

LE CALCUL MENTAL : UNE ENTRÉE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS AU CYCLE 3 ? À QUELLES CONDITIONS ? AVEC QUELLES PERSPECTIVES ?

Jean-François CHESNÉ

Directeur scientifique du Cnesco

Membre associé du LDAR

jean-francois.chesne@education.gouv.fr

Résumé

La connaissance des nombres et la place du calcul sont affirmées dans les nouveaux programmes de l'école primaire et du collège. Au-delà d'une visée d'acquisition de faits numériques, le calcul mental y apparaît comme un des axes principaux pour favoriser chez les élèves la connaissance des nombres et la disponibilité des propriétés des opérations. En mettant en regard ces aspects institutionnels avec des résultats de la recherche sur le calcul mental, sur les pratiques des enseignants et sur leur formation, ce texte vise à expliciter en quoi le calcul mental peut constituer une composante favorable dans l'apprentissage des élèves au cycle 3, mais aussi une entrée en formation continue des enseignants et un axe de leur développement professionnel.

"The evidence is clear that teaching is one of the most important school-related factors in student achievement, and that improving teacher effectiveness can raise overall student achievement levels." (Darling-Hammond & Rothman, 2011)

La mise en regard des résultats de recherches sur l'apprentissage des élèves d'une part et sur l'enseignement des mathématiques et les pratiques ordinaires des enseignants dans leur classe d'autre part, est depuis longtemps au cœur de ma réflexion et, avec les inférences associées sur les formations. Cette mise en regard imbrique cinq questions au moins :

- Que « savent vraiment » les élèves en mathématiques ?
- En quoi et pourquoi le calcul mental peut-il intervenir dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ?
- Quel format, spatial et temporel, d'une action de formation continue est susceptible de contribuer favorablement au développement professionnel des enseignants, individuel et collectif ?
- Qu'est-ce qui peut se jouer dans le déroulement d'une formation d'enseignants et est-il possible d'identifier des « facteurs clés d'efficacité » ?
- Et enfin, une question qui est moins d'actualité dans l'agenda institutionnel, mais qui n'en demeure pas moins un objet de recherche : Les évaluations standardisées (nationales ou internationales) peuvent-elles être à la fois productrices d'informations, et outils potentiels de formation des enseignants ? Et si oui, pourquoi, sur quelles dimensions et dans quelle mesure ?

Cette réflexion engage plusieurs entrées, plus ou moins générales, plusieurs temporalités et plusieurs postures – celle de formateur concepteur, de formateur acteur, de chercheur, de décideur... Le texte ci-dessous s'efforce de montrer en quoi, du point de vue du chercheur, le calcul mental peut constituer une composante favorable dans l'apprentissage des élèves au cycle 3, mais aussi une entrée favorable pour le

développement professionnel correspondant des enseignants. Et pour cela, en m'appuyant sur les nouveaux programmes de mathématiques, je pars de trois des cinq questions précédentes :

- Quels sont les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à la charnière école/collège ?
- Quelle peut être la place du calcul mental comme élément d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques ?
- Quels « facteurs clés d'efficacité » peut-on identifier pour une formation d'enseignants? Et en quoi le calcul mental peut-il être considéré comme un de ces facteurs ?

Pour répondre à ces questions, je m'appuierai sur des recommandations du jury de la conférence sur la numération²⁷ que le Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco) a organisée en partenariat avec l'Ifé/ENS de Lyon en novembre 2016 à Paris. Je m'appuierai également sur les résultats d'un dispositif expérimental d'une formation d'enseignants de 6^e centrée sur le calcul mental, que j'ai conçu et expérimenté entre 2010 et 2012 (PACEM : Projet pour l'acquisition de compétences par les élèves en mathématiques). Je m'appuie enfin sur un certain nombre d'évaluations standardisées.

