RELATIONS ENTRE SYSTÈMES SÉMIOTIQUES, MILIEUX ET TECHNIQUES MATHÉMATIQUES : MALENTENDUS, HYBRIDITÉ, INVENTIVITÉ

Teresa ASSUDE
Professeure des universités, Aix-Marseille Université
EA 4671 ADEF
teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr

Résumé
Une idée souvent répandue dans les pratiques et la formation d'enseignants spécialisés est que les élèves en difficulté ou les élèves en situation de handicap doivent manipuler pour apprendre des mathématiques. Ainsi, le recours au concret et à la manipulation est vu comme une priorité et un leitmotiv dans la justification du choix des situations proposées à ces élèves, situations qui sont souvent le plus simplifiées possibles. Or la manipulation ne suffit pas pour faire des mathématiques et l'importance de la dimension sémiotique de l'activité mathématique a été maintes fois mise en évidence par divers chercheurs.
À partir d'exemples pris dans le cadre de recherches sur les pratiques inclusives en mathématiques, nous soulignons l'importance pour le travail mathématique de la sémioticité des différents milieux (matériels ou autres) proposés aux élèves. En particulier, nous montrons comment les systèmes sémiotiques à l'œuvre permettent l'émergence de techniques pour l'accomplissement des types de tâches proposés aux élèves. Nous questionnons ensuite la formation des enseignants spécialisés au regard de ce problème.

I - INTRODUCTION

Une doxa qu'on peut retrouver dans le champ d'intervention auprès des élèves en difficulté ou en situation de handicap est que leurs difficultés viennent en partie d'un manque de manipulation et qu'il faut les faire manipuler, et ainsi on leur propose des situations concrètes avec des objets matériels. Dans un travail de recherche sur ce qu'on apprend dans les Instituts médico-professionnels (IMPro), Horvais (2012) montre que les professionnels enquêtés affirment tous que, pour ces élèves, il faut du concret, et encore du concret, parce que ces élèves ont besoin de toucher, de manipuler. Cet exemple, parmi d'autres, indique que cette doxa s'appuie sur une opposition concret/abstrait qui laisse souvent dans l'ombre le fait que la manipulation matérielle n'est pas suffisante pour faire des mathématiques. Et pourtant les programmes insistent sur l'articulation entre le concret et l'abstrait, entre l'action et la représentation. Voilà ce que disent les programmes du cycle 2 à ce propos[1] : « *Au cycle 2, on ne cesse d'articuler le concret et l'abstrait. Observer et agir sur le réel, manipuler, expérimenter, toutes ces activités mènent à la représentation, qu'elle soit analogique (dessins, images, schématisations) ou symbolique, abstraite (nombres, concepts). Le lien entre familiarisation pratique et élaboration conceptuelle est toujours à construire et reconstruire, dans les deux sens.* » Dans des sphères proches du système d'enseignement de mathématiques, nous trouvons aussi ce type de prise de position à ce sujet. Par exemple, dans un ouvrage destiné aux professionnels intervenant auprès d'élèves dyscalculiques, Hélayel et Causse-Mergui (2011) affirment : « *Tout le monde de nos jours a entendu parler de cette nécessité de faire « manipuler » les enfants. Mais beaucoup oublient que cela n'a qu'un but : pouvoir s'en passer.* » (p. 21)

Cette opposition concret/abstrait où le rôle de la manipulation est vu comme central ne date pas d'aujourd'hui. Par exemple, dans le dictionnaire pédagogique de Ferdinand Buisson (édition 1911), destiné aux acteurs de l'enseignement primaire, une entrée « manipulation » est consacrée à la place de la manipulation dans l'enseignement scientifique. Dans l'entrée « mathématiques », le double but « utilitaire et éducatif » de l'enseignement mathématique au primaire est d'emblée indiqué sans les opposer. Mais le

[1] B.O. spécial n°11 du 26 novembre 2015. Annexe 1 - Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2).

rapport à la pratique et au concret est davantage mis en avant, comme on peut le voir dans le choix des problèmes mathématiques à proposer aux élèves :

« *L'arithmétique, devant contribuer, même à l'école primaire, à l'éducation générale de l'esprit, tout exercice qui force l'enfant à réfléchir, à chercher, à comparer, à déduire, à juger, semble à ce titre être du domaine de l'enseignement primaire. C'est, là, il nous semble, une grave illusion. Il ne faut pas perdre de vue que l'enseignement donné dans nos écoles primaires s'adresse aux masses profondes des populations scolaires rurales, vouées de très bonne heure au travail des champs, et aux enfants des classes ouvrières des villes, que réclament aussi dès l'âge le plus tendre l'atelier, l'usine ou le comptoir (…) L'arithmétique ne peut pas faire exception. Avant tout, l'enfant doit savoir calculer sûrement et rapidement et résoudre toutes les questions pratiques qu'il peut être appelé à rencontrer sur sa route pendant sa vie. Tel est le caractère que doivent avoir les problèmes à l'école primaire ; et la marge est grande encore sans qu'on ait besoin de se jeter sur les curiosités de la science, sur les propriétés abstraites des nombres, sur les problèmes fantaisistes et compliqués à plaisir.* »

La prégnance du rôle de la manipulation et du concret dans les discours (et aussi dans les pratiques) des intervenants auprès des élèves en difficulté et en situation de handicap fait partie d'une tradition qui a des racines dans un rapport empiriste, sensualiste et intuitif de la connaissance à la réalité. Notre but est de montrer que, même dans un tel type de rapport, la place des représentations, du langage, de la sémiotique, est consubstantielle au travail mathématique de l'élève. Pour cela, nous présentons d'abord quelques outils théoriques pour aborder ce problème, et ensuite nous montrons quatre exemples qui nous permettent de mettre en exergue quelques fonctions et malentendus de l'usage des systèmes sémiotiques.

II - OUTILS THÉORIQUES ET QUESTIONS

La question de la dimension sémiotique de l'activité mathématique est présente dans la plupart des approches théoriques des recherches en didactique des mathématiques. Comme le dit Radford (2014) : « *The problem of knowledge representation has been one of the most investigated and most discussed problems in mathematics education. And it has also been one of the most controversial ones.* » (p. 406) Effectivement les réponses théoriques et empiriques à cette question ne sont pas les mêmes selon les approches. Dans le cas de la théorie des situations didactiques, Brousseau prend en compte cette dimension à travers plusieurs outils, en particulier il modélise la notion de représentation (Brousseau, 2004). Dans la théorie des champs conceptuels, cette dimension est présente dans la définition même de concept et de champ conceptuel (Vergnaud, 1990). L'épistémographie est aussi une construction théorique qui place les outils sémiotiques au centre de son modèle (Drouhard, 2007, 2012). Les travaux de Radford (2014) sur la théorie de l'objectivation, les travaux d'Arzarello (2006) sur la notion de faisceau sémiotique, la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008) en sont encore quelques exemples. Notre but n'est pas de faire un inventaire de tous les travaux de recherche à ce propos. Encore très récemment, l'étude de (Presmeg, Radford, Roth & Kadunz, 2016) fait un inventaire de travaux tenant compte de cette dimension. Nous n'allons pas mettre en débat ces approches les unes par rapport aux autres : nous nous bornerons à présenter certains outils théoriques issus de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1994), des registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993, 1995) et de la sémiotique de Peirce (Neveu, 2011) qui nous permettront par la suite d'analyser nos épisodes et de montrer certains phénomènes.

