AGIR-PARLER-PENSER EN GÉOMÉTRIE UN POINT DE VUE SÉMIOTIQUE SUR L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMETRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Caroline BULF
Enseignante-chercheure, Université de Bordeaux
ESPE d'Aquitaine, Lab-E3D, EA7441
caroline.bulf@u-bordeaux.fr

Anne-Cécile MATHÉ
Enseignante-chercheure, Université Clermont Auvergne
ESPE Clermont-Auvergne, Laboratoire ACTé
a-cecile.mathe@uca.fr

Résumé
L'enseignement de la géométrie à l'école primaire s'appuie très largement sur un travail portant sur des dessins, qu'il s'agisse de les construire, de les reproduire ou de les décrire. Son objectif est de construire des savoirs portant sur des objets géométriques théoriques, leurs relations et propriétés. Un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie consiste donc, tout au long de l'école, à modifier le rapport des élèves aux dessins, d'objets matériels à représentations sémiotiques d'objets théoriques. Comment comprendre les leviers possibles de cette évolution ? Nous proposons d'explorer le rôle de l'articulation de registres de représentation sémiotique, graphique et langagier, dans l'apprentissage de la géométrie à l'école. Dans le prolongement de recherches menées en didactique de la géométrie ces dernières années (Duval, 2005; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2013; Perrin-Glorian & Godin, 2014; Perrin-Glorian, Mathé, & Leclercq, 2013), nous envisageons d'abord la manière dont il est possible de faire évoluer le regard des élèves sur les dessins, via des contraintes portées sur leurs traitements instrumentés en situation de reproduction de figures. Posant ensuite la question des interactions entre *agir*, *parler* et *penser* (Bernié, 2002), nous nous intéressons au rôle et à la place du langage dans la construction de connaissances et l'émergence de savoirs géométriques (Barrier & Mathé, 2014 ; Barrera Curin, Bulf & Venant 2016; Bulf, Mathé & Mithalal 2014). Nous complétons alors nos analyses de moments de classe et esquissons des pistes pour un travail dans et sur le langage, en appui sur des situations d'action, en géométrie à l'école.

Pourquoi (encore[1]) s'intéresser à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie plane à l'école, dans ce colloque dédié à la formation des enseignants ? Que peut apporter une approche sémiotique à la clarification des enjeux possibles de cet enseignement à l'école ? Quels outils peut-on en dégager pour l'enseignement et la formation ?

S'intéressant à la question de la formation des enseignants, Houdement et Kuzniak pointaient, à la fin des années 90, que « la géométrie concentrait (…) plusieurs handicaps : un déficit de connaissances chez les étudiants, peu de travaux en didactique, auxquelles s'ajoutait un désamour, non seulement des étudiants, mais aussi des enseignants de l'école primaire que ce domaine n'inspirait guère. » (Houdement, 2013, p.28). Aujourd'hui encore, force est de constater que l'enseignement de la géométrie à l'école reste un domaine souvent mal-aimé voire peu investi des enseignants du premier degré. Notre métier de

[1] XL^{e} Colloque de la Copirelem à Nantes (2013)

formatrices en ESPE[2] et nos échanges réguliers avec des professeurs des écoles, nous laissent à penser que ceux-ci éprouvent majoritairement des difficultés à en cibler les enjeux, rabattant alors souvent les objectifs d'apprentissage à l'acquisition de vocabulaire permettant de désigner des objets supposés déjà là ou à des exigences de motricité fine concernant l'usage d'instruments et la précision de tracés. Cette difficulté de la profession peut sans nul doute trouver ses origines dans plusieurs facteurs. Les recherches en didactique de la géométrie ont avancé depuis les années 90, notamment sous l'impulsion des travaux développés par le groupe dit « de Lille »[3] ces quinze dernières années (Duval, 2005; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2013; Perrin-Glorian & Godin, 2014; Perrin-Glorian, Mathé, & Leclercq, 2013). Nous ne pouvons toutefois que constater l'encore faible imprégnation de la formation initiale et continue des enseignants de résultats de recherches en didactique de la géométrie récents, et il nous faut reconnaître le temps, long, nécessaire à la transformation de résultats de recherche en outils opératoires pour les enseignants. Enfin, les ressources à disposition des enseignants nous semblent encore avoir du mal à constituer des outils qui puissent leur permettre d'enrichir les pratiques en géométrie (Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014 ; Bulf & Celi, 2015). S'efforcer de montrer dans quelle mesure des recherches récentes en didactique de la géométrie peuvent contribuer à la clarification d'enjeux possibles de l'enseignement de la géométrie plane à l'école et faire de résultats de recherches des outils pour les enseignants du premier degré et leur formation nous semblent donc constituer un chalenge d'actualité. Nous espérons, dans ce texte comme dans l'exposé auquel il fait suite, contribuer à notre modeste mesure à cette entreprise. Plus précisément, nous avons souhaité montrer qu'une approche sémiotique pouvait éclairer des questions de finalités et moyens d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie plane, pensés dans une continuité de la maternelle à la fin de l'école primaire.

Dans cette perspective, nous proposerons de revisiter les travaux du groupe de Lille en replaçant ses fondements théoriques dans le cadre d'une problématique sémiotique, en lien avec les travaux de Duval (1995, 2005) qui ont largement nourri les travaux du groupe. Nous mettrons en rapport le travail mené autour de la recherche d'une situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessin (les situations de reproduction de figures) et la réflexion autour des liens entre interprétation et traitement graphique des dessins sur laquelle il repose. Nous illustrerons la manière dont ces travaux ont permis la déclinaison de situations d'action visant l'émergence d'objets et de propriétés géométriques divers, à travers l'exemple d'un travail mené autour du disque, le cercle et de leurs caractérisations, de la maternelle au cycle 3 (Bulf & Celi, 2016).
Nous proposerons ensuite un prolongement de cette approche en abordant la question de l'articulation entre registres sémiotiques graphique et langagier dans la construction de connaissances-savoirs géométriques à l'école. Comment mieux comprendre le rôle du langage, oral ou écrit, dans les processus d'apprentissage autour de situations d'action en géométrie ? Nous proposerons d'aborder cette question, large, en suivant deux pistes de réflexion.

Nous nous intéresserons d'abord au rôle du langage dans les processus d'évolution du rapport des élèves aux dessins lors de leurs confrontations à des situations d'action telles que celles évoquées précédemment. Nous illustrerons, à travers un exemple de moment de classe, la manière dont les moteurs de l'évolution des manières de voir le dessin des élèves résident alors à la fois dans l'évolution de leur manière d'agir et de leurs manières de parler.

Nous interrogerons ensuite les manières dont il est possible d'accompagner les élèves de la mobilisation de connaissances pour l'action (reproduire, construire un dessin) à l'identification des connaissances géométriques mises en jeu. Comment accompagner la transformation des connaissances, personnelles et contextualisées, en savoirs géométriques ? Nous présenterons alors quelques pistes explorées de manière

---

[2] École Supérieure du Professorat et de l'Éducation

[3] Nous appellerons groupe de Lille un groupe de recherche du Nord de la France, actif de 2000 à 2010, auxquels ont participé M.-J.Perrin-Glorian, R.Duval, M.Godin, J-R. Delplace, O.Verbaere, B.Keskessa, C.Mangiante, T.Barrier, R.Leclercq, A.-C.Mathé. Le travail continue depuis 2010 sous des formes diverses.

plus récentes, autour de l'élaboration de situations de formulation et de validation en appui sur les situations de reproduction de figures. Nous évoquerons les spécificités, les potentialités de l'enchâssement de ces types d'activité mais aussi la grande variété des situations possibles.

I - D'UNE GEOMETRIE PHYSIQUE A UNE GEOMETRIE THEORIQUE : UNE MODIFICATION PROFONDE DU RAPPORT AUX DESSINS

Nous devons tout d'abord situer nos propos. Le thème de la géométrie (appelé « Espace et géométrie » dans les programmes de 2015 recouvre un domaine large, relevant de champs de connaissances divers. Parmi les attendus de l'école, nous pouvons ainsi distinguer (Berthelot et Salin, 1993) :

- des connaissances dites spatiales permettant de se repérer dans l'espace, de représenter des espaces ou des déplacements dans ces espaces, de maîtriser ses rapports avec l'espace sensible.
- des connaissances géométriques portant, elles, sur des objets théoriques, idéaux[4] tels que des solides, des figures planes, le segment, la droite, le point sur des propriétés de ces objets ou des relations entre ces objets (alignement, angle droit, perpendicularité…)

L'on sait depuis les travaux fondateurs de Berthelot et Salin (op.cité) l'importance d'un travail sur les connaissances spatiales à l'école et de leur articulation avec les connaissances géométriques, permettant de faire de ces connaissances un outil pour résoudre des problèmes pratiques. Nous ne négligeons pas cet aspect de l'enseignement de la géométrie à l'école. Toutefois, nous nous centrons ici sur la finalité théorique de cet enseignement à l'école, c'est-à-dire en ce qu'il vise la construction des connaissances et savoirs géométriques portant sur les objets idéaux de la géométrie. Nous nous restreignons même dans ce texte à une partie de cette finalité : celle portant sur la construction de connaissances sur des objets du plan (la géométrie plane). C'est donc à un aspect complémentaire de l'enseignement de la géométrie auquel nous nous intéressons ici, et dans nos travaux de manière plus générale. Nous partons d'une modalité de travail sans doute plus courante dans les pratiques et envisageons le travail en géométrie à partir de problèmes, divers, portant sur des formes ou des dessins, déjà là. Ces objets matériels ne sont bien sûr pas des objets du monde qui nous entoure, mais les élèves comme l'enseignant n'interrogent pas nécessairement leurs liens avec des objets de l'espace sensible et la nature de la modélisation dont ils sont issus. Ces formes, ces dessins, sont des objets donnés aux élèves, sur lesquels on leur propose de travailler, et qui sont acceptés comme des objets culturellement partagés.

Dans ce cadre, notre objectif consiste à mieux comprendre les enjeux et difficultés d'un enseignement de connaissances et savoirs géométriques, portant sur des objets théoriques, en appui sur des objets matériels tels que les formes et les dessins. Ce sont donc bien des questions d'ordre sémiotique que nous posons : Comment permettre à des élèves de voir dans ces objets matériels des représentants d'objets géométriques, idéaux ? Comment accompagner les élèves dans la construction de connaissances sur ces objets théoriques via un travail essentiellement placé dans le registre graphique des formes et des dessins ?

1 L'enseignement de la géométrie : le rôle central des dessins

Reprenant la célèbre distinction entre dessin et figure proposée par Arsac (1989), Parsysz (1989), Laborde et Capponi (1994) ou encore Chaachoua (1997), nous appelons dessin un objet matériel que l'on peut regarder, analyser à l'aide d'instruments, reproduire, construire… Ces dessins peuvent être des tracés sur une feuille de papier ou sur un écran d'ordinateur. Nous incluons aussi dans cette catégorie les formes géométriques, en bois ou en plastique, qui constituent des objets de travail courants au début de l'école.

[4] Nous parlons d'objets idéaux car ces objets n'ont pas d'existence dans le monde sensible qui nous entoure : les figures planes sont des objets du plan, sans épaisseur, les segments et droites sont des objets de dimension 1 (ligne sans épaisseur), la droite est un objet infini, etc.

Nous distinguons cet objet matériel que constitue le dessin de la figure, objet mathématique, théorique, dont le dessin est une représentation.

Pour les élèves, le dessin peut ou non représenter une figure. Dans l'activité géométrique des élèves, le dessin peut en effet avoir différents statuts, en lien avec la nature du travail engagé sur ce dessin et le mode de validation opéré (adapté de Chaachoua, 1997, p.19). Objet matériel étudié pour lui-même et lieu d'une expérimentation directe au début de l'école, le dessin est ensuite vu comme représentation sémiotique d'autres objets matériels, visés par la géométrie. Le travail est alors perçu comme un travail expérimental sur une classe d'objets, dont le dessin est un exemple générique. A la fin de l'école et surtout au collège, le dessin doit enfin être considéré comme représentation sémiotique, dans le registre graphique, d'objets théoriques de la géométrie. Le travail géométrique s'opère alors hors de l'expérimentation, dans le registre langagier, et vise la construction de preuves intellectuelles.

