LA DISTRIBUTIVITÉ : QUEL(S) SAVOIR(S) ET CONNAISSANCES POUR ENSEIGNER LA MULTIPLICATION À L'ÉCOLE PRIMAIRE ?

Céline CONSTANTIN
ESPE, Faculté d'Education de l'Université de Montpellier
Laboratoire I2M, Aix-Marseille Université
Celine.constantin@umontpellier.fr

Résumé
Si elle est formalisée dans le cadre du calcul algébrique au collège, la propriété de distributivité est présente bien en amont, de manière implicite, dans diverses pratiques de calcul liées à l'enseignement de la multiplication dès l'école primaire. Ces connaissances numériques anciennes sont pourtant peu prises en compte au collège. Nous proposons dès lors de conduire une réflexion sur les réorganisations de savoirs autour de la distributivité comme enjeu de formation pour les futurs professeurs des écoles. Dans l'atelier, nous avons proposé aux participants d'étudier des données issues de réponses d'étudiants en première année de master MEEF premier degré soumis à un questionnaire afin d'interroger leurs connaissances mathématiques et didactiques : quelles sont les connaissances et les savoirs sur la distributivité de ces étudiants dans différents cadres, à la fois algébrique et numérique ? Comment interagissent ces connaissances et savoirs dans différents contextes liés à la préparation du concours du CRPE et/ou relativement aux pratiques d'enseignement de la multiplication à l'école ?
Une autre problématique en lien avec ces questions et d'autres travaux est également abordée et discutée : quel discours mathématique tenir sur des pratiques de calcul numérique (mental ou posé) relatives à l'enseignement de la multiplication à l'école, qui mobilisent implicitement la propriété de distributivité ?

L'atelier dont ce texte rend compte s'est déroulé en trois temps. Il s'est appuyé sur les résultats d'une recherche antérieure (Constantin, 2014) et sur ceux d'une recherche en cours quant à l'articulation de savoirs numériques et algébriques attenants à la propriété de distributivité et à ses usages pour l'enseignement de la multiplication à l'école primaire.

La première partie de l'atelier a consisté à analyser des extraits de manuels de l'école primaire sur le calcul mental et posé de multiplications, afin de caractériser le fonctionnement implicite de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction à ce niveau d'enseignement. La mise en regard de ces analyses avec certains résultats de nos propres travaux quant à la faible prise en compte des connaissances numériques anciennes au collège, où la distributivité devient un savoir officiel d'enseignement, ont amené à questionner l'articulation entre ces deux aspects de la distributivité du point de vue des mathématiques à enseigner et enseignées à l'école primaire : comment la distributivité est-elle mise en œuvre dans l'enseignement de la multiplication, et comment les savoirs dans le cadre algébrique peuvent-ils se constituer comme savoirs implicites en arrière-plan des savoirs numériques à enseigner ?

Dans un deuxième temps, les participants ont analysé un questionnaire et des extraits de réponses d'étudiants en première année de Master MEEF afin d'interroger les liens entre leurs connaissances sur le calcul algébrique, objet d'évaluation dans le Concours de Recrutement des Professeurs des Ecoles, et sur des savoirs numériques propres liés à l'enseignement de la multiplication à l'école primaire.

Dans une dernière partie, s'est engagée une réflexion collective sur les savoirs implicites liés à la distributivité en arrière-plan des techniques de calcul mental ou posé, en lien avec les savoirs sur la multiplication à enseigner à l'école primaire, en interrogeant de plus la nature du discours qui pourrait être tenu dans la classe à ce propos.

I LA PROPRIÉTÉ DE DISTRIBUTIVITÉ DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA MULTIPLICATION À L'ÉCOLE PRIMAIRE ET SON DEVENIR AU COLLÈGE

Nous avons débuté l'atelier par une brève analyse des programmes afin de déterminer la place de la propriété de distributivité dans les savoirs à enseigner.

Ainsi, dans les programmes de 2008, la propriété de distributivité devient un objet de savoir explicite en classe de 5ème. Elle est formalisée à l'aide des deux égalités algébriques « $k(a+b)=ka+kb$ » et « $k(a-b)=ka-kb$ » renvoyant à des identités à la quantification implicite. Ce double formalisme de la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction s'explique notamment par le fait que la multiplication sur les nombres relatifs ne sera à l'étude qu'en classe de 4ème. Dans les programmes de 2015 qui entrent en vigueur en septembre 2016, même si un tel formalisme algébrique n'apparaît pas, les repères de progressivité placent en 4ème le développement et la factorisation d'expressions algébriques.

Néanmoins, la propriété de distributivité fonctionne de manière implicite dans l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication dès l'école primaire au travers de pratiques numériques de calcul mental et posé. Les documents d'accompagnement des programmes de 2008 comme les nouveaux programmes de 2015 attestent de cet attendu. Dans la rubrique intitulée « Calcul mental », les exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève mentionnent dès le cycle 2 qu'il s'agit d' « utiliser les propriétés des opérations, y compris *celles du type* $5 \times 12 = 5 \times 10 + 5 \times 2$ ». De même, dans la rubrique intitulée « Calcul posé », il est précisé que « l'apprentissage des techniques opératoires posées (addition, soustraction, multiplication) se fait en lien avec la numération et les propriétés des opérations ». On retrouve des indications semblables pour le cycle 3.

Nous avons donc proposé aux participants de chercher à caractériser des pratiques numériques engageant possiblement l'utilisation de la distributivité dans l'enseignement de la multiplication à l'école primaire, et de façon concomitante, les différentes formes de savoir associées à cet usage.

Pour ce faire, l'atelier s'est poursuivi par une analyse d'extraits de manuels de primaire. La consigne donnée était de chercher dans les occasions d'emploi de la propriété de distributivité, différentes formes possibles de ce savoir en jeu correspondant à des oscillations ou des adaptations de techniques dans différents contextes d'utilisation.

