EXPLORER L'APPORT DES GESTES DANS LES PROCESSUS D'ARGUMENTATION MATHÉMATIQUE DANS UNE PERSPECTIVE SÉMIOTIQUE

Cristina SABENA
Professeur associé en didactique des mathématiques
Département de philosophie et sciences de l'éducation, Universita di Torino (Italie)
cristina.sabena@unito.it

Résumé
L'intérêt pour le rôle des gestes dans les activités mathématiques et dans l'apprentissage des mathématiques se situe dans le thème plus large de la multimodalité de l'apprentissage, qui considère le rôle du corps et de l'activité avec signes et instruments dans la formation de la pensée. La perspective multimodale adoptée est intégrée dans une approche sémiotique. Cette approche considère une notion large de signe s'appuyant sur les travaux de Vygotsky (1931-1978) et elle encadre les signes dans un modèle systémique et dynamique : le modèle du « semiotic bundle » (« faisceau sémiotique »). Dans ce cadre, cette présentation[1] se focalise sur le rôle des gestes dans leur interaction avec les autres signes (le discours, en particulier) et étudie le support qu'ils peuvent offrir aux processus d'argumentation mathématique. Une étude de cas à l'école primaire dans le contexte des jeux d'interaction stratégique fournit les données pour montrer que les gestes peuvent soutenir les élèves dans le développement d'argumentations qui s'appuient sur des considérations empiriques pour passer à un plan hypothétique où l'on approche la généralité. À partir de là, des implications pratiques possibles pour les enseignants de mathématiques sont proposées.

I - LA MULTIMODALITE ET SES RACINES AU SEIN ET EN DEHORS DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Les origines de l'attention portée à la multimodalité dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques peuvent se retrouver dans d'importants travaux de recherche en didactique des mathématiques et pas seulement. Spécifiquement, ces travaux ont porté l'attention sur les processus d'apprentissage et d'enseignement ainsi que sur la nature de ces processus.

Dans le domaine de la didactique des mathématiques, l'attention portée aux processus a émergé dans les années 1990. J'aime, à ce propos, citer Hans Freudenthal dans ses conférences de Chine (China Lectures), là où il attire l'attention sur les processus au cœur de la recherche en didactique des mathématiques :

> "…the use and attention to processes is a didactical principle." [...l'utilisation et l'attention aux processus est un principe didactique]

À partir de cette période, beaucoup de travaux ont visé les processus de conceptualisation, d'apprentissage, de résolution problèmes, etc. des élèves de différents niveaux scolaires, en se focalisant sur les pratiques discursives et sur les transformations entre différents registres sémiotiques, oral ou écrit (Duval, 1995).

Mais, si l'on considère la phénoménologie des processus d'apprentissage dans la classe de mathématiques, on voit une variété d'actions et de productions activées par les élèves et par l'enseignant en utilisant simultanément des ressources différentes : bien sûr les mots (prononcés ou écrits) et les représentations écrites, mais aussi des formes d'expression extra-linguistiques (gestes, regards, ...) et l'utilisation de différents outils. En effet, au cours des dix dernières années, dans la recherche

[1] Une version de ce travail a été présentée dans une *Invited* Lecture à ICME13 à Hambourg, en juillet 2016. Les actes, en anglais, seront bientôt publiés.

internationale en didactique des mathématiques, plusieurs travaux soulignent l'importance et la coexistence mutuelle d'une variété de modalités ou de ressources cognitives, matérielles et perceptives, dans les processus d'enseignement-apprentissage en mathématiques et plus généralement dans la pensée mathématique (Radford, Edwards & Arzarello, 2009). L'hypothèse de travail qui unit ces travaux est que ce type de ressources joue un rôle important non seulement dans la communication mais aussi dans les processus cognitifs, qui sous-tendent la production de la signification mathématique.

L'attention portée à la multimodalité provient cependant de travaux menés en dehors de la didactique des mathématiques, en particulier dans les domaines de la psychologie, de la psycholinguistique et des neurosciences ainsi que de travaux en sciences de la communication.

Dans les sciences cognitives, l'*embodied cognition* (« la cognition incarnée ») est une perspective qui attribue au corps un rôle central dans la formation de l'esprit. Lors du passage au nouveau millénaire, en 2000, l'ouvrage provocateur « Where Mathematics Comes From » de George Lakoff et Rafael Núñez a souligné le rôle crucial des aspects perceptuels et matériels dans la formation de concepts abstraits, y compris les concepts mathématiques. Ce nouveau point de vue a mis l'accent sur les fonctions sensorielles et motrices ainsi que sur leur importance pour la réussite de l'interaction avec l'environnement. En critiquant l'idéalisme platonicien et le dualisme cartésien entre le corps et l'esprit, Lakoff et Núñez (2000) préconisent que tous les types d'idées, y compris les idées mathématiques les plus sophistiquées, sont fondées sur nos expériences corporelles et se développent à travers des mécanismes cognitifs métaphoriques.

Cela a également ouvert un grand débat sur l'éducation mathématique au cours de ces années et a suscité une réflexion sur les origines des idées mathématiques dans l'homme, et (même) après ce déclencheur, plusieurs recherches ont souligné le rôle des expériences corporelles et kinesthésiques dans l'apprentissage des mathématiques (Arzarello & Robutti, 2008; de Freitas & Sinclair, 2014; Nemirovsky 2003; Radford et al., 2007; Roth, 2009; pour une vue d'ensemble voir Gerofsky, 2015).

L'idée que le corps joue un rôle dans la formation de la pensée n'est pas complètement nouvelle : pour cela, il suffit de relire les travaux de Piaget, Vygotsky, Montessori en psychologie et les perspectives phénoménologiques de Husserl et Merleau-Ponty. Quoi de nouveau dans l'*embodiment* ? Surement le rôle assigné aux métaphores en tant que les principaux mécanismes cognitifs pour l'abstraction. L'exemple classique est celui du temps conceptualisé comme espace (quand on dit « Noël approche », on parle en termes spatiaux d'un objet temporel) ou, en mathématiques, les ensembles comme des contenants (« l'élément est dans l'ensemble », on parle d'objets immatériels en termes d'objets matériels).

Plus récemment, la perspective de l'*embodiment* semble être confirmée par les résultats neuroscientifiques portant sur les « neurones miroirs » et sur les « neurones multimodaux » qui s'activent lorsque le sujet accomplit une action, lorsqu'il observe quelqu'un d'autre faire la même action, ainsi que lorsqu'il imagine cette action (Gallese et Lakoff, 2005). Sur la base de ces résultats, Gallese et Lakoff (*ib.*) offrent un nouvel apport théorique sur le fonctionnement du cerveau, selon lequel « action et perception s'intègrent au niveau du système sensori-moteur et non pas par le biais d'aires d'association supérieure » (*ib.*, p. 459). En particulier, un tel résultat apparaîtrait comme crucial non seulement pour contrôler le mouvement mais aussi pour planifier les actions, une activité typique de ce qui est généralement conçu comme « penser ».

Les termes 'multimodal' et 'multimodalité' reviennent alors à indiquer une caractéristique de la cognition humaine opposée à la 'modularité'. D'autre part, dans le champ de la communication le terme « multimodal » est utilisé en référence à des modalités multiples que nous avons pour communiquer et exprimer des significations auprès de nos interlocuteurs : mots, sons, images, etc. (Kress, 2004). De nombreuses études sur le rôle des gestes dans la communication et la cognition suggèrent une sorte de relation entre les différentes modalités. Par exemple, selon Calbris (2011) :

> One uses parallel sensory pathways, audio-oral and visuo-gestural, which interact in multimodal communication, that is, the ensemble of spoken linguistic, prosodic, intonational, gestural, postural, and facial activity that participants engage in when they 'talk'.

Ces potentialités communicatives attirent une attention croissante grâce à la diffusion de nouvelles potentialités technologiques, qui développent constamment de nouvelles possibilités d'interaction à travers nos corps (par exemple, les appareils touch-screen).

À l'instar de Radford, Edwards et Arzarello (2009), je considère la multimodalité comme se référant à l'importance et à la coexistence mutuelle d'une variété de modalités ou de ressources cognitives, matérielles et perceptives dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, et plus généralement dans la construction du sens des concepts mathématiques :

> Ces ressources ou modalités incluent à la fois la communication symbolique orale et écrite ainsi que le dessin, le geste, la manipulation d'artefacts matériels et numériques, et plusieurs types de mouvements du corps. (*ib.*, pp. 91-92)

D'autre part, l'intérêt pour les aspects *embodied* et multimodaux nécessite la prise en compte des aspects sociaux, historiques et culturels dans la genèse des concepts mathématiques, qui ont été négligés par les perspectives qui réfèrent à l'*embodiment* (pour une critique, cf. Schiralli et Sinclair, 2003 ; Radford et al., 2005). Les mathématiques sont en effet « inséparables des instruments symboliques » et l'acte de savoir est un phénomène « culturellement modelé » (Sfard et McClain, 2002, p. 156) dans lequel l'utilisation des instruments et des signes joue un rôle important.

