

DE LA SITUATION-PROBLÈME À L'ANALYSE DIDACTIQUE : EXEMPLE DE LA CONSTRUCTION DU CÔNE EN FORMATION INITIALE DES M1

Françoise JORE

Maître de Conférences, Université Catholique de l'Ouest - Angers
Equipe PESSOA UCO
jore@uco.fr

Isabelle TRIN-DAGUE

Formateur, ISFEC IND-E -Angers
i.dague@ind-esperance.org

Résumé

Dans les séances de géométrie dans l'espace pour les étudiants de M1 du Master MEEF, parcours premier degré, une séance de construction de cône est proposée. Il s'agit ensuite de faire une analyse didactique détaillée de la situation avec les étudiants. Les concepts didactiques peuvent alors être un outil d'analyse, qui permet de mieux comprendre certains éléments du déroulement de la séance, dans le but d'un transfert dans des activités pour la classe mais également de favoriser l'appropriation des connaissances et compétences mathématiques en jeu dans la construction demandée. Celles-ci sont nouvelles pour une majorité d'étudiants, ce qui va favoriser du point de vue du formateur la mise en œuvre d'une « stratégie d'homologie-transposition » (Kuzniak, 1994) ou plus précisément une « stratégie d'homologie enrichie par des réflexions d'ordre didactique », (Celi & Jore, 2014). Ce texte explicitera l'analyse mathématique et didactique de la situation proposée, proposera quelques résultats de mises en œuvre de cette séance, et mettra en évidence les divers concepts didactiques pouvant être travaillés avec les étudiants dans le cadre de cette activité.

Si la formation des professeurs des écoles a évolué ces dernières années en France, notamment suite à la nécessité d'obtenir un master, il reste un problème constant pour les formateurs : optimiser le peu de temps dont ils disposent pour former les étudiants, à la fois sur le plan mathématique et didactique, les préparer à obtenir le concours de recrutement de professeur des écoles, mais aussi à être enseignant ; l'expérience nous incitant à penser que les deux ne sont pas nécessairement liés. C'est dans cet esprit que s'insère ce texte, à la suite des communications à la COPIRELEM sur l'utilisation de pliages et de constructions à la règle et au compas (Jore, 2013), ou de la règle à bords parallèles (Celi & Jore, 2014), en formation des M1. Il s'agit cette fois d'exploiter une autre situation : la construction d'un cône.

La consigne donnée aux étudiants est simple : « Vous devez construire un cône dont la base a un rayon de 6 cm et de hauteur 8 cm ». Les lecteurs qui ne sont pas familiers de cette situation pourront lire directement une solution en annexe.

Remarque. Un problème se pose quant à l'utilisation du mot patron. Celui-ci est sans aucune difficulté utilisé pour les polyèdres. Il s'agit d'une figure plane en un seul morceau qui, par pliage, va permettre de construire le solide attendu, sans trou ni recouvrement. Pour le cône, il faudra accepter que le contact entre les deux éléments (disque pour la base du cône et portion de disque pour la surface latérale), ne se fasse qu'en un seul point. Du point de vue théorique, puisqu'il y a un point de contact, on peut considérer qu'il n'y a qu'un seul morceau. Bien sûr, du point de vue pratique, c'est un plus compliqué au moment du découpage... L'expression « représentation plane » étant trop vague parce qu'elle recouvre différents types de représentations, et n'ayant pas trouvé de terme spécifique pour le cône ou le cylindre par exemple, nous avons choisi de garder ce terme de patron pour le cône.

I - POUR QUI ? POUR QUOI ?

1 Le contexte

La population qui nous intéresse est celle des futurs professeurs des écoles, dans leur première année de formation en Master, l'année où ils présentent le concours de professeur des écoles.

1.1 Une population hétérogène, peu scientifique

Ces étudiants ont des parcours très variés, puisqu'ils peuvent avoir passé un diplôme à Bac + 3 dans n'importe quel domaine, voire pas de diplôme du tout pour certains cas particuliers. Certains peuvent avoir fait des suppléances, allant de quelques semaines à quelques années. Certains ont suivi en licence des enseignements de formation préprofessionnelle aux métiers de l'enseignement, avec ou non des stages en établissement scolaire, en école ou ailleurs. Mais la différence la plus significative pour ce qui nous intéresse ici est leur niveau de connaissances et de compétences en mathématiques, et plus particulièrement en géométrie dans l'espace. Si quelques-uns d'entre eux sont titulaires d'un baccalauréat puis d'une licence scientifique, ils sont peu nombreux. La plupart ont fait très peu de mathématiques depuis le lycée, parfois même déjà au lycée, et quasiment jamais de géométrie après leur baccalauréat. Une difficulté se pose donc pour le formateur s'il veut proposer à tous ses étudiants une activité qui permette de travailler ensemble, sans que les uns s'ennuient (parce qu'elle serait trop simple pour les scientifiques), ni que les autres soient perdus (parce qu'elle serait trop complexe pour les moins armés en mathématiques).

1.2 Des objectifs multiples dans un temps limité

L'objectif de cette première année de master est double : permettre aux étudiants de réussir le concours de recrutement de professeur des écoles, c'est leur préoccupation majeure, mais aussi de se former pour être enseignant, ce qui est surtout la préoccupation des formateurs. Ces deux objectifs ne sont pas toujours faciles à faire cohabiter, certaines questions du concours étant parfois loin des problèmes du terrain. Proposer des activités qui permettent de faire les deux simultanément est alors le travail du formateur, d'autant plus que le temps qui lui est imparti est souvent assez limité.

2 Une certaine idée de la formation

La stratégie de formation qui répond à ces objectifs multiples relève de plusieurs modèles. Nous reprenons ici la classification de Kuzniak (Kuzniak, 1994) pour décrire les différents aspects de notre situation de formation.

2.1 Stratégie culturelle

Dans le cadre de la préparation du concours, il s'agit avant tout de rendre l'étudiant capable d'effectuer un patron de cône. Il y a là une connaissance mathématique qu'il faut construire, car elle est inexistante chez la plupart des étudiants, même les scientifiques. La stratégie utilisée peut donc être d'abord de ce point de vue considérée comme culturelle, du fait que : « *Les stratégies culturelles [...] privilégient l'accroissement des connaissances dans le domaine mathématique sans préjuger de la mise en œuvre opérée dans les classes par les étudiants [...] Ces stratégies intègrent avant tout le savoir qui fait l'objet de tous les efforts des formateurs : les mathématiques* » (Kuzniak, 1994, p. 47).