1 La propriété de distributivité dans le calcul posé de multiplication

Après discussion avec les participants, nous avons retrouvé les résultats issus de nos propres travaux montrant que la technique de la multiplication posée pouvait s'appuyer sur une certaine diversité des formes implicitement à l'œuvre dans l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Il s'agit par exemple d'une forme dite simple à l'occasion de multiplications par un nombre à un seul chiffre comme dans le calcul 57×6. La technique consiste *a priori* à décomposer 57 sous la forme de la somme $7+50$ puis à multiplier 7 par 6 et 50 par 6 avant d'ajouter les produits. Nous avons noté de ce point de vue que le facteur décomposé est celui qui est écrit en haut de la multiplication posée. Implicitement il s'agit donc d'utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition à droite, ce que l'on pourrait formaliser de la manière suivante : $(7 + 50) \times 6 = 7 \times 6 + 50 \times 6$.

L'extrait suivant nous a amené à observer l'existence d'autres formes associées à l'utilisation de distributivité dans certains manuels.

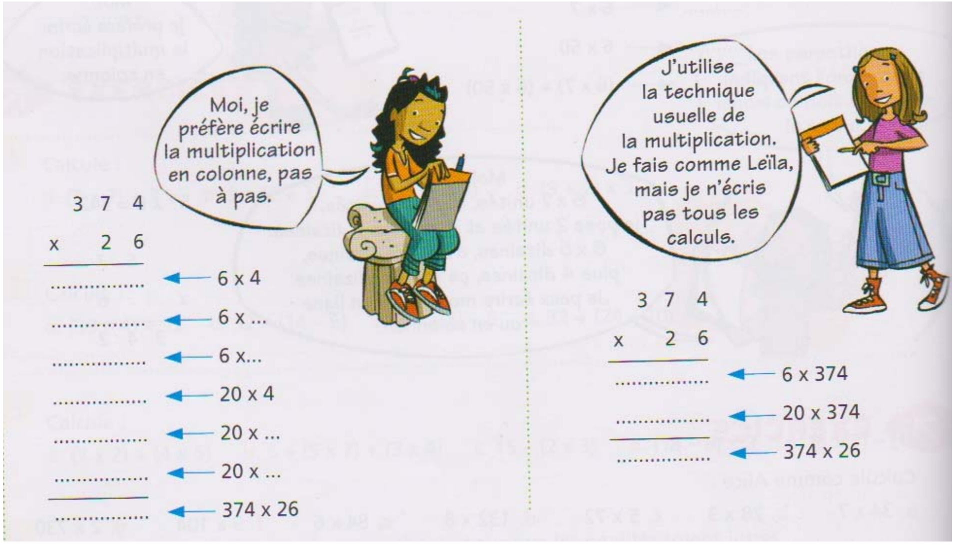


Figure 1 : Extrait du manuel Euro Maths CM1 (2009, p. 65)

Les techniques opératoires présentées ici reposent sur une utilisation implicite de la distributivité que l'on pourrait détailler selon : $(4+70+300)\times(6+20)=(6\times 4)+(6\times 70)+(6\times 300)+(20\times 4)+(20\times 70)+(20\times 300)$ et $374\times(6+20)=(374\times 6)+(374\times 20)$.

Il s'agit d'une part d'une forme double de distributivité avec une décomposition d'un facteur sous la forme d'une somme de trois termes, et d'autre part d'une distributivité simple à gauche.

2 La propriété de distributivité dans le calcul mental de produits

On observe une grande diversité potentielle dans les formes de savoirs mobilisées implicitement par les différents spécimens proposés dans certains manuels de primaire.

Ainsi les exercices suivants engagent-ils des décompositions du facteur écrit à gauche et l'utilisation implicite de la distributivité avec des sommes de deux termes ou de trois termes.

1 Voici trois résultats : 3 x 254 = 762 7 x 254 = 1 778 9 x 254 = 2 286

Utilise ces résultats pour calculer :

a. 379 x 254 b. 793 x 254 c. 937 x 254 d. 709 x 254

Figure 2 : Extrait du manuel Euro Maths CM1 (2009, p. 65)

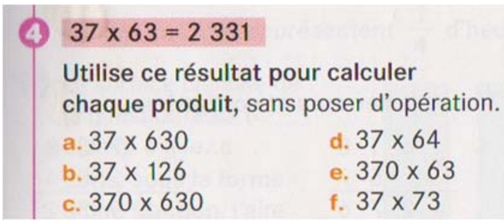
Le calcul de 937×254 peut se faire en appui sur l'égalité :

$(900+30+7)\times 254=(900\times 254)+(30\times 254)+(7\times 254)$,

tandis que celui de 709×254 repose sur l'égalité $(700+9)\times 254=(700\times 254)+(9\times 254)$ [1].

[1] Notons que les calculs des produits partiels relèvent alors de l'associativité de la multiplication pour multiplier les produits donnés par l'énoncé par 10 ou 100 en appui sur la règle des zéros par exemple.

Certains manuels donnent à voir des occasions de se confronter à des décompositions non canoniques (c'est-à-dire qui ne correspondent par à une écriture additive du type unités + dizaines + centaines par exemple en lien avec la numération décimale) :


4 37 x 63 = 2 331

Utilise ce résultat pour calculer chaque produit, sans poser d'opération.

a. 37 x 630 d. 37 x 64

b. 37 x 126 e. 370 x 63

c. 370 x 630 f. 37 x 73

Figure 3: Extrait du manuel Cap Maths CM2 (2010, p. 17)

Le calcul f. demande ainsi de décomposer 73 sous la forme $63+10$, avant d'ajouter le produit 37×63, qui est donné, avec 37×10 que l'on peut évaluer mentalement.

La question de l'utilisation implicite de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition a été soulevée par les participants pour certains calculs comme 15×11 ou encore 13×19. En effet, s'agit-il de multiplier 15 par 10 puis d'ajouter 15 ou de multiplier 15 par 10 puis d'ajouter 15×1 ? De même pour 13×19, après avoir multiplié 13 par 20, soustrait-on 13 ou 13×1 ? Dans les deux exemples, les premiers calculs renvoient davantage à des savoirs liés à la définition de la multiplication par addition itérée (et à l'associativité de l'addition), tandis que pour les seconds, le produit par 1 serait plutôt soutenu par des savoirs liés à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction.