1 Noésis et sémiosis

Dans l'introduction, nous avons vu que, dans certains discours, l'insistance sur la manipulation pour pallier les difficultés des élèves tend à minorer le rôle des représentations dans le travail mathématique. Or cette position est difficilement défendable lorsqu'on observe quels sont les ingrédients de ce travail. Duval (1993) parle du paradoxe cognitif de la pensée mathématique pour indiquer que : « *d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible* » (p. 38) Cet auteur reformule alors ce paradoxe cognitif de la manière suivante : « *Si on appelle **sémiosis** l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique, et **noésis** l'appréhension conceptuelle d'un objet, il faut affirmer que la noésis est inséparable de la sémiosis* ». (p. 39-40)

Duval indique que trois activités cognitives liées à la sémiosis sont nécessaires pour qu'un système sémiotique devienne un registre de représentation. Il s'agit d'abord de la *formation* d'une représentation comme étant une représentation identifiable dans un registre donné. Ensuite le *traitement* d'une représentation implique la transformation de cette représentation dans le registre où elle a émergé. Finalement la *conversion* d'une représentation est la transformation d'une représentation de l'objet ou situation dans une représentation d'un autre registre que celui de départ, comme par exemple la transformation d'une droite dans le registre géométrique en une équation dans le registre algébrique. Ces différentes activités cognitives sont réglées en fonction des registres et du travail mathématique à faire. Par exemple, des règles de conformité doivent être suivies pour constituer une expression numérique (pour désigner la somme de 2 et 3, on peut écrire 2 + 3 mais non 2 3 +) ou des règles de traitement propres à un registre donné (on peut transformer l'expression $2x - 4 = 10$ en $2x = 10 + 4$, parce qu'il y a une règle qui permet de le faire).

2 Ostensifs et non ostensifs

Cette articulation entre objet mathématique et représentations sémiotiques dans l'activité mathématique est pensée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique comme une dialectique entre ostensifs/non ostensifs. Chevallard (1994) indique que faire des mathématiques consiste à manipuler des ostensifs qui permettent l'émergence de non ostensifs dans le cadre d'une pratique réglée :

« D'un côté, il y a ainsi des objets que je nomme ostensifs, tels un nom, une notation, un graphe, ou encore un schéma gestuel, qui peuvent être réellement présents et que l'on peut effectivement manipuler dans leur matérialité. D'un autre côté, il y a les objets non ostensifs, que je nomme aussi émergents, et que l'on peut seulement évoquer à l'aide d'objets ostensifs. Lorsqu'un mathématicien dit qu'il manipule la fonction logarithme, c'est en vérité certains des objets ostensifs associés qu'il manipule. Bien entendu objets ostensifs et non ostensifs viennent à l'existence et vivent ensemble au sein d'une pratique mathématique qui les réunit : ils se déterminent réciproquement. » (p. 72)

La manipulation n'est pas ici simplement une manipulation d'objets matériels, c'est une manipulation d'ostensifs appartenant à un ou plusieurs registres. Les ostensifs ont une double valence : une valence instrumentale car ils permettent de faire ce qu'il y a à faire ; une valence sémiotique car ils permettent de montrer ce qu'on fait. Chevallard appelle instrument sémiotique un objet ostensif et sa double valence, et indique que le travail mathématique convoque une panoplie d'instruments sémiotiques d'un ou plusieurs registres.

Quatre registres d'objets ostensifs sont envisagés : le registre oral (le discours), le registre graphique ou scriptural (écrits, textes, graphiques,…), le registre gestuel (gestes, mimiques, regards,…) et le registre « matériel » des objets matériels. Ces registres ne sont pas indépendants, et peuvent être sollicités en simultané. Pourtant les différents registres n'ont pas la même valeur culturelle ou mathématique. Le registre gestuel est peu valorisé (par exemple, compter avec les doigts), le registre oral peut être plus valorisé dans une culture donnée, étant considéré comme plus proche de la pensée. L'écrit est le registre le plus valorisé en algèbre. Dans l'évolution de l'activité mathématique, il y a une réduction de l'épaisseur ostensive avec une prédominance du registre graphique/scriptural (Chevallard, 1994 ; Bosch & Chevallard, 1999).

Ces instruments sémiotiques et registres ostensifs sont des ingrédients de l'activité mathématique mais ils permettent aussi de décrire les techniques mises en œuvre pour accomplir des types de tâche, ou de décrire les technologies ou théories permettant de justifier ces techniques. Autrement dit, les instruments sémiotiques sont des ingrédients pour décrire des praxéologies mathématiques qui elles-mêmes permettent d'analyser l'activité mathématique (Chevallard, 1992).

Les outils théoriques issus des travaux de Duval nous aident à penser les activités cognitives liées à la sémiosis comme la formation, le traitement et la conversion des représentations sémiotiques. Les éléments issus de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard) nous permettent d'étudier l'activité mathématique par les instruments sémiotiques en lien avec les praxéologies mathématiques, les situations et les milieux dans lesquels vivent ces praxéologies mathématiques. La notion de milieu est considérée comme étant « ce sur quoi agit l'élève et qui agit sur lui » (Brousseau, 1998).

3 Dynamique du processus sémiotique

Une troisième dimension de notre instrument d'analyse concerne ce qui a trait aux signes et leur relation avec les objets et situations. Un certain nombre de travaux en didactique des mathématiques (Otte, 2005), et plus spécifiquement certains travaux sur les élèves en difficulté, utilisent la sémiotique de Peirce en tant que cadre d'analyse (Bloch, 2008 ; Conne, 1999 ; Giroux, 2008 pour ne citer que certains). Peirce définit le signe comme une relation triadique entre *l'objet* (entité mentale ou physique), le *representamen* (ce qui fait signe), et *l'interprétant* qui met en relation l'objet et le representamen : « Ma définition est la suivante : un representamen est sujet d'une relation triadique avec un second appelé son objet, pour un troisième appelé son interprétant, cette relation triadique étant telle que le representamen détermine son interprétant à entretenir la même relation triadique avec le même objet pour quelque interprétant. » (Peirce, 1978) Cette structure triadique est constitutive du modèle de Peirce fondée sur trois catégories philosophiques - des « conceptions de l'être » (Everaerd-Desmedt, 1990), - qui sont la priméité, la secondéité et la tiercéité.

Nous n'allons pas présenter tous les types de signes dégagés mais seulement ceux qui tiennent compte du mode de renvoi du representamen à l'objet. Dans ce cas, trois types de signes sont définis en fonction de deux variables : arbitraire/non arbitraire et motivation. Ces types de signes sont l'indice, l'icône et le symbole. Lorsqu'un signe est un indice, la relation objet/representamen est non arbitraire et la motivation est causale car il y a une relation de cause à effet avec les objets du monde : par exemple, la fumée est un indice de feu. Lorsqu'un signe est une icône, la relation objet/representamen est non arbitraire et la motivation est celle de ressemblance avec les objets du monde : par exemple, les onomatopées. Un signe est un symbole si la relation est arbitraire et la motivation conventionnelle : par exemple, le mot « chat » est arbitraire et conventionnel par rapport à l'animal « chat ». Par ailleurs, étant donné que l'interprétant met en relation les deux autres termes, le contexte d'interprétation est important. Peirce ne distingue pas penser et signifier, et la sémiose est un processus interprétatif et signifiant où representamen, objet et interprétant sont des fonctions (et pas des attributions) qui peuvent changer dans la dynamique du processus sémiotique.

