distinctes d'un geste se reproduisent au cours du discours (pas forcement des gestes consécutifs), et la récurrence peut être signalée par la posture de la main, sa position, son orientation, son mouvement, son rythme, etc. (McNeill et al., 2001). Ce phénomène est appelé *catchment* et peut être relié à la cohésion du discours :

> En détectant les *catchments* créés par un orateur donné, nous pouvons voir ce que cet orateur est en train de combiner en unités plus larges du discours – quelles significations sont considérées comme similaires ou reliées et groupées ensemble, et quelles significations sont mises dans des *catchments* différents ou isolés, et sont ainsi vus pas l'orateur comme ayant des significations distinctes voire moins reliées. (ib., p. 10)

Dans le modèle du faisceau sémiotique, les *catchments* peuvent être identifiés grâce à une analyse diachronique : ils peuvent avoir une grande importance car ils nous renseigneraient sur les significations sous-jacentes dans le discours et dans ses dynamiques. Par exemple, dans le contexte de classe, étudier les *catchments* pourrait nous fournir des indices sur l'évolution des significations chez les élèves. De plus, les *catchments* peuvent contribuer à l'organisation d'un argument au niveau logique, comme identifiée dans des travaux précédents (Arzarello et Sabena, 2014).

Dans la suite, la loupe du faisceau sémiotique est appliquée à un ensemble de données empiriques portant sur les processus d'argumentations mathématiques, dans le but de répondre à la question suivante :

Quelle contribution spécifique peuvent donner les gestes, lorsqu'ils sont considérés comme des signes dans des faisceaux sémiotiques, pour les processus d'argumentation ?

L'analyse très fine, présentée ci-après, sera centrée sur une étude de cas. Le travail est fait à partir de données provenant d'enregistrements vidéos dans une classe de l'école élémentaire.

IV - UNE ETUDE DE CAS : LA COURSE A 20

L'étude de cas est centrée sur un jeu d'interaction stratégique appelé « La course à 20 » (Brousseau, 1997). Cette étude fait partie d'un projet de recherche orienté par la conception des jeux stratégiques afin de favoriser les processus de résolution de problèmes et d'argumentation, de l'école primaire à l'école secondaire.

Le jeu est joué par deux joueurs, qui cherchent à atteindre le nombre 20 en rajoutant, à tour de rôle, 1 ou 2. Précisément, le premier joueur dit 1 ou 2 ; le deuxième joueur doit rajouter 1 ou 2 au nombre précédent, et dire le résultat ; à ce moment, le premier joueur rajoute alors 1 ou 2, etc. Le joueur qui dit 20 en premier gagne le jeu. Dans la théorie des jeux, ceci est un jeu à information complète et parfaite, fondé sur des prises de décisions séquentielles. Comme le lecteur peut le vérifier, la stratégie gagnante consiste à commencer en premier et à suivre la séquence des nombres 2-5-8-11-14-17-20. Dans ce type de jeux, le joueur a besoin de trouver, *pour chaque* tour de son adversaire, le *tour correct* pour gagner le jeu. Ces processus peuvent être reliés au schéma logique de coordination d'un quantificateur universel avec un quantificateur existentiel, comme dans le cas de nombreux théorèmes mathématiques.

Je vais m'appuyer sur des données provenant d'une discussion dans une classe de 4[e] année de l'école élémentaire (9-10 ans). Le débat démarre après des séances où les élèves ont joué le jeu en binôme en écrivant les nombres ajoutés sur des flèches qui vont de gauche à droite et les résultats sur une ligne qui va de gauche à droite (comme en Figure 1).

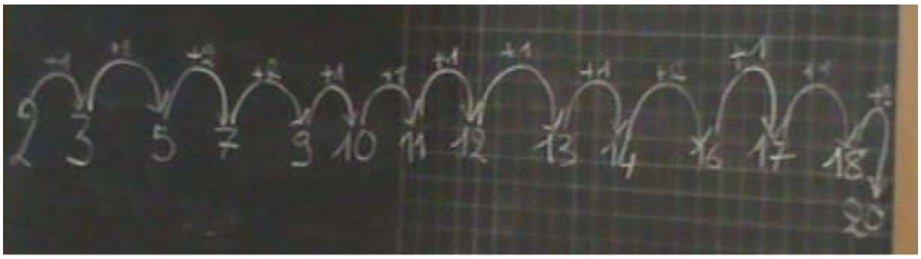


Figure 1. Modèle sémiotique introduit par l'enseignante pour jouer à la course à 20.

Ce modèle sémiotique a été introduit par l'enseignante pour permettre aux élèves de garder trace à la fois des nombres gagnants et des nombres ajoutés. Cette trace se voulait être un support pour les élèves dans leur recherche de régularités qui sont à la base de la stratégie gagnante.

La discussion est organisée à la suite d'un tournoi de classe, dans lequel un représentant de chaque équipe a joué le match au tableau (le dernier match est montré en Figure 1). L'enseignante débute une discussion en explicitant le but de *trouver une stratégie gagnante* et de *la justifier*.

Je vais me focaliser en détail sur les contributions de quelques élèves — Giulio, Eliana et Elisa – mais je vais d'abord donner quelques informations sur le contexte, pour faciliter la compréhension de l'analyse.

Au démarrage de la discussion, les nombres 14 et 17 sont identifiés immédiatement comme nombres gagnants : dans quelques cas les justifications sont fondées sur les tours possibles des deux joueurs, comme le dit Elena :

Elena : tu dois atteindre d'abord 14 et puis 17. Parce que si tu fais 14 plus 1 et tu obtiens 15 et après tu fais plus 2, et tu obtiens 17, après… tu fais plus 1 pour arriver à 18 et l'autre fait 2 et atteint 20. Tandis que si à 14 tu fais plus 2, tu arrives à 16 et l'autre fait plus 1 pour arriver à 17, l'autre 19 s'il fait plus 2, tu fais plus 1, et tu atteins 20. Donc en tout cas, de 14 à 17 tu arrives quand même à 20.

Dans d'autres cas, les élèves s'appuient sur les *observations empiriques* de ce qui est vraiment arrivé pendant le tournoi, comme Filippo :

Filippo : à mon avis selon comment j'ai joué pendant ces deux tours j'ai vu que je suis toujours arrivé sur le 14 et sur le 17. Donc, quand tu es à la fin du jeu, tu dois toujours arriver sur le 14 et sur le 17, parce que ces nombres sont les nombres chanceux qui te permettent de gagner.

Par induction à rebours, le nombre 11 commence à être identifié comme nombre gagnant et relié à 14 et à 17 :

Diego : 11 est un nombre important peut-être, parce que peut-être mon équipe rajoute 2 et ça fait 13, l'autre équipe rajoute 1 et arrive à 14, j'ajoute 1, 15, ils rajoutent 2 et ça fait 17.

À ce moment, après environ 20 minutes de discussion entre élèves, Giulio propose une règle générale pour identifier tous les nombres gagnants :

Giulio : Je crois que pour les nombres gagnants tu enlèves toujours 3 : de 20 tu enlèves 3 et tu arrives à 17 ; de 17 tu enlèves 3 et tu arrives à 14, je crois qu'un autre nombre gagnant pourrait être 11, pourrait être…8, pourrait être...5, pourrait être...2.

Avec la stratégie décrite, Giulio identifie tous les nombres gagnants à partir du résultat gagnant (20) et en procédant par des soustractions répétées, dans un processus d'induction à rebours, comme décrit dans la théorie des jeux. La stratégie est exprimée verbalement en termes généraux, sans référence à des simulations de tours, et elle est accompagnée par de nombreux gestes. Le tableau 1 présente la transcription de la partie initiale de l'affirmation de Giulio, enrichie de la composante gestuelle et de mots originaux en italien. Les mots soulignés indiquent qu'ils sont simultanés avec le geste montré et la même convention sera utilisée dans les tableaux suivants.

Quand il dit « tu enlèves toujours 3 », Giulio regarde le tableau noir, où la dernière correspondance est encore affichée, et bouge sa main de droite à gauche (du point de vue de l'élève) : ce mouvement peut être interprété comme indiquant la soustraction, en référence à la droite numérique, qui est très utilisée dans le curriculum italien. Avec cette interprétation, le geste peut être classifié comme un *geste métaphorique* indiquant la soustraction. Remarquons que, dans la version originale en italien, Giulio utilise le terme « togli », qui est employé à la fois dans le contexte de tous les jours pour dire « éliminer, enlever » et dans le contexte mathématique à l'école primaire pour indiquer « soustraire ».

Je crois que pour les nombres gagnants tu enlèves toujours 3.	De 20	tu enlèves 3	et tu arrives à 17
Secondo me dato che i numeri vincenti si toglie sempre 3.	*Da 20*	*togli 3*	*e arrivi a 17*
a)  *La main ouverte bouge de droite à gauche*	b)  *Trois doigts levés*	c)  *Trois doigts levés bougent de droite à gauche*	d)  *Pointage abstrait vers le bas*

Tableau 1. Transcription multimodale de la première partie de la stratégie de Giulio

Le mouvement de la main de droite à gauche est répété quand la règle est appliquée pour identifier les nombres gagnants. D'après le tableau 1 (photos b et c) nous pouvons remarquer que lorsque Giulio dit « de 20 tu enlèves 3 », sa main bouge vers la gauche. En même temps, trois doigts sont montrés, et globalement nous retrouvons *deux références métaphoriques condensées dans un seul geste* :

- le mouvement de droite à gauche → soustraction (en référence à la ligne numérique)
- trois doigts → **nombre** 3 (en référence à la cardinalité)

Quand il complète la phrase et annonce les nombres gagnants, Giulio fait un *pointage* abstrait vers le bas, qui est simultané avec les nombres prononcés (dans le tableau 1, le cas du 17 est présenté dans la dernière colonne).

Si nous considérons la séquence dans son ensemble, nous pouvons voir que la soustraction par 3 est répétée pour obtenir 14 : cette répétition est exprimée aussi par la répétition de la même configuration gestuelle des trois doigts levés (les photos ne sont pas présentes pour manque de place). Le même geste métaphorique est donc répété dans un *catchement* exprimant que le nombre 3 est *toujours* soustrait, afin d'obtenir *tous* les nombres gagnants.

Ensuite (*Je crois qu'un autre…*), nous pouvons remarquer qu'une sorte de « *contraction sémiotique* » se produit à l'intérieur du faisceau sémiotique : le discours se réduit, mentionnant seulement les nombres gagnants, et passe à un niveau hypothétique (*cela pourrait être…*) ; et il paraît que même les gestes se réduisent dans leurs mouvements, pour terminer avec un rapide *pointage* abstrait vers le bas à gauche, en simultané avec l'annonce des nombres gagnants (8, 5, 2).

À ce point, l'enseignante demande à Giulio d'expliquer son idée. Voici ci-après la transcription verbale de l'argument de Giulio :

Enseignante : Explique bien cette idée.

Giulio : Parce que… c'est-à-dire, je sais pas, si tu arrives à 2… Je sais pas, je commence, je fais 1, non je fais 2, lui il arrive et met 1, je mets 2 et je suis arrivé à 5, que je crois être un autre nombre gagnant… oui, arrivé à 5… c'est un nombre gagnant, je crois. Après… il rajoute 2, disons, j'ajoute 1 et j'arrive à 8, qui est un autre nombre gagnant. Elle rajoute 1, j'ajoute 2 et j'arrive à…11, qui est un autre nombre gagnant. Il rajoute 2, j'ajoute 1, et j'arrive à 14, qui est un autre nombre gagnant, il rajoute 1 j'ajoute 2, nous arrivons à 17 qui est un nombre gagnant, il rajoute 1 ou 2, j'ajoute 1 ou 2 et je gagne.

La soustraction devient maintenant un mouvement en avant qui commence par le tout premier tour (numéro 2) d'un match imaginé entre lui et un autre joueur. Ce mouvement est produit par le biais d'une répétition de la même structure linguistique : « il rajoute…j'ajoute…et j'arrive à…, qui est un nombre gagnant ». Cette répétition n'est pas seulement une simple répétition de mots, mais elle est accompagnée d'une *structure de son rythmique* qui est préservée tout le long de la phrase et contribue à transmettre un caractère général à la règle détectée (de façon similaire à ce qui est discuté dans le contexte algébrique dans Radford et al. (2007).

Les gestes sont constamment présents, du premier tour simulé au dernier tour (gagnant). Le tableau 2 présente quelques photos des gestes accompagnant la toute première partie de la phrase de Giulio.

Je commence […], je fais 2	Lui, il arrive et met 1	Je mets 2	et je suis arrivé à 5
Io inizio […], faccio 2	*lui arriva lì e mette 1*	*Io metto 2*	*e sono arrivato a 5*
a)  *Deux doigts levés*	b)  *La main ouverte vers le haut comme si elle contenait quelque chose*	c)  *Deux doigts levés*	d)  *La main ouverte vers le haut comme si elle contenait quelque chose*

Tableau 2. Transcription multimodale de la première partie de l'argument de Giulio.

Pendant qu'il annonce les tours d'un match fictif, Giulio fait à nouveau deux types de gestes métaphoriques. Quand il indique ses propres tours, le geste indique les nombres prononcés en levant le nombre correspondant de doigts, notamment deux doigts quand il dit « deux » (photos a et c dans le tableau 2). Lorsqu'il se réfère aux tours de l'autre joueur ou au résultat obtenu, il tient sa main ouverte vers le haut comme si elle contenait quelque chose (photos b et d dans le tableau 2) : dans ce cas la référence métaphorique est faite pour donner de la généralité aux nombres prononcés.

À un moment donné, en mentionnant un tour de l'adversaire, Giulio utilise une expression linguistique qui, en français, peut être traduite par « disons » ou « par exemple » (in italien c'est « tipo »), et qui peut être interprétée comme exprimant les germes du concept de « tout nombre ». Quand il dit « disons », l'élève effectue un geste qui consiste à faire tourner rapidement la main ouverte (tableau 3, photo a).