2.2 Stratégie basée sur l'homologie

Là où nous nous différencions de stratégies seulement culturelles, c'est que nous nous soucions de la mise en œuvre des connaissances mathématiques dans les classes par les étudiants. Il s'agit donc en partie d'une situation d'homologie : « *Stratégie où le professeur utilise (ou tente d'utiliser) un mode de transmission identique à celui qu'il souhaite voir utiliser par ses étudiants lorsque ceux-ci enseignent dans les classes* (Kuzniak, 1994, p. 51). Le modèle que nous retenons est le modèle constructiviste ou socio-constructiviste. Il s'agit donc de faire vivre aux étudiants une situation mathématique qui soit une situation-problème, nous reviendrons un peu plus loin sur cet aspect, dans le cadre d'un travail de

groupe qui doit favoriser des interactions permettant ainsi à l'élève de faire avec les autres ce qu'il n'aurait pas pu faire seul.

2.3 Stratégie basée sur la transposition

« Les stratégies basées sur la transposition se différencient radicalement des précédentes par l'insistance qu'elles accordent à la transmission d'un savoir de référence. Elles se rapprochent ainsi des stratégies culturelles mais prennent en compte la professionnalisation des étudiants à la différence de ces dernières uniquement fixées sur les connaissances mathématiques. » (Kuzniak, 1994, p. 53). Parmi elles, Kuzniak distingue : « les stratégies basées sur l'homologie enrichies par la didactique » (Kuzniak, 1994, p. 54). C'est dans ce type de stratégies de formation que nous nous inscrivons, dans la mesure où nos objectifs sont multiples : développer des connaissances et compétences mathématiques (autour du patron de cône), mais aussi pédagogiques et didactiques, dirigées vers la troisième partie de l'écrit de mathématiques du concours de professeur des écoles mais aussi vers la formation professionnelle de ces futurs enseignants. Nous développerons dans la suite les aspects pédagogiques et didactiques qui vont pouvoir être travaillés à partir de cette situation de formation.

II - ASPECTS MATHÉMATIQUES

Nous allons dans cette partie présenter la première partie de la séance.

1 Construction d'une pyramide

À la séance précédente, un autre patron est travaillé : celui d'une pyramide. La consigne est : construire une pyramide à base carrée de 15 cm de côté et de 10 cm de hauteur. Il n'est pas précisé dans l'énoncé si la pyramide doit être droite. C'est en général cependant ce que les étudiants construisent, au moins dans un premier temps. Les groupes les plus rapides sont ensuite invités à construire un « coin de cube » respectant les mêmes contraintes, c'est-à-dire une pyramide à base carrée dont le sommet se projette perpendiculairement sur un sommet de la base. En dernière intention, quand un groupe résout rapidement ces deux problèmes, un dernier défi est proposé : un point A est marqué de manière aléatoire sur la base carrée de 15 cm de côté sur une des pyramides construites précédemment et il s'agit alors de construire la pyramide à base carrée de 15 cm de côté et de hauteur 10 cm dont le sommet se projette perpendiculairement sur le point A.

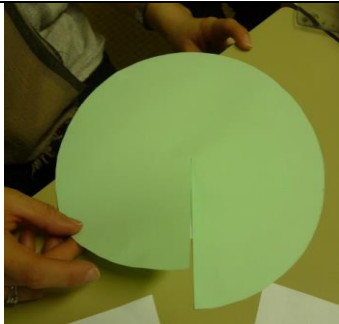
La construction de la première pyramide permet de faire émerger une difficulté : comment obtenir la bonne hauteur ? Elle permet en particulier de faire la distinction entre la hauteur de la pyramide et le côté d'une face triangulaire, ou la hauteur d'une face triangulaire. Nous ne détaillerons pas cette séance mais nous comprenons ainsi que, lorsque les étudiants vont ensuite travailler sur le cône, la différence entre hauteur du cône et longueur des segments de génératrices qui délimitent le cône doit être facilement repérée.

2 Construction d'un cône

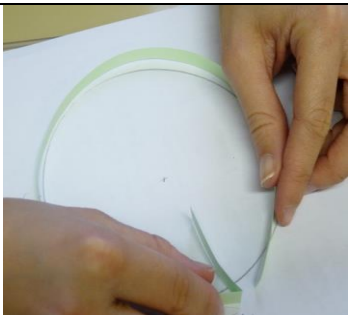
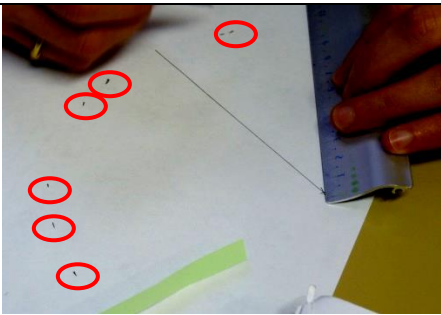
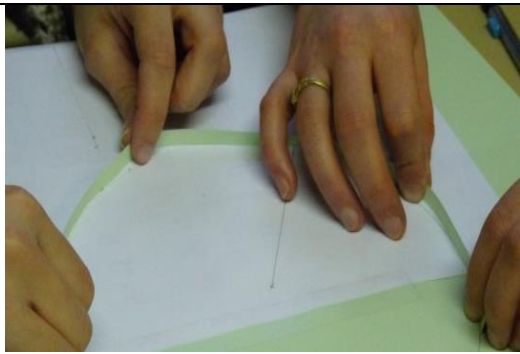
La séance sur le cône commence par la consigne : « Vous devez construire un cône dont la base a un rayon de 6 cm et de hauteur 8 cm ». Les étudiants sont installés par groupes de 3 ou 4. Du matériel est disposé sur une table au centre de la salle : feuilles de papier A3, scotch, ciseaux, pour éviter que le matériel ne soit un souci.

2.1 Un premier patron par tâtonnement

Très vite, les groupes se mettent au travail, avec des productions variées. Pour une partie des groupes, le premier enjeu est de prendre conscience que le patron va être constitué d'un disque et d'une portion de cône, ce qui n'est pas évident pour tous *a priori* !