4 Cadre d'analyse et questions

Pour terminer, un dernier élément nous paraît important pour notre cadre d'analyse. Actuellement, la sémiotique est définie comme la science des signes qui étudie la production, la codification et la communication des signes (Neveu, 2011). D'une manière plus restrictive, si nous prenons le sens étymologique de ce terme, il renvoie à ce qui est apte à noter, qui concerne l'observation. Il nous semble intéressant de faire le lien entre « sémiotique » en tant qu'adjectif et trois termes : agir – observer – noter. Des instruments sémiotiques permettent d'agir, d'observer l'action (la sienne mais aussi celle des autres) et de noter ce qui est signifiant de ces actions et observations.

Notre cadre d'analyse comporte trois dimensions :

- la dimension cognitive à travers trois activités cognitives qui sont la formation, le traitement et la conversion de représentations sémiotiques. Nous nous focaliserons ici surtout sur la formation de représentations sémiotiques dans une pluralité de registres (oral, scriptural, gestuel et matériel).
- la dimension mathématique et institutionnelle : nous étudierons sous cet angle les représentations sémiotiques comme éléments de techniques permettant d'accomplir des types de tâches dans des situations, des milieux et contrats déterminés.
- la dimension proprement sémiotique, relative aux types de signes convoqués par les élèves et les enseignants dans l'émergence des techniques en lien notamment avec la sémioticité des milieux. Pour cela, nous regarderons non seulement les actions et les discours mais aussi les observations et ce qui permet de les noter.

Nos questions sont celles de savoir **comment un élève entre ou non dans un contrat didactique qui tienne compte de la dimension sémiotique de l'activité mathématique**. **Qu'est-ce qui fait signe dans les différents milieux et comment l'élève s'en saisit-il pour mettre en œuvre des techniques mathématiques et accomplir des types de tâches mathématiques ? Quels sont les malentendus qui peuvent surgir et comment peuvent-ils se transformer en obstacle pour l'apprentissage ?**

III - ANALYSE DE QUATRE EXEMPLES

Nous avons pris quatre exemples dans nos travaux de recherche pour montrer un certain nombre de phénomènes sur la place de la sémiotique dans l'activité mathématique. Nous indiquerons, pour chaque exemple, le contexte du travail, la description et l'analyse d'un ou plusieurs épisodes. Le but n'est pas ici de présenter les recherches en question mais de montrer quelques épisodes significatifs relatifs à notre propos.

1 Paradoxe entre difficulté à conceptualiser et symbolisation abrupte

1.1 Contexte

Ce premier exemple est issu d'une recherche menée dans une classe CLIS[2] (Classe pour l'inclusion scolaire) destinée à des élèves sourds et malentendants. Le groupe d'élèves que nous avons observé était constitué par cinq élèves âgés de 8 à 10 ans de niveau CE2. Il s'agissait de reprendre les tables de multiplication car ils avaient des difficultés à les mémoriser selon l'enseignante. La situation mathématique était constituée par un type de tâche T1 « décomposer un nombre en un produit de deux nombres » et d'un milieu matériel constitué par des « bandes de papier de n carreaux », des ciseaux, du papier blanc et des stylos. Les épisodes choisis se passent lors de la première séance dont le synopsis est le suivant :

Temps	Types de tâches/Milieu matériel	Tâches des élèves : nombres choisis par l'enseignante
0- 8min	T1 avec des bandes	Paul : 20 Charlotte – Marie – Zénon : 12 Ruth : 8
8min - 14min	T1 avec des jetons	Mêmes nombres avec des jetons
14min - 23min	T1 avec des bandes et jetons	Paul : 9 Charlotte - Zénon : 10 Marie : 12 Ruth : 6

Cette séance peut être découpée en trois étapes. Dans la première étape (0 à 8 min), le type de tâche est T1 : bandes de carreaux à découper avec des valeurs différentes selon les élèves (8, 12 ou 20). La consigne est la suivante : « *Je veux que, dans cette bande, vous me découpiez des morceaux, mais il faut que ces morceaux soient tous pareils.* » Dans la deuxième étape (8 à 14 min), le même type de tâche est proposé aux élèves mais le milieu matériel change car il s'agit de partager un ensemble de jetons en parts égales. Dans la troisième étape (14 à 23 min), il s'agit d'une tâche du même type avec d'autres nombres.

1.2 Description des épisodes

Les deux épisodes 1 et 2, celui de Charlotte et celui de Paul, se passent pendant la première étape.

[2] Actuellement ces classes n'existent plus en tant que telles, elles ont été transformées officiellement en ULIS école (Unités Localisées d'Inclusion Scolaire) pour l'école primaire.

Épisode 1 – Charlotte	
Maîtresse : Tu as fait des paquets de combien ? Charlotte : 6 Maîtresse : et l'autre paquet ? Charlotte : 6 Maîtresse : Combien de paquets ? Charlotte : 2 Maîtresse : 12 c'est égal à quoi ? (elle indique avec le doigt un paquet de 6) Charlotte : 6 La maîtresse indique l'espace vide entre les deux paquets, trois fois, et ensuite l'autre paquet de 6 Charlotte : + 6 Maîtresse : écris-le ***Charlotte écrit 66.***	

Dans cet épisode, on observe que Charlotte découpe la bande en deux paquets de 6 carreaux chacun, mais n'arrive pas à écrire ce que la maîtresse attend, à savoir 12 = 6 + 6. À aucun moment une consigne explicite n'est donnée dans ce sens. La maîtresse indique d'une manière ostensive, par des gestes, ce qu'il faut écrire. Malgré ces indications, Charlotte ne répond pas aux attentes et écrit 66.

Dans l'épisode 2, on observe que Paul a bien découpé la bande de 20 carreaux, il colle les morceaux sur une feuille de papier, il écrit 20 dans sa feuille et 4 sous chaque morceau. La maîtresse lui demande « *20 égal quoi ?* », et Paul répond « *20 + 4* ».

À la suite de ces deux épisodes, la maîtresse prend une décision qui n'était pas prévue au départ. Elle remplace les bandes de carreaux par des jetons et propose le même type de tâche aux élèves. Le milieu matériel change, et les élèves manipulent les jetons pour faire des paquets ayant le même nombre de jetons. L'épisode 3 se passe avec Paul dans cette deuxième étape de la séance.

Épisode 3 – Paul	
Maîtresse : Paul, alors 20 c'est égal à combien ? Paul commence à compter les jetons. Maîtresse : Pourquoi tu recomptes ? Combien tu en as ? Paul : 20 Maîtresse : Combien tu as fait de paquets ? Combien tu as mis dans chaque paquet ? Paul : 4 Maîtresse : Combien tu as fait de paquets de 4 ? Paul : 5 Maîtresse : Voilà tu as compris, donc 20 c'est égal à combien ? Paul ne répond pas tout de suite mais la maîtresse indique chaque paquet de jetons et l'espace vide entre chaque paquet pour lui faire dire « plus ». Paul répond au fur et à mesure de ces indications : 4 + 4 + 4 + 4 + 4	

Dans cet épisode, on observe que Paul partage sans problème les 20 jetons en 5 paquets de 4 jetons chacun. La maîtresse ne donne pas d'autre consigne concernant la représentation attendue. Par des questions telles que « combien tu as de paquets ? Combien tu as mis dans chaque paquet ? », et par ostension avec des gestes, elle arrive à ce que Paul donne une réponse acceptable par elle : 4 + 4 + 4 + 4 + 4.

L'épisode 4 implique Zénon, un autre élève de la classe. Nous observons le même type de fait. Zénon sait partager 10 jetons en parts égales. Il fait 5 paquets de 2 jetons. Il n'écrit pas, et par le même procédé (ostension avec des gestes et questions ciblées), la maîtresse arrive à ce que Zénon écrive la relation : 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10. Nous observons aussi que Zénon a des difficultés pour répondre aux deux questions : « Combien tu as de paquets ? Combien tu as mis dans chaque paquet ? ». Il confond l'une et l'autre de ces questions mais arrive à donner les bonnes réponses après reprise des questions par la maîtresse.