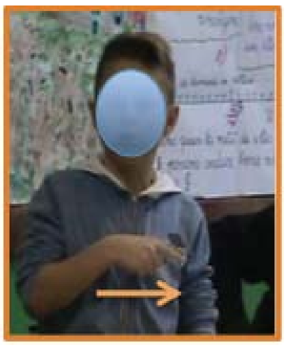
Après… il rajoute 2, disons	[…] Elle rajoute 1,	J'ajoute 2
Poi…lui aggiunge 2, tipo,	*[…] lei aggiunge 1,*	*Io aggiungo 2*
a)  *La main ouverte tourne rapidement*	b)  *Pointage abstrait vers la gauche*	c)  *Pointage abstrait vers la droite*

Tableau 3. La généricité multimodale transmise à travers le faisceau sémiotique.

Le geste est encore métaphorique et le faisceau sémiotique des mots et des gestes met en avant que le nombre 2, choisi pour indiquer le tour de l'adversaire, doit être considéré comme une possibilité parmi d'autres (tous les tours possibles) : c'est-à-dire un tour générique. Cette relation logique est en effet très délicate à gérer : l'articulation entre un quantificateur universel (pour tout tour de mon adversaire) avec un quantificateur existentiel (le tour que je vais choisir après lui). Nous remarquons que la combinaison multimodale de gestes et discours permet aux élèves de bien gérer cette relation.

À partir de là, en même temps que les tours des deux joueurs sont annoncés, des gestes de *pointage* abstrait sont effectués en *alternance spatiale* gauche-droite, ce qui indique visuellement l'alternance entre les deux joueurs dans le jeu (tableau 3, figures b et c). Cette alternance spatiale peut être interprétée comme une aide pour l'élève pour *garder le contrôle de son argument au niveau local*, c'est-à-dire pour contrôler le choix des tours et des contre-tours dans la séquence imaginée. L'alternance spatiale gestuelle est répétée plusieurs fois (*catchement*), pour tout couple de tours et contre-tours, avec le même rythme des mots qui l'accompagnent. Comme indiqué par McNeill (2005), les *catchments* gestuels donnent de la cohésion au discours. Dans ce cas, ils contribuent à *structurer l'argument entier au niveau global*.

Le modèle écrit, à travers lequel ils ont joué le jeu, a probablement aidé Giulio dans le développement de sa stratégie, en fonctionnant comme un outil intériorisé. En fait, quand il annonce la règle générale, il regarde au tableau (tableau 1, photo a), où le dernier match a été écrit (cf. Figure 1). Nous remarquons que ce match n'a pas été joué selon la stratégie de Giulio, et que, après ce moment initial, nous ne retrouvons aucune référence explicite aux matchs joués, par exemple avec des gestes de *pointage* au tableau ou à son cahier : cela peut être un autre indicateur du niveau général atteint par Giulio dans son argumentation.

Le débat se centre ensuite sur la stratégie de Giulio. Quelques élèves partagent immédiatement l'avis de Giulio et produisent leurs propres argumentations, comme Eliana :

> Eliana : Je suis d'accord avec Giulio parce que pratiquement, à chaque fois que tu dois atteindre un nombre chanceux tu dois rajouter 3, parce que d'abord tu rajoutes 1 et puis tu rajoutes 2 ou tu rajoutes 2 et puis tu rajoutes 1.

Eliana explicite que les nombres gagnants ou chanceux peuvent être atteints en *rajoutant* 3 (alors que Giulio a mentionné la soustraction par 3), et produit un argument pour cela, en faisant référence aux deux nombres 1 et 2 qui peuvent être joués dans le jeu. Quand elle dit « tu dois rajouter 3 », elle accompagne son discours avec un geste de la main droite qui tourne de gauche à droite (tableau 4, photo a), pouvant se référer à l'addition sur la droite numérique.

tu dois rajouter 3	parce que d'abord tu rajoutes 1	et puis tu rajoutes 2	ou tu rajoutes 2	et puis tu rajoutes 1
Devi aggiungere 3	*perché prima aggiungi 1*	*e poi aggiungi 2*	*o prima aggiungi 2*	*e poi aggiungi 1*
a)  *Main droite qui tourne de gauche à droite*	b)  *Main gauche qui bouge de gauche à droite*	c)  *Main droite qui bouge de gauche à droite*	d)  *Main gauche qui bouge de gauche à droite*	e)  *Main droite qui bouge de gauche à droite*

Tableau 4. L'argument d'Eliana sur la stratégie d'ajouter 3.

Eliana explique aussi d'où vient ce nombre 3, qui est la combinaison de possibles tours successifs des deux joueurs. En disant les nombres ajoutés pour composer 3, elle bouge d'abord sa main gauche de gauche à droite (photo b dans le tableau 4), puis sa main droite avec le même mouvement (photo c dans le tableau 4) ; elle mentionne les deux combinaisons possibles (1 + 2 ou 2 + 1) et répète la combinaison gestuelle dans un *catchment* (photo c-d dans le tableau 4).

Dans le cas de Giulio, nous pouvons remarquer l'alternance spatiale gauche-droite comme une référence métaphorique à l'alternance des deux joueurs, et nous pouvons remarquer un *catchment*. Mais, maintenant, à la différence de Giulio, le fait d'avoir deux joueurs en alternance est exprimé par Eliana *seulement* à travers son geste car dans son discours elle utilise toujours le pronom « tu », probablement avec un sens impersonnel.

À nouveau, nous pouvons identifier *deux composantes métaphoriques dans un seul geste* :

- mouvement de gauche à droite→ addition
- alternance spatiale → alternance des joueurs.

Immédiatement après Eliana, Elisa intervient :

Elisa : Donc en tout…si tu joues… tu rajoutes à chaque fois 3, et donc si tu peux arriver aux nombres où il y a 3… (*levant l'index et le pouce, photo a, Tab. 5*), c'est-à-dire si… En tout ça fait 3 (*déplaçant les doigts levés de gauche à droite, photo b, Tab. 5*), parce que si tu rajoutes 1 (*déplaçant les doigts levés à sa gauche, photo c, Tab. 5*) et l'autre rajoute 2 (*déplaçant les doigts levés à sa droite, photo d, Tab. 5*), si tu rajoutes 2 et l'autre rajoute 1 (*répétant la séquence avec les doigts à sa gauche et puis à sa droite comme dans les photos c-d, Tab. 5*), en tout ça fait 3 (*bougeant à nouveau les doigts levés comme dans la photo b, Tab. 5*) et donc tu dois réussir à choisir les nombres qui sont…

Enseignante : à une distance…

Elisa : de 3.

si tu peux arriver aux nombres où il y a 3…	c'est-à-dire si… En tout ça fait 3	parce que si tu rajoutes 1	et l'autre rajoute 2
e quindi se tu riesci ad arrivare ai numeri in cui…in cui ci sono 3	*cioè se…in tutto fa 3*	*perché se tu aggiungi 1*	*e l'altro aggiunge 2*
a)  *Geste effectué avec deux doigts levés comme s'ils tenaient un bâtonnet.*	b)  *Geste de tenir-un-bâtonnet déplacé de gauche à droite*	c)  *Geste de tenir-un-bâtonnet déplacé à sa gauche*	d)  *Geste de tenir-un-bâtonnet déplacé à sa droite*

Tableau 5. Geste condensant d'Elisa.

Elisa accompagne son discours avec un geste effectué avec deux doigts levés comme s'ils tenaient un bâtonnet. Ce geste est effectué pour la première fois quand elle dit « il y a 3 » (photo a dans le tableau 5) et maintenu au cours de toute la phrase. Cela indique métaphoriquement une distance figée, de façon similaire à ce qui est décrit dans le contexte pré-analytique dans des études précédentes (Arzarello et al., 2009 ; Sabena, 2007 et 2008). Le mot « distance » n'est jamais prononcé (il sera prononcé immédiatement après, grâce à une suggestion de l'enseignante) : le geste complète ses mots en donnant une signification plus profonde à son discours multimodal.

Lorsqu'elle dit « en tout ça fait 3 », le geste de tenir-un-bâtonnet est déplacé de gauche à droite (photo b dans le tableau 5) : le mouvement de gauche à droite indique que la distance figée (de 3) permet de passer d'un nombre gagnant au suivant dans la séquence. L'élève porte ses yeux au tableau, où le dernier match est encore écrit, selon le modèle choisi par l'enseignante (figure 1). Dans ce modèle, les tours successifs sont écrits l'un après l'autre horizontalement. Le mouvement horizontal du geste d'Elisa pourrait être interprété dans ce milieu, en suggérant que le choix sémiotique de l'enseignante a été utile pour développer l'argumentation des élèves. En même temps, le geste pourrait se référer métaphoriquement à l'addition sur la droite numérique intériorisée. Nous retrouvons un autre exemple d'un *geste condensant des significations différentes*, à travers ses références métaphoriques et son caractère dynamique. Par le caractère condensant des gestes et dans la synergie avec le discours, les différentes significations arrivent à se connecter pour construire une partie importante de l'argument.

À travers la répétition du geste (ou *catchment*), le geste condensant se combine alors avec l'alternance spatiale se référant encore à deux joueurs (photos c et d dans le tableau 5) : le *catchment* soutient le passage d'une relation entre tours à une relation entre nombres qui peuvent justifier ces tours, et indique que cette distance ne varie pas tout le long de la séquence gagnante du jeu.

V - DISCUSSION

L'exemple présenté met en évidence que les significations mathématiques qui apparaissent dans l'enseignement et l'apprentissage sont de nature *multimodale*, ainsi que la discussion théorique proposée. Dans cette nouvelle conception, les *gestes*, la *posture* corporelle, les *actions kinesthésiques*, les *artefacts* et les *signes* en général sont considérés comme une gamme fructueuse de *ressources* à prendre en compte afin d'étudier comment les élèves apprennent et comment les enseignants enseignent. Ces ressources matérielles et sensibles ne sont pas considérées comme un simple épiphénomène de l'enseignement et de l'apprentissage : elles sont conceptualisées comme des *éléments centraux de la pensée mathématique des élèves et des enseignants*.

L'analyse présentée a également fourni un exemple d'analyse multimodale sémiotique avec l'instrument de faisceau sémiotique, avec sa notion large de signe s'appuyant sur les travaux de Vygotsky (1931-1978), et ses caractéristiques systémiques et dynamiques.

Il est intéressant de remarquer que les nouvelles technologies se sont révélées indispensables pour l'analyse des interactions entre les élèves et l'enseignant dans la classe et qu'elles ont relancé la prise en compte des aspects multimodaux dans l'apprentissage des mathématiques. Même si, au début des années 1990, une attention particulière avait été portée sur le « discours de classe » dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, l'utilisation des enregistrements vidéos a élargi la possibilité d'observer des phénomènes jusque-là inaperçus car indétectables. Les gestes et d'autres ressources *embodied* ont ainsi commencé à être considérés parmi les ressources permettant de développer la communication et la conceptualisation. Autrement dit, une forte impulsion vers de nouvelles théories a été donnée par des aspects méthodologiques, qui demandent de nouveaux outils d'analyse, comme le faisceau sémiotique.

En analysant les activités d'enseignement et d'apprentissage avec l'outil sémiotique de faisceau sémiotique, des résultats généraux et spécifiques ont été détectés. Je me suis concentrée en particulier sur le rôle des gestes dans leur interaction avec d'autres ressources sémiotiques utilisées dans la classe —le discours principalement, mais aussi les signes écrits— et j'ai abordé les processus d'argumentation des élèves du primaire dans le contexte des jeux d'interaction stratégique. À partir de l'exemple, d'abord on peut tirer quelques résultats fins sur le rôle des gestes dans les processus argumentatifs des élèves. Ensuite, j'élargis la discussion sur les implications pour les professeurs.

1 Le rôle des gestes dans les processus argumentatifs des élèves

À travers une analyse qualitative-interprétative, j'ai montré que *les gestes peuvent contribuer au développement d'argumentations qui s'appuient sur des considérations empiriques pour passer à un plan hypothétique où l'on approche la généralité*. L'étude de cas apporte un éclairage sur *comment* les gestes peuvent donner ce soutien. En particulier, j'ai identifié trois caractéristiques spécifiques :

- la *contraction sémiotique*,
- le *caractère condensant des gestes*,
- *l'utilisation de l'espace gestuel dans un sens métaphorique* combiné avec des *catchments*.

Ces aspects sont brièvement discutés par la suite, en référence à l'analyse des données présentée dans la partie précédente.

Lorsque Giulio identifie et/ou exprime (nous n'avons pas assez de renseignements pour le décider) la règle générale consistant à « enlever toujours 3 », nous remarquons que ses phrases deviennent de plus en plus courtes, et à la fin il annonce simplement les nombres gagnants, accompagnés par des gestes de *pointage* abstrait (tableau 1, figure d). Il s'agit d'une sorte de *contraction sémiotique* qui a été retrouvée même dans d'autres contextes et avec des élèves d'âges différents, tels que la généralisation de *pattern* et les représentations graphiques de fonctions (Sabena et al., 2005 ; Sabena, 2007). D'un point de vue épistémologique, la contraction sémiotique caractérise le symbolisme mathématique moderne, et d'un point de vue cognitif elle est un mécanisme précieux. Radford (2008, p. 94) relie la contraction à la focalisation de l'attention sur des éléments importants dans une certaine situation et à un niveau de conscience plus profond :

> La contraction est un mécanisme pour réduire l'attention aux aspects qui apparaissent comme importants. C'est pourquoi, en général, la contraction et l'objectivation impliquent le fait d'oublier. Nous avons besoin d'oublier pour être capables de nous focaliser.

La contraction sémiotique peut être retrouvée aussi dans ce que Vygotsky (1934-1986) appelle « discours intérieur », décrit en discutant le langage comme un système de signes paradigmatique. Le discours intérieur est décrit au niveau structurel par une réduction syntactique et par une réduction phasique, et au niveau sémantique par l'agglutination. La *réduction syntactique* est une forme spécifique d'abréviation qui limite les sujets des phrases et garde les prédicats purs. L'articulation syntactique s'avère donc minimisée à la pure juxtaposition de prédicats. La *réduction phasique* consiste à minimiser les aspects phonétiques du discours, notamment en écourtant les mots eux-mêmes (par exemple, en écrivant « u » au lieu de « you », en anglais ; « ct » au lieu de « c'était » ou « kom » au lieu de « comme », en français). L'*agglutination* consiste à combiner les mots, en collant des significations (concepts) différentes dans une seule expression (par exemple, « highway », composé de « high » et « way »). De nos jours, les systèmes de communication de messagerie instantanée sur les smartphones exploitent largement les contractions sémiotiques (combinées avec des caractéristiques iconiques supplémentaires, comme les émoticons), typiquement dans la communication informelle entre personnes qui partagent la plupart des informations contextuelles.