Nous notons de plus que les décompositions dans le calcul mental peuvent être issues de choix à opérer en fonction des nombres en jeu, et ne pas correspondre systématiquement à une décomposition canonique des nombres décimaux.

Nous concluons avec les participants qu'il peut exister en primaire une certaine diversité dans l'utilisation de la propriété de distributivité dans l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication. Les participants mettent en avant l'existence d'éléments liés aux propriétés de la numération décimale de position qui viennent se conjuguer dans la mise en œuvre des techniques de calcul de produits. Nous soulignons de plus l'une des caractéristiques de l'utilisation de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans les techniques de calcul mental : elle peut n'être que l'une des propriétés engagées lors d'une étape de calcul, parmi bien d'autres (associativité, commutativité, propriétés liés à la numération décimale, ou connaissances sur les nombres en appui sur des résultats mémorisés par exemple).

Nous avons poursuivi cet atelier en proposant de mettre en regard ces analyses avec des résultats issus de nos propres travaux de recherche (Constantin, 2014) quant à la prise en compte de ces connaissances de primaire liées au calcul mental ou posé de multiplication au moment de l'introduction de la distributivité comme savoir officiel d'enseignement au collège. Il s'agit pour nous d'interroger les savoirs à enseigner et enseignés au moment du passage de l'utilisation implicite de la distributivité à la mise au jour et à l'étude de la propriété au collège.

3 Devenir de ces connaissances numériques au collège

L'un des résultats de notre étude (Constantin, 2014) concerne la prégnance d'un facteur égal à 1 dans les produits partiels des spécimens proposés par les manuels de collège pour le calcul mental de produits. Les multiplications données à effectuer sont par exemple des produits par 11, par 21, par 1001, ou par 19, c'est-à-dire par des nombres dont les décompositions sous forme de somme ou de différence conduisent à des écritures du type $a \pm 1$ où a est le produit d'un entier non nul par une puissance de 10 différente de 1. Dans ce cas, l'on peut envisager deux techniques possibles. Par exemple, pour effectuer 54×11 on peut envisager d'exécuter $(54 \times 10) + (54 \times 1)$ ou $(54 \times 10) + 54$. La première technique mobilise implicitement la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, tandis que la seconde repose plutôt sur l'utilisation de l'addition itérée et de la définition de la multiplication sur les entiers avec un regroupement des dix premiers termes : (54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54) + 54. Or la première technique demande de penser et d'effectuer un produit par 1 supplémentaire par rapport à la technique reposant sur $(54 \times 10) + 54$. On peut dès lors questionner ce choix qui semble moins propice à l'émergence de la distributivité. Ces produits induisant un facteur égal à 1 sont très majoritaires au moment de l'introduction de la distributivité en 5^{e}, quelle que soit l'importance accordée aux tâches calculatoires dans les manuels (une grande variété existe de ce point de vue).

On observe également des ruptures possibles en 6ème quant aux occasions d'emploi de la distributivité offertes par les manuels par rapport au primaire. Ainsi le manuel Phare (2009), parmi les 24 exercices consacrés au calcul mental de produits dans le chapitre correspondant à la multiplication, ne propose que 4 exercices dont les nombres en jeu pourraient y conduire. Ils sont cependant précédés de l'exemple suivant : $23 \times 9 = (23 \times 10) - 23 = 230 - 23 = 207$. Cette technique repose sur la définition d'un produit par addition itérée avec regroupement de termes, plutôt que sur l'utilisation de la distributivité par rapport à la soustraction. Ainsi la place occupée par la propriété de distributivité est-elle dans ce manuel extrêmement réduite, voire inexistante. Ce n'est pas le cas de tous les manuels. Par exemple dans le manuel de 6^{e} Transmath (2013), 5 exercices sur 19 montrent des occasions possibles d'emploi de la distributivité avec des produits comme 35×12 à calculer mentalement dans le chapitre Multiplications. Toutefois, on n'observe aucune occasion de décomposition en une somme de trois termes, ou en une somme non canonique. Les deux manuels donnent à voir des savoirs à enseigner différents, en accord avec le caractère implicite de l'utilisation de la distributivité dans le sens où elle n'est pas encore un savoir officiel d'enseignement. On peut donc supposer que son existence et le nombre d'occasions d'emploi pour le calcul mental puissent s'avérer très différents d'une classe à l'autre, selon les pratiques enseignantes. La richesse potentielle que l'on peut observer dans certains manuels de primaire dans les différents usages de la distributivité ne se retrouve ainsi pas dans les manuels de 6^{e} ou de 5^{e}.

La distributivité semble également avoir une place plus restreinte en 6^{e} par rapport au primaire pour soutenir les techniques de calcul posé de produits.

Les spécimens de multiplications données à poser relèvent essentiellement de produits de nombres décimaux non entiers, et les discours se centrent davantage sur les éléments liés à la numération en insistant sur la place de la virgule, ou en colorant en rouge l'écriture des zéros, voire ne mentionnent plus les produits partiels. C'est le cas par exemple des manuels Phare (2009) ou Triangle (2009), dont les choix de formalismes tendent à notre sens à masquer plus encore l'utilisation implicite de la distributivité et les produits partiels afférents par l'emploi de points plutôt que de zéros pour écrire les résultats intermédiaires :

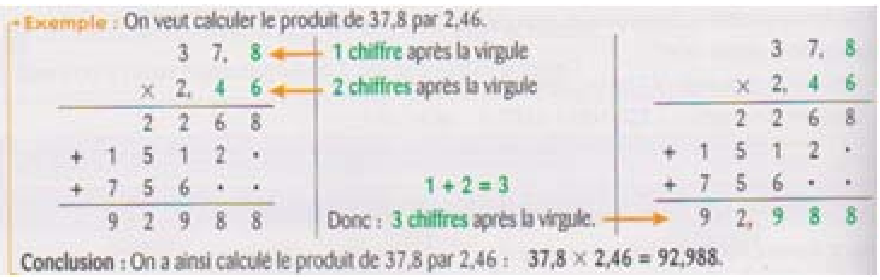


Figure 4: Extrait du manuel Phare 6^{e} (2009, p.62)

Au moment de l'introduction de la propriété de distributivité comme savoir officiel d'enseignement (en 5^{e}) aucun des six manuels analysés ne propose de se saisir des connaissances anciennes liées à la multiplication posée.