Ainsi donc, le dessin occupe une place centrale dans la géométrie de l'école comme du collège et l'un des enjeux majeurs de l'enseignement de la géométrie va consister, de la maternelle au collège, à accompagner les élèves vers un rapport *géométrique* à ces dessins. Mais que signifie exactement construire un rapport *géométrique* aux dessins ? Quelles conditions président la capacité à interpréter les dessins comme représentants sémiotiques d'objets, de propriétés et de relations géométriques ?

Tout d'abord, tout le monde pourra s'accorder sur le fait que *la* géométrie n'est pas épistémologiquement *une* mais est polymorphe et poser la question d'un rapport *géométrique* hors contexte n'a pas de sens. Nous proposons ainsi de nous donner pour point de mire de la géométrie plane de l'école l'entrée dans la géométrie déductive du collège. Ce que nous entendons par *rapport géométrique aux dessins* désigne donc un rapport aux dessins idoine à l'entrée dans la géométrie déductive du cycle 4. La question que nous posons est alors celle de la caractérisation de ce *rapport géométrique aux dessins* et de la nature de la modification du rapport aux dessins, enjeu de l'enseignement de la géométrie plane à l'école. À quoi doit-on préparer les élèves de l'école ?

Duval (1995) propose deux niveaux d'appréhension des dessins :

- la perception (que nous désignerons dans la suite par « la manière de voir » les dessins),
- les modalités et règles de traitements et de modifications (« les manières d'agir » sur ces dessins)

Dans la suite de ce texte, nous explorons successivement les questions suivantes. Que doit-on être capable de « voir » dans un dessin pour entrer dans la géométrie déductive au collège ? Que doit-on savoir faire sur un dessin pour pouvoir faire des démonstrations ?

2 La géométrie : une manière spécifique de voir les dessins

L'étude des interprétations possibles d'un dessin, en fonction de la manière de voir ce dessin mobilisée, et de la spécificité d'un regard géométrique sur les dessins est au cœur des travaux du groupe de Lille. Celle-ci a déjà fait l'objet de nombreuses publications (par exemple Duval & Godin, 2005, Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2013; Perrin-Glorian & Godin, 2014; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013). Nous devons toutefois revenir dans ce texte, de manière synthétique, sur cette étude car elle fonde notre travail. En appui sur les travaux de Duval (1995), notre propos vise en particulier ici à mettre en évidence les fondements sémiotiques de cette étude.

De manière générale, la perception d'un dessin est guidée par l'identification et la prise en compte de différents éléments constitutifs de ce dessin. Cette analyse est susceptible de variations visuelles, de deux types : des variations liées à la dimension des objets considérés (des surfaces - de dimension 2, des lignes - de dimension 1 ou des points – de dimension 0) ; ou des variations qualitatives : la nature des formes considérées ou bien encore des questions de taille, d'orientation, de couleur, etc. Ces distinctions permettent de définir des éléments constitutifs d'un dessin. Celui-ci est vu comme une combinaison de valeurs pour chacune de ces variations, à partir desquelles on détermine des unités figurales élémentaires (Duval, 1995). Il existe donc une pluralité de manières possibles de voir les dessins. Et à la différence d'autres registres de représentation d'objets mathématiques (numération, arithmétique…), un dessin a une interprétation perceptive immédiate et quasi-automatique, mais celle-ci diverge de l'interprétation géométrique de ce dessin.

Prenons l'exemple des trois dessins de la figure 1. Hors de la géométrie, chez de jeunes élèves, la perception spontanée des dessins est guidée par la discrimination de formes ou surfaces (Duval & Godin, 2005). Un dessin, simple ou complexe, est d'abord interprété comme une surface ou un assemblage de surfaces juxtaposées (autant de formes que de contours fermés), comme illustré en figure 2. La prise en compte des couleurs, de l'orientation, de la taille joue un rôle important dans cette lecture spontanée des dessins. Ce sont sur ces valeurs sur lesquelles l'on s'appuie pour établir des liens de ressemblance, ou des relations d'ordre entre dessins.

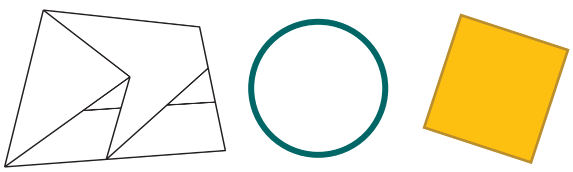


Figure 1

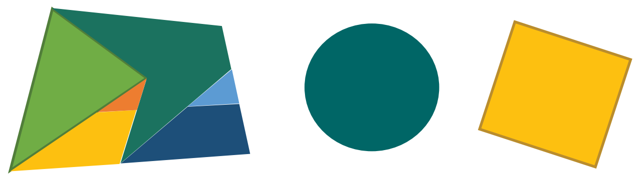


Figure 2

L'interprétation géométrique des dessins s'appuie quant à elle sur une manière de voir ces dessins bien différente. Nous illustrons en figure 3 ce que pourrait être une manière géométrique de voir ces trois dessins à la fin de l'école ou au début du collège.

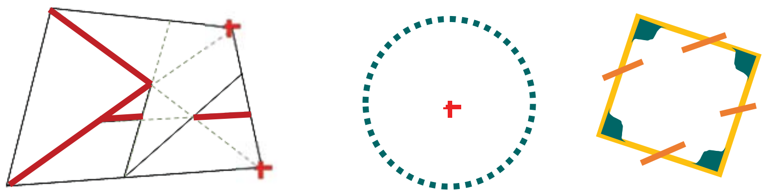


Figure 3

Il y a moins de variables visuelles pertinentes pour une interprétation géométrique des dessins, et les règles de prise en compte de ces variables ne sont pas homogènes. De manière générale, les couleurs ou orientations ne sont plus pertinentes car elles ne sont pas susceptibles d'accéder à des caractérisations géométriques des figures, ni de représenter des relations géométriques. Ces variables peuvent toutefois être utilisées pour faciliter la lecture géométrique d'un dessin, comme nous le faisons en figure 3. Le critère de la taille est lui plus complexe, il n'est en général pas à prendre en compte, sauf lorsque l'on s'intéresse à des relations entre des longueurs (par exemple pour caractériser les carrés parmi les rectangles).

La caractérisation des objets géométriques, celles de la fin de l'école et au début du collège tout au moins, s'appuie sur une prise en compte de propriétés portant sur des bords de surfaces (égalités de longueurs de côtés), des coins (angles droits), voire des lignes et des points (cercle comme une ligne, puis comme ensemble de points, à équidistance d'un centre par exemple). Les propriétés et relations géométriques ne portent pas sur des surfaces mais sur des objets de dimension 1 – des segments (égalités de longueurs) ou des droites (perpendicularité, parallélisme…) – ou de dimension 0 – des points (alignement, appartenance, équidistances…). Ainsi, porter un regard géométrique sur les dessins et identifier les objets et relations géométriques qu'ils représentent signifient être capable d'enrichir considérablement la manière de voir les dessins. Une analyse géométrique d'un dessin nécessite une capacité à un jeu complexe entre des unités figurales de dimensions 2, 1 et 0, appelé *déconstruction et recomposition dimensionnelles*. Notons que sur les dessins d'origine (figure 1), aucune variable visuelle ne peut représenter directement une propriété géométrique. Nous avons parfois besoin d'un codage pour rendre visible l'articulation entre manière de voir le dessin et définition dans registre langagier, comme nous le voyons dans la figure 3.

Interpréter les dessins comme représentations graphiques d'objets et de relations géométriques nécessite ainsi une modification profonde du rapport perceptif au dessin. Ceci constitue pour nous un des enjeux fondamentaux de l'enseignement de la géométrie à l'école.

3 La géométrie : des modalités de traitement des dessins spécifiques

Poursuivons notre effort de clarification de la teneur de la modification du rapport aux dessins que l'on peut viser tout au long de l'école, dans le but d'accompagner les élèves vers la géométrie de la fin de l'école et du début du collège. Intéressons-nous maintenant à la question des modalités de traitements des dessins. Que doit-on savoir faire sur un dessin en géométrie (du cycle 4) ? Quelles modalités de traitement et quelles modifications, internes au registre graphique, doit-on être capable d'effectuer sur un dessin pour mener à bien des démonstrations ?

Nous nous appuierons dans ce paragraphe sur un exemple de problème, que nous empruntons à Balacheff & Soury-Lavergne (1996, p.5), Mathé & Mithalal (à paraître). L'énoncé du problème est le suivant.

> *ABC est un triangle, P un point du plan qui n'est pas un sommet du triangle.*
> *P1 le symétrique de P par rapport à A;*
> *P2 le symétrique de P1 par rapport à B;*
> *P3 le symétrique de P2 par rapport à C;*
> *I le milieu de [PP3].*
> *Que dire du point I ?*[5]

Nous conviendrons dans un premier temps qu'explorer ce problème rend bien sûr nécessaire de faire un dessin, qui permette, comme évoqué précédemment, d'illustrer cet énoncé et de représenter, dans le registre graphique, la figure définie. Ce dessin pourra alors constituer un lieu d'expérimentation, de formulation de conjectures.

Toutefois, représenter les objets et propriétés géométriques de la figure dans un dessin n'est pas tout à fait suffisant… Construisons un triangle ABC, plaçons un point P tel que décrit, et construisons les points P1, P2, P3 puis le point I.

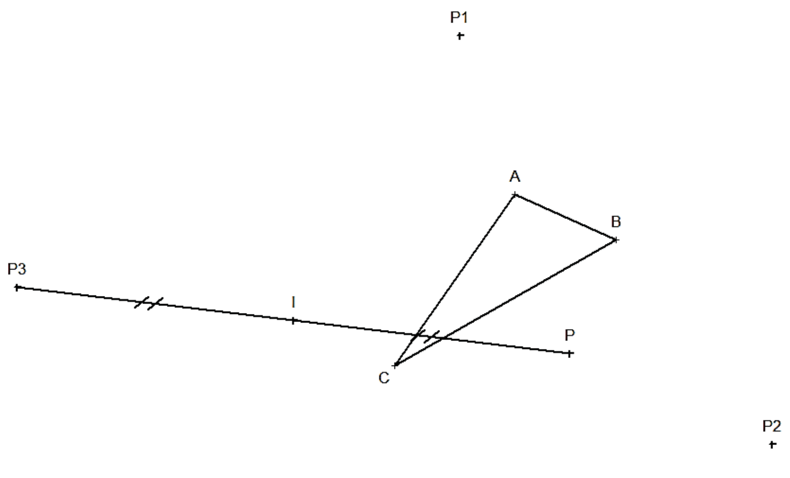


Figure 4

[5] La question est volontairement ouverte, cette formulation est bien sûr discutable si l'on considère le problème posé tel quel à des élèves de collège.

Cette représentation permet-elle de formuler une conjecture sur ce que peut représenter le point I par rapport aux points déjà construits ? Pas vraiment…

Explorer le dessin afin de parvenir à formuler une conjecture va nécessiter un traitement géométrique du dessin, c'est-à-dire d'agir sur le dessin pour faire apparaître des configurations qui nous permettent de raisonner.

L'on pourra par exemple tracer le quadrilatère ABCI et envisager l'idée que ce quadrilatère pourrait être un parallélogramme. Si l'on cherche maintenant à démontrer cette conjecture, on pourra être amené à tracer les deux triangles PP_1P_3 puis $P_1P_2P_3$. Ceci nous permettra de reconnaître des configurations dans lesquelles nous pouvons appliquer le théorème de la droite des milieux et démontrer que ABCI a deux côtés parallèles et de même longueur.