1.3 Analyse des épisodes

Ces épisodes nous montrent un décalage entre ce que l'enseignante attend que les élèves écrivent et ce que les élèves comprennent de la situation. L'enseignante attend que les élèves écrivent une relation du type « 20 = 4 x 5 » ou « 20 = 5 x 4 ». Or la consigne donnée par la maîtresse ne précise pas qu'ils doivent écrire une relation qui correspond au partage égal qu'ils obtiennent par la manipulation. Il s'agit là d'un implicite qui pose des problèmes aux élèves et à l'enseignante. Et c'est par ostension que l'enseignante arrive à dépasser cet implicite en acceptant une autre représentation qui n'est pas celle attendue mais qui est acceptable pour elle. Il y a là un premier malentendu qui est contractuel.

Le deuxième élément à signaler est celui du changement de milieu matériel, des bandes de carreaux aux jetons, pour le même type de tâche. Les élèves n'ont eu aucun problème pour manipuler les bandes et répondre à la consigne. Et pourtant l'enseignante décide de les faire encore manipuler car elle estime que les difficultés des élèves viennent de leur difficulté à conceptualiser. Pendant un entretien, l'enseignante nous dit explicitement : « *parce qu'ils sont sourds ou malentendants ils ont des difficultés pour conceptualiser, donc il faut les faire beaucoup manipuler et visualiser* ». La décision de l'enseignante est fondée sur cet *a priori* sur les difficultés que les élèves sourds et/ou malentendants peuvent avoir sans tenir compte de l'observation de cette situation en particulier. Car les difficultés de ces élèves ne viennent pas forcément de la compréhension de la situation de partage mais probablement de deux facteurs : le premier est relatif aux malentendus contractuels, le deuxième est relatif à la symbolisation abrupte qui était celle attendue par l'enseignante. La relation formelle attendue n'est pas forcément celle que les élèves peuvent observer à partir du milieu et des actions sur le milieu. La sémioticité du milieu matériel aurait pu mener à la formation d'une représentation sémiotique mais pas celle attendue, et surtout si cela n'est pas dit explicitement dans la consigne. Nous voyons Charlotte écrire « 66 » probablement pour écrire « un paquet de 6 et un paquet de 6 », ou Paul écrire « 20 + 4 » pour indiquer probablement « la bande de 20 carreaux et un paquet de 4 carreaux ». Ces représentations dans le registre de l'écrit correspondent aux techniques qui ont permis d'accomplir la tâche dans le registre matériel. Que faire de ces représentations intermédiaires qui correspondent à ce qui fait signe pour les élèves face au milieu matériel et aux actions produites dans ce milieu ?

Dans l'exemple observé, l'enseignante guidée par ses conceptions *a priori* sur les difficultés d'élèves sourds, prend la décision de revenir sur la manipulation, ce qui ne résout pas vraiment le problème qu'elle avait pourtant observé (celui que les élèves n'arrivent pas à écrire la relation attendue).

2 « Malentendu sémiotique » ?

2.1 Contexte

Le deuxième exemple est pris dans le cadre d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté qui est l'aide pédagogique complémentaire (APC) proposée par l'institution scolaire. Notre exemple concerne 6 élèves de CM1 en difficulté. Il s'agit d'une situation d'introduction des fractions en tant que codage de la mesure de longueurs. Deux types de tâches sont proposés aux élèves : T1 - mesurer la longueur d'un segment en utilisant une unité non conventionnelle ; T2 - coder la mesure obtenue sous la forme d'une fraction (ou somme de fractions). Le milieu matériel est constitué par une bande-unité en papier, et par une feuille où sont représentés des segments, et où certains codages sont proposés. Les élèves doivent associer la mesure obtenue avec l'un de ces codages.

L'organisation de la séance d'APC est la suivante :

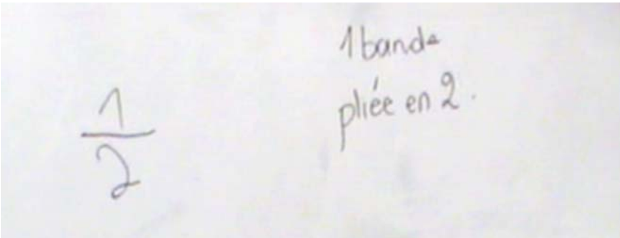
Synopsis	
Étape 1	Travail individuel de lecture de la consigne écrite sur la feuille
Étape 2	En groupe, vérification de la compréhension de la consigne
Étape 3	Travail individuel pour mesurer la longueur d'un segment en utilisant une bande-unité en papier
Étape 4	Dialogue au tableau élèves-enseignante autour d'un exemple fait par les élèves au tableau et sur les écritures proposées par les élèves. Il s'agit de coder la mesure d'un segment de longueur 2u + ½ u, u étant la longueur de la bande-unité.

2.2 Description de l'épisode

L'épisode choisi se déroule dans l'étape 4 où le travail se fait au tableau dans un dialogue enseignante-élèves. Les élèves doivent décrire la technique utilisée pour mesurer la longueur d'un segment et coder au fur et à mesure des actions décrites. La technique est ainsi racontée :

- on reporte une fois, deux fois la bande unité
- on plie en deux parts égales la bande unité lorsqu'on ne peut plus reporter une unité entière
- on reporte une part de cette bande-unité autant de fois que possible
- sinon, on plie encore en deux, et on reporte

Les élèves ont déjà vu des écritures du type 1u, 2u, 3u, et l'élève au tableau écrit « 1u » au-dessous des parts correspondantes à des bandes-unités. La question importante est celle posée par Pierre : « *Comment on écrit une bande à moitié?* ». L'enseignante demande aux élèves de proposer des écritures et plusieurs propositions sont écrites au tableau. Héloïse propose « ½ » au tableau :



L'enseignante dit alors : « *Héloïse propose cette écriture là (1/2). C'est exactement ça. Cette écriture, elle raconte précisément ça. J'ai pris une bande pliée en deux, j'ai pris un morceau de cette bande pliée en deux.* »

2.3 Analyse de l'épisode : quelle histoire raconte-t-on ?

Pour Héloïse (et aussi pour les autres élèves), l'écriture « ½ » représente et raconte une action qui est celle d'une « bande-unité pliée en deux » tandis que, pour l'enseignante, l'histoire est autre car cette notation représente « un morceau d'une bande-unité pliée en deux morceaux ».

Il y a un malentendu sémiotique entre l'enseignante et les élèves car cette représentation sémiotique ne raconte pas la même histoire. Ce malentendu a continué pendant cette séance et aussi pendant les deux séances de classe et une autre séance d'APC. Pour ces élèves, et aussi pour d'autres élèves de la classe, cette notation représente une action, tandis que pour l'enseignante cette notation correspond à une relation partie-tout. Or l'enseignante nous a parlé ensuite de la difficulté des élèves pour comprendre les fractions et pourtant ils arrivent à coder l'action de mesurage sous la forme d'une fraction. La difficulté des élèves venait surtout du décodage : ils arrivaient à identifier le dénominateur comme étant le partage de l'unité en x parts égales, mais ils n'arrivaient pas à identifier le numérateur comme le nombre de parts prises.