Les analyses que nous avons conduites (Constantin, 2014) montrent que l'articulation de connaissances anciennes du primaire autour de la distributivité se révèle être un enjeu d'enseignement faiblement exploré au collège ou présentant de multiples incomplétudes. Nous faisons alors l'hypothèse que les recompositions entre calcul mental et calcul posé, et au-delà entre numérique et algébrique puissent ne pas être réalisées. Ces constats nous ont amenée à questionner ces recompositions du point de vue de la formation des professeurs des écoles à un moment où un rapprochement entre les pratiques algébriques du collège (pour le concours du CRPE) et les pratiques numériques de primaire (calcul mental et posé de multiplication à enseigner) peut s'organiser.

Nous nous sommes donc intéressée à la première année de master MEEF premier degré où les différents points de vue sur la distributivité dans le cadre numérique et algébrique peuvent se rencontrer et s'articuler.

Nous avons poursuivi cet atelier en proposant de conduire une réflexion sur les réorganisations de savoirs autour de la distributivité comme enjeu de formation pour les futurs professeurs des écoles.

Pour cela, nous avons proposé aux participants d'étudier des données issues de réponses d'étudiants soumis à un questionnaire visant à interroger leurs connaissances mathématiques et didactiques sur la distributivité à la fois dans les cadres algébrique et numérique et ce, en lien avec l'enseignement de la multiplication au cycle 3.

Quelles sont les connaissances et les savoirs sur la distributivité de ces étudiants dans les cadres algébrique et numérique ? Comment interagissent ces connaissances et savoirs dans différents contextes liés à la préparation du concours du CRPE et/ou relativement aux pratiques d'enseignement de la multiplication à l'école ?

II - ARTICULATIONS ENTRE DES SAVOIRS NUMÉRIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA MULTIPLICATION ET DES CONNAISSANCES SUR LE CALCUL ALGÉBRIQUE

Dans ce deuxième temps, nous avons brièvement présenté aux participants le questionnaire proposé. Une première partie « didactique » propose des analyses de tâches et d'extraits de manuels de CM2 relatifs à l'enseignement de la multiplication posée et au calcul mental de produits. Une deuxième partie « mathématique » propose un certain nombre de multiplications à effectuer mentalement, avant de demander une écriture en ligne qui formalise la technique de multiplication posée à partir d'un exemple. Une dernière partie « mathématique » est constituée d'expressions algébriques à développer ou à factoriser d'une part, et d'autre part d'égalités algébriques dont la véracité est à examiner.

Le questionnaire a été soumis à une cohorte de 19 étudiants de M1 en décembre 2015.

Nous avons demandé aux participants en travaillant par groupes de 2 ou 3 d'évaluer *a priori* les difficultés potentielles au regard des consignes données et des tâches mathématiques convoquant la propriété de distributivité. Il s'agissait également de caractériser les connaissances mathématiques et didactiques en jeu dans les calculs proposés dans le questionnaire ou les extraits de manuels donnés à analyser. Cela a été l'occasion de s'approprier les extraits du questionnaire pour lesquels nous avons proposé par la suite des réponses d'étudiants à analyser.

Notons ici qu'il ne s'agit pas d'évaluer la formation reçue par les étudiants, mais de chercher à déterminer d'une part la manière dont une articulation entre différentes connaissances numériques et algébriques peut se construire pour des étudiants confrontés à une occasion de reconstruction. D'autre part, il s'agit de chercher à déterminer des difficultés potentielles voire des obstacles à lever pour ce faire à un moment où un rapprochement entre les connaissances algébriques du collège (pour le concours) et les connaissances numériques du primaire est possible en lien avec l'identification de connaissances pour l'enseignement de la multiplication.

Nous souhaitions ainsi proposer aux participants de conduire une réflexion sur les réorganisations de savoirs autour de la distributivité comme enjeu de formation pour les futurs professeurs des écoles en appui sur les données recueillies et les questions qu'elles soulèvent.

1 Éléments d'analyse d'extraits du questionnaire

Nous proposons ici des éléments d'analyse du questionnaire mis en avant par les participants et qui recoupent les analyses que nous avons pu faire dans le cadre de notre recherche. La première partie vise à déterminer si la distributivité est identifiée comme un savoir fonctionnant implicitement dans les techniques de calcul mental, et comment, en l'absence de formalisme disponible à ce niveau d'enseignement, elle peut se manifester au travers d'un discours envisagé pour la classe.

Ainsi, la première partie du questionnaire propose tout d'abord de revenir sur deux techniques de calcul mental pour les produits 34×12 et 25×19 en CM2. Il s'agit de décrire une technique de calcul, puis de préciser les connaissances mathématiques sous-jacentes. Il est ensuite demandé d'envisager des explications en classe à la fois du point de vue d'un discours et de traces écrites au tableau. Les mêmes questions sont posées à propos des calculs a. et c. de l'extrait de manuel suivant :

4 On sait que $23 \times 16 = 368$.
Calcule sans poser les multiplications. Explique comment tu fais.
a. 23×17 b. 24×16 c. 23×26 d. 33×16

Figure 5 : Extrait du manuel Euro Maths CM2 (2009, p. 56)

Les spécimens choisis proposent à la fois des occasions d'utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction (avec éventuellement remplacement par l'addition itérée comme nous l'avons vu plus haut), ainsi qu'une décomposition non canonique pour le calcul de 23×26 à partir de 23×16 qui nécessite de considérer 26 comme 16 +10.