		 
Groupe 1 Dessin d'un cône en perspective.	Groupe 2 Rouler la feuille pour se donner une idée de la forme du patron.	Groupe 3 Inspiration chapeau chinois : tracer un cercle, découper, faire une fente jusqu'au centre et superposer.

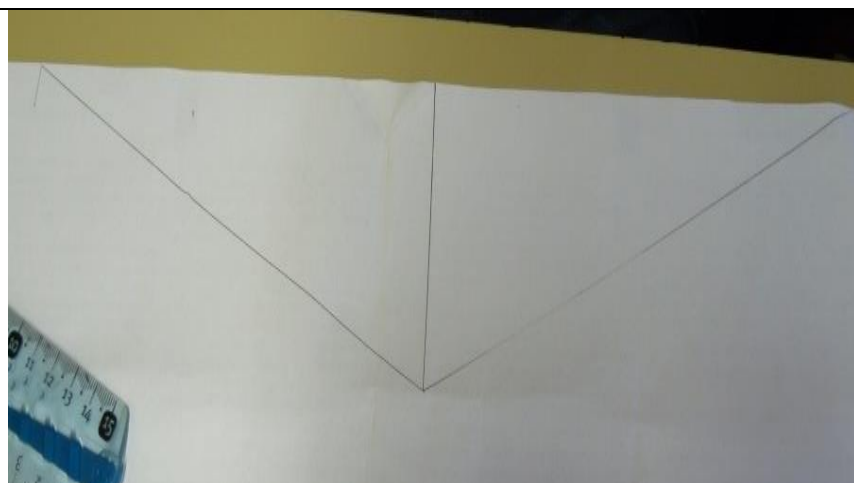
Pour certains, le nombre de connaissances non disponibles¹ est assez important. Prenons l'exemple de ce groupe 4 :

		
Ils ne sont pas à l'aise dans les calculs et il faut leur suggérer des outils pour reporter une mesure.	Bien sûr, ils savent que les points d'un cercle sont tous à la même distance du centre mais quand il s'agit de placer des points à 10 cm du centre, le compas n'est pas l'instrument qui leur vient à l'esprit... ²	Avec ce groupe, l'objectif de travail sur la proportionnalité entre longueur de l'arc et mesure de l'angle sera momentanément laissé de côté au profit d'une réflexion sur le cercle.

Petit à petit, les groupes construisent le cône attendu, comme le montre cet exemple pour le groupe 5 :

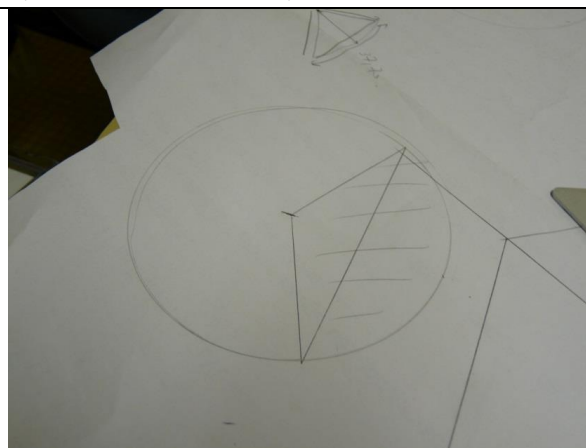
¹ Robert (1995, p. 12) définit ainsi les connaissances mobilisables et les connaissances disponibles : « Nous distinguons pour les élèves : le fait d'utiliser des connaissances indiquées ; le fait de penser à utiliser des connaissances alors que rien n'est indiqué à leur propos. Dans le premier cas, nous dirons que les élèves savent mobiliser leurs connaissances (par exemple employer un théorème ou une technique clairement signalés). Nous parlerons de connaissances mobilisables. Dans le second cas, nous parlerons de connaissances disponibles. Cela ne peut être le cas que si les documents fournis aux élèves ne sont pas extraits d'un chapitre du manuel ».

² Les cercles ont été ajoutés pour montrer le travail des étudiants qui placent un à un une dizaine de points à 10 cm du centre avant de se rendre compte qu'ils auraient pu utiliser le compas !



Étape 1 : « On trace un cercle de rayon 6 cm. »

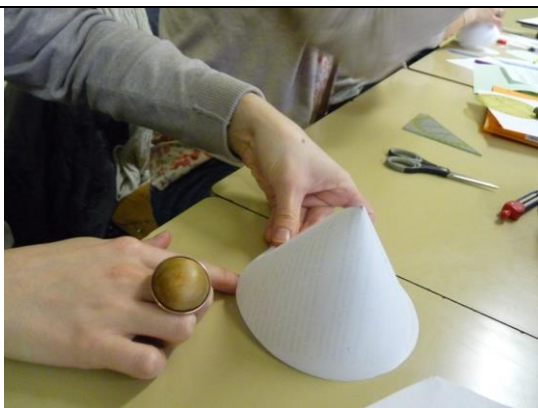
Étape 2 : « On calcule le périmètre du cercle. Ensuite on trace un triangle de base le périmètre du cercle de 6 cm et de hauteur 8 cm. On découpe mais cela n'aboutit pas. »



Étape 3 : « On fait une petite maquette de cône, on découpe pour le poser à plat et on se rend compte que dans le patron, il y a un arrondi. »

Étape 4 : « On cherche à connecter le périmètre du cercle de 6 cm et l'arrondi qu'il doit y avoir dans le patron. »

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle dont les côtés mesurent 6 cm et 8 cm, on trouve 10 cm et on trace un cercle de rayon 10 cm. On se rend compte qu'il faut « enlever » une partie de ce disque. »



Étape 5 : « Par tâtonnement, on enlève en découpant une partie du disque pour que le « cône » s'ajuste avec la base du disque de rayon 6 cm. »



Étape 6 : « On mesure avec un rapporteur l'angle sur la partie que l'on a découpée et on trouve 146 degrés. »

2.2 Un second patron par calcul

Au fur et à mesure que les groupes ont obtenu un patron par tâtonnement, ils sont invités à en obtenir un directement en déterminant l'angle du secteur de disque *a priori*. Même si la plupart des groupes met en œuvre la méthode décrite en annexe, il est intéressant de repérer quelques démarches qui permettent d'obtenir le résultat, et qui ne sont pas forcément celles attendues *a priori*. Elles sont favorisées par les valeurs numériques choisies, et en particulier le rapport simple ($\frac{6}{10}$) entre le rayon et par conséquent le périmètre des deux cercles qui entrent en jeu.