Des deux formulations « une bande pliée en deux » et « un morceau d'une bande pliée en deux morceaux », la plus proche du déroulement de l'action est celle de l'élève. Peut-être que, pour l'élève, le signe « ½ » est encore un signe iconique proche de l'action : 1 pour une bande unité, le trait correspond au pli, au partage, et le 2 pour le pli en deux morceaux. Pour l'enseignante, cette notation correspond plutôt à un signe symbolique qui représente une relation « partie-tout ».

Le malentendu sémiotique correspond à des significations différentes d'une même représentation sémiotique, ce qui peut devenir un obstacle pour les élèves et pour l'enseignante car pour les uns et les autres la notation est signifiante et il n'est pas évident de voir que ce n'est pas forcément la même signification en raison de la subtilité de cette différence.

3 Inventivité et hybridité sémiotique

3.1 Contexte

Le troisième exemple est pris dans le cadre d'une recherche sur une ULIS Collège (Unité Localisée pour l'Inclusion Scolaire) destinée à des élèves dyslexiques. Nous avons observé des élèves de cette ULIS qui étaient accueillis dans une classe de troisième en mathématiques. Nous avons proposé à l'enseignant de mathématiques et au coordonnateur de l'ULIS de travailler sur des problèmes mathématiques et sur le raisonnement. Les problèmes choisis ont déjà été travaillés dans des travaux de recherche (Hersant, 2008, 2010 ; Douaire, Argaud, Dussuc, Hubert, 2003 ; Ermel, 1999) pour que nous puissions comparer les techniques et les raisonnements mis en œuvre par ces élèves par rapport à d'autres élèves. Le théorème proposé est le suivant : la somme de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de trois. La situation proposée suivait les différentes étapes proposées par Ermel (1997) et les élèves travaillaient en groupe. Dans un premier temps, on demande aux élèves de trouver trois nombres consécutifs dont la somme est S, S étant un multiple de 3. Dans un deuxième temps, la question est la même avec S non multiple de 3. Dans un troisième temps, il s'agit de formuler une conjecture qui réponde à la question : à quelles conditions le problème a-t-il toujours une solution ? Le quatrième temps est celui de la preuve.

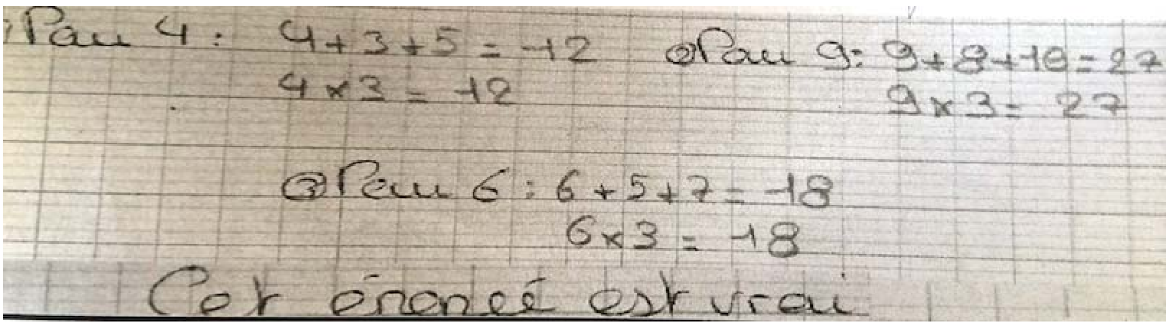
Nous ne présentons pas les détails des raisonnements et des techniques mis en œuvre par les élèves car nous intéressons à la quatrième étape et aux preuves proposées par les élèves qui ont travaillé en groupe.

3.2 Description des différents types de « preuves »

Plusieurs types de preuve[3] sont apparus mais le plus fréquent était la preuve pragmatique (Balacheff, 1987) avec des exemples numériques. Un deuxième type de preuve était une preuve discursive en utilisant le « nombre du milieu » : « si on additionne un nombre, plus celui d'avant, plus celui d'après, la somme c'est trois fois le nombre ». Le troisième type de preuve correspond aux preuves algébriques où on utilise les expressions littérales.

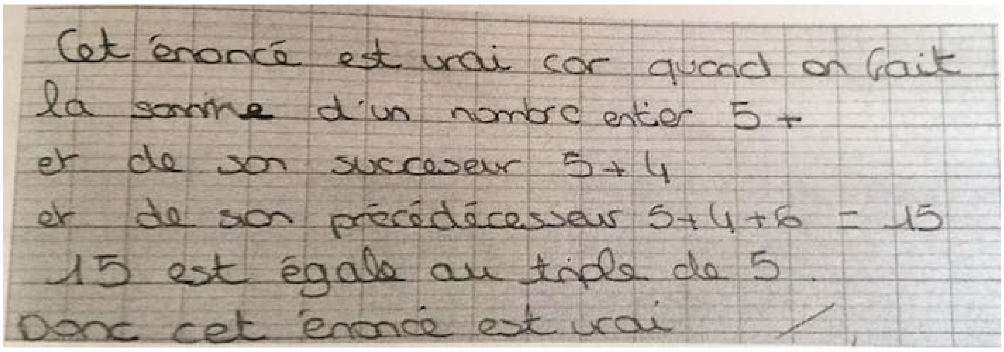
Pour illustrer les différents types de preuve, nous avons choisi quatre productions d'élèves qui nous paraissent significatives.

Preuve A - preuve pragmatique avec quelques exemples numériques

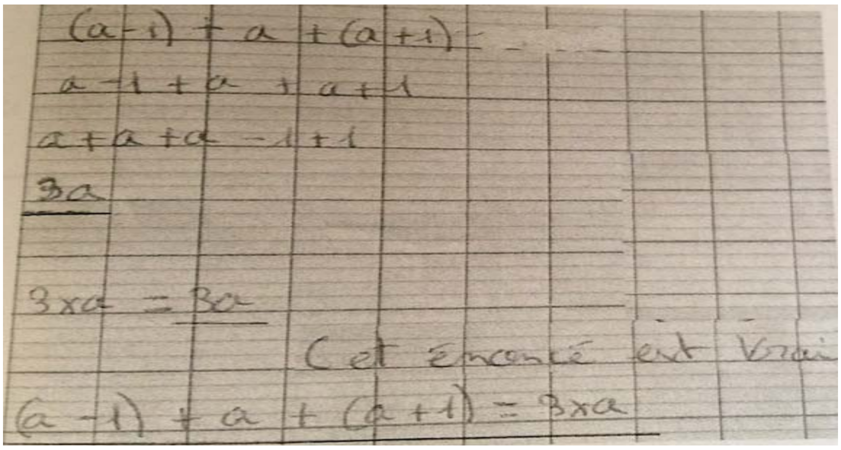

Pour 4 : 4+3+5 = 12
4×3 = 12
Pour 9 : 9+8+10 = 27
9×3 = 27
Pour 6 : 6+5+7 = 18
6×3 = 18
Cet énoncé est vrai

[3] Nous distinguons preuve et démonstration en suivant les travaux de Balacheff (1987).