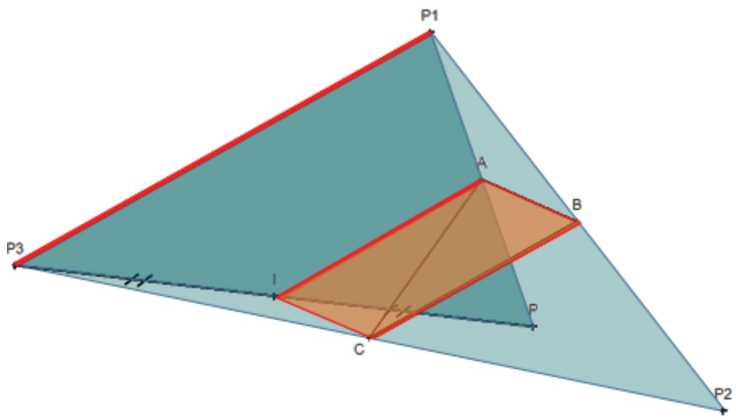


Figure 5

Nous le voyons à travers ce rapide exemple, l'activité de démonstration telle que visée au collège nécessite la capacité non seulement à opérer à un jeu complexe du regard porté sur les dessins, en termes de déconstruction et recomposition dimensionnelles, mais aussi à transformer le dessin par des règles propres à la géométrie. Les opérations de traitement du dessin, internes au registre sémiotique graphique et nécessaires à l'activité de démonstration, sont alors de différents types. Nous retiendrons en particulier ici que les élèves doivent être capables de rendre visible de l'implicite : faire apparaître des sous-dessins (et des « sur-dessins ») et unités figurales de différentes dimensions (segments, points, droites, surfaces) qui permettent de raisonner.

4 Premier bilan : des enjeux de l'enseignement de la géométrie plane à l'école

Dans cette première partie, nous interrogions les conditions, cognitives, présidant une entrée dans une géométrie théorique, portant sur des objets, propriétés, relations géométriques idéaux, en appui sur un travail portant sur des objets matériels tels que les formes, les dessins. Nous avons alors mis en évidence qu'entrer dans la géométrie de la fin de l'école et du collège nécessite d'apprendre à voir et à traiter les dessins de manière spécifique. Or dans quelle mesure prépare-t-on les élèves de l'école à la géométrie du collège ? Quand et comment apprend-on aux élèves de l'école à voir et à traiter géométriquement un dessin ? Construire un rapport géométrique aux dessins, c'est-à-dire apprendre à analyser, interpréter, traiter géométriquement des dessins, constitue pour nous un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie à l'école.

Dans une perspective de formation, ces éléments de réflexion nous semblent susceptibles d'aider les enseignants du premier degré à clarifier des enjeux de l'enseignement de la géométrie plane à l'école. Ils constituent également des outils leur permettant d'interpréter les programmes et de penser des progressions cohérentes en géométrie plane, à l'échelle de l'école, d'un cycle ou d'un niveau. Enfin, faire de ces enjeux généraux des objectifs d'enseignement permet d'engager un travail autour de la question des situations d'apprentissage. Quelles sont les situations susceptibles de favoriser un enrichissement du regard des élèves sur les dessins et de leur apprendre à construire un rapport géométrique aux dessins ?

Nous présenterons, dans la suite de ce texte, différentes pistes didactiques explorées au sein du groupe de Lille mais aussi dans d'autres travaux s'inscrivant dans leur prolongement.

II - PREMIERE PISTE DIDACTIQUE : INTERACTIONS ENTRE MANIERES DE VOIR ET MANIERES D'AGIR

1 Les situations de reproduction de figures comme situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessins et l'importance des instruments

Le groupe de Lille et un certain nombre de recherches prolongeant ses travaux (Barrier, Hache & Mathé, 2014 ; Bulf & Celi, 2015, 2016) se sont donnés pour objectifs l'élaboration et l'analyse de situations visant à accompagner les élèves dans une évolution de leur rapport aux dessins. Ce travail peut aujourd'hui être interprété comme la recherche d'une situation fondamentale (au sens de Brousseau, 1998) de l'analyse géométrique de dessins. L'enjeu consistait ainsi à déterminer une famille de situations qui, par la nature du problème posé et les contraintes portées sur ce problème, pouvait amener les élèves à enrichir leur regard sur les dessins, vers la construction d'un rapport géométrique à ces dessins (au sens développé ci-dessus). L'intérêt de ces recherches s'est alors porté sur les situations de reproduction de figures, en prêtant une attention particulière au rôle des instruments mobilisés dans ce type d'activité.

Que signifie reproduire une figure ? Le problème générique consiste à réaliser une copie d'un dessin modèle donné (forme ou dessin, simple ou assemblage). Cette copie peut être à la même échelle que le dessin donné ou non. La reproduction du dessin peut se faire à partir d'une amorce (partie du dessin modèle) ou non, d'échelle ou d'orientation différentes ou non. Enfin, cette reproduction s'effectue à l'aide d'instruments imposés ou non. Ceux-ci peuvent être variés : gabarits, pochoirs, papier calque, règle, équerre … Un système de coûts sur l'usage des instruments peut même être envisagé, afin d'amener les élèves à mobiliser certains instruments plutôt que d'autres. Le problème générique de reproduction de figures donne ainsi lieu à une très grande variabilité de situations didactiques, selon la nature du dessin à reproduire, l'amorce éventuelle et, surtout, du type instruments mis en jeu. Soulignons que le dessin pouvant être reproduit à une échelle différente, dans une orientation différente, ce sont bien les caractéristiques géométriques du dessin que l'on cherche à reproduire, soit la *figure* géométrique qu'il représente. Nous parlons donc de reproduction de *figures*.

Attardons-nous un bref instant sur la question des instruments, variable didactique-clé de ces situations de reproduction. Par instruments, nous entendons les instruments de géométrie « classiques » (le crayon, la règle, la règle graduée, l'équerre, le compas…) mais aussi des gabarits (formes en carton, en plastique), des pochoirs, de la peinture… L'idée sous-tendant ce travail d'élaboration de situations est qu'il existe un lien étroit entre les instruments utilisés pour analyser et reproduire une figure et la manière de voir le dessin (les unités figurales identifiées, leurs propriétés et les relations perçues). Parmi ces instruments, nous pouvons en effet identifier des instruments mobilisant des informations sur des surfaces : les gabarits utilisés comme des pièces de puzzles, les pochoirs dont on colorie ou peint l'intérieur, l'équerre utilisée comme gabarit d'angles droits (vus comme coins). Nous les appelons instruments 2D. Nous pouvons également identifier des instruments permettant de tracer des lignes et mobilisant donc une déconstruction des dessins en termes de bords de surfaces (1D/2D), de segments, voire de droites des dessins. Il en est par exemple ainsi lorsque l'on utilise des gabarits ou des pochoirs pour tracer le contour de formes, lorsque l'on trace un dessin à la règle, un cercle au compas par exemple. Nous les appelons instruments 1D.

Penser ainsi le lien entre le traitement instrumenté et l'interprétation d'un dessin, en termes de surfaces, de lignes et/ou de points permet d'envisager des progressions, de la maternelle au cycle 3, visant à apprendre aux élèves à construire progressivement leur rapport à ces dessins, c'est-à-dire à leur apprendre à voir/analyser et traiter géométriquement ces dessins.

La présentation et l'analyse de progressions autour de telles situations a fait l'objet de nombreuses publications (Keskessa, Perrin-Glorian & Delplace, 2007; Offre, Perrin-Glorian & Verbaere, 2007; Perrin, Mathé, Leclercq, 2013 ; Mangiante & Perrin-Glorian, 2014 ; Perrin-Glorian & Godin, 2014). Nombre de situations proposées dans ces textes porte sur la reproduction de figures complexes et se donnent pour objectif d'apprendre aux élèves à

- passer d'une vision en termes surfaces à un jeu entre visions en termes de surfaces, de lignes (segments et droites) et de points ;
- identifier et utiliser pour résoudre le problème de reproduction des relations d'alignement (de segments, de segment et de points, de points) et d'appartenance (d'un segment à une droite, de point à une droite…).

En prenant appui sur une analyse spontanée de dessins complexes puis, par des contraintes portées sur les instruments, en amenant les élèves à enrichir leur analyse des dessins, ces situations visent ainsi l'émergence des objets géométriques élémentaires (le segment, la droite et le point) et la mobilisation de relations d'alignement et d'appartenance entre ces objets.

D'autres travaux ont également porté sur l'élaboration, l'expérimentation et l'analyse de progressions et de situations sur d'autres thèmes de la géométrie plane, au programme de l'école. Parmi ceux qui ont fait l'objet d'une publication, nous pouvons par exemple citer – de manière non exhaustive - les travaux autour du passage de la notion d'angle droit à celle de droites perpendiculaires (Barrier, Hache & Mathé, 2014), autour de la symétrie axiale (Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013).

Nous ne souhaitons pas reprendre ici la présentation et l'analyse de situations déjà présentées à maintes reprises dans les textes cités ci-dessus. Nous choisissons dans ce texte d'illustrer la nature de ce travail autour de situations visant à modifier l'interprétation des élèves des dessins vers une analyse géométrique de ceux-ci, via la présentation d'une situation de reproduction dont nous avons étudié un certain nombre de variations dans le cadre d'une progression visant l'enseignement et l'apprentissage du cercle du cycle 1 au cycle 3 (Bulf & Celi, 2016).

2 Exemple de variations autour d'une situation de reproduction de dessin, du disque au cercle

Un examen approfondi des problèmes de reproduction de figures planes dans les manuels français sur ces trente dernières années (Bulf & Celi, 2015) nous avait permis de relever un nombre important d'énoncés sur le cercle et le compas. Pour autant, nous avions mis en évidence le peu d'articulation entre différents usages du compas (traceur de ligne, reporteur d'une longueur de segment ou d'une distance entre deux points) et le fait que les différentes conceptions possibles du cercle (Artigue et Robinet, 1982) n'étaient que peu ou pas convoquées. Ce bilan nous a alors amenées à proposer des variations autour de situations de reproduction de figures visant à faire évoluer le regard géométrique des élèves sur l'objet cercle et à articuler différentes conceptions de ce dernier.

2.1 Principes adoptés et éléments d'analyse a priori

Dans le prolongement des travaux évoqués précédemment, notre travail est guidé par plusieurs « principes » relevant de travaux antérieurs en didactique des mathématiques : les travaux sur les conceptions du cercle d'Artigue et Robinet (1982), les travaux de Duval sur la visualisation (2005) et les travaux du groupe de Lille.

Les différentes façons de voir le cercle

Les travaux précurseurs d'Artigue et Robinet (1982) ont mis au jour différentes conceptions du cercle que nous avons reprises et adaptées dans le cadre de notre progression qui concerne l'école primaire (cycle 1 au cycle 3). Nous retiendrons pour notre travail que le cercle peut être vu comme :

- une forme arrondie dont on reconnaît l'allure générale (vision iconique)

- le contour d'un disque

- une surface délimitée par une ligne de courbure constante
- une ligne de courbure constante
- une ligne située à une distance constante (le rayon) d'un point donné (le centre)
- un ensemble de points situés à une distance donnée (le rayon) d'un point donné (le centre)
- une ligne ayant une infinité d'axes de symétrie
- une figure invariante par rotation

…

Ces différentes conceptions du cercle mobilisent des unités figurales (au sens de Duval) de dimensions différentes (surfaces 2D, contours de surface 1D/2D[6], lignes 1D, points 0D) pouvant être mises en relation de façon différente (par exemple : ligne de courbure constante *vs* ligne à égale distance d'un point donné). Cette caractérisation des conceptions du cercle en fonction des unités figurales considérées est cruciale pour la construction de la cohérence de notre progression. En effet, conformément aux apports des travaux du groupe de Lille, celle-ci vise à faire évoluer le regard des élèves sur l'objet disque ou cercle d'une vision en terme de surface à une vision entre terme de ligne vue comme contour d'une surface, ligne de courbure constante, ligne à équidistance d'un centre, jusqu'à l'appréhension de points appartenant à cette ligne et situés à équidistance du centre (figure 6).

Figure 6. Évolution et articulation des différentes façons de voir le cercle à l'école primaire.