A la suite de ces questions, et afin de faire émerger la propriété et ses différentes formes, il est demandé de comparer les techniques envisagées et les connaissances sous-jacentes.

Enfin, à partir de l'extrait suivant, les étudiants sont invités à concevoir un discours pour la classe « pour expliquer cette disposition de la multiplication de 483 par 67 sous forme de tableau » :

Multiplication : technique usuelle

Objectifs : revoir la technique de la multiplication. Comprendre la signification des produits partiels.

EXERCICE DIRIGÉ

1 Calcule 483×67 avec la méthode de ton choix.

2 a. Qwang a commencé à calculer 483×67 en utilisant un plan de découpage. Que lui reste-t-il à faire pour calculer 483×67 ?

	400	80	3
60	$60 \times 400 = 24\,000$	$60 \times 80 = 4\,800$	$60 \times 3 = 180$
7	$7 \times 400 = 2\,800$	$7 \times 80 = 560$	$7 \times 3 = 21$

Figure 6 : Extrait du manuel Euro Maths CM2 (2009)

Il s'agit ici de pister les recompositions possibles entre forme simple et double avec une somme de trois termes, ainsi que l'évocation de savoirs du côté de dénombrement ou d'aires potentiellement à même de soutenir les décompositions et les calculs liés à la distributivité.

Les participants soulèvent la question de la formulation de la consigne évoquant un « tableau » qui peut *a priori* ne pas être favorable à l'émergence de ces savoirs.

La deuxième partie du questionnaire consiste à déterminer la capacité à mobiliser la distributivité pour calculer mentalement :

Partie Mathématique I

1) On donne le produit suivant : 123 × 468 = 57 564.

Déterminez les résultats des calculs suivants uniquement si vous pouvez les trouver presque sans calcul, ou en effectuant mentalement des opérations rapides et simples, et en utilisant le résultat précédent. Vous pouvez écrire des opérations et/ou résultats intermédiaires si besoin.

[…]

12 300 123 × 468 =

1 023 × 468 =

123 × 1 468 =

Figure 7 : Extrait de la partie « mathématique » du questionnaire[2]

Nous convenons que les deux premiers calculs ici semblent *a priori* plus difficiles car ils demandent des adaptations liées à des décompositions et des utilisations des propriétés de la numération décimale de position.

En effet, ces trois calculs reposent *a priori* sur une utilisation implicite de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction (les choix des facteurs fortement liés par les chiffres aux facteurs du produit initial privilégient cette interprétation). Pour chaque produit proposé, il s'agit en amont de décomposer l'un des facteurs sous la forme d'une somme ou d'une différence dont l'un des termes soit 123 ou 468 ou un produit de l'un de ces nombres par une puissance de 10. Ainsi, pour le premier calcul, la technique de calcul attendue peut s'écrire de la manière suivante :

(12 300 000 + 123) × 468 = 12 300 000 × 468 + 123 × 468 = 5 756 400 000 + 57 654 = 5 756 457 564.

Elle repose sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition puis sur l'associativité de la multiplication, après avoir décomposé 12 300 000, pour multiplier le produit donné par 100 000. Les participants soulignent une difficulté potentielle liée à une manipulation erronée en concaténant les écritures en appui sur 12 300.

La décomposition pour le calcul suivant est aussi celle du facteur écrit à gauche, mais le lien avec 123 paraît moins immédiat puisqu'elle engage une somme algébrique de trois termes 1 000 + 123 – 100.

Le dernier produit demande une décomposition du facteur écrit à droite sous la forme 1000 + 468, ce qui amène à une utilisation de la distributivité sous une forme plus proche de cette forme prototypique et donc *a priori* plus simple.

Aucune décomposition supplémentaire n'est alors nécessaire pour se ramener au produit initial, de sorte que l'on puisse anticiper que ce calcul soit plus réussi que les autres.

---

2 Cette question est extraite de la revue Petit *x* , Activités mathématiques au collège 1993-1998 Hors série

La suite du questionnaire est la suivante :

2) Voici une multiplication posée dont on a volontairement effacé le résultat.

$$\begin{array}{r} 86 \\ \times\ 39 \\ \hline 344 \\ 2580 \\ \hline \end{array}$$

Ecrire une égalité en ligne qui montre quels calculs sont effectués pour calculer le produit, en posant la multiplication. Cette égalité ne doit montrer ni le résultat ni les résultats des produits partiels mais bien les calculs intermédiaires effectués.

Cette égalité résulte-t-elle d'une propriété plus générale des nombres et des opérations que vous connaissez ?

Figure 8 : Extrait de la partie « mathématique » du questionnaire

Les participants ont évoqué la difficulté de l'appropriation de la consigne qui demande de produire une égalité aux caractéristiques peu habituelles.

Enfin, la troisième partie du questionnaire propose de développer puis de factoriser un certain nombre d'expressions algébriques comme $3\times(x+5)$; $7x(3x+4)$ ou $(3x+2)(5x+4)$. Il s'agit de déterminer la maîtrise des étudiants du calcul algébrique reposant sur l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction, et ce dans sa forme simple comme dans sa forme double. Notons que nous avons évité de choisir des coefficients négatifs afin de limiter l'impact d'erreurs de calcul sur les nombres relatifs ou de gestion de signes et ainsi mieux observer les transformations d'écritures en appui sur la distributivité.

2 Analyse de réponses d'étudiants

A la suite d'une mise en commun qui a fait ressortir une partie des difficultés potentielles liées aux tâches mathématiques et à l'identification de savoirs sous-jacents, notre consigne de travail était la suivante :

Analyser les extraits de réponses proposés en caractérisant des difficultés liées d'une part à des adaptations de techniques en appui sur l'utilisation de la propriété de distributivité dans le cadre numérique, et d'autre part aux écritures relatives à la fois au calcul numérique propre, et aux discours envisagés pour la classe pour l'enseignement de la multiplication.

Les analyses ont été discutées avec les participants, puis nous avons proposé des éléments plus quantitatifs qui ont permis de les étayer et de les catégoriser en poursuivant la discussion engagée.