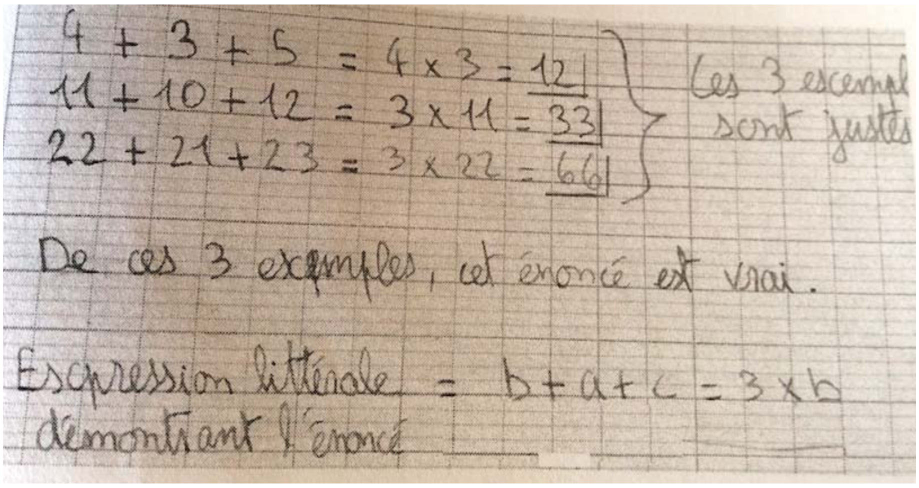
Preuve B - preuve discursive avec un exemple numérique


Cet énoncé est vrai car quand on fait
la somme d'un nombre entier 5 +
et de son succeseur 5 + 4
et de son prédécesseur 5 + 4 + 6 = 15
15 est égale au triple de 5
Donc cet énoncé est vrai

Preuve C - preuve algébrique


$(a-1) + a + (a+1)$
$a - 1 + a + a + 1$
$a + a + a - 1 + 1$
$3a$
$3 \times a = 3a$
Cet énoncé est vrai
$(a-1) + a + (a+1) = 3 \times a$

Preuve D - preuve « exemple générique » avec trois exemples numériques et une expression littérale


$4 + 3 + 5 = 4 \times 3 = 12$
$11 + 10 + 12 = 3 \times 11 = 33$
$22 + 21 + 23 = 3 \times 22 = 66$
Ces 3 exemple sont justes
De ces 3 exemples, cet énoncé est vrai.
Expression littérale $= b + a + c = 3 \times b$
démontrant l'énoncé

3.3 Analyse des productions : inventivité et hybridité sémiotiques

Dans les productions des élèves, plusieurs registres sémiotiques sont utilisés. Dans la preuve A, les élèves calculent les sommes à partir du « nombre du milieu » : pour 4, pour 9 et pour 6 en calculant la somme et en calculant le produit par 3. Ils concluent que l'énoncé est vrai. Dans ce cas, le registre numérique est le registre prédominant.

Dans la preuve B, deux registres sont utilisés : le langage naturel et le registre numérique, mais avec la prédominance d'un discours écrit. Les mots *successeur* et *prédécesseur* sont utilisés (même si les élèves se trompent) ce qui aurait pu être généralisable mais ensuite les élèves utilisent un exemple pour conclure que l'énoncé est vrai.

Dans la preuve C, le registre algébrique est prédominant. Dans ce cas, la lettre est utilisée pour désigner des objets (le nombre a), des relations (le prédécesseur $a - 1$ et le successeur $a + 1$, la somme de ces trois nombres génériques, multiple de 3). La lettre est un objet de calcul et des traitements des expressions (au sens de Duval) sont effectués pour arriver à des formes équivalentes qui permettent de démontrer le théorème.

La preuve D est tout à fait intéressante car elle montre un état intermédiaire entre une preuve par des exemples numériques et une démonstration. Deux registres sont utilisés, le registre numérique et le registre littéral. Les trois exemples numériques montrent, dans leur disposition spatiale, le rôle du « nombre du milieu ». Dans ces exemples, les élèves calculent et montrent que la somme des trois nombres consécutifs est un multiple du nombre du milieu. Cela est fait pour 4, 11 et 22, et ils concluent que l'énoncé est vrai. La suite de la preuve utilise les lettres pour généraliser. Dans ce cas, les premières lettres de l'alphabet a, b et c représentent les trois nombres consécutifs. Cela reste implicite car les relations mathématiques ne sont pas vraiment établies. Mais cela indique que l'élève n'a pas choisi ces lettres au hasard. La lettre b désigne le nombre du milieu, la lettre a le prédécesseur et la lettre c le successeur. La disposition spatiale reprend la disposition spatiale des exemples numériques. La conversion (au sens de Duval) du registre numérique dans le registre littéral conserve l'ordre : l'ordre des nombres consécutifs devient l'ordre alphabétique des lettres. La lettre n'est pas encore un objet de calcul mais elle montre déjà des relations.

Ce dernier exemple montre une certaine inventivité sémiotique par le groupe d'élèves qui utilisent les lettres dans l'ordre alphabétique pour indiquer des relations entre un nombre, son prédécesseur et son successeur. Cette inventivité peut être un élément important dans l'apprentissage du raisonnement, et peut être valorisée dans la classe. Certes, ce n'est pas encore une démonstration mais le processus de généralisation est déjà en marche, et l'usage d'une analogie est parlant.

Dans cet exemple, nous voyons que les représentations sémiotiques « intermédiaires » ont un rôle important. Elles sont « hybrides » car appartenant à des registres différents mais permettent de généraliser par analogie. La lettre représente un objet mais n'est pas encore un objet de calcul. En revanche, elle est aussi une lettre de l'alphabet, et l'ordre alphabétique est un élément pour montrer la relation de trois nombres consécutifs. Les lettres a, b et c utilisées sont des signes iconiques : le choix est non arbitraire et la relation de succession est motivée par l'ordre alphabétique.

Nous pouvons ainsi observer ce que les élèves savent déjà et pas seulement l'écart par rapport à l'attendu : la démonstration dans le registre algébrique. La réduction de l'épaisseur sémiotique dont parle Chevallard est ici à l'œuvre, mais l'analyse du processus de preuve montre que le système sémiotique employé est varié, recourt à plusieurs registres, et même à celui d'un domaine *a priori* extérieur aux mathématiques qui est celui des savoirs sur l'écriture alphabétique.

4 Prise de conscience de la place de la dimension sémiotique

L'exemple 4 est relatif au changement d'une enseignante par rapport aux situations proposées aux élèves d'une année à l'autre et à l'importance de la dimension sémiotique[4]. Dans le cadre d'un dispositif formation-recherche, nous avons travaillé avec quatre enseignantes spécialisées où des séances de formation alternaient avec des séances d'observation des classes et des séances d'analyse de ces séances de classe. Dans ce cadre, nous avons proposé à l'une des enseignantes d'analyser conjointement deux séances menées par elle et réalisées à trois ans d'intervalle sur le même type de tâche (dénombrer une collection d'objets) et le même support (usage d'une boîte métallique et de jetons). Cette enseignante intervenait dans une classe CLIS TFC (Troubles des Fonctions Cognitives). Nous allons rendre compte de ce que l'enseignante dit après visionnement de ces deux séances mais d'abord, nous présentons les éléments essentiels de comparaison entre ces deux séances sous la forme d'un tableau :

[4] Pour plus de détails, voir Assude, Tambone & Vérillon 2014.

La situation de la boîte (année n)	*La situation de la boîte (année n +3)*
Groupe de 4 élèves face au professeur Matériel : boîte et jetons Description : L'enseignante mettait un jeton à chaque fois en les dénombrant et les élèves devaient dire à la fin le nombre de jetons qui étaient dans la boîte. Ensuite l'un des élèves vérifiait en sortant les jetons et en les dénombrant.	Groupe de 3 élèves assis autour d'une table avec l'enseignante Matériel : Boîte, cubes rouges et bleus, bandes blanches pour que les élèves représentent les cubes, stylos de couleur rouge et bleue, bande numérique Description : L'enseignante mettait dans la boîte des cubes un à un. Les élèves avaient des bandes où ils dessinaient un rond pour chaque cube mis dans la boîte. D'abord l'enseignante mettait des cubes rouges et les élèves dessinaient des ronds rouges et écrivaient ce nombre sous les ronds, ensuite l'enseignante mettait des cubes bleus, les élèves dessinaient des ronds bleus et écrivaient le nombre de cubes bleus. Ensuite l'enseignante demandait le nombre de cubes rouges, le nombre de cubes bleus et le nombre total de cubes qui étaient dans la boîte. Les élèves avaient aussi une bande numérique personnelle où ils entouraient le nombre global de cubes.