Cette limite principale de l'*embodiment* peut être surmontée en adoptant une approche sémiotique dans laquelle les dimensions sociales et culturelles sont considérées, et notamment je vais m'appuyer sur l'idée vygotskienne de signe, présentée dans la section suivante.

II - UNE APPROCHE SEMIOTIQUE POUR LA MULTIMODALITE

Dans la perspective vygotskienne sur le développement cognitif humain (ou développement culturel), les signes jouent un rôle crucial (Vygotsky, 1931-1978). Un tel processus général, qui tient compte de la formation de la conscience humaine par l'individualisation progressive des fonctions sociales inhérentes, s'appelle l'internalisation. En particulier, selon la loi génétique du développement culturel, il y a un passage des fonctions interpsychiques, qui sont partagées au niveau social, aux intrapsychiques, qui se rapportent à la personne au niveau individuel.

Grâce à leur signification sociale, les signes servent à l'individu pour exercer un contrôle volontaire sur son comportement, comme les signaux routiers signalent aux individus les événements permettant de régler leur conduite. Par analogie avec les outils dans le milieu du travail, les signes fonctionnent, sur le plan psychologique individuel, comme « moyens stimulants » qui représentent des caractéristiques ou des aspects de l'expérience socialement partagée et pilotent les processus mentaux de l'individu :

> L'invention et l'utilisation des signes comme moyens auxiliaires pour résoudre un problème psychologique (se rappeler, comparer quelque chose, rendre compte, choisir etc.) est analogue à l'invention des outils d'un point de vue psychologique. Les signes agissent comme instruments d'activité psychologique de la même façon que le rôle d'un outil de travail (*ib.*, p. 52).

Dans cette perspective, les signes sont considérés dans leur rôle fonctionnel en tant qu'outils psychologiques, permettant au sujet de réfléchir et planifier ses actions, et en tant que médiateurs culturels (Radford & Sabena, 2015).

Cela est une idée très générale du signe – qui diffère des cadres sémiotiques classiques, souvent adoptée dans la recherche en didactique des mathématiques, comme la notion de registre de représentation sémiotique de Duval (1995) – puisqu'elle ne pose pas de prescriptions sur ce que peut être un signe et sur les caractéristiques qu'il peut avoir : les gestes peuvent alors être considérés en tant que signes, comme Vygotsky (1931-1978) même l'a souligné dans son célèbre exemple du geste de *pointage* pour illustrer le processus d'internalisation à partir de la signification qu'une mère assigne au mouvement de la main de son enfant.

En prenant l'idée de signe vygotskienne, dans le but d'inclure des gestes ainsi que d'autres registres plus classiques, je me sers de l'outil « semiotic bundle » ou « faisceau sémiotique » (Arzarello, 2006 ; Arzarello et al., 2009 ; Sabena et al., 2012) comme un système composé de signes (ou ressources sémiotiques) différents et de leur relations mutuelles, qui sont produits par les élèves et éventuellement par l'enseignant durant l'activité mathématique : mots (prononcés ou écrits), schémas écrits, gestes, outils, etc. De façon similaire à l'idée de « système sémiotique », au sens de Radford (2002), le faisceau sémiotique inclut à la fois les registres classiques avec des règles de production et de transformation précises et codifiables (Duval, 2006), et les registres *embodied*, qui nous permettent de rendre compte en termes sémiotiques des processus multimodaux se produisant dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Un exemple peut être constitué par les mots, les gestes et les figures dessinées par les élèves pendant la résolution d'un problème géométrique.

Le faisceau sémiotique est caractérisé par deux aspects-clés :

- un caractère systémique, révélé par une analyse synchronique des relations entre les différents types de signes à un moment donné (comme une sorte de « photo sémiotique ») ;
- une nature dynamique, révélée par une analyse diachronique se focalisant sur les évolutions des signes et de leurs transformations dans le temps (une sorte de « film sémiotique »).

Les analyses synchroniques et diachroniques—qui ne sont distinguées que pour l'analyse—sont effectuées en regardant en détail les vidéos des activités de classe où les élèves sont engagés, avec leurs transcriptions multimodales, c'est-à-dire des transcriptions qui incluent non seulement les mots mais aussi l'enregistrement des gestes et d'autres types de signes.

Dans cette analyse, les gestes se manifestent de façon évidente comme des ressources multimodales présentes dans les processus d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. La section suivante est consacrée à l'approfondissement de cette question d'un point de vue théorique.

III - LES GESTES COMME RESSOURCES MULTIMODALES

Le fait d'inclure les aspects *embodied* dans l'analyse de la pensée et de l'apprentissage mathématique a fait émerger l'étude des gestes comme une composante cognitive et communicative importante.

Les gestes accompagnant le discours sont un phénomène commun, comme le travail précurseur de Kendon (1980) l'a souligné. En linguistique, pour la première fois, il a commencé à considérer les gestes comme un aspect constitutif de la communication, dans un contraste marquant avec les perspectives antérieures, qui les considéraient comme de simples ornements du discours, de rhétorique ou comme des moyens de décharge d'énergie excessive. La recherche s'est depuis intéressée à l'étude des gestes spontanés, qui sont habituellement faits dans un espace devant soi, nommé l'« espace gestuel », avec des mouvements souvent symétriques des mains, qui partent d'un état de repos, et reviennent à un état de repos. Plusieurs études psychologiques et psycholinguistiques ont mis en avant que le discours et les gestes spontanés — que l'on appellera simplement gestes dans la suite — sont étroitement liés et que faire des gestes est important non seulement dans les processus de communication mais aussi dans les processus liés à la pensée (McNeill, 1992, 2005 ; Goldin-Meadow, 2003).

Le discours et les gestes sont étroitement liés à plusieurs égards (McNeill, 1992) car ils sont temporellement simultanés :

- dans les aspects phonologiques (la phase centrale du geste coïncide avec le sommet de la phrase phonologique),
- dans les aspects sémantiques (au niveau de la signification),
- dans les aspects pragmatiques (leur fonction dans le discours).

Même dans le développement de l'enfant, le geste et le discours évoluent ensemble. Au niveau cognitif, les experts identifient la fonction importante d'alléger la mémoire de travail, en donnant la possibilité de mieux réorganiser les ressources cognitives (Goldin-Meadow et al., 2001).

Si déjà Vygotsky (1934-1986, p. 218) a souligné le rôle constitutif du langage dans la pensée, en affirmant qu'« une pensée n'est pas simplement exprimée par les mots ; elle naît avec eux », en psychologie, plusieurs travaux sur les gestes visent à élargir ce rôle constitutif du langage à l'unité discours-gestes. Citant McNeill (1992), on peut dire que « les gestes non seulement reflètent la pensée mais ont un impact sur la pensée. Les gestes, avec le langage, aident à constituer la pensée" (p. 242, souligné comme dans l'original). C'est dans cette hypothèse vygotskienne que je considère le rôle des gestes dans les activités mathématiques.

Ces interprétations cognitives offrent les éléments pouvant expliquer, par exemple, pourquoi nous faisons des gestes durant les conversations téléphoniques (Ruiter, 1995) ; pourquoi, lorsqu'il nous est empêché de faire des gestes, notre discours devient moins fluide ; ou pourquoi même les aveugles de naissance utilisent les gestes pendant qu'ils parlent. Ces phénomènes ne peuvent pas être expliqués seulement en termes de dimension communicative interpersonnelle : les gestes assument ainsi un rôle constitutif dans les processus de la pensée.

Les travaux sur les gestes ont fourni d'autres outils d'analyse, notamment, McNeill (1992) identifie quatre types de gestes :

- le geste iconique, s'il entretient une relation de ressemblance avec le contenu sémantique du discours (par exemple, incliner deux mains pour indiquer un toit) ;
- le geste métaphorique, similaire au geste iconique, mais avec un contenu visuel présentant une idée abstraite qui n'a pas de forme physique (un exemple classique est la main dans l'acte de tenir un objet, lorsqu'on fait référence à l'idée d'un « sujet donné » dans le discours) ;
- le geste déictique, s'il indique un objet, un événement, ou un lieu dans le monde concret ;
- le geste qui contribue à souligner des parties du discours (en anglais, 'beats').