Puisque la syntaxe se réduit, Vygotsky (ib., p. 244) affirme que la sémantique entreprend un mouvement contraire, avec la mise en avant du sens :

> Avec la syntaxe et le son réduits au minimum, le sens est mis en avant plus que jamais. Le discours intérieur fonctionne avec la sémantique, non pas avec la phonétique.

Nous pouvons observer que les gestes, en raison de leur nature spatiale et kinesthésique, ne nécessitent pas de processus d'agglutination pour combiner des significations, à la différence du langage verbal : c'est l'activation elle-même des gestes qui peut produire la combinaison de plusieurs significations comme le fait l'agglutination . Une forme spécifique de contraction sémiotique caractérisant les gestes est en effet ce que j'appelle un geste « *mélangeant* » ou « *condensant* », c'est-à-dire un geste exprimant dans le même temps (au moins) deux significations différentes. Nous avons vu les deux exemples suivants :

- Giulio, et son geste de droite à gauche effectué avec trois doigts levés, indiquant le nombre 3 *et* la soustraction (tableau 1, photos b et c);
- Elisa, avec deux doigts levés comme s'ils tenaient un bâtonnet, déplacés de gauche à droite, qui peuvent être interprétés comme indiquant une distance, *et* le fait que cette distance permette de passer d'un nombre gagnant au suivant (tableau 5, photos b et c). Le discours simultané spécifie que cette distance vaut 3, obtenu comme la somme de 1 et 2.

Dans les deux exemples, les gestes condensent (ou mélangent) deux significations en combinant une composante dynamique avec la forme de la main : cette caractéristique dynamique a été observée aussi par Calbris (2011) dans ce qu'elle appelle « gestes polysignes ». Dans des études précédentes dans le domaine mathématique (Sabena, 2007, 2008, 2010), le caractère condensant des gestes a été identifié dans le contexte des fonctions et des graphiques, et associé aux aspects iconiques des gestes. Dans l'étude ici présentée, cette caractéristique est montrée dans le domaine arithmétique, et associée avec des aspects *métaphoriques* des gestes, en suivant la classification de McNeill (1992). En condensant deux significations différentes, chacun de ces gestes établit deux types différents de références métaphoriques, dont une met en jeu la droite numérique, un outil didactique suggéré par le curriculum italien. En exploitant l'espace pour raisonner sur les nombres, la droite numérique elle-même a une nature métaphorique. Un processus de mélange double ou même multiple semble donc être activé par les gestes métaphoriques typiques des domaines mathématiques. Ce sujet demande une réflexion approfondie sur la signification de « métaphoriser » au niveau cognitif et au niveau sémiotique, et des recherches plus approfondies sont nécessaires (pour des résultats préliminaires employant les métaphores cognitives et les espaces mélangés, voir Sabena et al., 2016).

Il paraît que la métaphoricité soit aussi liée à l'utilisation de l'espace gestuel avec l'*alternance spatiale*, comme nous l'avons vu dans les cas de Giulio et de Eliana. Giulio bouge sa main à gauche et à droite quand il parle des tours et des contre-tours dans son match fictif (tableau 3, photos b-c), tandis qu'Eliana alterne sa main gauche et sa main droite pour le même but (tableau 4, photos b-c et d-e). *À travers l'alternance spatiale des gestes, l'espace vide acquiert du sens*, qui, dans nos données, semble être lié à une sorte de *niveau local*, soit dans le jeu (les tours successifs imaginés, dans le cas de Giulio), soit dans l'argument mathématique (les nombres à rajouter pour composer le 3, dans le cas d'Eliana).

Comme nous l'avons remarqué dans l'analyse, une telle alternance spatiale se répète plusieurs fois, en réalisant ce qui, dans les études sur les gestes, est appelé un *catchment* et considéré comme donnant de la cohésion au discours (McNeill, 2005). Dans cette étude de cas, le *catchment* gestuel est interprété comme une aide pour les élèves dans la structuration de l'argument au *niveau global*. Les résultats précédents sur la façon dont des positions spatiales opposées sont exploitées en termes de gestes pour indiquer des cas s'excluant mutuellement semble confirmer cette interprétation (Arzarello & Sabena, 2014).

Dans l'intérêt de l'analyse, nous avons ici discuté une après l'autre les différentes caractéristiques des gestes qui contribuent à donner un sens général et une structure au processus d'argumentation. Cependant, comme nous pouvons le remarquer en revenant à l'analyse des données, beaucoup de ces caractéristiques s'entremêlent ; de plus, l'analyse des gestes nécessite la prise en compte du faisceau sémiotique dans son ensemble. Par exemple, seulement une analyse systémique des mots et des gestes peut montrer comment, même s'il décrit un certain match hypothétique entre lui et un autre joueur, l'argument de Giulio contient des aspects essentiels transmettant une généralité : la répétition rythmique de la même structure linguistique, accompagnée par le *catchment* correspondant (tableau 2 et 3) ; l'utilisation de mots génériques accompagnés par un geste générique (tableau 3, photo a), l'utilisation de *pointages* abstraits avec l'annonce de tours possibles (tableau 3, photos b et c). Dans le cas de l'argument d'Eliana, il est frappant d'observer comment les gestes et les mots se complètent l'un l'autre d'une façon synchronique.

Si nous analysons les contributions des élèves d'une façon diachronique, nous pouvons tirer d'autres renseignements, qui nous donnent des éléments pour décrire l'évolution de la discussion en classe dans une perspective multimodale. Pour donner un exemple, il est intéressant de remarquer comment l'alternance spatiale de Giulio avec sa main droite évolue en l'alternance d'Eliana avec deux mains, une après l'autre (voir tableau 4) ; dans ce dernier cas, le sujet du discours d'Eliana ne change pas (c'est toujours « tu »), en montrant une tension vers les relations arithmétiques plutôt que vers l'interaction stratégique du jeu. Cela ouvre la voie à l'intervention suivante d'Elisa, portant sur les « nombres où il y a 3 ».

Les dernières considérations sont réservées aux implications didactiques de cette analyse très fine.

2 Implications pour les professeurs

Des recherches en cours indiquent que l'enseignant peut avoir un rôle important dans l'évolution des signes à l'intérieur du faisceau sémiotique et dans la construction de « chaînes sémiotiques multimodales » permettant au sens mathématique de se développer à travers les processus d'argumentation (Maffia & Sabena, 2015, 2016).

Évidemment, les choix de l'enseignant ne sont jamais neutres en rapport avec l'utilisation d'une ressource sémiotique dans la classe, y compris les gestes. Un exemple dans nos données est le modèle sémiotique à travers lequel la Course à 20 a été présentée aux élèves et à travers lequel les élèves ont joué le jeu (figure 1). Nous avons remarqué que ce choix—qui résonne avec l'outil didactique de la droite numérique—a fourni un outil essentiel aux élèves non seulement pour jouer le jeu mais aussi pour développer des argumentations sur comment gagner le jeu. En particulier, l'argument d'Elisa portant sur la « distance de 3 » entre les nombres gagnants montre sa relation avec le modèle sémiotique écrit avec lequel le jeu a été joué. Les résultats de cette analyse semblent donc offrir des éléments pour valider le choix de l'enseignant. En tout cas, discuter pourquoi pour Elisa (et pour d'autres élèves) ce choix a fonctionné tandis que pour d'autres une réflexion plus poussée a été nécessaire, va au-delà de l'objectif de cette analyse.

Le débat en classe s'avère être un moyen approprié pour favoriser le développement d'argumentations à travers des ressources multimodales comme celle décrite, où les élèves peuvent exploiter les gestes parmi les autres ressources sémiotiques. Cela demande évidemment que les gestes soient considérés comme légitimes dans la classe, comme dans le cas analysé, ou l'enseignante soutient Elisa dans son 'argument multimodal', en considérant l'apport de son geste et en lui donnant le mot manquant.

Plus généralement, l'enseignante peut alors profiter de la synergie des ressources sémiotiques dans une perspective multimodale. Ainsi elle peut :

- acquérir une *meilleure compréhension des processus cognitifs des élèves* en faisant attention à leurs gestes, outre leurs mots et leurs écrits ;
- *utiliser les gestes* et, plus généralement, les ressources sémiotiques d'une manière consciente.

Sur le deuxième point, à l'aide de l'analyse du faisceau sémiotique, nous avons remarqué un phénomène récurrent dans nos classes, appelé le « *jeu sémiotique* » entre l'élève et le professeur (Arzarello et al., 2009 ; Arzarello et al., 2011). Le jeu sémiotique se produit lorsque les enseignants répètent les signes multimodaux des élèves (typiquement, un geste), et ajoute d'autres signes (typiquement, des mots) pour que les significations évoluent vers les formes mathématiques culturellement établies. De cette façon, l'enseignant implicitement *encourage* l'élève à produire et expliciter ses pensées (de façon multimodale) et *l'aide* à progresser des significations personnelles vers les significations institutionnelles.

Mais dans quelles conditions cela peut-il fonctionner ?

Le jeu sémiotique peut être joué si l'enfant, à l'aide d'une sorte de signe, exprime quelque chose de significatif par rapport aux connaissances mathématiques. Il appartient à l'enseignant de saisir de tels moments. Dans une perspective vygotskienne, on peut dire que les mots, les gestes et les signes écrits peuvent être considérés comme des indices de l'enfant dans une Zone de Développement Proximal (Vygotsky, 1931/78).

Pour sensibiliser les enseignants aux aspects multimodaux de l'enseignement et de l'apprentissage, nous leur proposons de mener, au moins une fois dans leur expérience professionnelle, une analyse multimodale d'une leçon de classe.

Cette valeur éducative a été testée dans notre groupe de recherche à Turin et a contribué à la réflexion sur la formation des enseignants en Italie (2014). Le groupe de recherche, dans lequel s'est développée la réflexion et l'étude sur la multimodalité de l'enseignement-apprentissage des mathématiques, est dirigé par le professeur Ferdinando Arzarello et est composé de chercheurs en éducation mathématique et d'enseignants. Les enseignants participent à toutes les phases de la recherche, de la discussion des choix théoriques et de la conception et réalisation du projet à la collecte et à l'analyse des données, selon leurs possibilités et leur disponibilité : dans le double rôle des enseignants et des chercheurs, le terme «enseignants-chercheurs» est utilisé. Certains enseignants-chercheurs participant au groupe de recherche de Turin se sont engagés à effectuer eux-mêmes l'analyse des ressources multimodales, à partir de vidéos réalisées dans leurs classes pendant les cours. Les enregistrements vidéo ont été réalisés par des chercheurs, ou par des étudiants de premier cycle ou, dans des cas plus rares, par les enseignants eux-mêmes. Typiquement, on a enregistré le travail de groupe des élèves sur un problème difficile et la discussion menée par l'enseignant. L'analyse sémiotique par les enseignants a généralement été menée comme suit. La vidéo est d'abord analysée par le professeur de la classe à partir de laquelle elle a été prise : l'enseignant produit un résumé de ce qui s'est passé et extrapole les épisodes les plus significatifs, qui sont parfois des parties très importantes de l'activité. Ce choix dépend de l'intérêt de recherche du groupe, sur la question qu'on **veut** comprendre à fond, du problème de recherche finalement. L'analyse produit un document écrit, souvent sous la forme d'une table appelée « ligne sémiotique », qui montre la transcription des signes multimodaux qui interviennent, en insistant sur leur développement dans le temps (à titre d'exemple, un extrait qui fait référence à la discussion sur le **vingtième** temps analysé ci-dessus est donné en annexe). La ligne sémiotique est ensuite présentée au groupe de recherche, où les points cruciaux sont discutés, avec la visualisation et la discussion des vidéos connexes. La ligne sémiotique est ensuite enrichie d'autres éléments d'analyse et constitue un outil partagé de réflexion sur la pratique pédagogique. Ce travail - certainement très coûteux en termes de temps - nous a permis en termes de recherche de comparer les intuitions découlant de l'analyse théorique avec la pratique de classe et de donner des preuves empiriques, ou vice versa a permis d'identifier des phénomènes récurrents dans les films, donnant une caractérisation théorique, comme dans le cas des jeux sémiotiques. Cependant, il a également apporté des résultats en termes de formation pour les enseignants qui ont participé au travail d'analyse, surtout en leur faisant prendre conscience de nombreux aspects sous-estimés dans la perception de leurs interactions avec les étudiants.

Une analyse de ce type peut être considérée comme une loupe sur des situations éducatives, un zoom assez précis. Bien sûr, il est impensable de pouvoir l'appliquer à toutes les situations d'enseignement, en particulier pour l'analyse temporelle et la réalisation qu'elle exige ! Toutefois, ce processus permet d'activer les systèmes de contrôle et d'analyse de leurs actions et de leurs paroles, mais aussi de prêter plus d'attention aux gestes et aux « langages corporels » utilisés par leurs élèves, d'améliorer leurs interprétations et même d'être en mesure de mieux orchestrer les discussions dans le cours de mathématiques.

Par rapport à cela, je rapporte l'expérience d'une enseignante (participant aux travaux du groupe de recherche de Turin) :

> *Au cours de l'activité, je n'avais aucune perception de ce qui se passait et du rôle que joueraient mes actions, j'étais trop impliquée à viser à atteindre l'objectif. Ce fut grâce à l'analyse de la ligne sémiotique, que, rétrospectivement, le nouvel horizon sur la compréhension des processus d'enseignement - apprentissage pour la première fois est devenu très clair : en me regardant moi-même interagir avec les enfants, je pouvais comprendre la portée des gestes (l'utilisation des doigts, des mains, du corps) et des mots, pour établir des liens utiles à la connaissance. Au cours de l'activité, je savais que les gestes, en plus du discours, des signes écrits et des instruments, pourraient servir à la compréhension, mais je ne savais pas pourquoi, ni surtout comment.* (l'enseignante B.V., rapporté in Arzarello et al., 2011, p. 131).