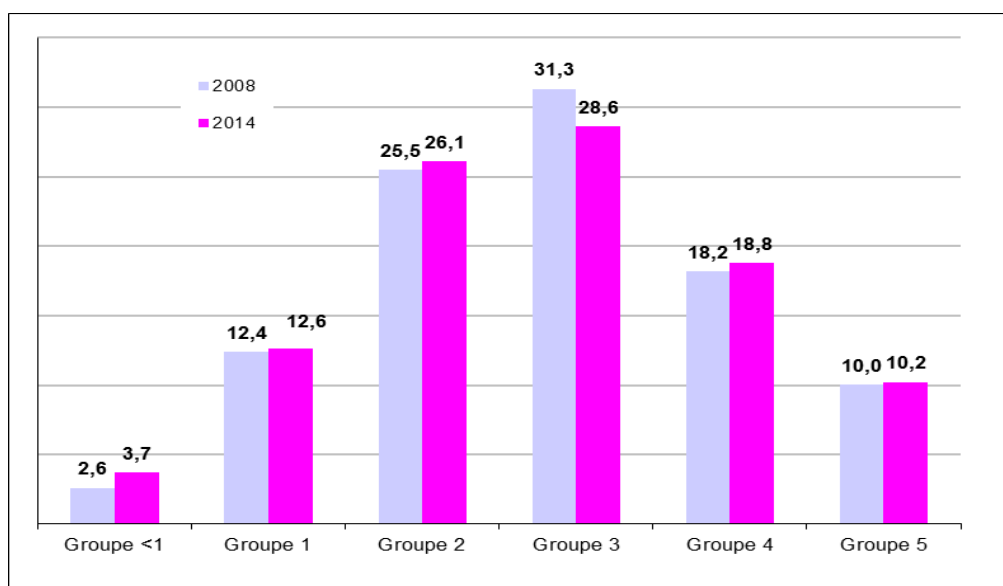
I - LES ACQUIS DES ÉLÈVES DANS LE DOMAINE DES NOMBRES ET DU CALCUL À LA CHARNIÈRE ÉCOLE/COLLÈGE

La situation préoccupante des acquis des élèves en mathématiques, à l'origine de la conférence de consensus sur la numération organisée par le Cnesco et par l'Ifé/ENS de Lyon les 12 et 13 novembre au lycée Buffon à Paris, est révélée depuis plusieurs années par des résultats convergents d'évaluations nationales et internationales.

1. Des résultats globaux alarmants au regard des enjeux de la scolarité obligatoire à partir d'enquêtes standardisées

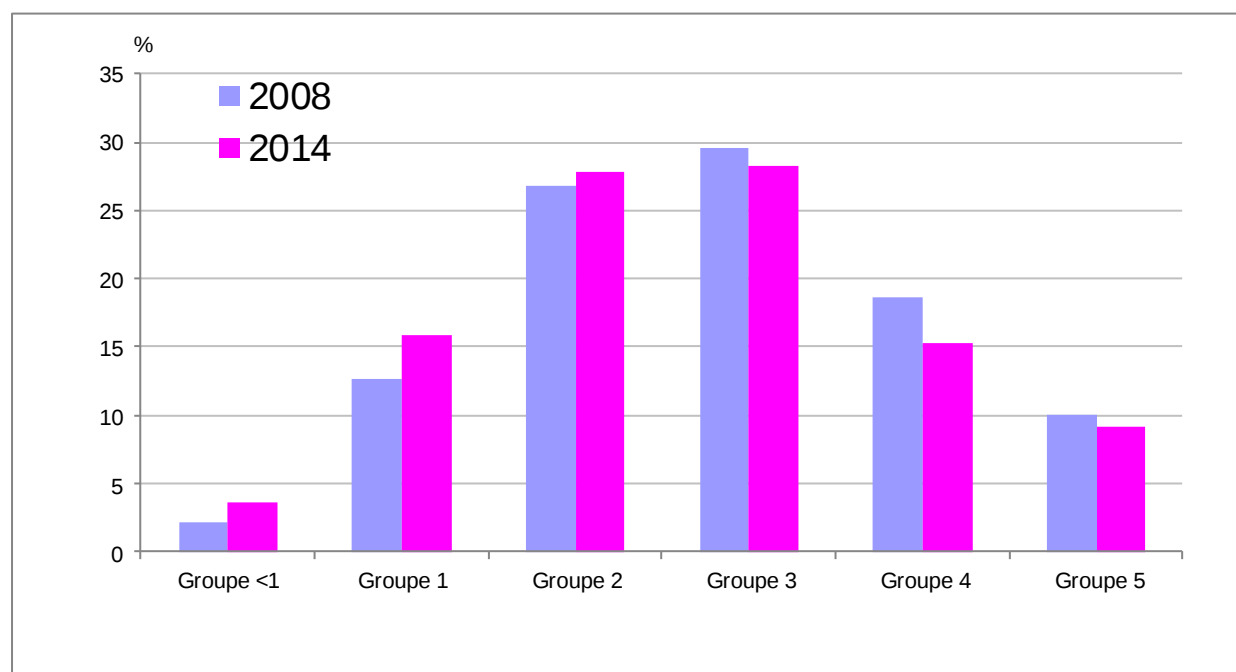
Au niveau national, l'enquête CEDRE 2014 en fin de CM2, estime, tout comme en 2008, qu'environ 40 % des élèves sont en difficulté en fin d'école primaire, et à peine 30 % en situation de réussite. Les disparités augmentent entre 2008 et 2014 : en fonction de l'origine sociale d'abord (le nombre d'élèves en grande difficulté augmente dans les écoles en éducation prioritaire et de façon plus générale, les scores des écoles socialement défavorisées baissent), mais aussi entre les filles et les garçons (les filles sont plus nombreuses dans les groupes faibles et moins nombreuses dans les groupes forts).