Les gestes déictiques sont effectués généralement avec l'index levé (parfois avec des objets tenus dans la main, comme un stylo) et sont aussi appelés *pointage*. Apparemment simple, montrer du doigt est au contraire un acte complexe. En plus des *pointages* concrets (comme indiquer un livre sur la table), la recherche a identifié aussi des *pointages* abstraits, quand la main ou les doigts sont levés dans l'espace comme s'ils indiquaient quelque chose, alors que l'espace semble être vide. Selon l'interprétation de McNeill (ib., p. 173) :

> L'orateur semble montrer quelque chose du doigt dans l'espace vide, mais en effet l'espace n'est pas vide ; il est plein de signification conceptuelle. Cette déixis abstraite implique une utilisation métaphorique de l'espace dans lequel des formes spatiales sont données aux concepts.

Les types de gestes identifiés par McNeill (ib.) ne prennent pas en compte leurs caractéristiques physiques mais considèrent les relations avec l'information contextuelle : cela implique que le processus interprétatif nécessite la prise en compte du contexte plus large où le geste est effectué. En outre, il est important de souligner qu'un même geste peut être à la fois de diverses natures.

De plus, les gestes sont parfois caractérisés par la répétition : des caractéristiques distinctes d'un geste se reproduisent au cours du discours (pas forcement des gestes consécutifs), et la récurrence peut être signalée par la posture de la main, sa position, son orientation, son mouvement, son rythme, etc. (McNeill et al., 2001). Ce phénomène est appelé *catchment* et peut être relié à la cohésion du discours :

> En détectant les *catchments* créés par un orateur donné, nous pouvons voir ce que cet orateur est en train de combiner en unités plus larges du discours – quelles significations sont considérées comme similaires ou reliées et groupées ensemble, et quelles significations sont mises dans des *catchments* différents ou isolés, et sont ainsi vus pas l'orateur comme ayant des significations distinctes voire moins reliées. (ib., p. 10)

Dans le modèle du faisceau sémiotique, les *catchments* peuvent être identifiés grâce à une analyse diachronique : ils peuvent avoir une grande importance car ils nous renseigneraient sur les significations sous-jacentes dans le discours et dans ses dynamiques. Par exemple, dans le contexte de classe, étudier les *catchments* pourrait nous fournir des indices sur l'évolution des significations chez les élèves. De plus, les *catchments* peuvent contribuer à l'organisation d'un argument au niveau logique, comme identifiée dans des travaux précédents (Arzarello et Sabena, 2014).

Dans la suite, la loupe du faisceau sémiotique est appliquée à un ensemble de données empiriques portant sur les processus d'argumentations mathématiques, dans le but de répondre à la question suivante :

Quelle contribution spécifique peuvent donner les gestes, lorsqu'ils sont considérés comme des signes dans des faisceaux sémiotiques, pour les processus d'argumentation ?

L'analyse très fine, présentée ci-après, sera centrée sur une étude de cas. Le travail est fait à partir de données provenant d'enregistrements vidéos dans une classe de l'école élémentaire.

IV - UNE ETUDE DE CAS : LA COURSE A 20

L'étude de cas est centrée sur un jeu d'interaction stratégique appelé « La course à 20 » (Brousseau, 1997). Cette étude fait partie d'un projet de recherche orienté par la conception des jeux stratégiques afin de favoriser les processus de résolution de problèmes et d'argumentation, de l'école primaire à l'école secondaire.

Le jeu est joué par deux joueurs, qui cherchent à atteindre le nombre 20 en rajoutant, à tour de rôle, 1 ou 2. Précisément, le premier joueur dit 1 ou 2 ; le deuxième joueur doit rajouter 1 ou 2 au nombre précédent, et dire le résultat ; à ce moment, le premier joueur rajoute alors 1 ou 2, etc. Le joueur qui dit 20 en premier gagne le jeu. Dans la théorie des jeux, ceci est un jeu à information complète et parfaite, fondé sur des prises de décisions séquentielles. Comme le lecteur peut le vérifier, la stratégie gagnante consiste à commencer en premier et à suivre la séquence des nombres 2-5-8-11-14-17-20. Dans ce type de jeux, le joueur a besoin de trouver, *pour chaque* tour de son adversaire, le *tour correct* pour gagner le jeu. Ces processus peuvent être reliés au schéma logique de coordination d'un quantificateur universel avec un quantificateur existentiel, comme dans le cas de nombreux théorèmes mathématiques.

Je vais m'appuyer sur des données provenant d'une discussion dans une classe de 4e année de l'école élémentaire (9-10 ans). Le débat démarre après des séances où les élèves ont joué le jeu en binôme en écrivant les nombres ajoutés sur des flèches qui vont de gauche à droite et les résultats sur une ligne qui va de gauche à droite (comme en Figure 1).

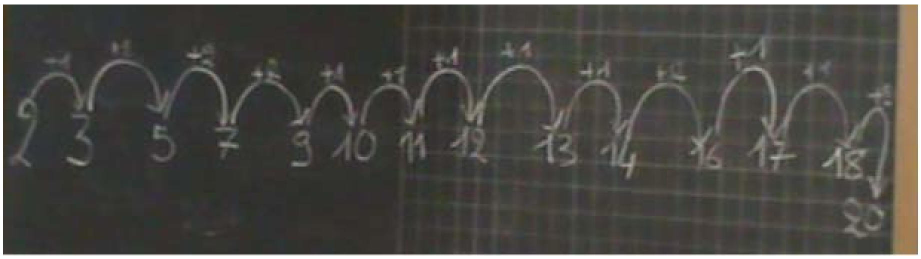


Figure 1. Modèle sémiotique introduit par l'enseignante pour jouer à la course à 20.

Ce modèle sémiotique a été introduit par l'enseignante pour permettre aux élèves de garder trace à la fois des nombres gagnants et des nombres ajoutés. Cette trace se voulait être un support pour les élèves dans leur recherche de régularités qui sont à la base de la stratégie gagnante.

La discussion est organisée à la suite d'un tournoi de classe, dans lequel un représentant de chaque équipe a joué le match au tableau (le dernier match est montré en Figure 1). L'enseignante débute une discussion en explicitant le but de *trouver une stratégie gagnante* et de *la justifier*.

Je vais me focaliser en détail sur les contributions de quelques élèves — Giulio, Eliana et Elisa – mais je vais d'abord donner quelques informations sur le contexte, pour faciliter la compréhension de l'analyse.

Au démarrage de la discussion, les nombres 14 et 17 sont identifiés immédiatement comme nombres gagnants : dans quelques cas les justifications sont fondées sur les tours possibles des deux joueurs, comme le dit Elena :

Elena : tu dois atteindre d'abord 14 et puis 17. Parce que si tu fais 14 plus 1 et tu obtiens 15 et après tu fais plus 2, et tu obtiens 17, après… tu fais plus 1 pour arriver à 18 et l'autre fait 2 et atteint 20. Tandis que si à 14 tu fais plus 2, tu arrives à 16 et l'autre fait plus 1 pour arriver à 17, l'autre 19 s'il fait plus 2, tu fais plus 1, et tu atteins 20. Donc en tout cas, de 14 à 17 tu arrives quand même à 20.

Dans d'autres cas, les élèves s'appuient sur les *observations empiriques* de ce qui est vraiment arrivé pendant le tournoi, comme Filippo :

Filippo : à mon avis selon comment j'ai joué pendant ces deux tours j'ai vu que je suis toujours arrivé sur le 14 et sur le 17. Donc, quand tu es à la fin du jeu, tu dois toujours arriver sur le 14 et sur le 17, parce que ces nombres sont les nombres chanceux qui te permettent de gagner.

Par induction à rebours, le nombre 11 commence à être identifié comme nombre gagnant et relié à 14 et à 17 :

Diego : 11 est un nombre important peut-être, parce que peut-être mon équipe rajoute 2 et ça fait 13, l'autre équipe rajoute 1 et arrive à 14, j'ajoute 1, 15, ils rajoutent 2 et ça fait 17.

À ce moment, après environ 20 minutes de discussion entre élèves, Giulio propose une règle générale pour identifier tous les nombres gagnants :

Giulio : Je crois que pour les nombres gagnants tu enlèves toujours 3 : de 20 tu enlèves 3 et tu arrives à 17 ; de 17 tu enlèves 3 et tu arrives à 14, je crois qu'un autre nombre gagnant pourrait être 11, pourrait être…8, pourrait être...5, pourrait être...2.

Avec la stratégie décrite, Giulio identifie tous les nombres gagnants à partir du résultat gagnant (20) et en procédant par des soustractions répétées, dans un processus d'induction à rebours, comme décrit dans la théorie des jeux. La stratégie est exprimée verbalement en termes généraux, sans référence à des simulations de tours, et elle est accompagnée par de nombreux gestes. Le tableau 1 présente la transcription de la partie initiale de l'affirmation de Giulio, enrichie de la composante gestuelle et de mots originaux en italien. Les mots soulignés indiquent qu'ils sont simultanés avec le geste montré et la même convention sera utilisée dans les tableaux suivants.