Déjà à l'époque, Artigue et Robinet concluaient qu'« [i]l semble souhaitable que les objectifs de cet enseignement soient plus formulés en termes d'enrichissement et d'organisation cohérente de conceptions variées du cercle, tant ponctuelles que globales, statiques que dynamiques » (Ib., p.63).

Une même figure modèle comme témoin de l'évolution du regard

Nous avons choisi d'explorer une seule et même figure (figure 7) d'une part car celle-ci se retrouve de façon récurrente dans de nombreuses ressources pédagogiques (Bulf et Celi 2015, 2016) mais aussi de par les propriétés mathématiques et visuelles qu'elle offre et que nous détaillons dans la partie suivante.

---

[6] Nous rappelons la nomenclature de Duval (2005) : le dénominateur indique la dimension du support considéré, ici 2D renvoie à la dimension de surface, et le numérateur indique l'unité figurale désignée, autrement dit ici 1D désigne des lignes et 0D des points.

Figure 7. Figure-modèle.

L'on peut discerner une pluralité de manières possibles de voir et d'interpréter ce dessin, en fonction de la dimension et de la nature des sous-éléments considérés (Bulf et Celi, 2016). En particulier, il peut être interprété comme un assemblage par juxtaposition, conformément à l'analyse perceptive spontanée des dessins évoqués en partie I.3. L'on perçoit alors la figure 7 comme un assemblage de pièces d'un puzzle ayant par exemple la forme d'un triangle arrondi et la forme d'un pétale. Il peut également être interprété comme un « assemblages par superposition » (Duval, Godin, 2005, pp. 9-10), si l'on considère plutôt qu'il s'agit d'un assemblage de quatre demi-disques transparents posés sur un carré.

Un jeu sur certaines valeurs de variables didactiques bien choisies (les couleurs, le recours à diverses pièces matérielles de type puzzle, des tracés supplémentaires, etc.) permet de faire basculer une vision d'un assemblage par juxtaposition à celle d'un assemblage par superposition (et réciproquement).

Si l'on cherche à reproduire cette figure avec des instruments comme un compas par exemple, la vision globale en termes de surface n'est plus opératoire, il devient nécessaire de procéder à une analyse de la figure comme dans la figure 8.

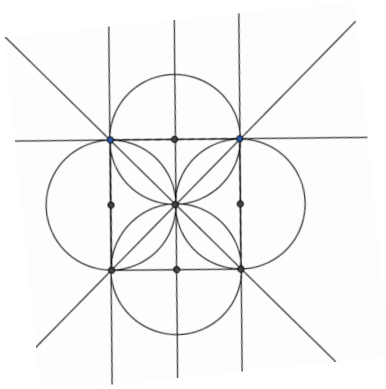


Figure 8. Analyse de la figure en faisant apparaître les unités figurales et leurs relations.

Aussi pour une visualisation non iconique, c'est-à-dire dépassant une simple reconnaissance de formes connues, il convient de dire que la figure est composée d'un carré et de quatre demi-cercles de centres respectifs les milieux des côtés du carré et passant chacun par le centre du carré. Chaque côté du carré est donc un diamètre d'un des demi-cercles. Les « tracés auxiliaires » favorisent la déconstruction dimensionnelle de la figure, nécessaire pour penser son éventuelle construction qui dépendra des instruments mis à disposition. Plusieurs relations entre ces unités figurales nous semblent donc intéressantes à exploiter dans le cadre de notre progression :

- le centre du carré, obtenu par intersection des diagonales du carré mais aussi comme point de concours des quatre demi-cercles ;

- les milieux des côtés du carré qui sont aussi centre des demi-cercles ;

- les côtés du carré qui sont aussi diamètre des demi-cercles.

En particulier la mobilité du regard sur ces différentes unités figurales et leurs mises en relation donnent les clés pour réussir sa reproduction.

Ainsi, les analyses visuelle et mathématique de ce dessin (figures 7 et 8) mettent en évidence une dialectique possible entre juxtaposition et superposition des formes mais aussi un travail intéressant des propriétés mathématiques intrinsèques. Ces analyses nous conduisent donc à retenir ce dessin pour dérouler notre progression autour des notions de disque et cercle.

Soucieuses de penser l'enseignement de la géométrie plane dans une continuité, tout au long de l'école, et d'articuler connaissances anciennes avec les connaissances nouvelles, nous ne pensons pas les différentes étapes de cette progression comme relevant d'un cycle particulier. Dans nos expérimentations en classe, le travail mené en cycle 3 reprend bien souvent les premières situations, elles-mêmes travaillées en cycle 1, puis les prolonge.

Au cœur de l'évolution de notre progression : l'évolution du rapport aux instruments

Comme évoqué précédemment, notre travail s'inscrit dans la lignée des travaux du groupe de Lille considérant le lien étroit entre *visualisation des formes* et *rôle des instruments*. La progression s'appuie sur les variables propres aux problèmes de restauration et plus largement ceux de reproduction, à savoir un support uni, une évolution de la nature de l'amorce, etc. Plus particulièrement l'évolution de notre progression se base sur celle des usages du matériel (le dessin étant toujours le même) : des gabarits de forme et leur superposition par transparence, aux contours de surface et intersections de lignes jusqu'à l'utilisation du compas.

Nous proposons, conformément aux travaux du groupe de Lille, une géométrie sans mesure centrée sur la recherche de levier permettant un changement de regard et la mise en relation des unités figurales qui composent la figure, tout en assumant une dialectique des différentes conceptions du cercle (au sens de Artigue et Robinet).

Trois types de variations sont proposés dans les parties suivantes. Ces différentes situations ont été également présentées dans Bulf et Celi (2016), certains éléments d'analyse sont directement repris de cette publication, d'autres sont issus d'expérimentations ultérieures, notamment au sein d'un groupe de l'IREM de Clermont-Ferrand[7].

2.2 Une première situation d'action avec des gabarits transparents de demi-disque pour une vision surface et contour de surface

Dans cette partie, nous rendons compte d'éléments d'analyse de la situation en tenant compte des conditions dans lesquelles elles ont été expérimentées (une classe CE1-CE2 de la région bordelaise[8], dans une classe de Grande Section[9] et une classe de CE2-CM1[10] d'Auvergne). Autrement dit, les éléments d'analyses *a priori* dont nous rendons compte garantissent le caractère reproductible des situations mais les éléments d'analyse *a posteriori* qui correspondent à ces expérimentations sont donc aussi dépendants des conditions de ces expérimentations.

Les élèves doivent reproduire la figure 7 qui a été donnée soit sous cette forme soit sous forme d'une photo avec le même matériel manipulable.

---

[7] Groupe « Géométrie à l'école » animé par Anne-Cécile Mathé depuis septembre 2016 et réunissant une dizaine d'enseignants du premier degré et trois enseignants de collège.

[8] Classe de Caroline Tuphile (séance menée par C.Bulf) école de Gensac (33), Avril 2015.

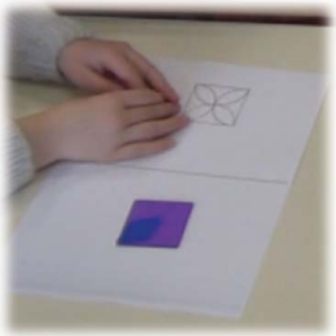
[9] Classe de Maire Gourjon, école de la Monne, Saint Saturnin (63)

[10] Classe de Valérie Maillot, école Paul Lapie, Chamalières (63)

En Grande Section de maternelle, le matériel mis à disposition des élèves comprend des gabarits transparents de forme variée : disque, demi-disque, quart de disque, carré, losange, triangle, rectangle, hexagone. Ces élèves travaillent sur une feuille blanche comprenant la figure-modèle.

Dans la classe de CE1-CE2 comme dans celle de CE2-CM1, les élèves travaillent sans support, directement sur la table, la figure-modèle non accessible, seulement sous une forme agrandie et projetée au tableau. En outre, ces élèves de CE1 ont à leur disposition que des demi-disques rouges transparents.

Quelles que soient les conditions initiales du problème posé, lors de la rencontre des élèves avec la figure-modèle, les élèves (qu'ils soient en cycle 1, 2 ou 3) reconnaissent spontanément diverses formes : des « pétales », « des triangles arrondis », « des rosaces », des « ballons de rugby », etc. Ces propositions verbales témoignent d'une vision première du dessin essentiellement en termes de surfaces juxtaposées. De manière concordante avec cette appréhension spontanée du dessin, lors de la première phase de recherche, les manières d'agir des élèves (quel que soit leur cycle) portent sur des essais de juxtaposition des formes mises à disposition (figures 9) ; les élèves éprouvent des difficultés à percevoir la superposition de demi-disques.



Exemple de procédure d'élève en GS : les gabarits transparents de losange sont juxtaposés sur le gabarit carré.

Exemple de procédure d'élève en CE1 : les quatre gabarits de demi-disques transparents sont juxtaposés sur la table.

Figure 9. Des essais de juxtaposition de formes

Dans la classe de CE1-CE2, c'est l'introduction du gabarit transparent carré et la contrainte de devoir faire rentrer les autres gabarits « sans que ça déborde » qui forcent les élèves à passer d'un assemblage par juxtaposition à un assemblage par superposition. Ce changement de milieu matériel participe de l'apparition de nouvelles manières d'agir. En effet, les élèves prennent en compte différemment les gabarits et considèrent maintenant leur position relative. Par exemple, de nombreux nouveaux agencements sont expérimentés :

- Le bord droit du demi-disque (1D/2D) est superposé avec un bord droit (côté) du carré
- Le bord courbe du demi-disque (1D/2D) touche un autre bord (1D/2D) :
    - soit un côté du carré
    - soit un bord droit d'un autre gabarit de demi-disque
    - soit un bord courbe d'un autre demi-disque
- Les extrémités du diamètre du demi-disque (0D/2D) correspondent aux sommets du carré (0D/2D) ou « touchent » un côté du carré (sans déborder).

A travers ces nouveaux repères de position (permis par des superpositions possibles entre les gabarits) apparaissent de nouvelles connaissances d'action par rapport à la première phase d'action qui engagent l'élève dans un traitement de la figure d'une autre nature. En effet, l'élève prend maintenant en compte de nouvelles surfaces et contours de surfaces obtenus par ces nouveaux agencements (des superpositions) et la mise en relation d'unités figurales de dimension inférieure (1D/2D). Le gabarit du demi-disque n'est plus placé de façon aléatoire ou guidé par la reproduction d'une vision surface (position des pétales).

Nous verrons plus loin sous quelles conditions les élèves de Cycle 1 ont également fait évoluer leur regard sur le dessin.

Ces premières superpositions permettent de faire apparaître les « premiers contours » visibles de la figure-modèle. En effet pour réussir la reproduction, l'élève doit répéter un agencement particulier du gabarit de demi-disque par rapport au carré et tenir compte de celui déjà placé ; les nouvelles surfaces obtenues au fur et à mesure par superposition des gabarits de demi-disque (les « pétales ») assurent la validation du traitement effectué. Le bon placement des gabarits se vérifie également par le fait que les bords courbes ne font que « se toucher » au niveau du centre du carré (cette manière d'agir agissant comme un moyen de validation). A terme, les élèves peuvent aller jusqu'à se rendre compte que le gabarit carré n'est pas nécessaire et reconnaissent les côtés droits des gabarits de demi-disques comme les côtés du carré.

2.3 Une deuxième situation d'action pour une vision ligne

Comme déjà évoqué précédemment une évolution de cette situation peut être pensée en modifiant les instruments mis à disposition des élèves, faisant ainsi évoluer les enjeux de la reproduction. L'on peut proposer par exemple un gabarit carré et un seul gabarit de demi-disque opaque (figure 10).