2.1 Connaissances mathématiques des étudiants interrogés

Les réponses des étudiants à la troisième partie du questionnaire présentées dans la figure suivante montrent une certaine maîtrise du calcul algébrique :

Réponses attendues :

$F = 3 \times (x + 5) = 3x + 15$

$G = 7x(3x + 4) = 21x^2 + 28x$

$H = (3x + 2)(5x + 4) = 15x^2 + 22x + 8$

$I = 15x^2 + 35x = 5x(3x + 7)$

$J = (x - 2)(3x + 5) - 2x(x - 2) = (x - 2)(3x + 5 - 2x) = (x - 2)(x + 5)$

Taux de réussite :

Développement			Factorisation	
F	G	H	I	J
100%	84%	84%	84%	63%

Figure 9 : Taux de réussite dans l'utilisation de la distributivité pour développer ou factoriser des expressions algébriques

La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sous sa forme simple comme sous sa forme double semble très majoritairement employée sans difficulté, à la fois pour développer et réduire ou factoriser les expressions algébriques proposées. Les erreurs observées dans les développements des expressions G et H relèvent davantage de réductions de produits comme par exemple $7x$ multiplié par $3x$ qui donne $21x$, que de l'utilisation de la distributivité à proprement parler. Pour ce qui est de l'expression J, trois étudiants ne l'ont pas abordée, et l'un a développé au lieu de factoriser.

Les productions des étudiants en ce qui concerne les calculs numériques à partir de l'égalité $123 \times 468 = 57564$ donnent les taux de réussite suivants :

Expressions	468×123 (commutativité)	$123 \times 46\,800$ (associativité)	$12\,300\,123 \times 468$ (distributivité à droite)	$1\,023 \times 468$ (distributivité / somme algébrique)	$123 \times 1\,468$ (distributivité à gauche)
Taux de réussite	17/19	15/19	9/19	1/19	13/19

Figure 10 : Taux de réussite pour les calculs numériques

La grande majorité des étudiants montre une bonne utilisation de la commutativité et de l'associativité, qu'elle soit explicitée ou implicite, pour calculer mentalement les produits donnés. Plus des deux tiers des étudiants emploient au moins une fois correctement la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Seul un étudiant aborde le calcul 1023×468, ce qui correspond à la difficulté prévue lors de l'analyse préalable, et les étudiants qui ne l'abordent pas ne semblent pas considérer ce calcul comme possible à partir du produit donné, d'autant que la consigne évoque cette éventualité.

2.2 Écritures pour la description de techniques

Les écritures produites par les étudiants à l'occasion du calcul mental donnent à voir des difficultés à traduire par des calculs les manipulations des écritures en appui sur les spécificités de la numération décimale de position (conversion, traitement des chiffres et omission des unités de numération). Ainsi en va-t-il de l'extrait suivant :

$$57\,56400 + 57564 = 5\,813\,964$$

Figure 11 : Extrait de la copie de Gaëtan

Cet étudiant ne semble pas avoir véritablement décomposé 12 300 123 sous la forme d'une somme mais plutôt envisagé le nombre à partir de la concaténation de deux nombres 12 300 et 123 sans tenir compte du fait que 12 300 est un nombre de milliers. Cette juxtaposition conduit à multiplier 57 564 par 100 au lieu de 100 000. L'addition est pourtant implicitement présente puisque les produits partiels sont bien ajoutés pour obtenir le résultat. Mais les éléments ostensifs de l'écriture du nombre en lien avec les chiffres 1, 2 et 3 semblent faire perdre le lien avec la numération décimale de position et le besoin de convertir en unités pour pouvoir ajouter.

Ce n'est pas le cas pour la copie suivante qui montre une bonne recomposition du nombre à partir de produits partiels effectués selon le même principe :

$$= (468 \times 12300 : 5\,756\,400) + (468 \times 123 : 57\,564)$$
$$: 5\,756\,457\,564$$

Figure 12 : Extrait de la copie de Clémence

Les écritures intermédiaires pour éclairer le calcul effectué mentalement sont erronées, en particulier à cause des unités de numération qui ne sont pas écrites. Mais le résultat écrit est juste.

Un débat s'est engagé dans l'atelier à propos de l'interprétation de ce que fait cette étudiante : s'agit-il d'une véritable compréhension du jeu sur les écritures en appui sur des savoirs liés à la numération décimale de position ou est-ce une concaténation des écritures sans qu'elle ne soit guidée par ces propriétés ? Nous nous accordons sur le fait que ces écritures ne permettent pas véritablement de trancher.

En ce qui concerne le calcul posé, treize étudiants (13/19) ont abordé la question (Figure 7). Sept d'entre eux proposent des écritures montrant une bonne identification des produits partiels à l'instar de l'extrait suivant :

$$86 \times 34 = (86 \times 4) + (86 \times 30)$$

Figure 13 : Ecritures de produits partiels issus de la simple distributivité

On observe également des écritures faisant apparaître les produits partiels de chaque ligne :

$$= ((6 \times 4) + (80 \times 4)) + ((30 \times 6) + (30 \times 80))$$

Figure 14 : Ecritures de produits partiels issus de la double distributivité

Ces écritures correspondent à une utilisation implicite de la double distributivité comme nous avons pu l'observer dans les manuels de primaire.

Seulement deux étudiants sur 13 mentionnent la distributivité. Ce constat fait écho aux résultats de Clivaz (2011) à propos des connaissances mathématiques pour l'enseignement de la multiplication d'enseignants vaudois qui ne semblent pas avoir conscience de ce lien.

Six étudiants sur 13 montrent par ailleurs que la description de l'algorithme de multiplication posée en appui sur les chiffres peut faire obstacle à l'identification des produits partiels.

La copie de Maureen pose question quant à l'interprétation à donner à ces écritures des calculs intermédiaires :

$$86 \times 34 = 4 \times 6 + 4 \times 8 + \underbrace{3 \times 6 + 3 \times 8}$$

en colonne attention de bien poser le 0 des dizaines car en réalité on multiplie par 30 et non par 3.