Dans séance *n*, les élèves écoutaient les sons et dénombraient au fur et à mesure. Le registre convoqué est essentiellement le registre auditif. Lorsque les élèves avaient un moment d'inattention, ils n'avaient plus de moyen pour rattraper le dénombrement. Dans le cas de la séance *n+3*, les registres convoqués sont l'auditif, le gestuel et le scriptural. La correspondance entre un son et un dessin permet aux élèves de garder trace même si certains se sont trompés.

L'enseignante a pris conscience de la différence essentielle entre la séance *n* et la séance *n+3* trois ans après. Elle nous dit: « *Là je me rends compte que la phase que j'ai faite avec les nouveaux élèves de dessiner me paraît importante là je ne l'ai pas faite avec ces élèves j'ai passé directement, dessiner les jetons de deux couleurs différentes c'est quand même important.* » Et un peu plus loin : « *Ce qui a changé par rapport à cette situation c'est le passage à la symbolisation, oui quand ils tracent* ». L'enseignante a identifié un savoir professionnel acquis pendant notre dispositif de formation-recherche dans le fait de proposer des situations qui permettent aux élèves de passer à la symbolisation puisque cela est essentiel pour les élèves mais aussi en tant qu'outil d'observation du travail de l'élève (la double valence des ostensifs).

Dans ce cas, le milieu matériel constitué par la boîte, les cubes, les sons a évolué en un milieu hybride (le même matériel plus les dessins tracés et les nombres écrits en chiffres). Les signes-dessins tracés par les élèves sont des signes iconiques car proches des objets réels. Ce changement a permis de faire évoluer aussi les attentes par rapport aux objets de savoir. D'une part, de nouveaux enjeux de savoir (autres que le dénombrement) ont pu être proposés tels que les problèmes additifs (addition, soustraction, relation partie-tout). D'autre part des objets en train d'être acquis ou anciens (comme le dénombrement) ont pu être retravaillés à nouveau. Le changement de contrat didactique est devenu possible car le milieu hybride comporte non seulement les objets réels mais ces signes qui font mémoire et sur lesquels on peut revenir, soit pour retravailler, soit pour valider ce qu'on a fait.

IV - CONCLUSION : CE QUE LES EXEMPLES NOUS APPRENNENT

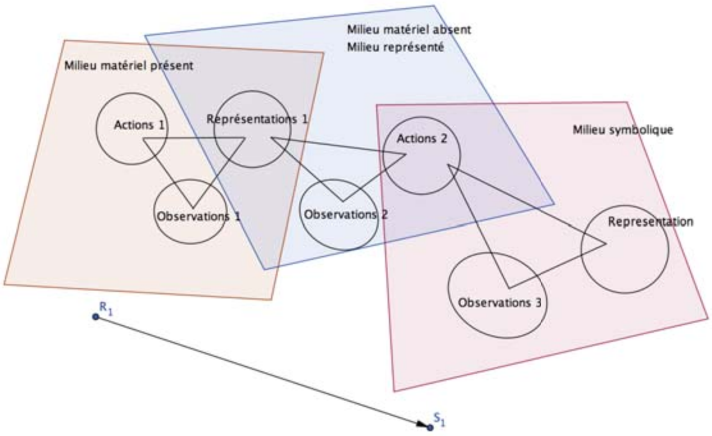
Notre point de départ a été le fait que le recours au concret et à la manipulation est vu comme une priorité et un leitmotiv dans la justification du choix des situations proposées aux élèves handicapés ou en difficulté, situations qui sont souvent le plus simplifiées possibles. Or la manipulation ne suffit pas pour faire des mathématiques et l'importance de la dimension sémiotique de l'activité mathématique a été maintes fois mise en évidence par divers chercheurs.

Le premier exemple montre que le retour à la manipulation mis en place par l'enseignante ne résout pas les difficultés des élèves qui n'ont pas de problème pour faire le partage en parts égales de la bande de carreaux ou de l'ensemble de jetons. L'écart est paradoxal entre la représentation de l'enseignante par rapport aux difficultés de conceptualisation des élèves sourds et la demande pressante de symbolisation « abrupte » sans consigne explicite dans ce sens. Le résultat de ce paradoxe est bien que les élèves se trouvent en difficulté, n'arrivent pas à entrer dans les attentes de l'enseignante et donnent des réponses induites par celle-ci. Le passage par un « moment iconique » et l'explicitation des attentes auraient pu être des facteurs importants pour que ces élèves puissent entrer dans le travail souhaité mais ceci serait à vérifier.

Le deuxième exemple nous a permis de mettre l'accent sur les malentendus sémiotiques entre enseignante et élèves. Tous racontent une histoire à propos de ce qui fait signe dans la notation « ½ » mais l'histoire n'est pas la même pour l'enseignante et les élèves. Pour ceux-ci, cette notation reste proche de l'action (une bande-unité partagée en deux parts égales) tandis que pour l'enseignante cette fraction code une relation « partie-tout ». Dans ce cas, le signe n'est pas le même étant donné que les interprétants sont différents par rapport au representamen « ½ ». Le malentendu sémiotique peut être pris comme un décalage entre interprétants du signe.

Le troisième exemple montre l'inventivité sémiotique des élèves face à un problème de preuve. Cette inventivité s'appuie dans notre cas sur l'hybridité des systèmes sémiotiques constitués par des éléments qui font signe dans des registres variés. Même si les attentes de l'enseignant correspondent à la preuve algébrique, et dans ce sens il y a une réduction de l'épaisseur sémiotique, les parcours sémiotiques des élèves doivent être pris en considération. Ces parcours sémiotiques, de formation, de traitement ou de conversion de représentations sémiotiques sont consubstantiels au travail mathématique de l'élève et se déroulent relativement aux objets, aux actions et aux observations des différents milieux auxquels les élèves sont confrontés. L'évolution de ces différents milieux – du milieu matériel à un milieu hybride ou un milieu symbolique – peut être une condition favorable pour aller vers la formalisation, la généralisation et la démonstration.

Un schéma de ces parcours pourrait être donné par :



Le travail mathématique de l'élève, comme le dit Chevallard, est constitué par une panoplie d'instruments sémiotiques qui lui permettent de mettre en œuvre des techniques (et plus généralement des praxéologies) pour accomplir différents types de tâches en lien avec différents milieux, ce qui constitue la situation mathématique pour l'élève. Ces milieux, et même le milieu matériel, portent en eux une sémioticité qui est virtuelle et va s'actualiser dans le travail. Qu'est-ce qui fait signe dans tel milieu pour tel élève ? Ce qui fait signe peut être donné non seulement par les actions sur le milieu mais aussi par les observations. Selon Peirce, le sens du signe est donné par la mise en relation de l'objet et du représentamen par l'interprétant dans des situations, à travers actions, observations et interprétations. Le rôle de l'action est essentiel dans le travail mathématique de l'élève, il a été maintes fois souligné dès les travaux de Piaget. Le rôle de l'observation aussi, mais nous voulons insister sur cet aspect. L'observation nous semble être un levier dans le travail de l'élève, et il ne s'agit pas seulement d'observations « naturalistes ». Il s'agit aussi de favoriser l'« apprendre à observer » comme moyen de valoriser la dimension sémiotique du travail mathématique : ce qui est propice à notation et concerne l'observation. C'est cela qui est indiqué dans notre schéma.