Quand il dit « tu enlèves toujours 3 », Giulio regarde le tableau noir, où la dernière correspondance est encore affichée, et bouge sa main de droite à gauche (du point de vue de l'élève) : ce mouvement peut être interprété comme indiquant la soustraction, en référence à la droite numérique, qui est très utilisée dans le curriculum italien. Avec cette interprétation, le geste peut être classifié comme un *geste métaphorique* indiquant la soustraction. Remarquons que, dans la version originale en italien, Giulio utilise le terme « togli », qui est employé à la fois dans le contexte de tous les jours pour dire « éliminer, enlever » et dans le contexte mathématique à l'école primaire pour indiquer « soustraire ».

Je crois que pour les nombres gagnants tu enlèves toujours 3.	De 20	tu enlèves 3	et tu arrives à 17
Secondo me dato che i numeri vincenti si toglie sempre 3.	*Da 20*	*togli 3*	*e arrivi a 17*
a)  *La main ouverte bouge de droite à gauche*	b)  *Trois doigts levés*	c)  *Trois doigts levés bougent de droite à gauche*	d)  *Pointage abstrait vers le bas*

Tableau 1. Transcription multimodale de la première partie de la stratégie de Giulio

Le mouvement de la main de droite à gauche est répété quand la règle est appliquée pour identifier les nombres gagnants. D'après le tableau 1 (photos b et c) nous pouvons remarquer que lorsque Giulio dit « de 20 tu enlèves 3 », sa main bouge vers la gauche. En même temps, trois doigts sont montrés, et globalement nous retrouvons *deux références métaphoriques condensées dans un seul geste* :

- le mouvement de droite à gauche → soustraction (en référence à la ligne numérique)
- trois doigts → **nombre** 3 (en référence à la cardinalité)

Quand il complète la phrase et annonce les nombres gagnants, Giulio fait un *pointage* abstrait vers le bas, qui est simultané avec les nombres prononcés (dans le tableau 1, le cas du 17 est présenté dans la dernière colonne).

Si nous considérons la séquence dans son ensemble, nous pouvons voir que la soustraction par 3 est répétée pour obtenir 14 : cette répétition est exprimée aussi par la répétition de la même configuration gestuelle des trois doigts levés (les photos ne sont pas présentes pour manque de place). Le même geste métaphorique est donc répété dans un *catchement* exprimant que le nombre 3 est *toujours* soustrait, afin d'obtenir *tous* les nombres gagnants.

Ensuite (*Je crois qu'un autre…*), nous pouvons remarquer qu'une sorte de « *contraction sémiotique* » se produit à l'intérieur du faisceau sémiotique : le discours se réduit, mentionnant seulement les nombres gagnants, et passe à un niveau hypothétique (*cela pourrait être…*) ; et il paraît que même les gestes se réduisent dans leurs mouvements, pour terminer avec un rapide *pointage* abstrait vers le bas à gauche, en simultané avec l'annonce des nombres gagnants (8, 5, 2).

À ce point, l'enseignante demande à Giulio d'expliquer son idée. Voici ci-après la transcription verbale de l'argument de Giulio :

Enseignante : Explique bien cette idée.

Giulio : Parce que… c'est-à-dire, je sais pas, si tu arrives à 2… Je sais pas, je commence, je fais 1, non je fais 2, lui il arrive et met 1, je mets 2 et je suis arrivé à 5, que je crois être un autre nombre gagnant… oui, arrivé à 5… c'est un nombre gagnant, je crois. Après… il rajoute 2, disons, j'ajoute 1 et j'arrive à 8, qui est un autre nombre gagnant. Elle rajoute 1, j'ajoute 2 et j'arrive à…11, qui est un autre nombre gagnant. Il rajoute 2, j'ajoute 1, et j'arrive à 14, qui est un autre nombre gagnant, il rajoute 1 j'ajoute 2, nous arrivons à 17 qui est un nombre gagnant, il rajoute 1 ou 2, j'ajoute 1 ou 2 et je gagne.

La soustraction devient maintenant un mouvement en avant qui commence par le tout premier tour (numéro 2) d'un match imaginé entre lui et un autre joueur. Ce mouvement est produit par le biais d'une répétition de la même structure linguistique : « il rajoute…j'ajoute…et j'arrive à…, qui est un nombre gagnant ». Cette répétition n'est pas seulement une simple répétition de mots, mais elle est accompagnée d'une *structure de son rythmique* qui est préservée tout le long de la phrase et contribue à transmettre un caractère général à la règle détectée (de façon similaire à ce qui est discuté dans le contexte algébrique dans Radford et al. (2007).

Les gestes sont constamment présents, du premier tour simulé au dernier tour (gagnant). Le tableau 2 présente quelques photos des gestes accompagnant la toute première partie de la phrase de Giulio.

Je commence […], je fais 2	Lui, il arrive et met 1	Je mets 2	et je suis arrivé à 5
Io inizio […], faccio 2	*lui arriva lì e mette 1*	*Io metto 2*	*e sono arrivato a 5*
a)  *Deux doigts levés*	b)  *La main ouverte vers le haut comme si elle contenait quelque chose*	c)  *Deux doigts levés*	d)  *La main ouverte vers le haut comme si elle contenait quelque chose*

Tableau 2. Transcription multimodale de la première partie de l'argument de Giulio.

Pendant qu'il annonce les tours d'un match fictif, Giulio fait à nouveau deux types de gestes métaphoriques. Quand il indique ses propres tours, le geste indique les nombres prononcés en levant le nombre correspondant de doigts, notamment deux doigts quand il dit « deux » (photos a et c dans le tableau 2). Lorsqu'il se réfère aux tours de l'autre joueur ou au résultat obtenu, il tient sa main ouverte vers le haut comme si elle contenait quelque chose (photos b et d dans le tableau 2) : dans ce cas la référence métaphorique est faite pour donner de la généralité aux nombres prononcés.

À un moment donné, en mentionnant un tour de l'adversaire, Giulio utilise une expression linguistique qui, en français, peut être traduite par « disons » ou « par exemple » (in italien c'est « tipo »), et qui peut être interprétée comme exprimant les germes du concept de « tout nombre ». Quand il dit « disons », l'élève effectue un geste qui consiste à faire tourner rapidement la main ouverte (tableau 3, photo a).

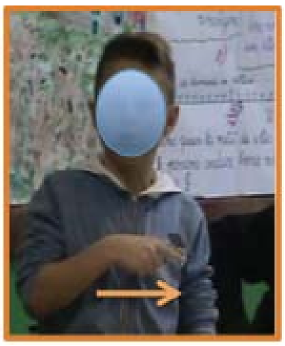
Après… il rajoute 2, disons	[…] Elle rajoute 1,	J'ajoute 2
Poi…lui aggiunge 2, tipo,	*[…] lei aggiunge 1,*	*Io aggiungo 2*
a)  *La main ouverte tourne rapidement*	b)  *Pointage abstrait vers la gauche*	c)  *Pointage abstrait vers la droite*

Tableau 3. La généricité multimodale transmise à travers le faisceau sémiotique.

Le geste est encore métaphorique et le faisceau sémiotique des mots et des gestes met en avant que le nombre 2, choisi pour indiquer le tour de l'adversaire, doit être considéré comme une possibilité parmi d'autres (tous les tours possibles) : c'est-à-dire un tour générique. Cette relation logique est en effet très délicate à gérer : l'articulation entre un quantificateur universel (pour tout tour de mon adversaire) avec un quantificateur existentiel (le tour que je vais choisir après lui). Nous remarquons que la combinaison multimodale de gestes et discours permet aux élèves de bien gérer cette relation.

À partir de là, en même temps que les tours des deux joueurs sont annoncés, des gestes de *pointage* abstrait sont effectués en *alternance spatiale* gauche-droite, ce qui indique visuellement l'alternance entre les deux joueurs dans le jeu (tableau 3, figures b et c). Cette alternance spatiale peut être interprétée comme une aide pour l'élève pour *garder le contrôle de son argument au niveau local*, c'est-à-dire pour contrôler le choix des tours et des contre-tours dans la séquence imaginée. L'alternance spatiale gestuelle est répétée plusieurs fois (*catchement*), pour tout couple de tours et contre-tours, avec le même rythme des mots qui l'accompagnent. Comme indiqué par McNeill (2005), les *catchments* gestuels donnent de la cohésion au discours. Dans ce cas, ils contribuent à *structurer l'argument entier au niveau global*.