Figure 15 : Extrait de la copie de Maureen

Les écritures produites sont en effet fondées par une description « chiffre par chiffre », sans recomposition des nombres sous-jacents, de sorte que les enchaînements d'opérations sont erronés. La difficulté semble résider dans l'utilisation d'additions pour traduire à la fois des juxtapositions syntaxiques de chiffres et des additions de nombres. L'écriture précédente interroge aussi l'interprétation de l'égalité comme relation d'équivalence. Maureen réussit pourtant tous les calculs algébriques, calcule mentalement les produits 12300123×468 et 123×1468, évoque la distributivité comme propriété sous-jacente aux calcul, mais échoue dans la production d'une écriture valide pour décrire la technique de calcul posé.

Nous évoquons avec les participants la difficulté de la construction de l'égalité comme relation d'équivalence, et en particulier les résultats des travaux de Theis (2005) quant à l'obstacle cognitif que représente cet apprentissage y compris en tout début d'enseignement.

2.3 Discours et traces écritures pour la classe

Les résultats des analyses des réponses des étudiants montrent dans l'ensemble de bonnes mises en avant des décompositions d'un facteur en amont et des choix à opérer pour le calcul mental. Les connaissances sous-jacentes identifiées par les étudiants sont la distributivité (3/19), le fait que « la multiplication et l'addition sont liées » (5/19), la multiplication par 10 (règle des zéros), les tables d'addition et de multiplication.

Pour le calcul posé, les discours s'appuient majoritairement sur l'exécution des produits sans oubli, les décompositions décimales, mais le lien avec la distributivité ou d'autres savoirs sous-jacents n'apparaît dans aucune copie.

Les traces écrites pour la classe proposées montrent plusieurs difficultés qui ont été mises en avant par les participants au regard des productions proposées.

Dix étudiants sur 19 proposent des écritures sans parenthèses autour des produits employant implicitement la priorité de la multiplication par rapport à l'addition qui ne fait pas partie des connaissances des élèves en primaire.

On observe de plus des difficultés à articuler le discours et les écritures autour de la décomposition qui renvoient aux difficultés à traduire des manipulations (décalage, concaténation, conversion) à l'aide d'opérations (addition). Cinq étudiants sur 19 proposent de marquer les décompositions à l'aide d'encadrements ou de flèches qui semblent référer aux ostensifs utilisés pour le calcul algébrique, et à des manipulations des écritures en lien avec le développement à l'instar de l'extrait suivant :

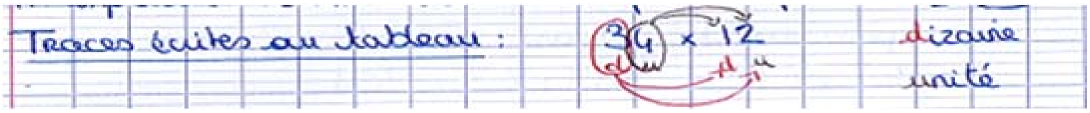
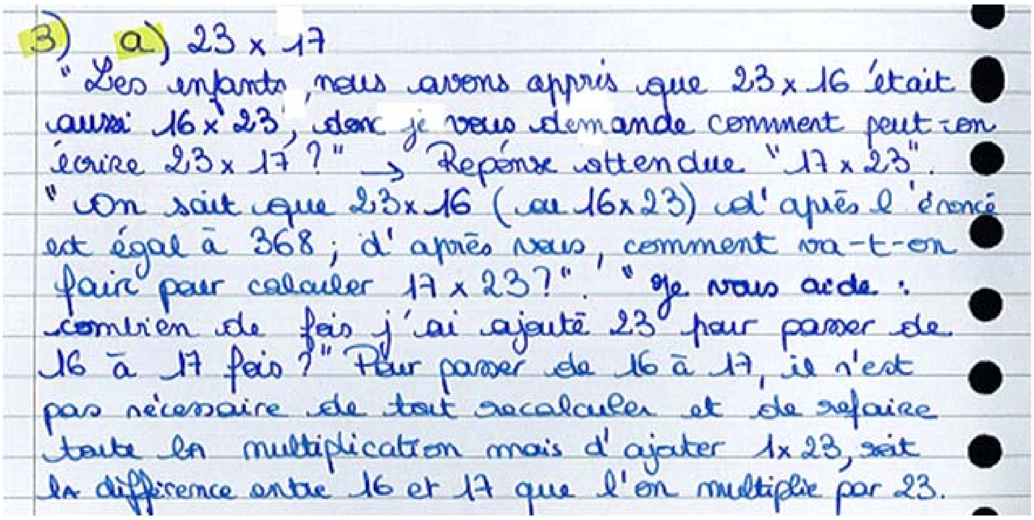


Figure 16 : Extrait d'une copie d'étudiant

Une autre difficulté tient à l'oralisation des écritures de la multiplication en lien avec la définition de la multiplication par addition itérée.



3) a) 23 x 17
"Les enfants, nous avons appris que 23 x 16 était aussi 16 x 23, donc je vous demande comment peut-on écrire 23 x 17 ?" → Réponse attendue "17 x 23".
"On sait que 23 x 16 (ou 16 x 23) d'après l'énoncé est égal à 368 ; d'après vous, comment va-t-on faire pour calculer 17 x 23 ?". "Je vous aide : combien de fois j'ai ajouté 23 pour passer de 16 à 17 fois ?" Pour passer de 16 à 17, il n'est pas nécessaire de tout recalculer et de refaire toute la multiplication mais d'ajouter 1 x 23, soit la différence entre 16 et 17 que l'on multiplie par 23.