En d'autres termes, pour ces enseignants, la réalisation de la ligne sémiotique a été un outil important pour la transposition méta-didactique (Arzarello et al., 2014) de l'approche multimodale des mathématiques. Le rôle du 'courtage' des chercheurs a été fondamental à cet égard, de même que l'établissement de « communautés de recherche » dans le cadre de projets de recherche. Des recherches plus approfondies sont nécessaires pour dévoiler et exploiter à fond les potentialités **de ce type d'instrument pour la formation des enseignants sur une plus grande échelle**, où les liens avec le monde de la recherche sont plus distendus.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Guest Eds.), *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking* (pp. 267-299).

ARZARELLO, F., & ROBUTTI, O. (2008). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 720–749, 2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.

ARZARELLO, F., & SABENA, C. (2014). Analytic-structural functions of gestures in mathematical argumentation processes. In L. D. Edwards, F. Ferrara & D. Moore-Russo (Eds.), *Emerging perspectives on gesture and embodiment* (pp. 75-103). Charlotte, NC (US): Information Age Publishing, Inc.

ARZARELLO, F., PAOLA, D. ROBUTTI, O., & SABENA, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.

ARZARELLO, F, ROBUTTI, O., SABENA, C., CUSI, A., GARUTI, R., MALARA, N., MARTIGNONE, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programmes. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era. An International Perspective on Technology Focused Professional Development* (pp. 347-372). Dordrecht, Olanda: Springer.

ARZARELLO, F., BAZZINI, L., FERRARA, F., SABENA, C., ANDRÀ, C., MERLO, D. SAVIOLI, K., VILLA, B. (2011). *Matematica: non è solo questione di testa. Strumenti per osservare i processi di apprendimento in classe*. Trento: Edizioni Erickson.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

CALBRIS, G. (2011). *Elements of meaning in gesture*. Amsterdam/Philadelphia: John Benjamins Publishing Company.

DE FREITAS, E., & SINCLAIR, N. (2014). *Mathematics and the body*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

DE RUITER, J. P. (1995). Why do people gesture at the telephone? In Biemans M, Woutersen M (Eds.), *Proceedings of the Center for Language Studies Opening Academic Year '95-96* (pp. 49-56). Nijmegen: Center for Language Studies.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

GALLESE, V., & LAKOFF, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology* 22, 455-479.

GEROFSKY, S. (2015). Approaches to embodied learning in Mathematics. In English, L.D. & Kirshner, D. (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (Third Edition). New York and London: Routledge.

GOLDIN-MEADOW, S. (2003). *Hearing gesture. How our hands help us think*. The Belknap Press of Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts, and London, England.

GOLDIN-MEADOW, S., NUSBAUM, H. KELLY, S. D., & WAGNER, S. (2001). Explaining math: Gesturing lightens the load. *Psychological Science*, 12, 516-522.

KENDON, A. (1980). Gesticulation and speech: Two aspects of the process of utterance. In M.R. Key (Ed.), *The relation between verbal and nonverbal communication* (pp. 207-227). The Hague: Mouton.

KRESS, G. (2004). Reading images: Multimodality, representation and new media. *Information Design Journal*, 12(2), 110-119.

LAKOFF, G., & NÙÑEZ, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

MAFFIA, A., & SABENA, C. (2015). Networking of theories as resource for classroom activities analysis: the emergence of multimodal semiotic chains. In C. Sabena, B. Di Paola (Eds.), *Teaching and learning mathematics: Resources and obstacles, Proc. CIEAEM 67, Quaderni di ricerca didattica*, 25-2 (pp. 405-417). Aosta, July 20-24, 2015.

MAFFIA, A., & SABENA C. (2016). Teacher gestures as pivot signs in semiotic chains. In C. Csikos, A. Rausch, & J. Szitànyi (Eds.), *Proc. 40th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3* (pp. 235-242). Szeged, Hungary: PME.

MCNEILL, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.

MCNEILL, D. (2005). *Gesture and thought*. Chicago: University of Chicago Press.

MCNEILL, D., QUEK, F., MCCULLOUGH, K-E., DUNCAN, S., FURUYAMA, N., BRYLL, R., … ANSARI, R. (2001). Catchments, prosody and discourse. *Gesture*, 1(1), 9-33.

NEMIROVSKY, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zillox (Eds.), *Proc. 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1* (pp. 105–109). Honolulu, HI: PME.

RADFORD, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

RADFORD, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, Vol. 40(1), 83-96.

RADFORD, L., & SABENA, C. (2015). The question of method in a Vygotskian semiotic approach. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 157–182). New York: Springer.

RADFORD, L., BARDINI, C., & SABENA, C. (2007). Perceiving the general: The semiotic symphony of students' algebraic activities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 507-530.

RADFORD, L., EDWARDS, L., & ARZARELLO, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 91 - 95.

RADFORD, L., BARDINI, C., SABENA, C., DIALLO, P., & SIMBAGOYE, A. (2005). On embodiment, artifacts, and signs: A semiotic-cultural perspective on mathematical thinking. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 113–120). Melbourne: University of Melbourne, PME.

ROTH, W.M. (2009). (Ed.), *Mathematical representation at the interface of body and culture*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

SABENA, C. (2007). *Body and signs: A multimodal semiotic approach to teaching-learning processes in early Calculus*. PhD. Dissertation, University of Torino (Italy).

SABENA, C. (2008). On the semiotics of gestures. In L. Radford, G. Schumbring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 19-38). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

SABENA, C. (2010). Are we talking about graphs or tracks? Potentials and limits of 'blending signs'. In M.M.F. Pinto & T.F. Kawasaki (Eds.), *Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 105-112). Belo Horizonte, Brazil: PME.

SABENA, C., RADFORD, L., & BARDINI, C. (2005). Synchronizing gestures, words and actions in pattern generalizations. *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 129-136). Melbourne, Australia: University of Melbourne, PME.

SABENA, C., KRAUSE, C., & MAFFIA, A. (2016). L'analisi semiotica in ottica multimodale: dalla costruzione di un quadro teorico al networking con altre teorie. *Relazione al XXXIII Seminario Nazionale di ricerca in didattica della matematica Giovanni Prodi*, Rimini 28-30 Gennaio 2016. http://www.airdm.org/sem_naz_2016_25.html

SABENA, C., ROBUTTI, O., FERRARA, F., ARZARELLO, F. (2012). The development of a semiotic frame to analyse teaching and learning processes: examples in pre- and post-algebraic contexts. In Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., Robert, A. (Eds.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 231-245). Grenoble: La Pensée Sauvage.

SCHIRALLI, M., & SINCLAIR, N. (2003). A constructive response to 'Where mathematics comes from'. *Educational Studies in Mathematics,* 52(1) 79–91.

SFARD, A., & MCCLAIN, K. (2002). Analyzing tools: perspectives on the role of designed artifacts in mathematics learning. *Journal of the learning sciences*, 11(2&3), 153-161.

VYGOTSKY, L. S. (1931/78). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Edited by M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman. Cambridge, MA, and London: Harvard University Press.

VYGOTSKY, L. S. (1934/86). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press. (Revised edition, translated and edited by A. Kozulin. Original work published in 1934).

VII - ANNEXE – EXTRAIT DE LIGNE SEMIOTIQUE

	1. [00:00]	2.				3.
Mots de l'élève	Diego : 11 est un nombre important peut-être, parce que peut-être mon équipe rajoute 2 et ça fait 13, l'autre équipe rajoute 1 et arrive à 14, j'ajoute 1, 15, ils rajoutent 2 et ça fait 17	*Giulio:* Je crois que pour les nombres gagnants tu enlèves toujours 3	De 20	tu enlèves 3	et tu arrives à 17	
Gestes de l'élève		 *La main ouverte bouge de droite à gauche*	 *Trois doigts levés*	 *Trois doigts levés bougent de droite à gauche*	 *Pointage abstrait vers le bas*	
Mots de l'ensei-gnante						Explique bien cette idée
Gestes de l'ensei-gnante						

ATELIERS

MALENTENDUS SEMIOTIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE

Catherine HOUDEMENT
PU, ESPE Université Rouen Normandie
LDAR (EA 4434) Université de Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC
catherine.houdement@univ-rouen.fr

Édith PETITFOUR
MCF, ESPE Université Rouen Normandie
LDAR (EA 4434) Université de Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC
edith.petitfour@univ-rouen.fr

Résumé
Cet article propose l'étude d'une situation d'apprentissage de la numération décimale, choisie et mise en œuvre par une enseignante spécialisée travaillant dans un Institut Médico-Éducatif (IME), ainsi que ses effets sur l'activité des élèves. Les séances, réalisées avec des adolescents handicapés atteints de déficience intellectuelle, s'appuient sur le concret et la manipulation comme moyens d'apprendre des mathématiques. Cette étude s'intéresse à la dimension sémiotique de la mésogenèse (Sensevy, 2007) et porte un regard particulier sur les différents signes activés lors des interactions entre élèves (Arzarello, 2006 ; Radford, 2003).

Exploitations possibles
L'entrée par la prise en compte et l'analyse des signes proposée dans cet article est originale. Elle fournit un nouvel outil de compréhension de l'enseignement / apprentissage des mathématiques, notamment à travers l'identification de blocages ou de malentendus sémiotiques qui se développent au cours des activités mathématiques des élèves.
Ce texte s'adresse au chercheur, mais peut constituer un support pour le formateur dans le cadre de la formation continue, particulièrement celle des enseignants spécialisés.

Mots clés
Sémiotique – Numération – ASH

DU MATERIEL ET DES ACTIVITES DE MANIPULATION POUR SOUTENIR UN APPRENTISSAGE CONSTRUCTIF DES FRACTIONS ET DES OPERATIONS SUR LES FRACTIONS DE 10 A 14 ANS.

Isabelle BERLANGER
Maitre-assistante, Haute École Galilée (Bruxelles)
Groupe d'Enseignement Mathématique GEM (Louvain-la-Neuve)
isabelle.berlanger@galilee.be

Thérèse GILBERT
Maitre-assistante, Haute École Galilée (Bruxelles)
Groupe d'Enseignement Mathématique GEM (Louvain-la-Neuve)
therese.gilbert@galilee.be

Résumé
Cet atelier présente des activités de manipulation et de réflexion pour établir ou revoir le sens des règles sur les fractions et les opérations associées. Il s'agit d'utiliser des gabarits sur transparents pour déterminer des fractions représentées par des aires. Les aires sont choisies de telle façon que les différentes opérations et les règles associées se présentent naturellement. Nous évoquerons notamment le (un des) sens de la fraction, l'équivalence de fractions, le passage de la division à la barre de fraction et l'addition.
Ces activités sont conçues pour la fin du premier degré et le début du deuxième (cycle 3 et début du cycle 4) et sont utilisées en formation d'enseignants. Notre travail s'appuie sur (et prolonge) des travaux tels que ceux de Rouche (1998) et Géron (2015).

Exploitations possibles
Cet article est destiné à tous les formateurs en mathématiques, premier ou second degré, ainsi qu'à tout enseignante ou toute personne se questionnant sur l'enseignement des fractions et sur les difficultés que rencontrent les élèves à se les représenter et à donner du sens aux opérations les mettant en jeu. Chacun trouvera dans le matériel proposé un support particulièrement intéressant accompagné d'activités riches favorisant la construction des connaissances sur les fractions (formation initiale, formation continue, recherche ou initiation à la recherche : mémoire de M2).

Mots clés
Fractions, opérations sur les fractions, représentations des fractions, manipulation, formation d'enseignant.

JEU ET MANIPULATION EN CYCLE 3 POUR L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Nicolas PELAY
Plaisir Maths R&D
IMAG
Nicolas.pelay@plaisir-maths.fr

Résumé
Le contrat didactique et ludique permet d'analyser la façon dont un jeu est mis en place lors d'une séance d'enseignement ou une animation, et nous soutenons la thèse que la nature du contrat didactique et ludique qui se met en place au cours d'une activité dépend du jeu qui est utilisé. Un jeu mathématique possède intrinsèquement certaines potentialités, que l'enseignant/animateur active selon les objectifs didactiques qu'il s'est fixés pour le jeu qu'il souhaite mettre en place dans sa classe. Nous allons développer cette thèse sur deux exemples de jeux présentés lors de l'atelier.

Exploitations possibles
Ce compte-rendu permettra à qui veut envisager l'introduction du jeu dans sa pratique d'en analyser les potentialités en termes didactiques et ludiques. Comme l'illustre l'article, celles-ci dépendent des caractéristiques des jeux choisis.

Mots clés
apprentissage ludique - contrat didactique et ludique - mathématiques ludiques - analyse de jeu

FORMER LES PE A UTILISER LE JEU AU SERVICE DES APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES AU CP

Aline BLANCHOUIN
PESPE Site de Livy-Gargan (93)
aline.blanchouin@u-pec.fr

Nathalie PFAFF
PESPE Site de Livy-Gargan (93)
nathalie.pfaff@u-pec.fr

Résumé

Dans ce texte, nous développons les éléments de travail issus de l'atelier que nous avons animé. Il s'agissait d'analyser une séance filmée de mathématiques en Cours Préparatoire (CP) dont le support principal était *la bataille navale* afin d'aborder la problématique de la formation des PE lorsqu'ils choisissent de recourir à des configurations d'enseignement-apprentissage mobilisant le jeu.
Dans un premier temps, nous apportons des informations sur le contexte d'enseignement, puis nous procédons à l'exploitation du visionnage de la vidéo en élaborant un synopsis possible du scénario didactique qui s'est réellement déroulé. Nous proposons, alors, l'analyse faite conjointement avec les participants (formateurs Espe et Dsden) à partir de l'inventaire des leviers et obstacles à l'apprentissage de tous les élèves. *La seconde partie* du texte complète l'analyse précédente en caractérisant le dilemme « faire apprendre – faire jouer ». Pour ce faire, nous croisons le modèle de l'agir enseignant et de la didactique des mathématiques en interrogeant d'une part, la pertinence du savoir en jeu au regard des programmes actuels et celle des caractéristiques de la bataille navale réellement proposée aux élèves au regard du jeu canonique, et d'autre part, le caractère opportun des gestes d'ajustements de la PE. Après avoir conclu sur la séance, nous suggérons d'accompagner les enseignants polyvalents lorsqu'ils veulent faire des « maths en jouant » en les invitant à interroger l'ensemble des logiques épistémique, pragmatique et relationnelle de leur action et en utilisant leurs outils de travail habituels pour élaborer des réponses sous forme de compromis. La conclusion est l'occasion d'évoquer des prolongements pour la formation et de proposer, pour cette thématique du jeu à l'école, la fréquentation des travaux de N. Pelay.