Le modèle écrit, à travers lequel ils ont joué le jeu, a probablement aidé Giulio dans le développement de sa stratégie, en fonctionnant comme un outil intériorisé. En fait, quand il annonce la règle générale, il regarde au tableau (tableau 1, photo a), où le dernier match a été écrit (cf. Figure 1). Nous remarquons que ce match n'a pas été joué selon la stratégie de Giulio, et que, après ce moment initial, nous ne retrouvons aucune référence explicite aux matchs joués, par exemple avec des gestes de *pointage* au tableau ou à son cahier : cela peut être un autre indicateur du niveau général atteint par Giulio dans son argumentation.

Le débat se centre ensuite sur la stratégie de Giulio. Quelques élèves partagent immédiatement l'avis de Giulio et produisent leurs propres argumentations, comme Eliana :

> Eliana : Je suis d'accord avec Giulio parce que pratiquement, à chaque fois que tu dois atteindre un nombre chanceux tu dois rajouter 3, parce que d'abord tu rajoutes 1 et puis tu rajoutes 2 ou tu rajoutes 2 et puis tu rajoutes 1.

Eliana explicite que les nombres gagnants ou chanceux peuvent être atteints en *rajoutant* 3 (alors que Giulio a mentionné la soustraction par 3), et produit un argument pour cela, en faisant référence aux deux nombres 1 et 2 qui peuvent être joués dans le jeu. Quand elle dit « tu dois rajouter 3 », elle accompagne son discours avec un geste de la main droite qui tourne de gauche à droite (tableau 4, photo a), pouvant se référer à l'addition sur la droite numérique.

tu dois rajouter 3	parce que d'abord tu rajoutes 1	et puis tu rajoutes 2	ou tu rajoutes 2	et puis tu rajoutes 1
Devi aggiungere 3	*perché prima aggiungi 1*	*e poi aggiungi 2*	*o prima aggiungi 2*	*e poi aggiungi 1*
a)  *Main droite qui tourne de gauche à droite*	b)  *Main gauche qui bouge de gauche à droite*	c)  *Main droite qui bouge de gauche à droite*	d)  *Main gauche qui bouge de gauche à droite*	e)  *Main droite qui bouge de gauche à droite*

Tableau 4. L'argument d'Eliana sur la stratégie d'ajouter 3.

Eliana explique aussi d'où vient ce nombre 3, qui est la combinaison de possibles tours successifs des deux joueurs. En disant les nombres ajoutés pour composer 3, elle bouge d'abord sa main gauche de gauche à droite (photo b dans le tableau 4), puis sa main droite avec le même mouvement (photo c dans le tableau 4) ; elle mentionne les deux combinaisons possibles (1 + 2 ou 2 + 1) et répète la combinaison gestuelle dans un *catchment* (photo c-d dans le tableau 4).

Dans le cas de Giulio, nous pouvons remarquer l'alternance spatiale gauche-droite comme une référence métaphorique à l'alternance des deux joueurs, et nous pouvons remarquer un *catchment*. Mais, maintenant, à la différence de Giulio, le fait d'avoir deux joueurs en alternance est exprimé par Eliana *seulement* à travers son geste car dans son discours elle utilise toujours le pronom « tu », probablement avec un sens impersonnel.

À nouveau, nous pouvons identifier *deux composantes métaphoriques dans un seul geste* :

- mouvement de gauche à droite→ addition
- alternance spatiale → alternance des joueurs.

Immédiatement après Eliana, Elisa intervient :

Elisa : Donc en tout…si tu joues… tu rajoutes à chaque fois 3, et donc si tu peux arriver aux nombres où il y a 3… (*levant l'index et le pouce, photo a, Tab. 5*), c'est-à-dire si… En tout ça fait 3 (*déplaçant les doigts levés de gauche à droite, photo b, Tab. 5*), parce que si tu rajoutes 1 (*déplaçant les doigts levés à sa gauche, photo c, Tab. 5*) et l'autre rajoute 2 (*déplaçant les doigts levés à sa droite, photo d, Tab. 5*), si tu rajoutes 2 et l'autre rajoute 1 (*répétant la séquence avec les doigts à sa gauche et puis à sa droite comme dans les photos c-d, Tab. 5*), en tout ça fait 3 (*bougeant à nouveau les doigts levés comme dans la photo b, Tab. 5*) et donc tu dois réussir à choisir les nombres qui sont…

Enseignante : à une distance…

Elisa : de 3.

si tu peux arriver aux nombres où il y a 3…	c'est-à-dire si… En tout ça fait 3	parce que si tu rajoutes 1	et l'autre rajoute 2
e quindi se tu riesci ad arrivare ai numeri in cui…in cui ci sono 3	*cioè se…in tutto fa 3*	*perché se tu aggiungi 1*	*e l'altro aggiunge 2*
a)  *Geste effectué avec deux doigts levés comme s'ils tenaient un bâtonnet.*	b)  *Geste de tenir-un-bâtonnet déplacé de gauche à droite*	c)  *Geste de tenir-un-bâtonnet déplacé à sa gauche*	d)  *Geste de tenir-un-bâtonnet déplacé à sa droite*

Tableau 5. Geste condensant d'Elisa.

Elisa accompagne son discours avec un geste effectué avec deux doigts levés comme s'ils tenaient un bâtonnet. Ce geste est effectué pour la première fois quand elle dit « il y a 3 » (photo a dans le tableau 5) et maintenu au cours de toute la phrase. Cela indique métaphoriquement une distance figée, de façon similaire à ce qui est décrit dans le contexte pré-analytique dans des études précédentes (Arzarello et al., 2009 ; Sabena, 2007 et 2008). Le mot « distance » n'est jamais prononcé (il sera prononcé immédiatement après, grâce à une suggestion de l'enseignante) : le geste complète ses mots en donnant une signification plus profonde à son discours multimodal.

Lorsqu'elle dit « en tout ça fait 3 », le geste de tenir-un-bâtonnet est déplacé de gauche à droite (photo b dans le tableau 5) : le mouvement de gauche à droite indique que la distance figée (de 3) permet de passer d'un nombre gagnant au suivant dans la séquence. L'élève porte ses yeux au tableau, où le dernier match est encore écrit, selon le modèle choisi par l'enseignante (figure 1). Dans ce modèle, les tours successifs sont écrits l'un après l'autre horizontalement. Le mouvement horizontal du geste d'Elisa pourrait être interprété dans ce milieu, en suggérant que le choix sémiotique de l'enseignante a été utile pour développer l'argumentation des élèves. En même temps, le geste pourrait se référer métaphoriquement à l'addition sur la droite numérique intériorisée. Nous retrouvons un autre exemple d'un *geste condensant des significations différentes*, à travers ses références métaphoriques et son caractère dynamique. Par le caractère condensant des gestes et dans la synergie avec le discours, les différentes significations arrivent à se connecter pour construire une partie importante de l'argument.

À travers la répétition du geste (ou *catchment*), le geste condensant se combine alors avec l'alternance spatiale se référant encore à deux joueurs (photos c et d dans le tableau 5) : le *catchment* soutient le passage d'une relation entre tours à une relation entre nombres qui peuvent justifier ces tours, et indique que cette distance ne varie pas tout le long de la séquence gagnante du jeu.

V - DISCUSSION

L'exemple présenté met en évidence que les significations mathématiques qui apparaissent dans l'enseignement et l'apprentissage sont de nature *multimodale*, ainsi que la discussion théorique proposée. Dans cette nouvelle conception, les *gestes*, la *posture* corporelle, les *actions kinesthésiques*, les *artefacts* et les *signes* en général sont considérés comme une gamme fructueuse de *ressources* à prendre en compte afin d'étudier comment les élèves apprennent et comment les enseignants enseignent. Ces ressources matérielles et sensibles ne sont pas considérées comme un simple épiphénomène de l'enseignement et de l'apprentissage : elles sont conceptualisées comme des *éléments centraux de la pensée mathématique des élèves et des enseignants*.

L'analyse présentée a également fourni un exemple d'analyse multimodale sémiotique avec l'instrument de faisceau sémiotique, avec sa notion large de signe s'appuyant sur les travaux de Vygotsky (1931-1978), et ses caractéristiques systémiques et dynamiques.

Il est intéressant de remarquer que les nouvelles technologies se sont révélées indispensables pour l'analyse des interactions entre les élèves et l'enseignant dans la classe et qu'elles ont relancé la prise en compte des aspects multimodaux dans l'apprentissage des mathématiques. Même si, au début des années 1990, une attention particulière avait été portée sur le « discours de classe » dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, l'utilisation des enregistrements vidéos a élargi la possibilité d'observer des phénomènes jusque-là inaperçus car indétectables. Les gestes et d'autres ressources *embodied* ont ainsi commencé à être considérés parmi les ressources permettant de développer la communication et la conceptualisation. Autrement dit, une forte impulsion vers de nouvelles théories a été donnée par des aspects méthodologiques, qui demandent de nouveaux outils d'analyse, comme le faisceau sémiotique.