Figure 17 : Extrait d'une copie d'étudiant

Cette étudiante se heurte au rôle potentiellement dissymétrique des facteurs. 23×17 et 17×23 ne renvoient pas à la même somme. De ce point de vue, 17 fois 23 ou 23 multiplié par 17 correspond à une somme de 17 termes tous égaux à 23. Le fait que 23 fois 17 donne le même résultat est associé à la commutativité de la multiplication et explique que l'on puisse lire comme cela se fait dans l'usage, 23×17 « 23 fois 17 ». Or cette étudiante se trouve contrainte de passer par le changement de l'ordre d'écriture des facteurs pour pouvoir soutenir son discours. Notons de plus qu'au lieu d'ajouter 23, elle propose d'ajouter une fois 23. Or, ce 1 ne devrait pas apparaître dans la somme, il ne fait que dénombrer les termes. Ajouter 23 ou 23×1 change quelque peu le savoir sous-jacent comme nous l'avons vu plus haut.

Un débat s'est engagé parmi les participants quant à l'oralisation différenciée de 23×17 et 17×23, et le choix des savoirs sous-jacents à la construction de la multiplication (addition itérée ou/et aires de rectangles). Les arguments avancés étaient ceux de la construction de la commutativité, et de la preuve de la propriété de distributivité possible dans un cas comme dans l'autre. En revanche, l'extension aux nombres négatifs pose question dans le cas de l'aire.

Nous avons terminé l'atelier autour d'une discussion collective à propos d'un discours possible pour la classe quant à l'enseignement de la multiplication à l'école primaire.

III - SAVOIRS IMPLICITES ET DISCOURS POUR LA CLASSE

Les questions posées étaient les suivantes : quel discours peut-on envisager pour soutenir les techniques de calcul mental et posé de multiplication qui permette d'éclairer les usages implicites de la propriété de distributivité ? Quelles écritures envisager ?

En particulier, le manuel Euro Maths (2009) envisage par exemple de faire le lien entre distributivité simple et double, avec des décompositions de facteurs sous la forme de sommes à deux ou trois termes.

LES ÉTAPES D'EUROMATHS RELATIVES À LA TECHNIQUE DE LA MULTIPLICATION

Une étape d'entraînement (page 21) permet au professeur de faire le point sur les compétences des élèves dans le domaine du calcul réfléchi de multiplication et de division : trouver le produit de deux nombres, trouver un des facteurs d'un produit, trouver le produit d'un nombre par 10, 100 ou par un de leurs multiples, trouver un des facteurs d'un produit.

C'est la consolidation de la page 23 qui permet au professeur de faire le point sur les compétences des élèves à résoudre différents types de problèmes de multiplication et de division. Les nombres choisis sont du domaine familier, ils permettent aux élèves d'engager aisément des procédures de calcul réfléchi.

Le plan de découpage ou la multiplication posée avec tous les calculs intermédiaires écrits permettent de rendre plus visibles les propriétés utilisées dans l'algorithme traditionnel de la multiplication. Nous nous appuyons donc (consolidation, p. 24-25) sur ces deux représentations :

	400	80	3
60	60 × 400 = 24 000	60 × 80 = 4 800	60 × 3 = 180
7	7 × 400 = 2 800	7 × 80 = 560	7 × 3 = 21

```
      4  8  3
  ×      6  7
  ------------
  ............  ←— 7 × 3
  ............  ←— 7 × 80
  ............  ←— 7 × ...
  ............  ←— 60 × 3
  ............  ←— 60 × ...
  ............  ←— 60 × ...
  ------------
  ............  ←— 483 × 67
```

pour aboutir à l'algorithme usuel :

```
      4  8  3
  ×      6  7
  ------------
  ...........  ←— 7 × 483
  ...........  ←— 60 × 483
  ------------
  ...........  ←— 483 × 67
```

La technique de la multiplication de deux nombres décimaux est un prolongement de celle du produit de deux nombres entiers. Nous l'introduisons à l'étape 78 (p.196-197).

Figure 18 : Extrait du guide pédagogique associé au manuel Euro Maths CM2 (2009)

Ces étapes interrogent notamment le choix de commencer par la double distributivité pour aller vers la simple distributivité (avec une recomposition des produits partiels) plutôt qu'une double utilisation de la simple distributivité. L'un des participants souligne la difficulté pour les étudiants en formation de s'approprier les propriétés mathématiques sous-jacentes à l'algorithme posé de la multiplication.

Les participants mettent en avant les difficultés liées à l'enseignement et à l'apprentissage des techniques opératoires qui articulent de nombreuses propriétés algébriques, ainsi que des propriétés sur la numération décimale de position.

Le débat s'est poursuivi par une remise en question de l'enseignement des techniques de calcul posé. Enseigne-t-on les techniques de calcul posé pour travailler ces propriétés liées à la numération décimale de position, ou les propriétés des opérations ? La question de la nécessité sociale de la technique opératoire posée est soulevée. D'autres techniques sont évoquées (à la russe, *per gelosia*) comme potentiellement plus efficaces.

L'atelier se conclut par l'intervention d'un participant qui constate que les discussions engagées n'ont finalement pas véritablement porté sur la question du discours, sans doute parce que ce discours demeure difficile à envisager et à construire.

IV - BIBLIOGRAPHIE

CLIVAZ S. (2011). Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire, in *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONSTANTIN C. (2014). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université.

THEIS L. (2005). L'apprentissage du signe = : un obstacle cognitif important. *For the Learning of Mathematics*, **25** (3), 7-12.

V - MANUELS SCOLAIRES :

BRAULT R., DARO I., FERRERO C., PERBOS-RAIMBOURG C., TELMON C. (2009). *Phare 6ème*, Paris : Editions Hachette.

BOURGEAT F., BRUSTEL A., CARLOD V., JACQUEMOUD D., KELLER A., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., VERDIER F. (2013). *Transmath 6ème*, Paris : Editions Nathan.

BRIAND J., NGONO B., PELTIER M.-L., VERGNES D. (2009). *Euro Maths CM2*, Paris : Editions Hatier.

BRIAND J., NGONO B., PELTIER M.-L., VERGNES D. (2009). *Euro Maths CM1*, Paris : Editions Hatier.

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2009). *Triangle 6ème* , Paris : Editions Hatier.

DUSSUC M.-P., MADIER D., COMBIER G., CHARNAY R. B. (2010). *Cap Maths CM2*, Paris : Editions Hatier.