²⁷ Le texte intégral des recommandations est disponible sur le site du Cnesco : <http://www.cnesco.fr/fr/conference-de-consensus-numeration/>



Source : Depp – MENESR. Note d'information N°18-Mai 2015

L'enquête CEDRE 2014, mais cette fois en fin de collège, estime que presque un élève sur deux est en difficulté, ce qui traduit une augmentation depuis 2008, avec parallèlement une baisse du nombre d'élèves en situation de réussite, et suggère donc fortement que les écarts qui existent en fin d'école se creusent encore au collège.



Source : Depp – MENESR. Note d'information N°19 -Mai 2015

Au niveau international, PISA 2012 estime que presque un quart des élèves de 15 ans en France ont un niveau très bas en mathématiques, et que cette proportion d'élèves a augmenté depuis 2003. Plus alarmant, la France est désormais le pays participant à l'enquête où la performance scolaire est le plus fortement marquée par le niveau socio-économique et culturel des familles.

2. Des difficultés des élèves bien identifiées

Pour aller au-delà de ces constats globaux, j'ai étudié de façon quasi exhaustive, sur 25 années, les taux de réussite à des familles d'items des évaluations standardisées nationales en fin d'école primaire²⁸ ou en début de 6^e au regard de ce qui était attendu dans les programmes scolaires, dans le domaine des nombres et du calcul. J'ai cherché à repérer quelles familles d'items (ou quels types de tâches) sont bien réussies par les élèves, de façon récurrente, ce qui laisse penser que les notions correspondantes sont acquises. A l'opposé, j'ai cherché à identifier quelles familles d'items sont peu ou très peu réussies, ce qui suggère au contraire un apprentissage en cours ou des difficultés d'apprentissage. Il s'avère que les familles d'items qui sont problématiques (c'est-à-dire qui comportent un nombre suffisant de tâches, qui ont été évaluées sur plusieurs années et qui ne sont pas réussies) portent sur la connaissance des tables de multiplication, celle des « grands nombres », celle des nombres décimaux ainsi que sur le calcul mental et posé. J'ai également utilisé les résultats de l'évaluation à l'entrée en 6^e de l'expérimentation PACEM (que j'évoquerai plus loin), qui confirment sur des données plus récentes ces « points d'alerte » identifiés à partir de résultats antérieurs (Chesné, 2014).

3. Connaissance des tables d'addition et de multiplication

Si les taux de réussite sont élevés pour les tables d'addition²⁹ (90 % en CE2 et 95 % en 6^e), pour les tables de multiplication, on observe en revanche une maîtrise fragile des tables de multiplication (notamment des tables de 7 et de 8 : environ la moitié des élèves répondent correctement à « Dans 56 combien de fois 8 ? ») avec des répercussions vraisemblables dans les multiplications et les divisions posées, dans l'estimation de l'ordre de grandeur d'un résultat (et sans doute ensuite dans le travail sur les fractions et en algèbre).

4. Les grands nombres

Les « grands nombres » sont ici des nombres entiers auxquels les élèves ne peuvent plus associer une représentation concrète (une collection d'objets), et donc pour lesquels ils sont obligés de faire confiance à la représentation symbolique chiffrée (comme ils seront obligés de le faire plus tard pour les nombres décimaux avec plus de deux chiffres dans la partie décimale ou avec les fractions non élémentaires). Les évaluations nationales menées de 2005 à 2008 montrent ainsi qu'au moins 90 % des élèves, en éducation prioritaire comme hors éducation prioritaire, savent écrire un nombre entier inférieur à 1 000 à leur entrée au CE2. Ce taux est identique à l'entrée en 6^e pour un nombre entier inférieur à 10 000. Mais il passe à 70 % dès qu'on dépasse 10 000, et à 60 % pour les élèves d'éducation prioritaire.