Exploitations possibles

Cet article est destiné aux formateurs en mathématiques pour les PE ou à toute personne qui désire se questionner précisément sur la notion de « jeu » dans l'enseignement des mathématiques à l'école (formation initiale, formation continue, recherche ou initiation à la recherche : mémoire de M2).

Mots clés

Jeu mathématique, tension jouer / apprendre, leviers, obstacles, bataille navale.

MANIPULATION ET DÉCONSTRUCTION DIMENSIONNELLE POUR L'APPRENTISSAGE DU CONCEPT DE TRIANGLE AU CYCLE 3

Anne VOLTOLINI
Doctorante, IFE, ENS Lyon
Laboratoire S2HEP
anne.voltolini@ac-grenoble.fr

Résumé
Cet atelier présente une situation utilisant les technologies numériques pour apprendre la construction du triangle à la règle et au compas au cycle 3, élaborée dans le cadre d'un travail de thèse. L'enjeu de la situation est, d'une part de faire évoluer les connaissances des élèves sur le triangle, en particulier d'amener une vision ligne 1D du triangle. D'autre part, la situation doit faire prendre conscience aux élèves de la nécessité d'un nouvel instrument, le compas, autre que la règle graduée pour réaliser cette construction. L'atelier a permis aux participants de découvrir la situation didactique articulant des cahiers informatisés à l'utilisation du compas matériel dans l'environnement papier-crayon. Ils ont testé et analysé cette articulation, qualifiée de duo d'artefacts numérique et matériel, du point de vue de ses potentialités didactiques. La discussion a porté sur les apports de l'usage d'un environnement numérique comme une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage entre des manipulations d'objets matériels et entre des constructions géométriques aux instruments.

Exploitations possibles
Les éléments d'analyse proposés dans l'article pourront venir alimenter, en formation, la réflexion sur l'intégration du numérique dans l'enseignement. La complémentarité entre les différents environnements, décrite ici, permet d'enrichir les conceptions des élèves sur le triangle.
L'article permettra également d'éclairer le concept de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) sur l'exemple du triangle. Enfin, la situation présentée dans l'article pourra aussi être reprise dans le cadre de la classe.

Mots clés
déconstruction dimensionnelle - géométrie dynamique - artefacts - genèse instrumentale - triangle -

QUELLES TRACES POUR OPÉRATIONNALISER LES APPRENTISSAGES DANS UN JEU ARTICULANT TANGIBLE ET NUMÉRIQUE ?

Jean-Pierre RABATEL
Chargé d'études, Institut Français de l'Éducation
ENS de Lyon, Équipe EducTice
jean-pierre.rabatel@ens-lyon.fr

Jean-Luc MARTINEZ
Chargé d'études, Institut Français de l'Éducation
ENS de Lyon, Équipe EducTice
jean-luc.martinez@ens-lyon.fr

Résumé
OCINAÉÉ (Objets Connectés et Interfaces Numériques pour l'Apprentissage à l'École Élémentaire) est un projet de recherche en e-éducation (2014-2016). Il propose des situations d'apprentissage des mathématiques au travers de jeux utilisant du matériel tangible (cartes, plateau de jeu, stylet) qui communique avec un environnement numérique par l'intermédiaire d'un petit robot mobile, d'un téléphone et de tablettes.
L'un des quatre jeux, *Voyage dans le plan*, concerne l'orientation, le repérage spatial et le codage d'un déplacement. La collaboration est un élément nécessaire à la réussite dans ce jeu, en particulier lorsqu'elle s'appuie sur la production de traces. Ce jeu amène les élèves à prendre conscience que les traces sont nécessaires à la résolution de la situation problème proposée.

Exploitations possibles
Travail en formation initiale et/ou continue des professeurs des écoles autour de la structuration de l'espace, des questions de repérage et de déplacement d'un objet programmable en cycles 2 et 3.
Analyse des articulations entre matériel tangible, matériels connectés et virtuels.

Mots clés
Repérage dans l'espace – Programmation d'un robot – programmation d'un déplacement – codage d'un déplacement – orientation spatiale

À PROPOS DE L'USAGE DE PUZZLES GÉOMÉTRIQUES EN CLASSE

François DROUIN
APMEP Lorraine
françois.drouin2@wanadoo.fr

Résumé
La manipulation de pièces de puzzles géométriques trouve sa place dans les temps d'enseignement mathématique de cycle 1.
L'atelier avait pour objectif de présenter d'autres exemples d'utilisation en cycle 1 ou à destination des élèves des cycles 2 et 3. Des puzzles moins connus ont été utilisés, l'apport de la couleur et du quadrillage ont été des points souvent évoqués. Ont été utilisés des moments de formation de futurs Professeurs des Écoles, des expérimentations en classe ou lors d'animations destinées à des élèves, ainsi que des pistes de recherche explorées au sein de la régionale Lorraine et du groupe national « Maths et Jeux » de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP).

Exploitations possibles
Cet article donne des outils aux formateurs en mathématiques ou aux professeurs des écoles sur l'utilisation des puzzles dans l'enseignement de la géométrie et des grandeurs et mesures à l'école primaire. On peut aussi l'exploiter dans une réflexion sur les notions de « jeu » et de problèmes de recherche.

Mots clés
Puzzles géométriques, jeux, cycle 1, quadrillage, pentaminos, tangram, mesure.

QUELS APPORTS DE LA PROGRAMMATION POUR LA REPRODUCTION D'UNE FIGURE GEOMETRIQUE ? PERSPECTIVES POUR LA FORMATION

Christophe BILLY
COPIRELEM, ESPE de Toulouse Midi-Pyrénées
christophe.billy@univ-tlse2.fr

Richard CABASSUT
COPIRELEM, Université de Strasbourg
LISEC EA 2310
richard.cabassut@unistra.fr

Edith PETITFOUR
COPIRELEM, ESPE de Rouen Normandie
LDAR (EA 4434) Université de Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC
edith.petitfour@univ-rouen.fr

Arnaud SIMARD
COPIRELEM, ESPE de l'Université de Franche-Comté
LMB, FR-EDUC
arnaud.simard@univ-fcomte.fr

Frédérick TEMPIER
COPIRELEM, ESPE de Versailles
LDAR (EA 4434) Université de Cergy-Pontoise, UR UA UCP UPD UPEC
frederick.tempier@u-cergy.fr

Résumé
Les programmes du cycle 3 (2015) associent l'enseignement de la géométrie à une initiation à la programmation. Si la géométrie dynamique a apporté un point de vue nouveau sur la géométrie, qu'en est-il de la programmation ? En s'appuyant sur des travaux de didactique de la géométrie les auteurs interrogent les apports et les limites de cette approche de la géométrie à travers la programmation par la comparaison de la mise en œuvre d'une tâche de reproduction d'une figure géométrique dans différents environnements. Des perspectives pour la formation sont esquissées à la fin.

Exploitations possibles
Le texte intéressera les formateurs en formation initiale ou continue des enseignants des cycles 2, 3 ou 4 mais également les enseignants de cycle 3 ou 4 ainsi que les personnes désireuses de se former à la didactique de la géométrie. Cet article donne des pistes de réflexion et une situation clef en main pour travailler différentes visions de la géométrie dans une tâche de reproduction de figure.

Mots clés
Géométrie, programmation, action instrumentée, objets techniques, objets graphiques, connaissances géométriques, connaissances visuo-spatiales, scratch.

MANIPULER, REPRESENTER, COMMUNIQUER DANS LES ATELIERS MONTESSORI

Marie-Line GARDES
MCF, ESPE Université Lyon 1
Institut des Sciences Cognitives Marc Jeannerod
marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

Philippine COURTIER
Doctorante, Université Lyon 1
Institut des Sciences Cognitives Marc Jeannerod
Philippine.courtier@isc.cnrs.fr

Résumé
Les recherches sur les effets de la pédagogie Montessori sont rares et certains résultats apparaissent contradictoires selon les études. Dans le cadre d'une recherche sur les effets de cette pédagogie en milieu défavorisé et dans l'enseignement public, les auteurs s'interrogent sur la nature des apprentissages mathématiques effectués grâce aux ateliers Montessori. Par exemple, quels aspects de la construction du nombre sont en jeu dans ces ateliers ? Permettent-ils de développer les compétences attendues en fin de cycle 1 ? D'un point de vue didactique, peut-on modéliser ces ateliers avec des situations d'action, formulation, validation ? Dans cet article, les auteurs se focalisent plus spécifiquement sur les activités de manipulation, représentation et communication mises en jeu dans les ateliers mathématiques Montessori.

Exploitations possibles
Analyse objective du savoir en construction et des phénomènes d'enseignement-apprentissage en jeu. Pour la formation d'enseignant ces analyses pourraient aider les formateurs à pouvoir répondre à l'engouement pour la pédagogie Montessori et à pouvoir suivre des professeurs des écoles mettant en œuvre cette pédagogie (ou des éléments de cette pédagogie) dans leurs classes de cycle 1.

Mots clés
Ateliers Montessori, construction du nombre, Manipuler, représenter, communiquer,

10 OU DIX : QUELLE EST LA QUESTION ?

Michel DERUAZ
Professeur Formateur, HEP VAUD
UER MS
Michel.deruaz@hepl.ch

Valérie BATTEAU
Assistante diplômée, HEP Vaud
UER MS, 3LS
vbatteau@gmail.com

Résumé
Les auteurs se réfèrent au modèle du triple code (Dehaene, 1992) dans lequel le nombre peut s'exprimer selon trois représentations: auditive-verbale, analogique (pour nous : quantité représentée par des jetons) et symbolique (avec des chiffres). Le questionnement des formateurs est le suivant : les étudiants connaissent les effets de la multiplication et de la division par *dix* (et de ses puissances) sur l'écriture d'un nombre dans le système décimal de numération (Clivaz & Deruaz, 2013; Deruaz & Clivaz, 2012). Mais, qu'en est-il lorsque l'on multiplie ou divise par *10* (et ses puissances) dans une base quelconque ? Ce type de questionnement permet de mettre en évidence les spécificités liées à chacune de ces représentations. En particulier, il met en évidence les difficultés à communiquer avec la représentation auditive-verbale lorsqu'on travaille dans une autre base que la base dix, ainsi que des propriétés naturalisées en base dix qui deviennent alors de vraies questions dans une autre base (Anselmo & Zucchetta, 2013)

Exploitations possibles
Formation initiale et continue pour faire comprendre la numération décimale en utilisant différentes bases et en proposant des opérations arithmétiques dans ces bases. Utilisation de matériels.

Mots clés
Numération décimale, numération en différentes bases, opérations en bases

L'EXPRESSION DES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ENTRE GÉOMÉTRIE STATIQUE ET GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Sylvia COUTAT
Chargée d'enseignement, UNIVERSITÉ DE GENÈVE
DiMaGe
Sylvia.Coutat@unige.ch

Résumé
Cet atelier pourrait être une suite de l'atelier présenté par Coutat et Falcade à la COPIRELEM 2012 qui étudiait le rôle de l'enseignant dans une séquence d'enseignement utilisant un logiciel de géométrie dynamique (LGD). Alors que ce précédent atelier était centré sur l'enseignant, ce présent atelier se centre sur les élèves. Une situation de communication des propriétés géométriques est le cœur de l'atelier. Les analyses des productions écrites et discussions des élèves s'appuient sur l'articulation de différentes ressources sémiotiques (langage verbal, représentation écrites et environnement dynamique) ainsi que sur les genèses instrumentales opérées à partir de l'artefact Déplacement. Les interactions de ces différentes ressources seront analysées à l'aide des modes de fréquentations (Bulf, Mathé et Mithalal, 2014).

Exploitations possibles
Les situations de communication présentées dans cet article permettront à des formateurs en mathématiques en master MEEF, en formation initiale ou continue, comme à des professeurs des écoles, de travailler les propriétés et le vocabulaire géométriques à travers l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.

Mots clés
Géométrie. Logiciel de géométrie dynamique. Situation de communication.

REPRÉSENTER UN POLYÈDRE : D'UN REGISTRE À UN AUTRE EN GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Jimmy SERMENT
Formateur à l'UER Mathématiques et Sciences de la nature
Enseignant spécialisé, Etablissement primaire de Pully, Paudex et Belmont
jimmy.serment@hepl.ch

Thierry DIAS
Professeur, Haute École Pédagogique Vaud
UER Mathématiques et Sciences de la nature
thierry.dias@hepl.ch

Résumé :
Cet atelier propose de mener une investigation didactique et sémiotique concernant la notion de conversion de registres de représentation (Duval, 1993). Il s'agit d'étudier puis de comparer les potentialités de deux milieux matériels susceptibles de construire le concept de polyèdre. Le premier environnement est informatique grâce à l'utilisation du logiciel GeoGebra (3D). Le deuxième est celui du monde réel dans lequel seront élaborées des constructions de polyèdres grâce à un matériel spécifique (Dias, 2015 ; Dias & Serment, 2017). Après un temps de prise en main des deux environnements dans une tâche d'application, les participants doivent explorer ces deux registres dans le cadre de la résolution d'un problème ouvert.

Exploitations possibles
On peut utiliser ces ressources directement pour l'enseignement ou pour élaborer des scénarios de formation. Ce compte-rendu permet d'envisager des situations d'enseignement sur les polyèdres croisant différents registres sémiotiques.