Le groupe 6, par exemple, construit un tableau de proportionnalité, qui n'est pas celui attendu *a priori* :

Rayon (en cm)	10	6
Périmètre du cercle (en cm)	$2 \times \pi \times 10$	$2 \times \pi \times 6$

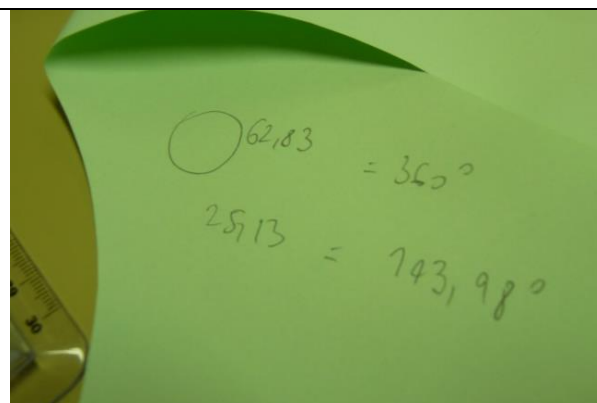
puis formule ainsi son raisonnement : « pour passer de 20π à 12π , il y a une baisse de 40 %. Il faut donc enlever 40 % du disque de rayon 10 cm. 10 %, c'est 36° , donc 40 %, c'est $4 \times 36^\circ = 144^\circ$ ».

Reprenons le groupe 5 cité précédemment et regardons la suite de leur travail. Ce groupe travaille également sur ce qu'il faut enlever, mais de manière un peu différente du précédent.



Étape 7 : « On cherche à retrouver ces 146° par le calcul.

Suite à la remarque d'un autre étudiant, on cherche à faire le lien avec 360° ».



Étape 8 : « Le périmètre du cercle de rayon 10 cm est d'environ 62,8 cm.

62,8 cm cela correspond à 360° .

La longueur de l'arc de cercle que l'on a enlevé est : $62,8 - 37,7$ (valeur approchée du périmètre du cercle de rayon 6 cm), c'est-à-dire 25,1 cm.

25,1 cm, cela correspond à environ 144° .

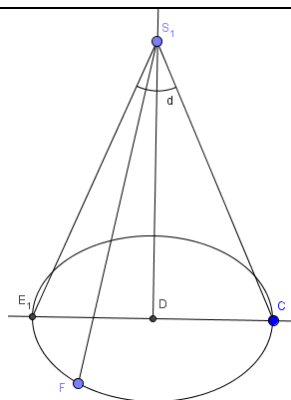
Ça marche on avait mesuré au rapporteur 146° et par le calcul, on trouve 144° »

2.3 Mise en commun

Quand tous les groupes ont obtenu un patron de cône, avec ou sans calcul de l'angle qui détermine la portion de disque, une phase de mise en commun des procédures et de mise en évidence de la procédure experte va être faite. Elle est l'occasion d'insister sur plusieurs aspects.

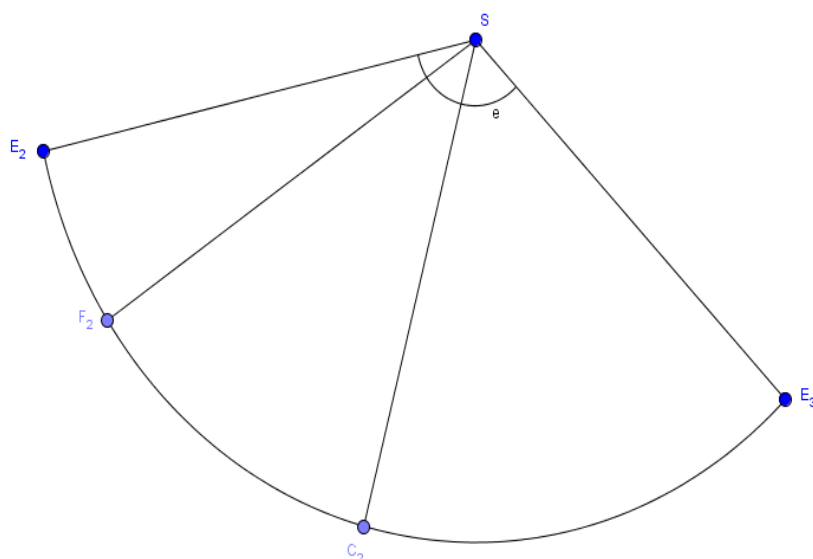
Le premier d'entre eux est bien sûr l'élément qui a posé le plus de difficultés aux étudiants : le repérage de la proportionnalité entre la longueur de l'arc et l'angle qui intercepte cet arc sur un cercle, en faisant observer l'effet sur la longueur de l'arc si on prend le disque entier, ou la moitié, ou le quart. Il s'agit de faire verbaliser que prendre un quart de cercle, c'est aussi prendre un quart de l'angle, mais aussi un quart de la longueur de l'arc. Cette relation est alors certes formalisée dans un tableau de proportionnalité (cf. annexe), mais aussi sous la forme d'une égalité qui met en évidence cette proportionnalité : pour un cercle de rayon fixé R , la longueur L en centimètres de l'arc α intercepté par l'angle est $L = R\alpha$ si α est exprimé en radians et R en centimètres. Cette formule a peu d'intérêt du point de vue pratique dans la suite puisque les angles sont rarement exprimés en radians, mais elle permet de mettre en évidence la linéarité de la relation, pour peu qu'un travail ait été fait sur la proportionnalité et les fonctions linéaires par ailleurs.