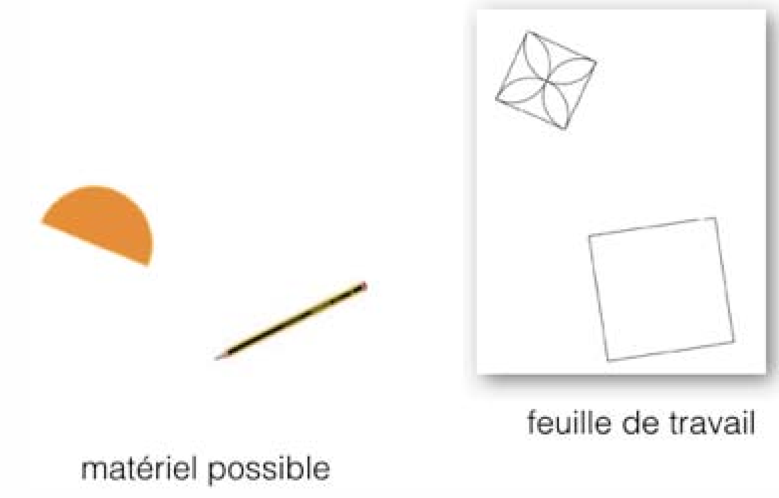


Figure 10. Deuxième situation d'action, pour une vision contour de surface et lignes

Cette fois l'enjeu de la reproduction réside dans le passage d'une vision surface à une vision contour de surface et lignes. Les élèves procèdent donc à un jeu de tracé de contours de surfaces et intersections de lignes avec cette fois un seul gabarit de demi-disque mobilisant la conception « courbure constante ». Les élèves devant reconnaître que le tracé de demi-cercle est obtenu par le tracé du contour avec le même gabarit en réitérant quatre fois le même traitement (du fait de l'isométrie du carré). Il s'agit de prendre en compte conjointement plusieurs contraintes :

- le côté du carré doit correspondre avec le bord droit du demi-disque ;

- les extrémités des bords droits du demi-disque doivent correspondre aux sommets du carré ;

- le tracé du contour du demi-disque doit passer par l'intersection des autres tracés d'arcs de cercle en un seul point (le centre du carré).

Ces différentes actions (placement des gabarits et tracés de contours) servent également de moyens de contrôle dans le traitement de la figure : en particulier si les arcs de cercle ne se coupent pas en un même point, les élèves perçoivent visuellement tout de suite que la reproduction est à reprendre. La nature de la figure (intersection des demi-cercles en un seul et même point qui est le centre du carré) se révèle un point d'appui essentiel pour faire fonctionner les allers-retours permanents entre déconstruction et reconstruction dimensionnelle : entre surface, bords de surface, contours, lignes et intersections de lignes (qui donnent un point).

Figure 11a. Exemple d'usage du gabarit de demi-disque pour reproduire la figure modèle.

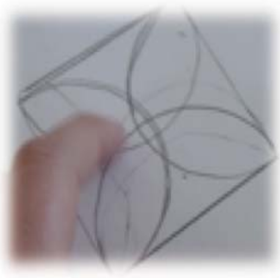


Figure 11b. Invalidation de la figure étant donné que les arcs de cercle ne sont pas concourants.

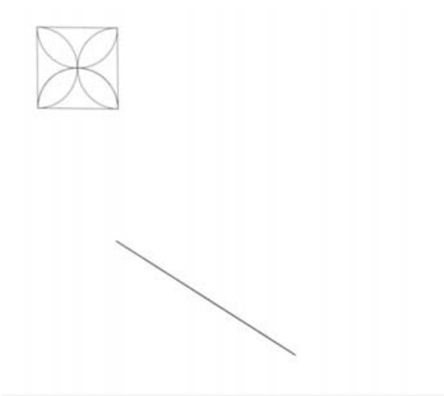
Figures 11. Contours de surface et intersections de lignes

L'analyse de ces deux situations d'action permet donc de mettre en évidence la façon dont le regard sur un même dessin évolue dès lors que les contraintes sur les instruments évoluent : d'une vision par juxtaposition à une vision par superposition (en introduisant le carré dans la première situation) ; d'une vision surface, contours de surface à une vision ligne, intersection de ligne (avec une réduction du nombre de gabarit - un seul gabarit de demi-disque opaque) et une amorce.

La troisième situation que nous proposons cherche maintenant à mettre en lien les unités figurales de la figure-modèle afin de pouvoir la reproduire avec un compas. Le cercle deviendra alors une ligne située à équidistance d'un centre…

2.4 Une troisième situation d'action pour une mise en relation des lignes et des points vers les propriétés du cercle

Cette situation de restauration, s'adresse à des élèves de fin de cycle 2 et/ou de cycle 3. Il s'agit toujours de présenter aux élèves la même figure-modèle (figure 7) en leur proposant de la reproduire à partir d'une amorce (figure 12). Différentes amorces peuvent être proposées.



Actions	Coûts	comptes
Règle Informable pour tracer un trait	0	
Règle Informable pour reporter une longueur	10	
Règle graduée	20	
Gabarit d'angle droit	5	
compas	1	

Figure 12. Troisième situation d'action, pour une mise en relation des lignes et des points vers les propriétés du cercle. La feuille de travail n'est pas à l'échelle.

Les élèves ont à leur disposition :

- une règle non graduée : par exemple, une bande de papier cartonné plastifiée avec laquelle on peut tracer des lignes droites ;

- une règle pour reporter des longueurs : par exemple, une bande de papier cartonné que l'on peut plier pour mémoriser une longueur, ou sur laquelle on peut marquer une longueur à l'aide d'un crayon dans le but de la reporter ;

- un gabarit d'angle droit (on évitera de donner l'équerre où il y a un côté gradué) ;

- une règle graduée ;

- un compas.

Les instruments peuvent être utilisés sur le modèle (pour prendre des informations ou pour ajouter des éléments supplémentaires) et pour tracer la figure à restaurer à partir de l'amorce fournie. Nous intégrons cependant ici un système de coût sur l'utilisation des instruments disponibles.

Sur la figure-modèle, le recours à un instrument, quel qu'il soit, est gratuit. En revanche, sur la figure à restaurer, les règles de coûts sont les suivantes :

- tracer une ligne droite avec la règle non graduée est gratuit ;
- reporter une longueur à l'aide de la règle prévue pour cet usage coûte 10 points ;
- utiliser un gabarit d'angle droit coûte 5 points ;
- reporter une longueur à l'aide de la règle graduée coûte 20 points ;
- utiliser le compas coûte 1 point, que ce soit pour tracer un cercle ou pour reporter une longueur (prise sur le modèle ou sur la figure en construction).

Le but du jeu est de cumuler le moins de points possible (voir figure 12 pour un exemple).

Un tel système de coût sur les instruments favorise les procédures mobilisant le compas comme outil permettant la conservation puis le report d'une longueur (rayon du cercle, côté du carré) mais aussi comme outil permettant de tracer un cercle.

La validation des productions des élèves peut s'effectuer classiquement par superposition avec la figure attendue tracée au préalable sur du papier calque même si nous considérons *a priori* que les propriétés intrinsèques de la figure suffisent à sa validation (notamment du fait que tous les arcs de cercle doivent passer par le centre du carré, ce qui constitue un moyen de contrôle des tracés) mais aussi par un comptage du nombre de points utilisés pour la restauration (on peut annoncer le coût minimal possible).

Nous nous permettons de renvoyer directement à l'article de Bulf et Celi (2016) pour avoir une analyse *a priori* détaillée de cette dernière séance en fonction d'un catalogue d'amorces. Ce que nous pouvons retenir de cette situation de manière un peu plus générale, c'est qu'elle cherche à aller plus loin dans la déconstruction de la figure, dans le sens où on vise maintenant la mise en relation entre les unités figurales de dimension inférieure (1D et 0D) à l'aide du compas afin de reproduire la figure à moindre coût.

Cette situation est pensée (dans le cadre de cette progression) de façon à ce que, au regard de l'amorce choisie et du coût retenu sur les instruments, les élèves mettent en jeu une mobilisation et une organisation différente des propriétés du cercle et du carré. Par les contraintes de la situation, les élèves sont amenés à enrichir leur regard sur les unités figurales : les côtés du carré (1D) vus aussi comme diamètres du cercle (1D) ; les sommets du carré (0D) vus aussi comme extrémités des diamètres des cercles, le milieu des côtés du carré (0D) comme centre d'un cercle (0D), le point d'intersection des arcs de cercle (0D) comme centre du carré, etc. Ces différentes mises en lien étant soutenues par des relations de perpendicularité, d'alignement et de milieu (figure 8).

Certaines amorces favorisent *a priori* davantage un jeu de déconstruction et reconstruction de la figure-modèle (2D ⇄ 1D ⇄ 0D) mettant en jeu une conception plutôt ponctuelle du dessin dans le but de mobiliser en particulier les propriétés du cercle et sa caractérisation par la relation de distance (*centre ; point du cercle*). Certaines mobilisent par ailleurs d'autres connaissances géométriques au-delà des propriétés du cercle : prolongement de droites, intersection de droites pour obtenir un point, relation d'incidence et d'alignement, *etc*.

3 Bilan et questions nouvelles

Nous nous sommes données pour objectif d'apprendre aux élèves à analyser (perceptivement) géométriquement des dessins pour y voir des représentations sémiotiques d'objets, de propriétés et de relations géométriques et à être capables de traitements géométriques de ces dessins. Explorer cette visée nous a amenées à penser une situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessins et des progressions autour de ces situations, via un jeu sur les instruments. Ce travail outille ainsi les enseignants pour penser des progressions dans la perspective d'une évolution cohérente du rapport des élèves aux dessins et choisir, analyser des situations didactiques.

Si l'on se réfère au cadre de la Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), les situations envisagées jusqu'à maintenant constituent des situations d'action. Les élèves interagissent directement avec un milieu (les dessins, les instruments, l'amorce éventuelle…) qui est capable de rétroactions (opérationnalité de l'analyse du dessin au regard des instruments disponibles ou du coût sur l'usage des instruments, validité de la production par perception directe ou validation par calque…). La confrontation des élèves au problème et les rétroactions du milieu visent à faire évoluer les stratégies des élèves vers une procédure contenant en germe les connaissances et savoirs géométriques visés. Ces situations permettent ainsi l'émergence de connaissances pour l'action : analyser le dessin en termes de surfaces, de bords, de lignes, de points ; être capable de rendre visible de l'implicite grâce à un traitement des dessins idoine et opératoire ; utiliser les instruments pour reproduire les objets, propriétés et relations géométriques identifiés sur les dessins modèles. Ces connaissances apparaissent comme des outils nécessaires pour résoudre le problème de reproduction posé.

Plusieurs questions restent cependant en suspens et vont guider la suite de ce texte. De manière générale, prolongeant les éléments de réflexion développés précédemment, soulever ces questions nous amène à aborder la question de l'articulation entre registres graphiques et registres langagiers dans les apprentissages en géométrie (plane) à l'école.

D'une part, la mise en œuvre de ces situations en classe met en évidence le rôle indéniable des interactions langagières orales dans l'évolution des stratégies des élèves, qu'il s'agisse d'interactions entre élèves pendant qu'ils essaient de reproduire la figure ou d'interactions avec l'enseignant, de manière individuelle ou collective. Au fil de la confrontation à la situation d'action, se développe un langage qui permet la verbalisation de l'analyse des dessins et des procédures instrumentées mises en œuvre. C'est également souvent dans ces interactions langagières orales que se négocie une interprétation partagée des dessins et du problème. Or ce rôle des interactions langagières, verbales et orales, n'est pas jusqu'alors anticipé *a priori*. Mettre en place ces situations en classe va toutefois nécessiter de la part de l'enseignant une vigilance particulière au travail dans et sur le langage qui se développe autour de ces situations d'action. Nous essaierons dans la suite de ce texte de faire de résultats de recherche développés autour de cette question des pistes de réflexion et outils pour les enseignants et leur formation.

D'autre part, subsiste la question fondamentale des modalités possibles de transformation des connaissances pour l'action émergeant de la confrontation à ces situations en savoirs géométriques, visés par l'enseignant. L'objectif de l'enseignant est en effet, à terme, la formalisation de savoirs géométriques. Au regard des enjeux d'enseignement développés précédemment, ces savoirs sont de deux types au moins. Il s'agit d'une part de la désignation, voire d'une définition (locale) d'objets géométriques (le segment, la droite, le point, le cercle), de propriétés et de relations (alignement, appartenance, équidistance à un point…). Il s'agit également de construire un langage géométrique permettant de rendre compte d'une analyse géométrique des figures. L'écart est bien sûr grand entre la capacité des élèves à utiliser les instruments donnés pour reproduire un dessin, en appui sur une analyse de ce dessin, et leur capacité à formuler ces savoirs décontextualisés. La question que nous explorerons à la fin de ce texte est ainsi celle de l'insertion de ces situations de reproduction de figures dans des progressions plus globales, prenant en compte ces enjeux de dépersonnalisation, décontextualisation et formulation des connaissances pour l'action en savoirs géométriques.