Mots clés
Polyèdre – Polyèdre de Platon – Registre sémiotique – Géométrie Dynamique 3D

DISPOSITIF D'ACCOMPAGNEMENT EN MATHÉMATIQUES DES ENSEIGNANTS D'UN RÉSEAU REP PLUS : PRÉSENTATION ET PREMIÈRE ANALYSE

Cécile ALLARD
MCF, ESPE Créteil
Laboratoire de Didactique André Revuz
cecile.allard@upec.fr

Denis BUTLEN
PU, ESPE de Versailles
Laboratoire de Didactique André Revuz
denis.butlen@u-cergy.fr

Pascale MASSELOT
MCF, ESPE de Versailles
Laboratoire de Didactique André Revuz
pascale.masselot@u-cergy.fr

Résumé :
Au cours de cet atelier sont exposés les choix ayant permis de concevoir un premier dispositif d'accompagnement de professeurs de cycle 3 sur le thème de la résolution de problèmes arithmétiques. Après avoir précisé le contexte de la formation (recherche action ciblant les professeurs de Réseau d'Education Prioritaire REP Plus, sont présentés les principes organisateurs de la formation dispensée, le détail des contenus abordés. Ensuite sont analysés en atelier quelques supports élaborés par les enseignants concernés et certaines productions d'élèves qu'ils ont recueillies.
Un débat autour des enjeux d'une telle formation et des alternatives possibles, précise les hypothèses et les choix retenus.

Exploitations possibles
On peut utiliser ces ressources directement pour l'enseignement ou pour élaborer des scénarios de formation. Pour la formation différentes pistes sont possibles : problèmes arithmétiques, gestes professionnels, observation de pratiques.

Mots clés
Problèmes arithmétiques – éducation prioritaire – accompagnement- difficultés des élèves - apprentissage – cycle 3

L'INFORMATIQUE, UN APPRENTISSAGE DE PLUS OU UNE PISTE AU SERVICE D'AUTRES APPRENTISSAGES ?

Marie DUFLOT
Maître de conférences, Université de Lorraine
LORIA & INRIA Nacy Grand Est
marie.duflot-kremer@loria.fr

Résumé
Avec les changements de programmes, une introduction à l'algorithmique et la programmation arrive jusqu'en primaire. En effet, le programme des cycles 2 et 3 contient une partie d'initiation à la programmation, au travers de déplacements relatifs ou absolus. Pour ce faire, diverses activités avec ou sans ordinateurs sont suggérées afin d'acquérir et de perfectionner des premières notions de programmation.
Au travers d'exemples concrets, et avec un lien vers la formation Class'Code qui mêle apprentissage du code et de concepts au travers d'activités sans ordinateur, nous avons vu en quoi des activités d'informatique « débranchée », popularisées entre autres par l'équipe à l'origine du site Computer Science Unplugged (Bell et al. 1992) et Roberto Di Cosmo (Di Cosmo, 2015), permettent de travailler de manière ludique des concepts fondamentaux, tout en manipulant des objets concrets, en développant la collaboration et en permettant de structurer et transmettre ses idées. Nous avons également vu comment ces activités s'articulent avec des compétences, transversales ou non, que les enfants acquièrent et exploitent dans le cursus scolaire.

Exploitations possibles
Travail en formation initiale et/ou continue des professeurs des écoles autour d'activités informatiques en débranché (sans ordinateur). Présentation de situations adaptées à des élèves de l'école primaire.

Mots clés
Informatique, programmation, débranché, algorithme de tri.

– codagement – orientation spatiale

QUELLES SÉMIOSIS POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION AU CYCLE 2 ?

Serge PETIT
Professeur de mathématiques honoraire de l'IUFM d'Alsace
Université de Strasbourg
petit.serge@sfr.fr

Annie CAMENISCH
Maitre de conférences en Sciences du langage, ESPE
Université de Strasbourg
annie.camenisch@espe.unistra.fr

Résumé
L'objectif de l'atelier est de réaliser une étude des progressions dans l'apprentissage des différents registres sémiotiques menant à la construction du système de numération de position au cycle 2 et d'analyser leur pertinence.
Ce compte-rendu comporte trois parties : une première partie comportant des rappels théoriques permettant d'établir un langage en vue d'une analyse de la construction des différents registres de représentation sémiotiques en usage dans la construction de la numération de position en cycle 2, une deuxième partie organisée autour de travaux de groupes visant une analyse de certains manuels scolaires afin de mettre en relief le travail explicite portant sur les registres sémiotiques, une troisième, pratique, qui propose une progression permettant de construire le sens avant d'introduire les signes spécifiques.

Exploitations possibles
Ce compte-rendu peut être utilisé comme aide au choix de manuels et de ressources utilisant le travail sur les changements de registres. Il peut être également utilisé en formation pour l'analyse de ressources , et pour le travail sur les changements de registres.

Mots clés
registre sémiotique – système de numération – représentation – congruence – cycle 2

COMMUNICATIONS

LABYRINTHES D'UN POINT DE VUE MATHÉMATIQUE ET EXPÉRIMENTATION, POINT DE DÉPART D'UNE FUTURE ANALYSE DIDACTIQUE

André STEF
Maître de conférences, Université de Lorraine
Laboratoire IECL
andre.stef@univ-lorraine.fr

Résumé
Les labyrinthes ont un intérêt culturel, cultuel, artistique, initiatique, ludique, touristique,… et aussi mathématique. La plupart des intérêts signalés sont autant de raisons de les aborder en classe. Dans ce texte, les aspects mathématiques des labyrinthes sont développés et un exemple d'utilisation en classe de cycle 3 est proposé : forme, parcours, codage, algorithmes de sortie, construction.

Exploitations possibles
Travail en formation initiale et/ou continue des professeurs des écoles autour des algorithmes mis en œuvre pour trouver une solution face à un labyrinthe et à propos des conceptions de tâches autour de ce support.

Mots clés
Labyrinthe – algorithme – analyse de tâches– méso-espace – micro-espace

CHOIX DES AUTEURS D'UNE COLLECTION DE MANUELS SCOLAIRES POUR CONTRIBUER À L'ÉVOLUTION DES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS EN GÉOMÉTRIE

Marie-Lise PELTIER
Maître de conférences honoraire
en Didactique des Mathématiques
LDAR Paris Diderot
mlpeltier@yahoo.fr

Résumé
La communication présente :
- les points d'appui théoriques et personnels des choix effectués par les auteurs des manuels scolaires Opération Maths et EuroMaths pour l'école élémentaire pour tenter de vulgariser des éléments de recherche en didactique (Berthelot et Salin, 1992 ; Houdement et Kuzniak, 2006 ; Perrin Glorian et Godin, 2014) ;
- des exemples de pages consacrées à la construction de concepts géométriques et de pages consacrées à l'étude d'objets géométriques.

Exploitations possibles
Cet article est destiné à tous les formateurs en mathématiques pour les PE ou à toute personne se questionnant soit l'analyse de manuels, soit sur l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire, soit évidemment aux deux. L'explicitation précise et la présentation synthétique des choix opérés par ces auteurs peut être un outil pour construire une grille d'analyse d'autres manuels. Ou encore servir de support à une réflexion diachronique de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire. Les nombreux exemples d'activités, développés avec la mise en parallèle des commentaires et préconisations du guide pédagogique associé, peuvent aussi être utilisés de façon autonome pour analyser des situations d'enseignement (formation initiale, formation continue, recherche ou initiation à la recherche : mémoire de M2).

Mots clés
Analyse de manuel, guide pédagogique, enseignement de la géométrie, didactique de la géométrie, pratique enseignante.

MISE EN ŒUVRE LOCALE DU TUTORAT MIXTE DANS LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS : QUELS IMPACTS SUR L'ACTIVITÉ DU FORMATEUR ESPE ?

Pierre-Alain FILIPPI
Doctorant & Formateur ESPE, AIX-MARSEILLE UNIVERSITE
Laboratoire ADEF. Équipe ERGAPE
pierre-alain.filippi@univ-amu.fr

Résumé
Dans un contexte de bouleversements dus aux réformes ininterrompues et à la multiplication des prescriptions nationales, puis à leur interprétation locale, se pose la question de l'organisation du travail. Dans cette communication, l'auteur s'intéresse aux relations entre formation et analyse du travail, en s'appuyant sur une intervention à visée de formation, conduite à la demande et avec le concours de quelques formateurs de l'École Supérieure du Professorat et de l'Éducation d'Aix-Marseille qui s'interrogent sur les contraintes et ressources leur permettant, à nouveau frais, d'exercer leur métier de formateur d'enseignants dans des espaces de travail renouvelés.
Plus précisément, l'auteur présente la mise en œuvre locale du tutorat mixte accompagnant cette refondation sous la forme d'une étude de cas - le « TD délocalisé » - qui révèle les tensions et les impasses auxquelles sont soumis aujourd'hui les formateurs d'enseignants.
Ce travail de recherche s'inscrit dans la tradition de l'intervention ergonomique au sein du cadre théorique de l'ergonomie de l'activité des professionnels de l'éducation, selon une approche clinique de l'activité.

Exploitations possibles
Ce texte intéressera les formateurs ESPE souhaitant prendre du recul sur leur pratique et les conditions d'exercice de leur métier.

Mots clés
Tutorat mixte - Accompagnement des professeurs stagiaires – Formateur d'enseignants - Ergonomie de l'activité des professionnels.

DONNER DU SENS AUX NOMBRES ET À LEURS UTILISATIONS : DE LA MANIPULATION À LA SYMBOLISATION. INTÉRÊTS D'UNE PÉDAGOGIE MULTIMODALE

Nolwenn GUEDIN
Formatrice, ESPE Bourgogne, Faculté de Psychologie et École orthophonie Besançon
Doctorante, FPSE - UNIGE Genève
nolwenn.guedin@gmail.com

Résumé
Selon le modèle le plus répandu en cognition numérique, le triple code du nombre stipule que les quantités peuvent être traitées dans trois zones du cerveau selon trois représentations différentes. Les formes non-symboliques des quantités, encore appelées analogiques, rendent compte directement de leur numérosité grâce aux unités encore individualisées. Les formes symbolisées des quantités sont les nombres oraux ou écrits. Dans ce cadre, la mémorisation des résultats additifs peut être pensée comme une automatisation inconsciente de procédures opérées sur les quantités analogiques ou comme le maintien en mémoire auditivo-verbale des faits arithmétiques et leur restitution directe sous forme de nombres oraux. En faveur du premier processus, les résultats d'une étude de corrélations et d'une étude d'entraînement soulignent l'importance des habiletés visuo-spatiales et procédurales. Insérée dans une pédagogie multimodale, le recours à des quantités semi-symboliques peut grandement aider les enfants à donner du sens aux nombres et à agir sur elles en vue du maintien des résultats additifs.

Exploitations possibles
Apports pour le formateur de résultats récents issus de travaux en neurosciences concernant la construction du nombre et l'utilisation des nombres dans des situations additives, pour des élèves de cycle 1 et cycle 2.
Permet d'étayer et de donner des pistes pour concevoir / analyser des situations didactiques en lien avec la construction du nombre et les situations additives en formation initiale et/ou continue des professeurs des écoles.

Mots clés
Construction du nombre – Triple code du nombre – Fait arithmétique – pédagogie et neurosciences – multimodalité

RESSOURCES POUR LA CALCULATRICE EVOLUTION ET TRANSFERABILITE

Prénom NOM
Fonction, Etablissement
Laboratoire (éventuellement)
Adresse email

Prénom NOM
Fonction, Etablissement
Laboratoire (éventuellement)
Adresse email

Résumé
La calculatrice TI-Primaire Plus™ constitue un environnement propre à susciter l'exploration et l'investigation autour des nombres, des opérations et des problèmes. Plusieurs expérimentations ont été menées en cycle 3 (Taveau & al. 2014, Aldon & Rabatel 2015, Julien 2015) par différentes équipes au niveau national associant des IREM, ESPE et DSDEN. Elles ont permis de mettre en évidence les effets des rétroactions de la machine sur la construction du concept de nombre.
Un certain nombre de ressources ont été conçues par les équipes travaillant dans le projet CapriCo pour des apprentissages dans les domaines cités ci-dessus. Dans un premier temps, les enseignants se sont appuyés sur des ressources existantes avant de développer peu à peu leurs propres activités. L'IFé coordonnant ces différentes équipes a souhaité faire des tests croisés entre les équipes ; ainsi les activités produites ont été confrontées à des contextes différents, à des critiques permettant de les améliorer. Tout naturellement, les questions de la mutualisation et donc de la transférabilité des ressources se sont posées. Ces deux questions ont donné lieu à un travail d'homogénéisation des travaux dans un objectif de mutualisation et de publication. La communication retracera l'évolution de ces ressources, les obstacles rencontrés notamment par les enseignants dans la transmission de leurs activités, les réponses apportées et celles en cours de réflexion. Ce travail se situe dans une perspective de documentation du professeur et s'appuie sur le cadre théorique de la genèse documentaire. L'approche documentaire s'intéresse au travail documentaire des professeurs, en introduisant une distinction fondamentale entre un ensemble de ressources disponibles et un document que le professeur développe à partir de cet ensemble, dans un processus de genèse documentaire (Gueudet & Trouche, 2010).

Exploitations possibles
Cet article se situe dans une perspective de documentation du professeur. Il retracera l'évolution de ces ressources, les obstacles rencontrés notamment par les enseignants dans la transmission de leurs activités, les réponses apportées et celles en cours de réflexion.

Mots clés
Calculatrice, activités, ressources, documentaire.

ECRITURES ARITHMÉTIQUES EN LIEN AVEC L'APPRENTISSAGE DU CALCUL SOUSTRACTIF

Anne-Marie RINALDI
Formatrice ESPE de l'académie d'Amiens
Laboratoire de Didactique André Revuz Paris Diderot
anne-marie.rinaldi@u-picardie.fr

Résumé
La communication présente une partie des résultats de mon travail de thèse (Rinaldi, 2016). La recherche, conduite dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999), m'a permis de construire une organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif et d'élaborer une ingénierie pour le CE2 (8-10 ans), en cherchant à rester assez proche des pratiques de l'enseignement ordinaire (Robert, 2013). L'évolution des productions des élèves sur un ensemble de séquences permet de questionner l'usage des écritures arithmétiques et des schémas avec appui sur la droite numérique, dans le but de communiquer, s'approprier, valider et évaluer un ensemble de techniques de calcul mental (Threlfall, 2002).