Un second aspect est mis en évidence, qui est la nécessité dans cet exercice de travailler sur différents types de représentations planes du cône, et de faire des liens entre ces différentes représentations. On utilise en général un dessin en perspective cavalière pour rassembler les informations dont on dispose. Sur cette représentation en perspective, on va pouvoir mettre en évidence un triangle rectangle qui permettra de déterminer la longueur des segments de génératrices du cône. On a alors implicitement superposé une vue de face ou, si on préfère, une vue en coupe du cône, selon un plan perpendiculaire à la base et qui passe par l'axe de symétrie du cône. Dans un second temps, il faudra obtenir le patron du cône, qui est une autre forme de représentation plane du cône. Une des difficultés est de faire le lien entre ces trois types de représentations, voir sur chacune d'elles les segments de génératrices, ne pas voir sur le morceau de patron l'angle au sommet qui apparaît sur la représentation en perspective cavalière (les étudiants, au moment de déterminer l'angle de la portion de disque qui va constituer la partie non plane du cône, notée e sur la figure ci-dessous à droite, pensent en première intention que cet angle est égal à l'angle, noté d ci-dessous à gauche, qui apparaît au sommet du cône sur la perspective cavalière. Certains se lancent dans des calculs de trigonométrie pour essayer de le déterminer).



Superposition de deux représentations :

- Une perspective cavalière du cône
- Une coupe selon un plan vertical passant par l'axe du cône.



Représentation plane d'un morceau du patron de cône.

III - SYNTHÈSE DIDACTIQUE

Dans la première partie de la séance, les étudiants ont construit un patron de cône puis le formateur a explicité ou fait expliciter une procédure experte pour résoudre le problème. La seconde partie va consister en une analyse didactique de cette première partie. Le postulat est que cette analyse peut permettre simultanément de renforcer les connaissances mathématiques travaillées précédemment mais aussi de favoriser la construction de concepts didactiques utiles pour les professeurs des écoles.

1 Les difficultés de la situation

Une première entrée est celle des difficultés de la situation.

1.1 Une connaissance non disponible³

La première de ces difficultés est la proportionnalité entre la longueur de l'arc de cercle et l'angle qui l'intercepte sur le cercle. D'une part, il est intéressant de faire repérer comment certains groupes ont exploité de manière implicite cette proportionnalité (groupe 6, par exemple), sans être capables de la verbaliser. Les étudiants peuvent alors prendre conscience que reconnaître une situation de proportionnalité n'est pas nécessairement un préalable à sa résolution. De ce fait, l'institutionnalisation est indispensable : c'est elle qui permet de passer de l'implicite à l'explicite, étape nécessaire à défaut d'être suffisante pour un réinvestissement de la connaissance.

D'autre part, les différentes étapes que le formateur a mises en place peuvent être explicitées :

- faire émerger cette relation au travers d'un raisonnement du type : si l'angle est deux fois plus grand, la longueur de l'arc de cercle est deux fois plus grande, raisonnement caractéristique de la proportionnalité, très souvent utilisé avec les élèves à l'école ;
- formaliser cette relation dans un tableau ;
- formaliser cette relation par une relation algébrique, et faire le lien entre fonction linéaire et proportionnalité.

L'idée est ici de montrer comment on a multiplié les points d'appui, les cadres en jeu, pour favoriser la construction et la mémorisation de la connaissance visée.

1.2 Multiplicité des concepts en jeu

Une deuxième difficulté est la multiplicité des concepts mathématiques qui entrent en jeu dans cette situation. Une liste, probablement non exhaustive, peut être faite dans un tableau comme le suivant :

Domaines mathématiques	Connaissances	Capacités
Organisation et gestion de données	Proportionnalité	Repérer la proportionnalité entre angle et longueur de l'arc Déterminer une quatrième proportionnelle (Utiliser les pourcentages)
Nombres et calculs	Carrés Racines carrées Nombre π	Calculer avec le théorème de Pythagore : utiliser les carrés et les racines carrées Calculer avec des valeurs exactes/approchées
Géométrie plane	Théorème de Pythagore Cercle Secteur angulaire	Appliquer le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle Utiliser le compas pour tracer des (grands) cercles et des arcs de cercles

³ au sens de Robert (1995, p. 12)

Géométrie dans l'espace	Cône, génératrice Patron Perspective cavalière Coupe	Se représenter l'objet cône dans l'espace Passer de l'espace au plan, du plan à l'espace Passer d'un mode de représentation du cône à un autre
Grandeurs et mesures	Formule de la longueur du cercle Angle Longueur	Appliquer la formule de la longueur du cercle Utiliser le rapporteur pour construire un angle de mesure donnée

Ce tableau met en évidence la complexité, et donc la richesse, de la situation. C'est en outre l'occasion de retravailler avec les étudiants différents domaines mathématiques, et notamment de distinguer celui des grandeurs et mesures et celui de la géométrie : l'angle est plus souvent attaché par les étudiants à la géométrie qu'au domaine des grandeurs. Les concepts de connaissance et de capacité (ou compétence) peuvent également être revus.

1.3 Représentations planes des solides

Une troisième difficulté, déjà signalée, est le fait que plusieurs représentations planes du cône sont nécessaires parce que complémentaires, dans cet exercice, et il faut s'entraîner à passer de l'une à l'autre. Comme toute représentation plane d'un solide, chacune d'elles conserve certaines des propriétés du solide, mais jamais toutes. On peut notamment repérer que :

- La perspective cavalière ne conserve pas toutes les longueurs : les segments [SE] et [SF] par exemple sont représentés par des segments qui ne sont pas de la même longueur.
- Elle ne conserve pas non plus les angles. Si l'angle SDC est facilement reconnu comme un angle droit, l'angle SDF qui en est un aussi est représenté par un angle obtus.
- Sur le patron, certains points apparaissent plusieurs fois (le point E dans l'exemple ci-dessus).

2 Une situation-problème

Une deuxième entrée est celle de la typologie des problèmes. Nous avons annoncé, dans ce texte et aux étudiants, que la situation présentée est une situation-problème, au sens de Arsac & al. (1991). Ce type de situation est souvent conseillé aux étudiants pour leur permettre de faire construire aux élèves des connaissances mathématiques. Il est intéressant d'en étudier les principales caractéristiques, pour que les étudiants puissent en prendre conscience et mieux appréhender leurs effets à partir de l'expérience qu'ils viennent de vivre. Les caractéristiques ci-dessous sont reprises à partir de Arsac & al. (1991, p. 99) et Douady (1986, p. 13) et spécifiées à cet exemple.