Les parcours sémiotiques commencent dès la manipulation matérielle, et les processus de signification sont des processus dynamiques où les signes sont en mouvement, comme l'indique Peirce qui ne distingue pas penser et signifier. Ces parcours sémiotiques évoluent et il incombe à l'enseignant de proposer d'autres milieux pour que la dialectique absence-présence puisse être un levier pour le travail mathématique de l'élève. Les objets matériels devenant absents, ce sont les représentamen-signes qui deviennent à leur tour des objets de l'activité mathématique. Les milieux « hybrides » deviennent alors les milieux pour l'action, pour l'observation, et pour ce qui peut advenir en tant que signe dans un processus d'interprétation.

Ces milieux « hybrides » peuvent ensuite devenir des milieux symboliques, des milieux condensant les processus interprétatifs antérieurs. Les recherches épistémologiques de Serfati (2005) sur le symbolisme mathématique montrent que l'avènement de l'écriture symbolique mathématique a été à l'origine d'une révolution dans les modes de pensée mathématique et dans la création de nouveaux objets mathématiques. Les difficultés du passage au symbolisme mathématique ne doivent pas être sous-estimées mais peuvent être prises en compte dans la conception des situations (voir un exemple pour les élèves en difficulté dans le travail de Giroux (2008)).

Dans nos exemples, et c'est pour ça que nous avons pris en compte cette dimension dans la sémiotique de Peirce, le mode de renvoi à l'objet apparaît comme très important, notamment lorsque les élèves doivent représenter les manipulations ou raconter les actions. La fonction du signe en tant qu'icône est importante par la ressemblance (en dépit des différences) entre objet et représentamen. Le moment « iconique » semble être un moment du processus interprétatif dans le cas du travail mathématique. Sans parler en ces termes, Serfati (2009) indique que : « *La reconnaissance visuelle d'une certaine permanence du symbolisme, comme immédiate, et libérée, dans un premier temps tout au moins, des nécessités de sens, est ainsi une conception épistémologiquement essentielle. Elle se range au registre de la synthèse, mais d'une synthèse particulière, synoptique.* » (p.1205) Telle notation mathématique peut raconter des histoires différentes pour tel élève, et des représentations intermédiaires (comme celle que nous avons vu dans l'exemple 3) peuvent être une étape dans le processus de symbolisation. Outre la dialectique entre présence/absence, une deuxième dialectique nous semble aussi à l'œuvre : celle entre connu/inconnu. Nos exemples ne nous permettent pas de montrer en acte cette dialectique mais les malentendus sémiotiques que nous avons observés peuvent bien être compris comme le difficile passage entre ce qui est observable et connu, et ce qui est inconnu ou n'est pas observable. Laisser advenir une certaine inventivité sémiotique peut être une étape importante pour l'élève si l'enseignant valorise ces « inventions » dans la classe, ce qui renvoie au rôle de l'enseignant et aux savoirs professionnels à ce propos.

Le quatrième exemple montre comment une enseignante a pris conscience de l'importance de la dimension sémiotique dans le travail mathématique de l'élève, même s'il est en difficulté. Cette enseignante est allée au-delà de la manipulation comme seule proposition et justification des situations proposées à l'élève, et des savoirs professionnels ont été construits. Ces savoirs, entre autres, sont relatifs au choix et à la gestion des situations à proposer aux élèves, des situations qui tiennent compte de la représentation, non seulement comme mémoire mais aussi comme moyen intrinsèque du travail mathématique de l'élève. Par ailleurs, ces milieux hybrides deviennent des lieux d'observation pour l'enseignant du travail de l'élève et de l'élève pour son propre travail et pour son évolution. La double valence des ostensifs apparaît donc pour l'élève et pour l'enseignant : ces signes permettent de faire mais aussi de voir ce que l'on fait.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARZARELLO F. (2006) Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking, 267–299.

ASSUDE T. & TAMBONE J. (2016). Épisodes biographiques d'une élève dyslexique relatifs à la résolution d'un problème mathématique. *Recherche en Education, 24*, 147-163.

ASSUDE T., TAMBONE J. & VERILLON A. (2014). Quels savoirs professionnels en mathématiques pour des enseignants de CLIS ? *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 65, 141-150.

BALACHEFF N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

BARTOLINI-BUSSI M. & MARIOTTI M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd edition) (pp. 746-783). New York: Routledge, Taylor and Francis.

CONFÉRENCE 1

BLOCH I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. Étude d'une progression sur la multiplication en SEGPA. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'ère nouvelle*, 41, 91-113.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19-1, 77-124.*

BROUSSEAU G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, XXX-2, 241-277.

BUISSON F. (1911). Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Paris : Hachette.

CHEVALLARD Y. (1994). Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Revue SKOLE*, 1, 51-81.

CONNE F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, et regarder ce que ça donne. In F. Conne & G. Lemoyne (éds.). *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 31-69). Montréal : Presses Universitaires de Montréal.

DOUAIRE J., ARGAUD H-C., DUSSUC M-P. & HUBERT C. (2003). Gestion des mises en commun par les maîtres débutants. In J. Colomb, J. Douaire, R. Noirfalise, *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse des pratiques enseignantes* (pp.53-69). Lyon : INRP.

DROUHARD J-P. (2007). *Epistémographie*. Projet de Note de Synthèse pour l'HDR (non publié).

DROUHARD J-P. (2012). *L'épistémographie. Mise au point d'un outil au service de la didactique*. Actes du Séminaire national de Didactique des Mathématiques, pp.129-133.

DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

DUVAL R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Bern : Peter Lang.

ERMEL (1997), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Paris : Hatier.

ERMEL (1999), *Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve au cycle 3*. Paris : INRP.

EVERAERT-DESMEDT N. (1990), *Le processus interprétatif. Introduction à la sémiotique de Ch.S. Peirce*. Liège : Mardaga.

GIROUX J. (2008). Conduites atypiques d'élèves du primaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 28 (1)*, 9-62.

HELAYEL J. & CAUSSE-MERGUI I. (2011). *100 idées pour aider les élèves « dyscalculiques » et tous ceux pour qui les maths sont une souffrance*. Paris : Editions Tom Pousse.

HERSANT M. (2008). « Problèmes pour chercher ». Des conduites de classe spécifiques. *Grand N*, 81, 57-75.

HERSANT M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3 : vers la preuve en mathématiques.* Habilitation à diriger des recherches, Nantes : Université de Nantes.

HORVAIS J. (2012) *Qu'apprend-on en IMPro ? Les apprentissages proposés aux adolescents déficients intellectuels dans les IMPro : quels choix, quelles pratiques, pour quoi faire ?* Thèse de l'université de Lyon 2, Lyon. http://fr.calameo.com/read/00094958849ac565104ba

NEVEU F. (2011). *Dictionnaire des sciences du langage* (2ème édition). Paris : Armand Colin.

OTTE M. (2005). *Mathematical epistemology from a peircean point of view*. Utrecht : PME.

PEIRCE C.S. (1978). *Écrits sur le signe*. Paris : Seuil.

PRESMEG N., RADFORD L., ROTH W. & KADUNZ G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Switzerland: Springer.

RADFORD L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132- 150.

RADFORD L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 405-422.

SERFATI M. (2005). *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris : Pétra.

VERGNAUD G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2, 133-170.