Exploitations possibles
Les situations de communication présentées dans cet article permettront à des formateurs en mathématiques en master MEEF, en formation initiale ou continue, comme à des professeurs des écoles, de travailler sur les calculs soustractifs et le calcul mental en classe de CE2.

Mots clés
Calcul mental. Procédure de calcul mental. Soustraction. Calcul posé. Technique opératoire

ACTIONS, LANGAGES, REPRESENTATIONS DANS LA RESOLUTION DE PROBLEME SPATIAUX ET GEOMETRIQUES DE LA GS AU CE1

Henri-Claude ARGAUD
Equipe ERMEL (Ifé)
hargaud@gmail.com

Jacques DOUAIRE
Equipe ERMEL (Ifé)
jacques.douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN
Equipe ERMEL (Ifé)
CEREP- Université de Reims
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé
Depuis plusieurs années l'équipe ERMEL expérimente des ingénieries didactiques pour l'enseignement de la géométrie de la GS au CE1, fondées sur la résolution de problèmes. Deux questions émergent notamment de cette recherche. Quelles sont les connaissances acquises par les élèves lors de leurs actions sur les objets spatiaux, en particulier dans leurs composantes langagières, iconiques et conceptuelles ? Quelle est la contribution des expériences spatiales à des apprentissages graphiques et géométriques ?
Nos recherches aboutissent à la production de ressources pour les enseignants et les formateurs ; ces ressources explicitent les apprentissages possibles, proposent des situations didactiques et des progression possibles. Nous nous appuyons sur des exemples de situations expérimentées concernant l'appropriation de l'espace graphique pour apporter un éclairage sur ces points.

Exploitations possibles
Ce texte apporte un éclairage nouveau sur des situations présentées par l'équipe ERMEL lors de précédents colloques de la COPIRELEM. Poursuivant leur travail d'ingénierie didactique, les auteurs développent ici de nouvelles questions portant sur les connaissances en jeu. Les réponses apportées pourront intéresser formateurs et enseignants. Structuré autour de différentes fonctions du tracé, ce texte pourra aussi être exploité dans le cadre de la recherche ou d'une initiation à la recherche.

Mots clés
Géométrie plane – résolution de problèmes - connaissances spatiales – apprentissages graphiques

L'ENTREE DES ELEVES DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES VERBAUX AU CP (6-7 ANS)

Philippe LE BORGNE
Maitre de Conférences, ESPE de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UFR-EDUC
philippe.leborgne@univ-fcomte.fr

Arnaud SIMARD
Maitre de Conférences, ESPE de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UFR-EDUC
arnaud.simard@univ-fcomte.fr

Résumé

Les auteurs s'inscrivent dans la lignée de la recherche conduite par Houdement (2011), portant sur la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires à l'école primaire. Celle-ci met en évidence le rôle des processus de contrôle dans la mise en œuvre des connaissances associées à la résolution.

Le projet présenté consiste à examiner ce qui se passe pour des élèves de cours préparatoire (6-7 ans) lors de leur première rencontre avec des problèmes arithmétiques verbaux (problèmes à énoncé textuel du type « Sultana a cinq pommes et quatre poires dans son panier. Combien a-t-elle de fruits dans son panier ? » (Thévenot, Barrouillet et Fayol, 2004)).

Les auteurs étudient ce qui émerge des traces d'activité du point de vue des connaissances sur les situations. Celles-ci s'inscrivent dans le modèle de la réalité davantage que dans le modèle du problème mathématique (Burgermeister et Coray, 2008).

La méthodologie retenue s'inspire d'expérimentations conduites par Camensisch et Petit (2006) : une entrée dans les problèmes arithmétiques par le biais de petites bandes dessinées manipulables a été proposée à deux classes de CP. La phase didactique avait pour objectif final la création d'énoncés de problèmes mathématiques contextualisés par les élèves eux-mêmes.

Cette expérimentation met notamment en lumière que ce n'est pas tant les mathématiques sous-jacentes que le contexte qui est complexe lors de la résolution de problèmes.

Exploitations possibles

Ce travail donne un nouvel éclairage sur les difficultés potentielles des élèves en résolution de problèmes. Il peut être exploité en formation initiale ou continue des professeurs des écoles, dans le cadre de l'enseignement ordinaire ou de l'enseignement adapté.

Mots clés

Résolution de problèmes - Problèmes élémentaires - Champ additif - Difficultés des élèves

ROLE DES OSTENSIFS DANS LES TECHNIQUES DE TYPE DE TACHES RELEVANT DU CHAMP ADDITIF

Danielly KASPARY
Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG, France
UFMS – Univ. Fédérale du *Mato Grosso do Sul*, PPGEdumat, Campo Grande, MS, Brésil
kaspary.d@gmail.com

Marilena BITTAR
UFMS – Université Fédérale du Mato Grosso do Sul, PPGEdumat, Campo Grande, MS, Brésil
marilenabittar@gmail.com

Résumé
Une tâche qui relève du champ additif peut être traitée par différentes techniques. Nous employons ici tâche et technique au sens de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1999). Notre objectif est de comprendre comment ces techniques sont introduites et mises en place dans des institutions qui visent l'étude de l'opération d'addition. Pour cela, on considère comme élément fondamental de cette analyse les notions d'ostensif et de non-ostensif (Bosch, M. et Chevallard, Y. 1999). Les ostensifs constituent la partie visible de l'activité mathématique tandis que les non-ostensifs vivent dans le domaine des idées. Ainsi, la mise en œuvre d'une technique se traduit par la manipulation d'ostensifs contrôlés par des non ostensifs. Dans notre communication nous présenterons des résultats d'une recherche que nous avons menée sur le champ additif dans des manuels du système éducatif brésilien. Nous avons analysé et décrit l'évolution des techniques depuis les premières rencontres avec des types de tâches qui mobilisent la notion d'addition jusqu'à l'institutionnalisation de l'algorithme usuel. Pour l'analyse nous avons cherché à identifier des liens entre les techniques et les ostensifs. Nous mettrons ainsi en évidence l'importance des ostensifs et leurs différents rôles dans l'étude de cette évolution. En particulier, on étudiera l'usage de quelques ostensifs, comme signes, discours oral, doigts, droite numérique et matériel de numération.

Exploitations possibles
Cet article peut intéresser les formateurs et les enseignants de cycle 2 qui travaillent sur l'apprentissage de l'addition.

Mots clés
Champ additif, ostensifs, manuel, technique.

UNE SÉANCE DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE PRENANT APPUI SUR UNE SEANCE D'EPS A-T-ELLE UN POTENTIEL D'APPRENTISSAGE EN GÉOMÉTRIE ?

UN EXEMPLE AU CYCLE 3

Mériem Arab
Enseignante, Université Cergy Pontoise ESPE
meriem.hadj-moussa@u-cergy.fr

Résumé
Cette recherche questionne les influences mutuelles du méso-espace et du micro-espace dans le cadre de la géométrie élémentaire.

L'auteure a élaboré et expérimenté une séquence « bi-disciplinaire » avec une première séance phare d'EPS à visée mathématique, (jeu du béret adapté) dans le but d'introduire la notion de distance d'un point à une droite.

Elle questionne dans son étude les apports en mathématiques de la convocation de cette notion de géométrie en EPS. Elle relève ainsi les points d'appuis et les obstacles.

À partir de ses observations de la séquence d'enseignement mise en œuvre dans une classe de CM1, elle analyse les connaissances spatiales et géométriques ainsi que *l'organisation des problématiques* (Berthelot et Salin, 1992) en s'intéressant aux différentes actions des élèves engendrées par un travail sur un type d'espace donné (méso-espace, micro-espace). En particulier, elle relève le rapport pratique qu'ont eu les élèves par rapport à certains objets de la géométrie engendrée par un travail sur le méso-espace. Elle s'intéresse également au langage et à son rôle dans les apprentissages de la géométrie (Mathé, 2006), à la mémoire et son influence pour un transfert de connaissances dans le micro-espace (Matheron et Salin, 2002), ainsi qu'à l'influence des gestes de l'enseignant portant sur la formulation et la régulation (Gobert, 2005).

Exploitations possibles
Travail en formation initiale et/ou continue des professeurs des écoles autour de l'approche inter-disciplinaire des apprentissages.
Analyse des interactions entre méso-espace et micro-espace dans les apprentissages géométriques à l'école élémentaire.

Mots clés
Interdisciplinarité – espace et géométrie – analyse de pratique – méso-espace – micro-espace

PRÉSENTER LA PEDAGOGIE FREINET EN FORMATION A PARTIR DU DISPOSITIF DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Zoé MESNIL
MCF, UNIVERSITÉ PARIS EST CRETEIL
Laboratoire de Didactique André Revuz
zoe.mesnil@u-pec.fr

Résumé
Dans la communication que j'ai proposée au 44e colloque de la COPIRELEM, j'ai présenté une séance de formation autour du dispositif de recherches mathématiques pratiqué au sein de la pédagogie Freinet. J'ai d'abord présenté le dispositif, puis les ressources utilisées dans la séance de formation. Des recherches menées dans l'école Freinet Hélène Boucher m'ont ensuite permis d'élargir les observations, et de discuter les principes du dispositif.

Exploitations possibles
Les situations de communication présentées dans cet article permettront à des formateurs en mathématiques en master MEEF, en formation initiale ou continue, comme à des professeurs des écoles, de découvrir le dispositif de recherches mathématiques en pédagogie Freinet à l'école, et son exploitation en formation initiale auprès d'étudiants en master MEEF

Mots clés
Pédagogie Freinet. Activité de recherche. Pédagogie coopérative.

PRAXÉOLOGIES PROFESSIONNELLES ENSEIGNANTES, INCLUSION ET TRAVAIL EN PETIT GROUPE

Géraldine SUAU
Docteure, UNIVERSITÉ de LORRAINE
EA 4360 EPSAM/APEMAC
Geraldine.suau@univ-lorraine.fr

Résumé
La scolarisation des Élèves Reconnus Institutionnellement Handicapés (ÉRIH) est un nouvel enjeu de la culture professorale. Cet article propose, dans la continuité des recherches entreprises dans le projet Pratiques Inclusives en Milieu Scolaire (Assude, Perez, Suau, Tambone, 2014, 2015 ; Suau et Assude, 2016 ; Suau, 2016), d'interroger la forme d'étude « travail en petit groupe » qui peut apparaitre pour ces élèves comme condition d'accessibilité didactique - entendue comme une condition qui permet aux élèves d'avoir accès aux savoirs. À partir de cette forme d'étude « travail en petit groupe » et relativement à un type de tâche « donner une place à l'élève reconnu institutionnellement handicapé », l'auteure rend compte, à partir d'études de cas, des praxéologies professionnelles enseignantes (Chevallard, 1999, 2009). Pour cela, prenant appui sur deux séances ordinaires d'enseignement en mathématiques et sur les récits tenus par les enseignants, les phénomènes liés à la forme d'étude précitée, sont observés.

Exploitations possibles
Travail en formation initiale et/ou continue des professeurs des écoles autour de l'analyse des pratiques de professeurs des écoles de classe ordinaire qui accueillent un ERIH (Élève Reconnu Institutionnellement Handicapé) et/ou autour de l'introduction et de la mobilisation de certains concepts issus de la TAD.

Mots clés
Inclusion – ERIH – analyse de pratiques – TAD – accessibilité didactique

SITUATIONS, INTERPRÉTATION, STRATÉGIES ET CONCEPTUALISATION. LE CAS DES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES

Rémi BRISSIAUD
Maître de Conférences honoraire de psychologie cognitive
Équipe CRAC, laboratoire Paragraphe, EA 349, Université Paris 8
remi.brissiaud@univ-paris8.fr

Résumé
Les recherches récentes concernant la résolution de problèmes arithmétiques n'ont que peu influé le contenu des nouveaux programmes pour l'école. Pourtant, des progrès décisifs ont été effectués concernant le type de représentations mentales qui sont construites et, surtout, les travaux menés à l'université Paris 8, depuis le début des années 1990, permettent aujourd'hui de mieux comprendre comment le progrès en résolution de problèmes arithmétiques et le progrès dans la conceptualisation des opérations arithmétiques s'articulent. Ils permettent même de penser de manière raisonnée des progressions pédagogiques.

Exploitations possibles
Cet article, portant sur la résolution de problèmes et la conceptualisation des opérations arithmétiques, est intéressant pour la formation initiale et continue des futurs professeurs des écoles, pour la recherche ou l'initiation à la recherche.

Mots clés
Résolution de problèmes arithmétiques, conceptualisation des opérations arithmétiques.

ETUDE COMPARATIVE DE DEUX DISPOSITIFS DE MANIPULATION TANGIBLE ET VIRTUELLE POUR L'APPRENTISSAGE DE LA NUMERATION

Hamid Chaachoua
Professeur des Universités, UGA LIG
Hamid.Chaachoua@imag.fr

Marina De Simone
ATER, UGA LIG
marina.de-simone@imag.fr

Résumé
Le système de numération décimale est le résultat de l'articulation entre deux principes : décimal et de position. Le principe décimal qui est nécessaire pour la compréhension du système de numération peut être travaillé par des activités mettant en jeu les règles de groupements et d'échanges. De plus, les activités mobilisant ces deux règles sont souvent travaillées à l'aide de matériel de numération.
Notre communication sera centrée sur la prise en charge de l'aspect décimal par des situations didactiques nécessitant la manipulation des collections de grands cardinaux.
Nous proposons de comparer deux dispositifs : celui de la manipulation d'objets tangibles « bûchettes » et celui de la manipulation virtuelles « Simbûchettes ». Cette comparaison sera axée d'une part sur le rôle des ostensifs et d'autre part sur les résultats d'une expérimentation avec ces deux dispositifs. Cette expérimentation a été conduite auprès d'élèves de CE2 autour du type de tâches « dénombrer une collection ».