III - L'ARTICULATION ENTRE REGISTRES GRAPHIQUE ET LANGAGIER EN SITUATION D'ACTION

1 Vers une analyse en termes de modes *d'agir-parler-penser*

Notre approche consiste à considérer le langage comme partie prenante de l'activité du sujet en situation *via* la prise en compte de trois dimensions de cette activité : l'agir, le parler et le penser (Bernié, 2002). Les manifestations effectives (*a posteriori*) des modes d'agir-parler-penser d'un objet mathématique (baptisés *modes de fréquentation* dans (Bulf, Mathé, Mithalal, 2014)) cherchent à décrire un rapport du sujet à l'objet mathématique en jeu (ici *cercle* ou *carré*…), à un moment de la confrontation de l'élève à la situation. Notre travail vise alors à étudier la manière dont ces modes de fréquentation évoluent au cours du déroulement d'une situation et en particulier la manière dont les traitements des objets dans les registres graphiques et langagiers interagissent dans ces processus d'évolution. En appui sur une analyse *a priori* des rapports possibles aux objets mathématiques, en particulier en termes d'unités figurales repérables, de dimension des objets considérés et de relations possiblement perceptibles entre ces unités, nos analyses *a posteriori* prennent pour observables ce que font et disent les élèves et l'enseignant (gestes, regard, signes, langage oral, etc.).

Afin d'illustrer notre propos, reprenons le traitement de la situation de reproduction de la rosace à quatre branches dans le contexte de la classe de maternelle (GS) dans les conditions déjà décrites précédemment (voir paragraphe 2.2). Le matériel construit un contexte de manipulation d'objets singuliers dans lequel chaque élève interprète la tâche en fonction de ses propres intérêts et de sa vision du dessin. Comme décrit dans la partie II la vision par juxtaposition domine au début de la résolution. Se joue alors dans les échanges langagiers avec l'enseignante une confrontation des différentes manières de parler (bord arrondi *vs* bord droit) amenant l'élève sur de nouvelle façon d'agir (voir figure 9) :

> « *est-ce que les* ***bords du losange*** *c'est* *<u>arrondi</u>* *?* »
>
> « *oui c'est* *<u>droit et c'est pointu</u>* » « *regardez sur votre figure-modèle, les formes que vous voyez* »
>
> « *le* *<u>rond</u>* » « *alors le* *<u>rond</u>*, *c'est quoi ?* »…

Ainsi, les élèves s'emparent du demi-disque et cherchent à le superposer à la figure modèle. L'avancée de la résolution du problème se fait à la fois par un retour direct avec le milieu (voir partie 2) et par les interactions langagières.

Au cours des différentes situations d'action observées, que ce soit en GS ou en Cycle 2, les situations d'action sont le lieu où se rencontrent différents modes de penser, en lien étroit avec différentes manières d'agir et de parler.

Penser	Agir		Parler
Vision surface (2D)	**Juxtaposition** de formes		« Fleur », « pétales », « rosace », « papillon »
	GS : gabarits de losange	CE1 : gabarits de demi-disques	
		+ gabarit carré	« bords » « traits droits, pointus » *vs* « traits arrondis »
Surfaces de demi-disques Vers bords et contours de demi-disque (1D/2D)	**Superposition** des formes		
	GS : Superposition des demi-disques sur le disque modèle	CE1 : Superposition des gabarits transparents faisant apparaître de nouvelles formes	« on cherche des lignes arrondis qu'on va superposer sur la figure modèle »

Tableau 1. Dynamique des déplacements des modes d'agir, de penser et de parler du cercle.

Nous avons synthétisé la dynamique de ces déplacements de modalités de traitement instrumenté (manières d'agir) et langagier (manières de parler), en lien avec différentes interprétations du dessin, dans le tableau 1.

Au début de cette situation, que ce soit en GS ou en C2, les élèves parlent de « fleur », « pétales », « rosace », « ailes de papillon » etc. Nos analyses montrent alors une cohérence entre cette manière de décrire verbalement le dessin et les manières d'agir d'abord mobilisées (losanges, formes des pétales…), qui nous permet de reconnaître que les élèves sont dans une vision surface juxtaposées 2D (et aussi dans une vision iconique) du dessin.

Au fil de la confrontation des élèves à la situation, s'opèrent alors des déstabilisations de la manière dont les élèves interprètent le dessin et l'objet cercle. Les moteurs de l'évolution des élèves, vers une interprétation plus géométrique du dessin en termes de demi-disques superposés, peuvent alors résider soit dans l'évolution des modalités de traitement graphique du dessin (sous les contraintes matérielles de la situation d'action), soit dans la négociation des manières de parler et de désigner les objets (comme décrit précédemment). C'est donc l'articulation du travail entre registres graphiques et langagiers qui permet la co-construction d'une manière partagée et opératoire d'analyser le dessin.

Nous retenons de ceci deux choses fondamentales. Premièrement, l'activité géométrique lors de la résolution d'un problème peut se concevoir comme relevant de manières spécifiques *de penser* les objets géométriques en jeu vivant au travers de manières *d'agir* sur un environnement matériel et des manières *de parler* (actes de langage). Et, deuxièmement, les moteurs de l'évolution des procédures des élèves en situation d'action relèvent d'au moins de deux types d'interactions :

- interactions matérielles entre sujet et milieu,

- interactions langagières orales hors de cette situation adidactique.

2 Des pistes de réflexion pour la mise en œuvre de situations d'action en classe : verbalisation autour des situations d'action et secondarisation

Notre travail amène à porter une attention accrue à l'activité de désignation des objets (explicitations des unités figurales en jeu et de leurs relations) et son articulation avec les procédures d'action sur les objets mises en œuvre. Il nous aide à penser et anticiper les potentialités offertes par un travail dans et sur le langage lors des phases de verbalisation, au moment des mises en commun intermédiaires ou concluant les phases de recherche. Lors de la mise en œuvre des situations d'action en classe, ces moments constituent un lieu riche de construction d'un vocabulaire permettant la désignation des objets géométriques mobilisées pour l'action et les prémisses de la construction d'un langage permettant de verbaliser les procédures développées pour l'action. C'est dans le langage que l'enseignante appelle à une autre façon de parler, de faire et de voir : des relations sont formalisées, reprises, approfondies, permettant aux élèves de lever des implicites, de se mettre d'accord sur la façon d'agir et de parler. Dans ces mises en commun observées lors des différentes situations de la rosace décrites précédemment, l'enseignante questionne, fait formuler (reformuler), cherche à faire généraliser les élèves : on passe par exemple d'une formulation fortement ancrée dans un contexte d'action « j'ai fait ça, comme ça » à une formulation désignant la forme (2D) et les traits (1D) ; on passe de la formulation désignant l'action « on fait le contour du disque » à une reconnaissance explicite du « trait » ou de la « ligne » pour parler d'un « demi-cercle ». La dimension des objets en jeu évolue (passant des surfaces aux lignes), on met en mot, on convoque dans le langage les modes d'agir, faisant bouger les façons de penser et de parler des objets.

Dans le prolongement des phases d'action, ces mises en commun participent du processus qui consiste en la transformation des modes d'agir-penser-parler. Ces déplacements à la fois cognitifs et langagiers sont des témoins du processus, en cours, de secondarisation[11] des discours (Bernié 2002 ; Jaubert, Rebière 2012).

[11] La façon d'agir sur le matériel (ou dessins), les façons de parler, et les façons de penser, se transforment tout au long du processus d'apprentissage. C'est ce qu'on appelle la secondarisation des discours qui repose sur des déplacements à la fois langagiers et cognitifs via la mise en œuvre d'un discours spécialisé caractérisant la

IV - POTENTIALITES DE SITUATIONS DE FORMULATION ET DE VALIDATION EN GEOMETRIE

Dans le paragraphe précédent, nous avons mis en évidence le rôle, non négligeable, des interactions langagières, verbales et orales, qui se développent autour de la reproduction de dessins. Participant de l'évolution des stratégies des élèves tout comme les rétroactions pragmatiques du milieu, ces interactions langagières orales constituent un lieu d'expression et de négociation de l'interprétation des dessins et des modalités possibles de traitement de ces dessins au regard du problème posé. Avoir en tête le rôle de ces interactions langagières nous semble ainsi participer à une meilleure compréhension des moteurs de l'évolution effective des stratégies des élèves. Organiser un travail dans le langage lors de la mise en œuvre de ces situations participe également à faire de ces interactions langagières un lieu d'apprentissage, visant la verbalisation des connaissances émergeant pour l'action et la construction d'un vocabulaire et de références partagées.

Malgré tout, ce travail dans et sur le langage autour de la reproduction de figures ne saurait permettre à lui seul la transformation de connaissances développées pour l'action en savoirs visées par ces situations de reproduction de figures. Revenons à la nature de ces savoirs visés.

Comme évoqué dans la partie I de ce texte, les enjeux de savoirs de ces situations sont pour nous d'une double nature.

(i) Il s'agit de faire émerger les objets et relations géométriques comme des outils pour résoudre des problèmes portant sur des dessins. Les savoirs visés relèvent alors de la désignation de ces objets (vocabulaire) et d'une définition, parfois locale et fonctionnelle, de ces objets. On pourra ainsi dire qu'un segment est porté par une droite, qu'une droite est un trait rectiligne n'ayant ni début ni fin, qu'un cercle est une ligne située à une distance R (le rayon) d'un point (le centre) …

(ii) Il s'agit également de la construction d'un rapport géométrique aux dessins et à la capacité à développer une analyse géométrique de ces dessins en figures. Ceci suppose la capacité à coordonner représentation de la figure dans le registre graphique (en lien avec analyse géométrique perceptive du dessin) et dans le registre langagier (être capable de formuler une analyse géométrique du dessin). Nous convenons que ces savoirs sont aujourd'hui des savoirs transparents à l'école (Margolinas & Laparra, 2011), où l'on estime très souvent qu'acquérir le vocabulaire suffit à être capable d'une analyse, à la fois perceptive et langagière, des figures. Or l'articulation entre analyse perceptive des dessins, dans le registre graphique et analyse discursive des figures, dans le registre langagier, ne va pour nous pas de soi. C'est par ailleurs très largement dans une articulation entre analyse perceptive des dessins, dans le registre graphique, et analyse portée par le langage que se développeront les activités géométriques attendues au collège et en particulier les activités de démonstration (voir l'exemple donné en partie I.3).

Ainsi donc, le travail dans le langage autour des situations d'action permet un premier mouvement de secondarisation vers la construction d'un vocabulaire partagé permettant de désigner les objets mobilisés et certaines actions sur ces objets. Il s'agit malgré tout essentiellement d'un langage de communication, contextuel et fonctionnel, en lien fort avec les traitements instrumentés du dessin développés. Un mouvement de dépersonnalisation et de décontextualisation est encore nécessaire pour permettre la transformation de ces connaissances pour l'action en savoirs géométriques. La construction d'un langage géométrique capable de porter l'analyse de figures reste également objet de travail. Forts des outils livrés par la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), cette réflexion nous a ainsi conduits à explorer

---

communauté discursive des mathématiques à l'école : « les formes secondarisées témoignent d'une modification de sa compréhension [celle de l'élève] de l'activité en cours, de son rapport au monde, de la prise en compte de nouveaux éléments jusqu'alors ignorés, de ses déplacements énonciatif et cognitif, et de son institution en tant qu'acteur social dans le nouveau contexte » (Jaubert & Rebière 2012 p.6).

les potentialités de l'insertion de ces situations de reproduction de figures (situations d'action) dans des progressions plus globales articulant situations de formulation et de validation.