En analysant les activités d'enseignement et d'apprentissage avec l'outil sémiotique de faisceau sémiotique, des résultats généraux et spécifiques ont été détectés. Je me suis concentrée en particulier sur le rôle des gestes dans leur interaction avec d'autres ressources sémiotiques utilisées dans la classe —le discours principalement, mais aussi les signes écrits— et j'ai abordé les processus d'argumentation des élèves du primaire dans le contexte des jeux d'interaction stratégique. À partir de l'exemple, d'abord on peut tirer quelques résultats fins sur le rôle des gestes dans les processus argumentatifs des élèves. Ensuite, j'élargis la discussion sur les implications pour les professeurs.

1 Le rôle des gestes dans les processus argumentatifs des élèves

À travers une analyse qualitative-interprétative, j'ai montré que *les gestes peuvent contribuer au développement d'argumentations qui s'appuient sur des considérations empiriques pour passer à un plan hypothétique où l'on approche la généralité*. L'étude de cas apporte un éclairage sur *comment* les gestes peuvent donner ce soutien. En particulier, j'ai identifié trois caractéristiques spécifiques :

- la *contraction sémiotique*,
- le *caractère condensant des gestes*,
- *l'utilisation de l'espace gestuel dans un sens métaphorique* combiné avec des *catchments*.

Ces aspects sont brièvement discutés par la suite, en référence à l'analyse des données présentée dans la partie précédente.

Lorsque Giulio identifie et/ou exprime (nous n'avons pas assez de renseignements pour le décider) la règle générale consistant à « enlever toujours 3 », nous remarquons que ses phrases deviennent de plus en plus courtes, et à la fin il annonce simplement les nombres gagnants, accompagnés par des gestes de *pointage* abstrait (tableau 1, figure d). Il s'agit d'une sorte de *contraction sémiotique* qui a été retrouvée même dans d'autres contextes et avec des élèves d'âges différents, tels que la généralisation de *pattern* et les représentations graphiques de fonctions (Sabena et al., 2005 ; Sabena, 2007). D'un point de vue épistémologique, la contraction sémiotique caractérise le symbolisme mathématique moderne, et d'un point de vue cognitif elle est un mécanisme précieux. Radford (2008, p. 94) relie la contraction à la focalisation de l'attention sur des éléments importants dans une certaine situation et à un niveau de conscience plus profond :

> La contraction est un mécanisme pour réduire l'attention aux aspects qui apparaissent comme importants. C'est pourquoi, en général, la contraction et l'objectivation impliquent le fait d'oublier. Nous avons besoin d'oublier pour être capables de nous focaliser.

La contraction sémiotique peut être retrouvée aussi dans ce que Vygotsky (1934-1986) appelle « discours intérieur », décrit en discutant le langage comme un système de signes paradigmatique. Le discours intérieur est décrit au niveau structurel par une réduction syntactique et par une réduction phasique, et au niveau sémantique par l'agglutination. La *réduction syntactique* est une forme spécifique d'abréviation qui limite les sujets des phrases et garde les prédicats purs. L'articulation syntactique s'avère donc minimisée à la pure juxtaposition de prédicats. La *réduction phasique* consiste à minimiser les aspects phonétiques du discours, notamment en écourtant les mots eux-mêmes (par exemple, en écrivant « u » au lieu de « you », en anglais ; « ct » au lieu de « c'était » ou « kom » au lieu de « comme », en français). L'*agglutination* consiste à combiner les mots, en collant des significations (concepts) différentes dans une seule expression (par exemple, « highway », composé de « high » et « way »). De nos jours, les systèmes de communication de messagerie instantanée sur les smartphones exploitent largement les contractions sémiotiques (combinées avec des caractéristiques iconiques supplémentaires, comme les émoticons), typiquement dans la communication informelle entre personnes qui partagent la plupart des informations contextuelles.

Puisque la syntaxe se réduit, Vygotsky (ib., p. 244) affirme que la sémantique entreprend un mouvement contraire, avec la mise en avant du sens :

> Avec la syntaxe et le son réduits au minimum, le sens est mis en avant plus que jamais. Le discours intérieur fonctionne avec la sémantique, non pas avec la phonétique.

Nous pouvons observer que les gestes, en raison de leur nature spatiale et kinesthésique, ne nécessitent pas de processus d'agglutination pour combiner des significations, à la différence du langage verbal : c'est l'activation elle-même des gestes qui peut produire la combinaison de plusieurs significations comme le fait l'agglutination . Une forme spécifique de contraction sémiotique caractérisant les gestes est en effet ce que j'appelle un geste « *mélangeant* » ou « *condensant* », c'est-à-dire un geste exprimant dans le même temps (au moins) deux significations différentes. Nous avons vu les deux exemples suivants :

- Giulio, et son geste de droite à gauche effectué avec trois doigts levés, indiquant le nombre 3 *et* la soustraction (tableau 1, photos b et c);
- Elisa, avec deux doigts levés comme s'ils tenaient un bâtonnet, déplacés de gauche à droite, qui peuvent être interprétés comme indiquant une distance, *et* le fait que cette distance permette de passer d'un nombre gagnant au suivant (tableau 5, photos b et c). Le discours simultané spécifie que cette distance vaut 3, obtenu comme la somme de 1 et 2.

Dans les deux exemples, les gestes condensent (ou mélangent) deux significations en combinant une composante dynamique avec la forme de la main : cette caractéristique dynamique a été observée aussi par Calbris (2011) dans ce qu'elle appelle « gestes polysignes ». Dans des études précédentes dans le domaine mathématique (Sabena, 2007, 2008, 2010), le caractère condensant des gestes a été identifié dans le contexte des fonctions et des graphiques, et associé aux aspects iconiques des gestes. Dans l'étude ici présentée, cette caractéristique est montrée dans le domaine arithmétique, et associée avec des aspects *métaphoriques* des gestes, en suivant la classification de McNeill (1992). En condensant deux significations différentes, chacun de ces gestes établit deux types différents de références métaphoriques, dont une met en jeu la droite numérique, un outil didactique suggéré par le curriculum italien. En exploitant l'espace pour raisonner sur les nombres, la droite numérique elle-même a une nature métaphorique. Un processus de mélange double ou même multiple semble donc être activé par les gestes métaphoriques typiques des domaines mathématiques. Ce sujet demande une réflexion approfondie sur la signification de « métaphoriser » au niveau cognitif et au niveau sémiotique, et des recherches plus approfondies sont nécessaires (pour des résultats préliminaires employant les métaphores cognitives et les espaces mélangés, voir Sabena et al., 2016).

Il paraît que la métaphoricité soit aussi liée à l'utilisation de l'espace gestuel avec l'*alternance spatiale*, comme nous l'avons vu dans les cas de Giulio et de Eliana. Giulio bouge sa main à gauche et à droite quand il parle des tours et des contre-tours dans son match fictif (tableau 3, photos b-c), tandis qu'Eliana alterne sa main gauche et sa main droite pour le même but (tableau 4, photos b-c et d-e). *À travers l'alternance spatiale des gestes, l'espace vide acquiert du sens*, qui, dans nos données, semble être lié à une sorte de *niveau local*, soit dans le jeu (les tours successifs imaginés, dans le cas de Giulio), soit dans l'argument mathématique (les nombres à rajouter pour composer le 3, dans le cas d'Eliana).

Comme nous l'avons remarqué dans l'analyse, une telle alternance spatiale se répète plusieurs fois, en réalisant ce qui, dans les études sur les gestes, est appelé un *catchment* et considéré comme donnant de la cohésion au discours (McNeill, 2005). Dans cette étude de cas, le *catchment* gestuel est interprété comme une aide pour les élèves dans la structuration de l'argument au *niveau global*. Les résultats précédents sur la façon dont des positions spatiales opposées sont exploitées en termes de gestes pour indiquer des cas s'excluant mutuellement semble confirmer cette interprétation (Arzarello & Sabena, 2014).

Dans l'intérêt de l'analyse, nous avons ici discuté une après l'autre les différentes caractéristiques des gestes qui contribuent à donner un sens général et une structure au processus d'argumentation. Cependant, comme nous pouvons le remarquer en revenant à l'analyse des données, beaucoup de ces caractéristiques s'entremêlent ; de plus, l'analyse des gestes nécessite la prise en compte du faisceau sémiotique dans son ensemble. Par exemple, seulement une analyse systémique des mots et des gestes peut montrer comment, même s'il décrit un certain match hypothétique entre lui et un autre joueur, l'argument de Giulio contient des aspects essentiels transmettant une généralité : la répétition rythmique de la même structure linguistique, accompagnée par le *catchment* correspondant (tableau 2 et 3) ; l'utilisation de mots génériques accompagnés par un geste générique (tableau 3, photo a), l'utilisation de *pointages* abstraits avec l'annonce de tours possibles (tableau 3, photos b et c). Dans le cas de l'argument d'Eliana, il est frappant d'observer comment les gestes et les mots se complètent l'un l'autre d'une façon synchronique.