2.1 Construire une connaissance nouvelle...

Situation-problème signifie qu'elle a pour fonction :

- de permettre à l'apprenant de construire une (voire plusieurs) connaissance(s) nouvelle(s). Les principales, dans notre exemple, sont :
 1. Le patron d'un cône est constitué d'un disque et d'une portion de disque.
 2. La longueur d'un arc sur un cercle est proportionnelle à l'angle qui intercepte cet arc,
- et de développer une compétence qui leur est associée, construire un patron de cône.

2.2 ... à partir de connaissances anciennes...

Les connaissances sur lesquelles les étudiants peuvent s'appuyer pour construire ces nouvelles connaissances sont :

1. la distinction entre génératrice et hauteur, cette connaissance devant avoir été construite lors de la construction d'une pyramide ;
2. le concept de patron : les étudiants ont déjà eu l'occasion de construire des patrons de polyèdres avant cette séance ;
3. la proportionnalité ;

et nous pourrions citer ici toutes les connaissances apparaissant dans le tableau précédent mettant en évidence la multiplicité des concepts en jeu.

2.3 ... en faisant intervenir des jeux de cadres

Deux cadres au moins sont en interaction permanente dans cette situation : le cadre géométrique des solides et celui des grandeurs proportionnelles.

2.4 Engagement dans la tâche

« L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème. L'élève peut envisager ce qu'est une réponse possible au problème. » (Arsac & al., 1991, p. 99). Avant la séance de construction du cône, les étudiants ont été invités à construire un patron de pyramide sous certaines contraintes. Ils savent ce qu'est un patron et peuvent faire des essais. C'est d'ailleurs ce qui se passe à chaque fois : les étudiants n'hésitent pas à tracer, découper, plier, etc. La consigne est simple et chacun envisage sans difficulté à quoi doit ressembler le résultat attendu, chacun peut s'engager immédiatement dans la tâche.

2.5 Connaissances insuffisantes

« Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème. » (Arsac & al., 1991, p. 99). De fait, même dans le cas le plus favorable où les étudiants envisagent directement le patron comme étant constitué d'un disque et d'une portion de disque, le calcul de l'angle permettant d'obtenir la portion de disque n'est quasiment jamais immédiat.

2.6 Validation autonome

« La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas. » (Arsac & al., 1991, p. 99). En effet, les étudiants savent ce qu'est un cône. Il leur suffit donc de mettre deux petits morceaux de scotch pour vérifier que la forme obtenue est bien un cône d'une part, et de mesurer sa hauteur pour vérifier qu'elle fait bien environ 8 cm, d'autre part. Les groupes qui commencent par tracer un triangle isocèle, comme le groupe 5 par exemple, n'ont pas besoin de l'intervention du formateur pour se rendre compte que « ça n'aboutit pas ». Ces contrôles permettent non seulement d'invalider une conjecture, mais aussi d'enrichir la réflexion en suggérant des pistes nouvelles. En revanche, il faut avouer que c'est parfois le formateur qui doit mesurer devant eux la hauteur du cône pour qu'ils prennent conscience que celle-ci ne mesure pas 8 cm.

2.7 Connaissance adaptée

« La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève. » (Arsac & al., 1991, p. 99). Dans le cas du patron de cône, les connaissances qui ont été citées précédemment sont bien celles qui sont nécessaires pour construire le cône demandé.

3 La théorie des situations

Il ne suffit pas que la situation ait les bonnes caractéristiques pour qu'elle produise des effets, il faut également que la mise en œuvre respecte quelques conditions. Une entrée pour étudier cette mise en œuvre peut être celle de la *théorie des situations* de Brousseau (Briand & Chevalier, 1995, p. 28 et p. 145 à 147). Cette théorie est riche et complexe et il n'est pas question avec les futurs enseignants de tout développer. Les phases de dévolution, action, formulation, validation, institutionnalisation nous paraissent néanmoins être des outils efficaces pour l'analyse et la construction de séances de mathématiques à l'école et méritent donc d'être travaillées avec les étudiants en formation. On peut faire

repérer les différentes phases qui ont eu lieu dans la situation de construction du cône et faire verbaliser les effets, attendus mais aussi effectifs. C'est aussi l'occasion de travailler sur d'autres concepts riches en didactique : les paradigmes géométriques ou la dialectique outil-objet.

3.1 Dévolution

Dans un premier temps, le problème de la construction du cône doit devenir celui des étudiants. Ils doivent en prendre la responsabilité. Cela passe par une acceptation de la tâche à réaliser. Celle-ci ne doit pas leur apparaître trop simpliste ; ce n'est pas parce qu'il faut faire du découpage que le formateur les prend pour des enfants. Les étudiants doivent accepter l'idée qu'en effectuant la tâche, ils vont apprendre quelque chose d'important. Elle ne doit pas apparaître non plus trop difficile. Si le formateur leur donne ce problème, c'est parce qu'il sait qu'ils peuvent le résoudre. L'ambiance dans la classe, le matériel disponible, la résolution lors d'une séance préalable d'un patron de pyramide, sont autant d'éléments, dans le cas présent, qui favorisent la dévolution du problème aux étudiants.

3.2 Action

Très vite, les étudiants sont entrés en action. Un élément constitutif de cette situation d'action est le milieu, ici constitué, entre autres, des autres étudiants et du matériel à disposition. Ce sont les interactions avec toutes les facettes de ce milieu qui permettent à chacun de construire petit à petit une solution au problème.

3.3 Formulation

Il n'y a pas eu de situation spécifique de formulation mise en œuvre dans cette activité, dans le sens où il n'a pas été explicitement demandé aux étudiants d'expliquer à la classe ce qu'ils avaient fait, comment ils l'avaient fait, pourquoi, etc. Mais bien entendu, les étudiants travaillant par groupes, ont discuté, au minimum à l'intérieur du groupe, parfois avec les autres groupes, souvent avec le formateur. On peut donc leur faire repérer le rôle des interactions langagières dans la résolution du problème.

3.4 Validation et paradigmes géométriques

Le travail sur la validation est l'occasion d'un pas de côté vers les paradigmes géométriques. Nous nous appuyons ici sur un tableau extrait de Jore (2006, p. 97) qui définit les paradigmes G1 et G2, construit dans le cadre de la géométrie plane.