1 Situations de formulation autour de la reproduction de figures

D'un point de vue général, les situations dites de formulation, au sens de Brousseau (1998), sont des situations qui mettent en rapport au moins deux actants avec un milieu. Dans ces situations, l'action directe de l'un des actants sur le milieu n'est plus possible, car mise à distance. Leur succès commun exige que l'un formule les connaissances utiles à la résolution du problème à l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu. Par ces contraintes, la situation rend ainsi nécessaire l'identification puis l'explicitation des connaissances nécessaires pour l'action, dans un langage partagé.

Dans notre cas, un élève (ou groupe d'élèves) sera confronté à un problème de reproduction d'un dessin modèle, avec contraintes sur les instruments, comme développé précédemment. Sa mission sera de formuler un message qui devra permettre à quelqu'un de reproduire la figure représentée par ce dessin modèle, avec les mêmes instruments, sans avoir vu le dessin modèle. Ces situations donnent lieu à une phase de validation dans laquelle on pourra mettre en regard le dessin modèle et le dessin produit et engager un travail autour des messages élaborés (informations manquantes, langage partagé…)

Bien évidemment, de nombreuses variations autour de cette situation de formulation générique sont envisageables, en fonction du niveau des élèves et des objectifs d'apprentissage langagiers. Ainsi, la formulation des connaissances par les élèves peut être orale ou écrite, verbale ou non verbale. Le récepteur peut-être un autre élève ou l'enseignante.

Nous présentons dans la suite quelques exemples de situations expérimentées en classe. Par souci de cohérence, nous reprenons ici le thème disque et cercle. Les situations présentées (succinctement) ci-dessous font suite à un travail de reproduction d'assemblages de formes et de dessins complexes (dont la situation de « la rosace » présentée ci-dessus).

1.1 Analyse d'une forme complexe en termes de surfaces superposées et désignation de ces sous-éléments 2D, formulation orale

La situation que nous présentons dans ce paragraphe fait suite à un travail de reproduction de figures complexes à l'aide de gabarits, faisant suite aux deux premières situations autour de la rosace présentées ci-dessus. Les élèves ont ainsi été amenés à identifier des disques, demi-disques, quarts de disque dans des dessins complexes et à les reproduire à l'aide de gabarits surfaces (sur le modèle ou à côté du modèle) ou de gabarits comme instruments de tracé de cercles, demi-cercles ou quarts de cercle. L'analyse des dessins s'est alors opérée en termes d'assemblages de formes juxtaposées et/ou superposées. Les élèves disposaient des gabarits et de crayons sur leur table.

Une première situation de formulation, en appui sur ces situations de reproduction de figures, consiste à proposer aux élèves un problème de reproduction analogue mais, cette fois-ci, en éloignant les gabarits de leur table de travail. Les élèves vont devoir commander à la personne détenant les gabarits la nature des formes souhaitées. La formulation est ici orale, le récepteur de la commande peut être l'enseignant ou un autre élève.

Nous ne nous attarderons pas dans ce texte sur cette situation, car c'est une situation rencontrée de manière assez classique dans les classes, parfois sous le nom de « jeu de la marchande ». À travers ce premier exemple, nous voulons surtout rattacher ce type de situation à la famille des situations de formulation autour de reproductions de figures que nous évoquons ici. Retenons tout de même que les enjeux de formulation portent ici sur la désignation des formes. Il s'agit de construire, utiliser, éprouver un vocabulaire qui permette de désigner sans ambiguïté les formes (2D) identifiées dans l'analyse des dessins et nécessaires à leur reproduction.

En fin de cycle 1 et début de cycle 2, des contraintes langagières imposées par l'enseignant lorsque les élèves viennent commander des formes pour reproduire un assemblage de formes à côté du modèle peuvent par ailleurs amener les élèves à distinguer surfaces et contours. Dans certaines classes de Grande Section et de CP d'Auvergne, les enseignants formulent par exemple une exigence sur la forme de la commande, demandant aux élèves de préciser : la forme souhaitée (gabarits-surface) et le nom de la forme que l'élève souhaite tracer. S'engage alors un travail extrêmement riche, qui amène les élèves à prendre en compte explicitement deux objets différents : la surface et son contour et pose la question de la désignation de ces deux objets. Si surfaces et contours sont désignés par le même mot dans le cas des carrés, des rectangles ou encore des triangles, nous disposons de deux mots différents pour désigner la surface et le contour d'un « rond » : le disque et le cercle.

1.2 Analyse d'une forme complexe en termes de surfaces superposées et représentation des relations ces sous-éléments 2D, formulation écrite

Une autre variante de situation de formulation, en appui sur la reproduction de figures complexes, consiste à engager les élèves dans une tâche de reproduction de figures, à l'aide de gabarits, puis à leur demander de produire un dessin qui permette à un élève n'ayant pas vu l'assemblage réalisé de le reproduire, ou de le reconnaître parmi un lot d'assemblages.

Dans l'exemple qui suit, extrait d'un travail mené en fin de cycle 1 et début de cycle 2, les élèves ont dans un premier temps à reproduire une forme sur le modèle à l'aide de gabarits. La forme et les gabarits donnés sont choisis de façon à amener les élèves à une décomposition / recomposition sous forme d'assemblage par superposition. Dans le prolongement du travail effectué en amont de cette séance, cette activité vise à faire acquérir aux élèves une mobilité de regard sur les dessins et la capacité à identifier des implicites et des prolongements de bords possibles. La figure 13 présente deux exemples de formes données et d'assemblages produits.

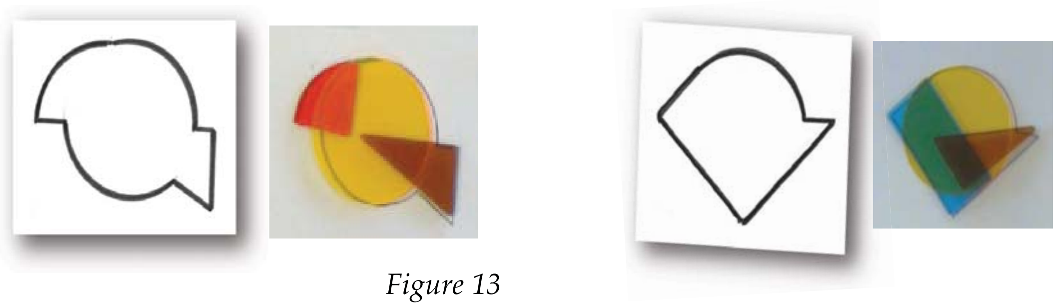


Figure 13

La seconde étape du travail consiste pour les élèves à produire un message écrit (sous forme de dessin) qui doit permettre à un autre élève de refaire l'assemblage produit, sans avoir un accès direct à cet assemblage. Les élèves ont alors très majoritairement utilisé les gabarits comme instruments de tracés de contours. Puis s'est posée la question de la manière de permettre aux élèves d'identifier les formes utilisées. La figure 14 présente des dessins réalisés.

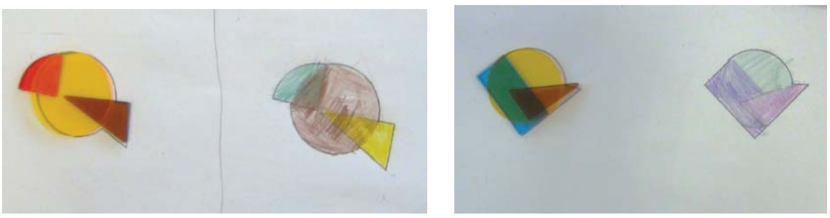


Figure 14

Les enjeux de formulation sont ici bien différents de ceux de la situation précédente. Il ne s'agit plus de construire et faire fonctionner en situation un vocabulaire partagé, mais de trouver un langage, écrit, permettant de rendre compte non seulement de la nature des formes en jeu mais aussi leurs positions relatives. Les élèves ont par exemple utilisé ici les gabarits comme instruments de tracé de contours puis ont dû trouver un moyen de distinguer, par un code graphique (la couleur), la juxtaposition ou la superposition des formes. Au cours de la phase de validation, des connaissances portant sur le nom des formes et à leurs positions relatives peuvent être verbalisées.

1.3 Déconstruction dimensionnelle d'une figure complexe et formulation d'une analyse géométrique de figures, formulation écrite

La dernière situation de formulation présentée vise à articuler l'analyse perceptive et instrumentée des dessins, dans le registre graphique, avec l'analyse discursive des figures. La situation générique est alors proche des situations d'émetteur –récepteur bien connues en formation des enseignants, mais nous l'intégrons ici dans une progression plus globale, prenant appui sur le travail préalable autour de reproductions de figures présentés précédemment. Dans ces situations, il s'agit pour les élèves de reproduire une figure (à partir d'une amorce ou non) puis de rédiger un message permettant à quelqu'un n'ayant pas vu le dessin modèle de construire la figure (à partir de la même amorce, à une échelle et dans une orientation différente). Nous retrouvons ici les objectifs de la situation de formulation précédente, mais la formulation visée est ici langagière, et nous avons fait le choix d'une formulation écrite.

Voici un exemple de mise en œuvre d'une telle situation dans une classe de CE2-CM1 d'Auvergne[12], proposée dans prolongement du travail amorcé par la situation présentée en partie II.2 de ce texte. Amenant à reproduire les demi-disques de la rosace à l'aide du compas, cette situation avait notamment permis aux élèves de voir le cercle comme une ligne située à équidistance d'un point, son centre. En appui sur la verbalisation des procédures de reproduction de la figure, l'enseignante avait institutionnalisé deux caractérisations du cercle, en ces termes :

- *Le cercle est le contour d'un disque*
- *Le cercle est une ligne qui est toujours à la même distance d'un point, appelé le centre du cercle. Cette distance s'appelle le rayon du cercle.*

  Attention : le mot « rayon » désigne à la fois cette distance et les segments joignant le centre et le cercle.

Comme évoqué précédemment, l'institutionnalisation permise par un travail dans le langage autour de la verbalisation des procédures instrumentées de reproduction de figures porte essentiellement sur le vocabulaire permettant de désigner le disque, le cercle, ses sous-éléments et une caractérisation du cercle via les relations entre ces objets (de dimensions 2, 1 et 0).

La suite du travail mené avec les élèves vise la construction d'un langage géométrique susceptible de rendre compte de l'analyse géométrique de figures contenant des cercles ou parties de cercles. Il s'agit de proposer des situations de formulation rendant nécessaire la désignation à la fois de sous-éléments de la figure, de dimensions 2, 1 et 0 mais aussi la caractérisation de positions relatives entre ces sous-éléments et la caractérisation de cercles ou parties de cercle par un centre et un rayon (ou un point passant par). Voici un exemple de telles situations proposées aux élèves dans la perspective de ce travail. Précisons qu'il s'agissait pour nous d'une première situation de formulation, proposant une figure supposée simple. À l'instar de la situation de la rosace (2.3), un groupe d'élèves dispose d'une fiche contenant un dessin modèle et une amorce (figure 15).

---

[12] Classe de Valérie Maillot, école Paul Lapie, Chamalières (63)

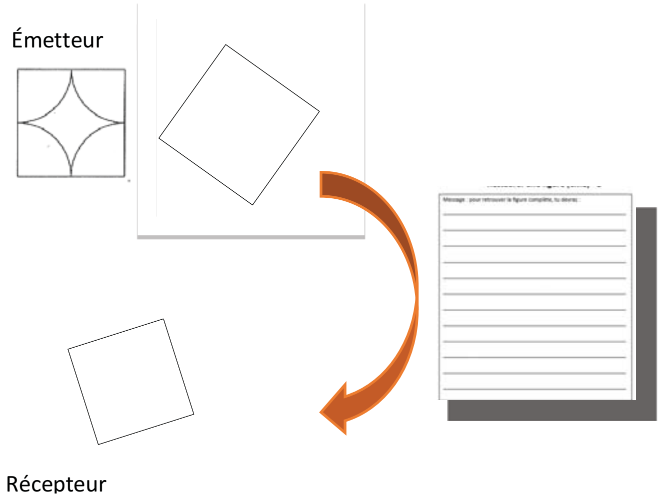


Figure 15

Ils n'ont à leur disposition qu'un compas et un morceau de papier (pliable). Leur première tâche consiste à reproduire la figure à partir de l'amorce donnée. Notons que l'amorce choisie impose une reproduction à une échelle et selon une orientation différente du dessin modèle. Le groupe a ensuite pour mission d'écrire un message permettant à un autre groupe de reproduire à son tour la figure modèle à partir uniquement d'une amorce de même nature (mais à une échelle et dans une orientation différente). Le message ne doit pas faire mention d'instrument et ne peut contenir de dessin. Après échange des messages produits, les élèves (ou groupe d'élèves) récepteurs complètent une amorce semblable à celle des émetteurs (à échelle et orientation différente) à l'aide des messages.