Si nous analysons les contributions des élèves d'une façon diachronique, nous pouvons tirer d'autres renseignements, qui nous donnent des éléments pour décrire l'évolution de la discussion en classe dans une perspective multimodale. Pour donner un exemple, il est intéressant de remarquer comment l'alternance spatiale de Giulio avec sa main droite évolue en l'alternance d'Eliana avec deux mains, une après l'autre (voir tableau 4) ; dans ce dernier cas, le sujet du discours d'Eliana ne change pas (c'est toujours « tu »), en montrant une tension vers les relations arithmétiques plutôt que vers l'interaction stratégique du jeu. Cela ouvre la voie à l'intervention suivante d'Elisa, portant sur les « nombres où il y a 3 ».

Les dernières considérations sont réservées aux implications didactiques de cette analyse très fine.

2 Implications pour les professeurs

Des recherches en cours indiquent que l'enseignant peut avoir un rôle important dans l'évolution des signes à l'intérieur du faisceau sémiotique et dans la construction de « chaînes sémiotiques multimodales » permettant au sens mathématique de se développer à travers les processus d'argumentation (Maffia & Sabena, 2015, 2016).

Évidemment, les choix de l'enseignant ne sont jamais neutres en rapport avec l'utilisation d'une ressource sémiotique dans la classe, y compris les gestes. Un exemple dans nos données est le modèle sémiotique à travers lequel la Course à 20 a été présentée aux élèves et à travers lequel les élèves ont joué le jeu (figure 1). Nous avons remarqué que ce choix—qui résonne avec l'outil didactique de la droite numérique—a fourni un outil essentiel aux élèves non seulement pour jouer le jeu mais aussi pour développer des argumentations sur comment gagner le jeu. En particulier, l'argument d'Elisa portant sur la « distance de 3 » entre les nombres gagnants montre sa relation avec le modèle sémiotique écrit avec lequel le jeu a été joué. Les résultats de cette analyse semblent donc offrir des éléments pour valider le choix de l'enseignant. En tout cas, discuter pourquoi pour Elisa (et pour d'autres élèves) ce choix a fonctionné tandis que pour d'autres une réflexion plus poussée a été nécessaire, va au-delà de l'objectif de cette analyse.

Le débat en classe s'avère être un moyen approprié pour favoriser le développement d'argumentations à travers des ressources multimodales comme celle décrite, où les élèves peuvent exploiter les gestes parmi les autres ressources sémiotiques. Cela demande évidemment que les gestes soient considérés comme légitimes dans la classe, comme dans le cas analysé, ou l'enseignante soutient Elisa dans son 'argument multimodal', en considérant l'apport de son geste et en lui donnant le mot manquant.

Plus généralement, l'enseignante peut alors profiter de la synergie des ressources sémiotiques dans une perspective multimodale. Ainsi elle peut :

- acquérir une *meilleure compréhension des processus cognitifs des élèves* en faisant attention à leurs gestes, outre leurs mots et leurs écrits ;
- *utiliser les gestes* et, plus généralement, les ressources sémiotiques d'une manière consciente.

Sur le deuxième point, à l'aide de l'analyse du faisceau sémiotique, nous avons remarqué un phénomène récurrent dans nos classes, appelé le « *jeu sémiotique* » entre l'élève et le professeur (Arzarello et al., 2009 ; Arzarello et al., 2011). Le jeu sémiotique se produit lorsque les enseignants répètent les signes multimodaux des élèves (typiquement, un geste), et ajoute d'autres signes (typiquement, des mots) pour que les significations évoluent vers les formes mathématiques culturellement établies. De cette façon, l'enseignant implicitement *encourage* l'élève à produire et expliciter ses pensées (de façon multimodale) et *l'aide* à progresser des significations personnelles vers les significations institutionnelles.

Mais dans quelles conditions cela peut-il fonctionner ?

Le jeu sémiotique peut être joué si l'enfant, à l'aide d'une sorte de signe, exprime quelque chose de significatif par rapport aux connaissances mathématiques. Il appartient à l'enseignant de saisir de tels moments. Dans une perspective vygotskienne, on peut dire que les mots, les gestes et les signes écrits peuvent être considérés comme des indices de l'enfant dans une Zone de Développement Proximal (Vygotsky, 1931/78).

Pour sensibiliser les enseignants aux aspects multimodaux de l'enseignement et de l'apprentissage, nous leur proposons de mener, au moins une fois dans leur expérience professionnelle, une analyse multimodale d'une leçon de classe.

Cette valeur éducative a été testée dans notre groupe de recherche à Turin et a contribué à la réflexion sur la formation des enseignants en Italie (2014). Le groupe de recherche, dans lequel s'est développée la réflexion et l'étude sur la multimodalité de l'enseignement-apprentissage des mathématiques, est dirigé par le professeur Ferdinando Arzarello et est composé de chercheurs en éducation mathématique et d'enseignants. Les enseignants participent à toutes les phases de la recherche, de la discussion des choix théoriques et de la conception et réalisation du projet à la collecte et à l'analyse des données, selon leurs possibilités et leur disponibilité : dans le double rôle des enseignants et des chercheurs, le terme «enseignants-chercheurs» est utilisé. Certains enseignants-chercheurs participant au groupe de recherche de Turin se sont engagés à effectuer eux-mêmes l'analyse des ressources multimodales, à partir de vidéos réalisées dans leurs classes pendant les cours. Les enregistrements vidéo ont été réalisés par des chercheurs, ou par des étudiants de premier cycle ou, dans des cas plus rares, par les enseignants eux-mêmes. Typiquement, on a enregistré le travail de groupe des élèves sur un problème difficile et la discussion menée par l'enseignant. L'analyse sémiotique par les enseignants a généralement été menée comme suit. La vidéo est d'abord analysée par le professeur de la classe à partir de laquelle elle a été prise : l'enseignant produit un résumé de ce qui s'est passé et extrapole les épisodes les plus significatifs, qui sont parfois des parties très importantes de l'activité. Ce choix dépend de l'intérêt de recherche du groupe, sur la question qu'on **veut** comprendre à fond, du problème de recherche finalement. L'analyse produit un document écrit, souvent sous la forme d'une table appelée « ligne sémiotique », qui montre la transcription des signes multimodaux qui interviennent, en insistant sur leur développement dans le temps (à titre d'exemple, un extrait qui fait référence à la discussion sur le **vingtième** temps analysé ci-dessus est donné en annexe). La ligne sémiotique est ensuite présentée au groupe de recherche, où les points cruciaux sont discutés, avec la visualisation et la discussion des vidéos connexes. La ligne sémiotique est ensuite enrichie d'autres éléments d'analyse et constitue un outil partagé de réflexion sur la pratique pédagogique. Ce travail - certainement très coûteux en termes de temps - nous a permis en termes de recherche de comparer les intuitions découlant de l'analyse théorique avec la pratique de classe et de donner des preuves empiriques, ou vice versa a permis d'identifier des phénomènes récurrents dans les films, donnant une caractérisation théorique, comme dans le cas des jeux sémiotiques. Cependant, il a également apporté des résultats en termes de formation pour les enseignants qui ont participé au travail d'analyse, surtout en leur faisant prendre conscience de nombreux aspects sous-estimés dans la perception de leurs interactions avec les étudiants.

Une analyse de ce type peut être considérée comme une loupe sur des situations éducatives, un zoom assez précis. Bien sûr, il est impensable de pouvoir l'appliquer à toutes les situations d'enseignement, en particulier pour l'analyse temporelle et la réalisation qu'elle exige ! Toutefois, ce processus permet d'activer les systèmes de contrôle et d'analyse de leurs actions et de leurs paroles, mais aussi de prêter plus d'attention aux gestes et aux « langages corporels » utilisés par leurs élèves, d'améliorer leurs interprétations et même d'être en mesure de mieux orchestrer les discussions dans le cours de mathématiques.