	G1 : Géométrie spatio-graphique	G2 : Géométrie proto-axiomatique
Statut du dessin	objet géométrique étudié	représentant d'un objet géométrique théorique
Nature de l'objet géométrique étudié	dessin (réalité spatio-graphique)	objet géométrique théorique défini par une formulation discursive
Type de validation	essentiellement perceptif	uniquement hypothético-déductif
Outils de validation	règle (graduée ou non), équerre, compas, papier calque, papier quadrillé, ...	règles de la logique et théorèmes de la géométrie euclidienne
Nature des expériences	effectives (le plus souvent)	mentales, virtuelles
Constructions	réalisation effective (physique, matérielle) d'un tracé	algorithme d'obtention d'un objet sous contraintes fixées
Instruments de construction	règle (graduée ou non), équerre, compas, papier calque, papier quadrillé, ...	objets et théorèmes de la géométrie euclidienne
Définitions	basées sur la perception et l'exclusion, par opposition	basées sur les propriétés géométriques et l'inclusion, par caractérisation

On a en effet vu apparaître deux types de résolution du problème. Les uns ont fonctionné par tâtonnement (groupe 6, étape 3), ou par découpage d'un rayon, enroulement du disque sur lui-même pour adapter à la base puis découpage pour éviter la superposition (groupe 3). Leur mode de validation est essentiellement perceptif. Ils fonctionnent spontanément dans le paradigme G1. La plupart des groupes ont, dans un second temps, effectué des calculs pour calculer l'angle de la portion de disque. Ils travaillent majoritairement dans G2. L'objet obtenu n'est pas nécessairement plus précis que celui obtenu en travaillant dans G1, mais il n'a plus le même statut. L'objet matériel construit n'est pas l'objet géométrique théorique, il n'en est qu'un représentant. Les validations sont de type déductif. Il est intéressant de faire repérer ces deux paradigmes aux étudiants pour qu'ils en prennent conscience, que ce soit pour se positionner dans le paradigme attendu dans les exercices du concours (en général G2) ou pour qu'ils soient attentifs aux consignes qu'ils proposent aux élèves et aux paradigmes dans lesquels ils leur demandent, trop souvent implicitement, de se situer.

3.5 Institutionnalisation et statut outil-objet

La phase d'institutionnalisation permet d'abord d'explicitier les connaissances construites qui sont restées implicites, ici la proportionnalité entre angle et longueur de l'arc correspondant. Cette explicitation est l'occasion de faire passer la connaissance du statut d'outil (on a utilisé la connaissance pour résoudre le problème) à celui d'objet (quelles sont les caractéristiques de cette relation de proportionnalité ?). Nous utilisons ici ces concepts d'outil et objet au sens de Douady (Douady, 1986, p. 9) : « *Nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait... Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement.* ».

L'institutionnalisation permet également de décontextualiser la connaissance. Ce qui a été construit dans le patron de cône doit pouvoir vivre indépendamment du cône pour pouvoir être réinvesti dans une autre situation.

4 Les variables de la situation

Analyser les marges de manœuvre de l'enseignant et étudier l'effet des choix opérés est indispensable pour améliorer son enseignement et le rendre le plus efficient possible. Le concept de variable, que celle-ci soit didactique ou pédagogique⁴, est pour cela utile et mérite donc également d'être travaillé avec les futurs enseignants. Il fait d'ailleurs souvent l'objet de questions dans la troisième partie du concours de professeurs des écoles.

4.1 Variables didactiques

Par exemple, les valeurs numériques et le rapport entre la hauteur et le rayon de la base du cône sont des variables didactiques. Les valeurs 6, 8 et 10 constituent un triplet pythagoricien. Elles permettent ainsi que la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle, de côtés de longueur 6 cm et 8 cm, soit également exprimée avec un nombre entier de centimètres, ce qui simplifie les calculs ultérieurs. Nous avons montré comment le groupe 6, par exemple, utilise le rapport 6/10 pour enlever une partie du disque de rayon 10 cm afin d'obtenir le patron du cône. Cette proportion simple permet quelques procédures variées qui ne pourraient être mises en œuvre avec une valeur donnant lieu à un nombre rationnel non décimal. Les valeurs sont également choisies pour obtenir un solide suffisamment haut pour que, si les étudiants confondent hauteur et longueur des segments de génératrices qui délimitent le cône, la hauteur obtenue soit significativement différente de 8 cm et que l'on puisse mettre en évidence que le résultat ne correspond pas aux contraintes annoncées.

4.2 Variables pédagogiques

Bien sûr, le formateur a également fait des choix dans la mise en œuvre. Nous pourrions par exemple, détailler avec les étudiants le fonctionnement du travail de groupe, la disposition des tables et du

⁴ Nous reprenons ici la terminologie de Charnay (Charnay, 2003).

matériel dans la classe, etc. Un élément peut notamment être analysé : la construction au préalable d'une pyramide. Si l'intention didactique était de faire repérer la différence entre hauteur et génératrice, il s'agissait également, du point de vue pédagogique, de faire comprendre aux étudiants que la tâche proposée est accessible et pertinente à leur niveau.

5 Des compléments liés au déroulement particulier de cette séance avec ce groupe

Tous les éléments qui ont été cités précédemment peuvent faire l'objet d'une analyse *a priori* de la situation. Il peut être intéressant de compléter ce travail par une analyse *a posteriori*, par exemple du fonctionnement d'un groupe. Cette partie ne peut se faire qu'en fonction de ce qui se passe dans la classe au moment de la séance. Nous avons détaillé précédemment le travail du groupe 4 et nous allons pouvoir sur cet exemple montrer les compléments qui peuvent être apportés à l'analyse précédente.

5.1 Différenciation pédagogique

La différenciation pédagogique est un thème récurrent dans la formation des maîtres, que notre situation va nous permettre d'illustrer. Intéressons-nous à l'attente portée sur le résultat produit par les étudiants. L'objectif de la séance est certes de mettre en place et d'exploiter la proportionnalité entre l'angle et la longueur de l'arc correspondant. Mais nous avons vu comment les difficultés des étudiants du groupe 4 les mettaient loin de cette préoccupation. Pour eux, le travail sur le patron de cône a permis de comprendre quelle était la forme du patron de cône d'une part, et de retravailler sur le cercle d'autre part. Il s'agit là d'un exemple de différenciation pédagogique. La tâche était la même pour tous mais le degré d'exigence, ici le paradigme géométrique de travail attendu, n'était pas le même. Nous considérons que la séance a été positive pour ce groupe, même si nous avons conscience qu'un travail sur le patron de cône devra être repris dans G2 dans le cadre de la préparation au concours.