Dans une phase de validation, collective, l'enseignant affiche au tableau les dessins-modèles. En appui sur la comparaison des figures produites avec ces figures modèles mais aussi sur les commentaires des récepteurs à propos des messages, s'opère alors un travail, dans le langage, autour des messages produits : informations nécessaires pour retrouver sans ambiguïté la figure modèle, ordre de la description.

Pour cette figure, le type de message attendu est le suivant :

Construire quatre quarts de cercle à l'intérieur du carré. Les centres de ces quarts de cercle sont les sommets du carré. Leur rayon est égal à la moitié de la longueur des côtés du carré.

Sur cet exemple relativement simple, nous pouvons d'ores et déjà pointer les opérations de désignation nécessaires à la rédaction de ce message :

- Désigner des sous-éléments de la figure de dimension 2, 1 ou 0 (carré, sommets, cercle, côtés, milieu, centre)
- Expliciter des relations entre ces objets via la capacité de désignations multiples d'un même objet : le milieu d'un côté du carré est aussi centre d'un demi-cercle, les sommets du carré sont aussi centres des quarts de cercle…mais aussi caractériser les demi et quarts de cercles par leur centre et leur rayon

Cette situation prolonge ainsi l'activité de reproduction instrumentée de dessins en mettant en scène un travail de concordance de l'analyse géométrique de la figure dans les registres graphique et langagier.

L'expérimentation de ce type de situation en classe révèle à la fois la richesse et la difficulté de la mise en œuvre de ces situations. Malgré le travail important mené autour de la reproduction de figures, le travail dans le langage engagé autour du traitement instrumenté des dessins et l'institutionnalisation de caractérisations du cercle, les premiers messages produits par les élèves sont majoritairement très lacunaires, comme en témoigne l'exemple (figure 16).

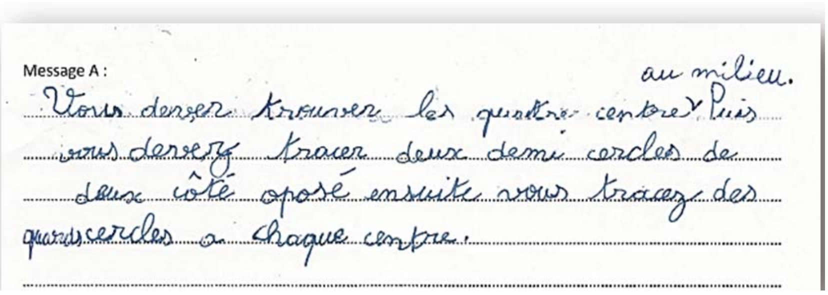

Message A :
Vous devez trouver les quatre centre au milieu. Puis vous devez tracer deux demi cercles de deux côté oposé ensuite vous tracez des quarts cercles a chaque centre.

Figure 16

Cette situation rend nécessaire un langage qui permet non plus de décrire la figure à reproduire mais de la définir. Ceci représente bien sûr toutefois un saut cognitif important pour les élèves et ce travail, pour être mené à bien, nécessite l'articulation de telles situations de formulation avec des situations de validation. Nous présentons, très succinctement ici, un exemple de telle situation.

2 Situations de validation autour de la reproduction de figures

Les situations de validation envisagées visent à dévoluer aux élèves la question la validité de l'analyse géométrique formulée, et à engager un travail autour de son caractère nécessaire et suffisant. Voici un exemple de situation mise en œuvre dans le prolongement de la situation de formulation présentée dans le paragraphe précédent.

La première étape consiste pour les élèves à restaurer une figure à partir d'un message fourni par l'enseignant et d'une amorce donnée. Le message, volontairement lacunaire, a été élaboré par l'enseignante sur le modèle des messages incomplets produits par les élèves dans la situation de formulation précédente. Dans une deuxième étape, l'enseignante organise une mise en commun des dessins produits, et une mise en regard de ces productions avec le dessin modèle attendu.

S'engage alors, dans une troisième étape, un travail autour du message, vers la formulation propriétés de la figure et relations entre des sous-éléments nécessaires à une description définitoire de la figure.

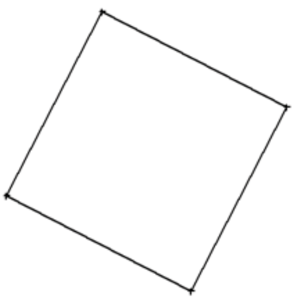
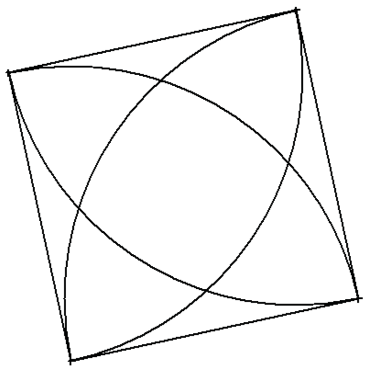
Etape 1	Etape 2	Etape 3
Amorce  Message : *Trace quatre quarts de cercle et c'est fini !* Commentaires :	 n modèle	Travail sur le texte, en appui sur les productions et commentaires des élèves Commentaires : Il manque les rayons des quart on ne s'est pas où on doit placée le quart sur les sommet au milieu. Encore endehord de la figure

Figure 17

Dans les situations de reproduction de figures présentées précédemment, le dessin est considéré comme représentation principale, autosuffisante de la figure : l'analyse langagière développée dans les phases de verbalisation remplit une fonction de description. Dans les situations de formulation comme celles décrites ci-dessus, *l'analyse langagière est considérée comme représentation principale, autosuffisante de la figure* (Duval, 2005, p.34): le dessin à une fonction d'illustration comme exemple ou contre-exemple. S'opère alors un nécessaire renversement du statut des énoncés produits sur le dessin : d'une description pragmatique de la figure, à une description définitoire de celle-ci. Ce travail nous semble ainsi extrêmement riche, participant d'un basculement dans l'interprétation du dessin et de l'objet de travail, du dessin à la figure. Nous entrevoyons là des pistes de réflexion vers un travail autour de la distinction entre dessins et figures, en appui sur l'articulation entre traitement instrumenté des dessins, dans le registre graphique, et traitement des dessins dans le registre langagier.

V - CONCLUSION

À travers ce texte, reprenant notre exposé lors de ce colloque, nous souhaitions rendre compte et articuler des recherches développées en France autour de l'enseignement de la géométrie ces quinze dernières années. Nous espérons avoir mis en évidence à la fois la forte cohérence et la complémentarité des approches sémiotiques proposées par ces recherches. Faisant de la construction d'une interprétation géométrique des dessins un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie plane à l'école, nous avons proposé des pistes explorant les potentialités d'une articulation entre construction d'un rapport géométrique aux dessins et travail visant l'évolution de modalités de traitements instrumentés et langagiers de ces dessins.

Les recherches que nous menons, en collaboration étroites avec des équipes d'enseignants, sont avant tout compréhensives. Elles nous livrent cependant des outils pour la formation des enseignants en didactique de la géométrie.

Prendre conscience de la spécificité que représente une interprétation géométrique des dessins et penser l'apprentissage de la géométrie comme la construction progressive d'un rapport géométrique aide en premier lieu à cerner des enjeux possibles de l'enseignement de la géométrie à l'école. Cela permet de comprendre les implicites des nouveaux programmes de 2015 et aide à penser des programmations et progressions possibles, de la maternelle au début du collège. La considération des liens étroits qu'entretiennent interprétation et traitements instrumentés des dessins permet ensuite de mieux comprendre les potentialités de situations de reproduction de figures, le rôle central des instruments et les jeux de variables possibles autour de ces situations. Enfin, un appui sur ces recherches nous permet d'attirer l'attention des enseignants sur le rôle crucial d'un travail dans et sur le langage, situé, dans les processus d'apprentissage en géométrie. Il nous permet d'une part un travail d'anticipation de phases de verbalisation lors de la mise en œuvre de situations de reproduction de figures en classe. Il nous permet également d'envisager, avec les enseignants, l'insertion de situations de reproduction de figures dans des progressions plus globales articulant situations d'action, de formulation et de validation, de la maternelle au cycle 3. Nous espérons ainsi suggérer des pistes vers de possibles éléments de formation visant à outiller les enseignants pour le choix et l'analyse de problèmes riches pour les classes.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. (1989) La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans. *Actes de la 13ème conférence Psychology of Mathematics Education,* **I**, 85-92.

ARTIGUE M., ROBINET J. (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **3.2**, 5-64.

BALACHEFF N., SOURY-LAVERGNE S. (1996) Explication et préceptorat... Baron M. (ed.) *Explication et EIAO Rap. LAFORIA,* **96/33**, 37-50. Paris: Uni. Blaise Pascal

BAKTHINE M. (1984) *Esthétique de la création verbale.* Paris : Gallimard.

BARRERA CURIN I. R., BULF C., VENANT F. (2016) Didactique, Sémantique et métaphores : analyses de langages en classe de géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **21**, 39-78.

BARRIER T., MATHE A.C. (éds) (2014) *Langage apprentissage et enseignement des mathématiques*, *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, **54**.

BARRIER T., HACHE C., MATHE A.-C. (2014) Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves. *Grand N,* **93**, 13-37.

BERNIE J.P (2002) L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ? *Revue française de Pédagogie,* **141**, 77-88.

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1993) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, **53**, 39-56.

BULF C., CELI V. (2015) Une étude diachronique des problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3, *Grand N,* **96**, 5-33.

BULF C., CELI V. (2016) Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire - une articulation clé : gabarit-compas, *Grand N*, **97**, 21-58.

BULF C., MATHE A.C., MITHALAL J. (2014) Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, **54**, 29-48.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHAACHOUA H. (1997) *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*. Université Joseph Fourier, Grenoble.

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, **17**, 121-138.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Peter Lang, Bern.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **10**, 5-53.

DUVAL, R., GODIN, M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

HOUDEMENT C. (2013) Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques. *Note pour l'Habilitation à Diriger des Recherches*. Université Paris Diderot.

JAUBERT M, REBIERE M. (2012) Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative, *forumlecture.ch, plate-forme internet sur la littératie*, http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.-J. & DELPLACE J.-R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, **79,** 33-60.

LABORDE C & CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **14 (1)**, 165-210.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2015) Programmes d'enseignement de l'école, *BO spécial n° 11 du 26 novembre 2015.*

MANGIANTE-ORSOLA C. & PERRIN-GLORIAN M.J. (2014) Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres, *Actes du XLème colloque de la COPIRELEM*, Nantes 2013.

MARGOLINAS C. & LAPARRA M. (2011) Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. *La construction des inégalités scolaires* (dir. J.-Y Rochex et J. Crinon), 19-32.

MATHE A.C & MITHALAL J. (*à paraître*) L'usage des dessins en géométrie, quelques enjeux pour l'enseignement, *Actes de la XIXème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Paris 2017.

OFFRE, B., PERRIN-GLORIAN, M.-J., VERBAERE, O. (2007) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, **77**, 7-34.

PARSYSZ B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse. Paris : Université Paris-7.

PERRIN-GLORIAN M.J., GODIN M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école,* **222**, 26-36.

PERRIN-GLORIAN, M.-J., MATHE, A.-C., LECLERCQ, R. (2013) Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM,* **90**, 7-41.