Par rapport à cela, je rapporte l'expérience d'une enseignante (participant aux travaux du groupe de recherche de Turin) :

> *Au cours de l'activité, je n'avais aucune perception de ce qui se passait et du rôle que joueraient mes actions, j'étais trop impliquée à viser à atteindre l'objectif. Ce fut grâce à l'analyse de la ligne sémiotique, que, rétrospectivement, le nouvel horizon sur la compréhension des processus d'enseignement - apprentissage pour la première fois est devenu très clair : en me regardant moi-même interagir avec les enfants, je pouvais comprendre la portée des gestes (l'utilisation des doigts, des mains, du corps) et des mots, pour établir des liens utiles à la connaissance. Au cours de l'activité, je savais que les gestes, en plus du discours, des signes écrits et des instruments, pourraient servir à la compréhension, mais je ne savais pas pourquoi, ni surtout comment.* (l'enseignante B.V., rapporté in Arzarello et al., 2011, p. 131).

En d'autres termes, pour ces enseignants, la réalisation de la ligne sémiotique a été un outil important pour la transposition méta-didactique (Arzarello et al., 2014) de l'approche multimodale des mathématiques. Le rôle du 'courtage' des chercheurs a été fondamental à cet égard, de même que l'établissement de « communautés de recherche » dans le cadre de projets de recherche. Des recherches plus approfondies sont nécessaires pour dévoiler et exploiter à fond les potentialités **de ce type d'instrument pour la formation des enseignants sur une plus grande échelle**, où les liens avec le monde de la recherche sont plus distendus.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Guest Eds.), *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking* (pp. 267-299).

ARZARELLO, F., & ROBUTTI, O. (2008). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 720–749, 2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.

ARZARELLO, F., & SABENA, C. (2014). Analytic-structural functions of gestures in mathematical argumentation processes. In L. D. Edwards, F. Ferrara & D. Moore-Russo (Eds.), *Emerging perspectives on gesture and embodiment* (pp. 75-103). Charlotte, NC (US): Information Age Publishing, Inc.

ARZARELLO, F., PAOLA, D. ROBUTTI, O., & SABENA, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.

ARZARELLO, F, ROBUTTI, O., SABENA, C., CUSI, A., GARUTI, R., MALARA, N., MARTIGNONE, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programmes. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era. An International Perspective on Technology Focused Professional Development* (pp. 347-372). Dordrecht, Olanda: Springer.

ARZARELLO, F., BAZZINI, L., FERRARA, F., SABENA, C., ANDRÀ, C., MERLO, D. SAVIOLI, K., VILLA, B. (2011). *Matematica: non è solo questione di testa. Strumenti per osservare i processi di apprendimento in classe*. Trento: Edizioni Erickson.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

CALBRIS, G. (2011). *Elements of meaning in gesture*. Amsterdam/Philadelphia: John Benjamins Publishing Company.

DE FREITAS, E., & SINCLAIR, N. (2014). *Mathematics and the body*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

DE RUITER, J. P. (1995). Why do people gesture at the telephone? In Biemans M, Woutersen M (Eds.), *Proceedings of the Center for Language Studies Opening Academic Year '95-96* (pp. 49-56). Nijmegen: Center for Language Studies.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

GALLESE, V., & LAKOFF, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology* 22, 455-479.

GEROFSKY, S. (2015). Approaches to embodied learning in Mathematics. In English, L.D. & Kirshner, D. (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (Third Edition). New York and London: Routledge.

GOLDIN-MEADOW, S. (2003). *Hearing gesture. How our hands help us think*. The Belknap Press of Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts, and London, England.

GOLDIN-MEADOW, S., NUSBAUM, H. KELLY, S. D., & WAGNER, S. (2001). Explaining math: Gesturing lightens the load. *Psychological Science*, 12, 516-522.

KENDON, A. (1980). Gesticulation and speech: Two aspects of the process of utterance. In M.R. Key (Ed.), *The relation between verbal and nonverbal communication* (pp. 207-227). The Hague: Mouton.

KRESS, G. (2004). Reading images: Multimodality, representation and new media. *Information Design Journal*, 12(2), 110-119.

LAKOFF, G., & NÙÑEZ, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

MAFFIA, A., & SABENA, C. (2015). Networking of theories as resource for classroom activities analysis: the emergence of multimodal semiotic chains. In C. Sabena, B. Di Paola (Eds.), *Teaching and learning mathematics: Resources and obstacles, Proc. CIEAEM 67, Quaderni di ricerca didattica*, 25-2 (pp. 405-417). Aosta, July 20-24, 2015.

MAFFIA, A., & SABENA C. (2016). Teacher gestures as pivot signs in semiotic chains. In C. Csikos, A. Rausch, & J. Szitànyi (Eds.), *Proc. 40th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3* (pp. 235-242). Szeged, Hungary: PME.

MCNEILL, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.

MCNEILL, D. (2005). *Gesture and thought*. Chicago: University of Chicago Press.

MCNEILL, D., QUEK, F., MCCULLOUGH, K-E., DUNCAN, S., FURUYAMA, N., BRYLL, R., … ANSARI, R. (2001). Catchments, prosody and discourse. *Gesture*, 1(1), 9-33.

NEMIROVSKY, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zillox (Eds.), *Proc. 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1* (pp. 105–109). Honolulu, HI: PME.

RADFORD, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

RADFORD, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, Vol. 40(1), 83-96.

RADFORD, L., & SABENA, C. (2015). The question of method in a Vygotskian semiotic approach. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 157–182). New York: Springer.

RADFORD, L., BARDINI, C., & SABENA, C. (2007). Perceiving the general: The semiotic symphony of students' algebraic activities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 507-530.

RADFORD, L., EDWARDS, L., & ARZARELLO, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 91 - 95.

RADFORD, L., BARDINI, C., SABENA, C., DIALLO, P., & SIMBAGOYE, A. (2005). On embodiment, artifacts, and signs: A semiotic-cultural perspective on mathematical thinking. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 113–120). Melbourne: University of Melbourne, PME.

ROTH, W.M. (2009). (Ed.), *Mathematical representation at the interface of body and culture*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

SABENA, C. (2007). *Body and signs: A multimodal semiotic approach to teaching-learning processes in early Calculus*. PhD. Dissertation, University of Torino (Italy).

SABENA, C. (2008). On the semiotics of gestures. In L. Radford, G. Schumbring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 19-38). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

SABENA, C. (2010). Are we talking about graphs or tracks? Potentials and limits of 'blending signs'. In M.M.F. Pinto & T.F. Kawasaki (Eds.), *Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 105-112). Belo Horizonte, Brazil: PME.

SABENA, C., RADFORD, L., & BARDINI, C. (2005). Synchronizing gestures, words and actions in pattern generalizations. *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 129-136). Melbourne, Australia: University of Melbourne, PME.

SABENA, C., KRAUSE, C., & MAFFIA, A. (2016). L'analisi semiotica in ottica multimodale: dalla costruzione di un quadro teorico al networking con altre teorie. *Relazione al XXXIII Seminario Nazionale di ricerca in didattica della matematica Giovanni Prodi*, Rimini 28-30 Gennaio 2016. http://www.airdm.org/sem_naz_2016_25.html

SABENA, C., ROBUTTI, O., FERRARA, F., ARZARELLO, F. (2012). The development of a semiotic frame to analyse teaching and learning processes: examples in pre- and post-algebraic contexts. In Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., Robert, A. (Eds.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 231-245). Grenoble: La Pensée Sauvage.

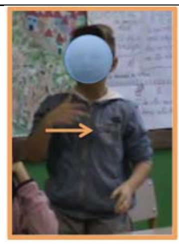
SCHIRALLI, M., & SINCLAIR, N. (2003). A constructive response to 'Where mathematics comes from'. *Educational Studies in Mathematics,* 52(1) 79–91.

SFARD, A., & MCCLAIN, K. (2002). Analyzing tools: perspectives on the role of designed artifacts in mathematics learning. *Journal of the learning sciences*, 11(2&3), 153-161.

VYGOTSKY, L. S. (1931/78). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Edited by M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman. Cambridge, MA, and London: Harvard University Press.

VYGOTSKY, L. S. (1934/86). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press. (Revised edition, translated and edited by A. Kozulin. Original work published in 1934).

VII - ANNEXE – EXTRAIT DE LIGNE SEMIOTIQUE

	1. [00:00]	2.				3.
Mots de l'élève	Diego : 11 est un nombre important peut-être, parce que peut-être mon équipe rajoute 2 et ça fait 13, l'autre équipe rajoute 1 et arrive à 14, j'ajoute 1, 15, ils rajoutent 2 et ça fait 17	*Giulio:* Je crois que pour les nombres gagnants tu enlèves toujours 3	De 20	tu enlèves 3	et tu arrives à 17	
Gestes de l'élève		 *La main ouverte bouge de droite à gauche*	 *Trois doigts levés*	 *Trois doigts levés bougent de droite à gauche*	 *Pointage abstrait vers le bas*	
Mots de l'ensei-gnante						Explique bien cette idée
Gestes de l'ensei-gnante						