5.2 Enseignement spiralaire

Aujourd'hui, l'organisation des mathématiques à l'école est très spiralaire. Il s'agit de commencer à travailler sur un thème, de le laisser de côté quelques temps et d'y revenir, plusieurs fois le plus souvent. Un des arguments avancés est que, pendant ce temps, les concepts travaillés mûrissent, et ce qui n'était pas compris à un moment donné va peut-être se développer au hasard d'une autre rencontre, dans un autre thème, parce que les concepts mathématiques ne sont pas isolés mais en interaction. Ici le travail était clairement sur le cône, pas sur le cercle. Celui-ci n'était pas repéré comme une difficulté de l'exercice. Et pourtant, pour ce groupe, c'est certainement là que l'apprentissage a été le plus important. Le cercle et le cône sont bien évidemment liés et le travail engagé sur le cône a en fait développé des connaissances sur le cercle, connaissances qui seront alors maîtrisées la prochaine fois qu'il s'agira de travailler sur le cercle.

5.3 Connaissances disponibles, connaissances mobilisables

On ne peut imaginer que les étudiants de ce groupe 4 ne connaissent pas la définition d'un cercle. S'il leur est demandé d'en tracer un, de désigner le centre, un rayon, s'il leur est demandé ce qu'on peut dire des points du cercle, ils n'auront aucune difficulté. Le cercle est très certainement une connaissance mobilisable pour eux, mais cette expérience a montré qu'elle n'est pas disponible (Robert, 1995, p. 12). Comme beaucoup d'élèves de cycle 3, et peut-être même de cycle 4, ils n'ont pas pensé à utiliser le compas pour placer les points à 10 cm d'un point donné. Ils comprennent, au travers de cet exemple, comment réciter un texte de connaissances, une définition par exemple, ne dit rien de l'appropriation de cette connaissance. C'est seulement quand les élèves sont amenés à utiliser cette connaissance que l'on peut juger de sa maîtrise.

IV - CONCLUSION

Nous avons présenté comment l'activité de construction d'un patron de cône avec des futurs professeurs des écoles en formation initiale, dans le cadre du Master 1 MEEF, peut permettre de développer des connaissances et des compétences mathématiques et didactiques. Dans le débat qui a suivi la

présentation de la communication lors du colloque, le groupe s'est accordé sur le fait que tous ces concepts didactiques pouvaient être abordés si la situation était traitée en fin de formation et qu'ils avaient déjà été travaillés en cours de formation. Dans le cas contraire, il faudra choisir quelques éléments didactiques seulement pour une bonne appropriation des concepts choisis.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARSAC, G. & AL. (1991). *Problèmes ouverts et situations problèmes*, Irem de Lyon.

BRIAND, J. & CHEVALIER, M.-C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Hatier. Paris 1995.

CELI, V. & JORE, F. (2014). Les constructions à la règle à bords parallèles en formation initiale des professeurs des écoles. Pourquoi ? Comment ? Atelier A3.4. pp. 248-265, in *Actes du XXXXI^e colloque COPIRELEM*, IREM de Bordeaux.

CHARNAY, R. (2003). L'analyse *a priori*, un outil pour l'enseignant, in *Math École*, n° 209, disponible à l'adresse : http://www.ssrddm.ch/mathecole/wa_files/209-5_Analyse_20_C3_A0_20priori.pdf

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, in *Recherches en didactique des mathématiques*, n°7.2, pp 5-31, La pensée sauvage.

JORE, F. (2006). *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*, thèse de doctorat, Université Paris 7.

JORE, F. (2013). Analyse d'un dispositif de formation en géométrie plane pour les futurs professeurs des écoles autour de pliages et de constructions à la règle et au compas, Communication C2.8, pp. 197-209, in *Actes du XXXX^e colloque COPIRELEM*, IREM de Nantes.

KUZNIAK, A. (1994). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré, pp. 37-62, in *Actes du XXI^e colloque COPIRELEM*, IREM de Picardie

PARZYSZ, B. (2002). Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Actes du 28^{ème} colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*. Tours. Mai 2001. pp. 9-110. Ed. Presses Universitaires d'Orléans

ROBERT, A. (1995). *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques*. Tome I. Géométrie. Ed. Ellipses.

VI - ANNEXE : CONSTRUCTION DU PATRON DE CÔNE

La base du cône est un disque de rayon $r = 6$ cm. Son périmètre est donc $P = 2\pi r = 12\pi$ cm.

On peut considérer le cône comme engendré par un triangle rectangle tournant autour d'un axe. La hauteur de ce triangle est celle du cône : 8 cm. La base de ce triangle est le rayon du cône : 6 cm. L'hypoténuse de ce triangle nous est donnée par le théorème de Pythagore. Les valeurs numériques choisies correspondent à un triplet pythagoricien et permettent d'obtenir une hypoténuse dont la mesure est un nombre entier de centimètres : 10 cm.

La seconde partie du patron est une portion de disque. Le rayon de ce disque est la longueur de l'hypoténuse trouvée précédemment : 10 cm.

La longueur de l'arc de cercle délimitant cette portion de disque doit correspondre au périmètre de la base pour qu'il n'y ait ni trou ni recouvrement, elle doit donc être 12π cm. Il s'agit donc de déterminer l'angle qui permettra, sur un cercle de rayon 10 cm, d'obtenir une longueur d'arc de 12π cm. Il y a proportionnalité, pour un rayon donné R (ici $R = 10$ cm), entre la longueur de l'arc L (ici $L = 12\pi$ cm) et l'angle α qui intercepte cet arc. On peut alors faire un tableau de proportionnalité pour mettre les différents éléments en relation. Pour un cercle de rayon $R = 10$ cm fixé on a :

Angle en radians	2π	α
Longueur de l'arc en cm	$2\pi R = 20\pi$	$\alpha R = 10\alpha$

On veut : $\alpha R = 10\alpha = 2\pi r = 12\pi$.

On a ainsi $\alpha = \frac{r}{R} \times 2\pi \text{ rad} = \frac{r}{R} \times 2\pi \times \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{r}{R} \times 360^\circ = 216^\circ$.