Exploitations possibles
Le dispositif de simulation présenté ici (Simbûchette) ouvre des pistes intéressantes pour l'enseignant dans la mesure où il facilite le travail sur l'aspect position et/ou l'aspect décimal du nombre à partir de la manipulation de collections d'objets de grande cardinalité. Il peut être exploité en formation initiale ou continue. Le texte intéressera aussi le chercheur (analyse axée sur le rôle des ostensifs et des non ostensifs)

Mots clés
Numération décimale – aspect décimal – ostensifs – dispositif de simulation

ANALYSE DIDACTIQUE DES DIFFÉRENTES TEMPORALITES AU SEIN DES DISPOSITIFS ULIS

Frédéric DUPRÉ
Doctorant
Aix Marseille Université - ADEF
frederic.dupre@ac-nancy-metz.fr

Résumé
Notre recherche s'inscrit dans le projet PIMS (Assude, Perez, Suau, & Tambone, 2015) qui vise à étudier des pratiques professionnelles en situations inclusives essentiellement dans le cadre de la Théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Notre objet d'étude concerne les dispositifs ULIS (unités localisées pour l'inclusion scolaire) au collège qui permettent à des élèves reconnus institutionnellement handicapés (ERIH) d'avoir une scolarité dans une classe ordinaire tout en bénéficiant d'un dispositif de soutien.
L'organisation de ces dispositifs place les ERIH au cœur de deux systèmes didactiques : celui de la classe ordinaire et celui dit du regroupement ULIS. L'articulation fonctionnelle entre différents systèmes est un problème qualifié d'ardu en didactique des mathématiques (Leutenegger, 2000). Notre recherche vise à questionner les actions permettant de synchroniser les différentes temporalités en jeu afin de coordonner ces deux systèmes didactiques (Assude et al., 2016).
Nous présentons ici les résultats d'une première enquête menée dans les dispositifs ULIS implantés dans les collèges des Vosges (10 principaux, 15 professeurs de mathématiques et 11 coordonnateurs).
Celle-ci a permis de montrer que du point de vue des acteurs, peu de liens temporels semblent exister entre la classe ordinaire et les moments au sein du regroupement Ulis. Les liens évoqués sont ensuite observés à l'échelle temporelle d'un chapitre traitant des écritures fractionnaires en classe de 5e.

Exploitations possibles
Exploité en formation initiale ou en continue dans le cadre de l'étude des dispositifs d'inclusion scolaire, cette recherche permet la mise en lumière des interventions des différents enseignants intervenant en ULIS.

Mots clés
Dispositif ULIS – TAD – Tâches – Temps didactique – Temps d'apprentissage – Temps praxéologique.

LES FIGURATIONS : ECRIT INTERMEDIAIRE POUR PROBLEMATISER

Sylvie GRAU
Professeure de mathématiques, ESPE NANTES
Laboratoire CREN
sylvie.grau@univ-nantes.fr

Résumé
En classe, la mise en commun suite à une résolution de problème complexe est un moment délicat. Pour nous, l'enjeu est de donner accès aux élèves à un savoir problématisé, c'est-à-dire qu'ils sachent non seulement pourquoi la solution est ce qu'elle est, mais aussi pourquoi elle ne peut pas être autrement. Or, les élèves ont des représentations très différentes d'un même problème, ils n'ont pas toujours les outils sémiotiques pour formaliser ces représentations. C'est pourquoi nous proposons aux élèves de critiquer des « figurations », une figuration étant une sorte de caricature d'une procédure de résolution, afin de les aider à formaliser la manière dont ils construisent le problème, c'est-à-dire comment ils mettent en tension leurs connaissances, leurs représentations, dont certaines sont souvent implicites, avec les données du problème. A partir d'exemples en cycle 3 autour de problèmes numériques, nous montrerons en quoi ces figurations peuvent être une aide aux élèves en difficultés, par le fait qu'elles donnent à voir l'organisation de la pensée mais aussi parce qu'elles permettent de travailler les conversions de registres.

Exploitations possibles
Cet article est destiné à tous les formateurs en mathématiques pour les PE ou à toute personne se questionnant sur la résolution de problème, sur les difficultés que rencontrent les élèves à les conceptualiser et à se les représenter pour mettre en œuvre une procédure de résolution, et/ou s'intéressant plus particulièrement aux modalités d'une mise en commun efficiente des solutions proposées par les élèves. Les deux exemples développés peuvent aussi être utilisés de façon autonome pour analyser une situation de calcul de durée ou bien de multiplication (formation initiale, formation continue, recherche ou initiation à la recherche : mémoire de M2).

Mots clés
Résolution de problème, représentation, schématisation, mise en commun, calcul d'une durée, situation de multiplication

MATHS & MANIPS :
MANIPULER POUR CONSTRUIRE LA NOTION DE VOLUME

Marie-France GUISSARD
Directrice de recherche, CREM asbl
(Belgique)
mf.guissard@crem.be

Pauline LAMBRECHT
Chercheur, CREM asbl
(Belgique)
pauline.lambrecht@crem.be

Résumé
Lors du 38e colloque COPIRELEM, une équipe du CREM a présenté un atelier décrivant plusieurs activités d'une recherche consacrée à l'introduction des manipulations dans l'apprentissage des mathématiques (Henry et Lambrecht, 2012). Ces activités, appelées *Math & Manips* (Guissard & *al.*, 2014), ont été conçues pour provoquer chez les élèves des conflits entre ce qu'ils pensent et ce qu'ils découvrent lors des manipulations. La présente communication propose une analyse en profondeur d'une séquence mise au point ultérieurement, suite à des échanges avec des enseignants et des chercheurs. Cette activité, dédiée à l'acquisition de la notion de volume par des enfants de 10 à 12 ans, propose différentes expériences (remplissage de boîtes de formes variées et immersion de solides de masses et formes diverses, ...) qui favorisent la construction d'images mentales variées dont la cohérence est progressivement installée. En particulier, la distinction entre les notions de volume d'un objet plein ou creux nous a semblé fondamentale. Cette activité prépare le terrain pour aborder la séquence suivante (dont une version provisoire avait été succinctement présentée lors de l'atelier mentionné) qui construit la formule du volume du parallélépipède rectangle par remplissage de boîtes au moyen de cubes de différentes dimensions et se termine par un retour vers les expériences initiales à la lumière de cette formule.

Exploitations possibles
Travail en formation initiale et/ou continue des professeurs des écoles autour de la conceptualisation de la notion de volume d'un solide et de la mesure de cette grandeur. Des éléments relatifs aux choix retenus permettront aux professeurs des écoles de mieux appréhender les enjeux d'apprentissage. De plus, la mise en évidence de la cohérence des expériences proposées et du statut de la manipulation apporte des éléments pour analyser des séquences autour de l'enseignement de cette notion.

Mots clés
Volume ; modélisation ; manipulation ; conflit cognitif

LES CHANTIERS MATHERNELLE UNE FORMATION CONTINUE DES PE PAR L'ACCOMPAGNEMENT D'ÉQUIPES

Pierre EYSSERIC
Formateur PE, ESPE Aix Marseille Université
pierre.eysseric@univ-amu.fr

Résumé
Le 13 mars 2012, avait lieu à Lyon la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège. L'état des lieux effectué à cette occasion montrait l'importance, pour viser une amélioration des compétences en mathématiques des élèves, d'une formation continue des enseignants, pensée à partir des réalités professionnelles vécues dans les établissements d'exercice.
Dans cette optique, dans l'académie d'Aix-Marseille, un nouveau type de formation continue en mathématiques a été proposé aux PE exerçant en école maternelle : les chantiers mathématiques,
D'abord lancées de façon expérimentale en 2012-2013 pour quelques circonscriptions, ces formations concernent aujourd'hui plus de la moitié des circonscriptions des Bouches du Rhône et depuis deux ans, nous tentons une extension du dispositif aux autres cycles en commençant par le nouveau cycle 3.
Cette communication présente les modalités de cette formation continue de PE par l'accompagnement d'équipes de PE tout au long d'une année scolaire.
La présentation de la genèse du dispositif montre comment sa naissance a été préparée localement par un fort investissement historique des formateurs maths de l'IUFM puis de l'ESPE dans la formation continue des PE. Elle permet d'amorcer un questionnement sur l'exportation de ce dispositif en d'autres lieux.
Enfin, au travers de quelques exemples de productions issues de ces formations, un lien est établi avec la production de ressources pour la formation initiale et/ou continue des PE en mathématiques..

Exploitations possibles
Cet article présente et analyse un nouveau type de formation continue qui pourrait inspirer les acteurs en charge de la formation continue des enseignants du premier degré en mathématiques. Les ressources produites dans le cadre de ces formations et présentées dans l'article peuvent aussi venir enrichir les pratiques enseignantes.

Mots clés
Formation continue - dispositif de formation continue - ressources

LA PLACE DE LA DESCRIPTION DANS LA REPRODUCTION DE FIGURES AU CYCLE 2

Cécile NIGON
Formatrice, ESPE DE LYON, SITE DE SAINT-ETIENNE
IREM DE LYON, GROUPE NUMATECOL
cecile.nigon@univ-lyon1.fr

Annette BRACONNE-MICHOUX
Professeur, Université de Montréal
annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Sandrine MICHOT
Étudiante - enseignante, Université de Montréal
sandrine.michot@umontreal.ca

Résumé
Dans cette communication, nous présentons deux expérimentations de reproduction de figures au cycle 2, l'une au Québec, l'autre en France visant à mettre en évidence le rôle de la description dans la réussite de la tâche (Pierrard, 2004). En particulier, nous nous attarderons à étudier les différents niveaux de langage utilisés ou compris par les élèves dans cette activité ("dire-penser-agir"), considérant que les mots de vocabulaire employés témoignent de l'appropriation des concepts en jeu (Rebière, 2002). Ces expérimentations s'appuient aussi sur le changement de regard que les élèves doivent porter sur les figures pour mieux en appréhender les propriétés (Duval & Godin, 2005). En France, les élèves ont utilisé un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra sur tablette) quand, au Québec, ils ont travaillé dans un environnement papier-crayon (papier quadrillé et papier blanc). Dans les deux environnements, les élèves ont reproduit des figures selon trois « scénarios » dans lesquels la description de celles-ci a été proposée à différents moments dans le processus de reproduction : à partir d'une figure modèle, avant ou après la reproduction de la figure ; à partir d'une description donnée par l'enseignante. Il semble bien qu'en présence de la figure modèle, la description (mise en mots) par l'élève soit un préalable qui favorise la réussite de l'activité même si le vocabulaire utilisé n'est pas toujours le vocabulaire géométrique. En revanche, ces mêmes élèves semblent ne pas avoir de difficultés à construire une figure d'après un programme de construction rédigé par l'enseignante.

Exploitations possibles
Apports pour le formateur à propos du rôle joué par le langage (description de figures) et par l'environnement de travail choisi (papier crayon / logiciel de géométrie dynamique).
Permet de donner des pistes pour concevoir / analyser des déroulements autour de situations de reproduction de figures dans le cadre de la formation initiale et/ou continue des professeurs des écoles.

Mots clés
Reproduction de figures – géométrie plane – langage – logiciel de géométrie dynamique

PREMIERS PAS VERS LA CONSTRUCTION D'UN REGARD GEOMETRIQUE SUR LES FORMES A LA TRANSITION CYCLE 1 - CYCLE 2

Marie Geourjon
Professeur des écoles, école de la Monne, Saint-Saturnin
IREM de Clermont-Ferrand
marie.geourjon@ac-clermont.fr

Rémi CANIVENQ
Professeur des écoles, école George Sand, Thiers
IREM de Clermont-Ferrand
remi.canivenq@ac-clermont.fr

Résumé
Dans le cadre d'une réflexion autour de la continuité de l'enseignement de la géométrie du cycle 1 au cycle 3, les auteurs ont entrepris un travail d'élaboration de progressions et de situations visant à accompagner les élèves de Grande Section et de CP dans un premier mouvement de déconstruction dimensionnelle de formes, premier pas vers la géométrie (Duval et Godin (2005), Perrin-Glorian, Leclerc et Mathé (2013)). Dans ce texte, sont présentées des éléments de ces progressions. Celles-ci articulent travail sur des solides et reproduction d'assemblages de formes par juxtaposition puis superposition, via des situations d'action, un jeu sur les instruments à disposition et des situations de formulation (Brousseau, 98).

Exploitations possibles
Enseignants en cycle 1 et cycle 2, formation initiale et continue sur la géométrie et plus particulièrement sur un travail sur les formes. Cet article montre les apports de la théorie sur la déconstruction dimensionnelle de formes pour construire des activités sur les formes en GS et CP et permettre un changement de regard géométrique des élèves.

Mots clés
Regard géométrique, formes cycle 1 et cycle 2, reproduction d'assemblages de formes

LECTURE ET ÉCRITURE AU CYCLE 3 QUEL TRAVAIL EN MATHÉMATIQUES ? QUEL APPUI POUR L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES ?

Christophe HACHE
Université Paris Diderot
LDAR (EA 4434) UPD URN UA UCP UPEC et IREM de Paris
Christophe.hache@univ-paris-diderot.fr

Résumé
Depuis plusieurs années le groupe « Léo, langage, écrit, oral » de l'IREM de Paris mène une réflexion autour des questions relative au rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il expérimente diverses modalités de travail en classe en cours de mathématiques au collège (et plus ponctuellement en classe de français) : formulations et reformulations (de définitions du cours, de propriétés du cours, de démonstrations du cours ou de réponses aux exercices), écrits intermédiaires, écriture individuelle et collective, apprentissage de la compréhension de textes, rôle de l'oral… Cette communication a pour but de mettre en perspective ces expérimentations, surtout menées au cycle 4, et les propositions des programmes de cycle 3 en français et en mathématiques.

Exploitations possibles
Cet article pourra intéresser les enseignants du primaire et de collège et leur permettra une prise de recul et un questionnement concernant la prise en compte des problématiques liées à la langue dans l'enseignement des mathématiques.

Mots clés
Langage, formulation, reformulation, compréhension.