5. Les nombres décimaux

Concernant les nombres décimaux, la recherche en didactique, nationale et internationale, a depuis longtemps identifié des passages délicats dans l'apprentissage des élèves. En France, plus d'un élève sur deux qui sort de l'école primaire ne réussit pas à passer de l'écriture décimale d'un nombre décimal, à une écriture fractionnaire et vice-versa. Ainsi, d'après les évaluations nationales en début de 6^e, le passage de 80,4 à $\frac{804}{10}$ est seulement réussi par 49 % des élèves ; l'association de $\frac{1}{4}$ et de 0,25 n'est

²⁸ Une partie de ces travaux ont été repris dans un rapport du Cnesco et complétés par Jean-Paul Fischer : <http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Acquis-des-%C3%A9l%C3%A8ves.pdf>

²⁹ A noter que les taux élevés pour les tables d'addition ne traduisent pas forcément une disponibilité des connaissances, au sens d'Aline Robert (1998), de connaissances sur les nombres et les opérations.

effectuée que par 27 % des élèves (et par 15 % des élèves en éducation prioritaire), et, ce qui est plus inquiétant, c'est que $\frac{1}{4}$ est associé à 1,4 pour plus d'un élève sur deux. D'autres difficultés apparaissent sur les décimaux, toutes liées à la compréhension de l'écriture décimale d'un nombre décimal : la comparaison de deux nombres comme 150,65 et 150,7 ; la difficulté pour les élèves à concevoir qu'il existe des nombres décimaux entre deux autres et à pouvoir en exhiber au moins un (par exemple entre 82,5 et 82,6) ou encore à produire l'encadrement d'un nombre décimal par deux nombres entiers consécutifs.

La multiplication par 10, 100, 1 000 n'est pas une difficulté pour les élèves quand il s'agit d'un nombre entier, grâce à la procédure qui permet de donner un résultat correct en ajoutant des zéros à droite ; les taux de réussite aux items correspondants sont alors supérieurs à 90 %. En revanche, multiplier par 10, 100, 1 000 des nombres décimaux (non entiers) comme dans $35,2 \times 100$ est une difficulté pour environ la moitié des élèves, avec une tendance à la baisse des taux de réussite au cours des deux dernières décennies. A noter que les écarts des résultats éducation prioritaire/ hors éducation prioritaire sur ce type de tâches sont plus marqués qu'en moyenne (sur l'ensemble des items).

6. Le calcul mental

Les taux de réussite (TR) aux tâches de calcul mental sont peu élevés, voire très peu élevés comme le montrent les exemples suivants.

- Addition et soustraction des décimaux :
 - $1,7 + 2,3$ TR = 61 % (Evaluation nationale 6^e 2003)
 - $5,2 + 13 + 2,8$ TR = 41,2 % (PACEM 2011, début de 6^e)
 - $38 - 1,5$ TR = 29,8 % (PACEM 2011, début de 6^e)
- Multiplication des décimaux:
 - 3 fois 0,5 TR = 44 % (Evaluation nationale 6^e 2003)
 - $62 \times 0,5$ TR = 17,5 % (PACEM 2011, début de 6^e)

Une des difficultés d'interprétation de ces taux est le non accès aux procédures des élèves, on ne sait pas en particulier si les élèves qui réussissent font un « vrai » calcul mental ou s'ils « posent mentalement un calcul écrit ». Cette stratégie de « calcul posé mental » trouve ses limites quand le temps de réponse est court ou/et que les nombres en jeu ne s'y prêtent plus comme par exemple pour ajouter 9,99 ou multiplier par 99.

7. Le calcul posé

Concernant le calcul posé, les évaluations en fin de CM2 à 20 ans d'intervalle ont montré que la performance des élèves aux techniques opératoires posées a considérablement baissé en deux décennies. Ainsi, de 1987 à 2007, l'addition $19\,786 + 215 + 3\,291$ a vu son pourcentage de réponses correctes baisser de 94 % à 83 % et la multiplication 247×36 de 84 % à 68 %. Cette baisse des performances se retrouve pour les calculs posés avec des nombres décimaux. Par exemple, la soustraction posée $4700 - 2789,7$ a été réussie par 71,7 % des élèves en 1987 et seulement par 49,5 % en 2007.

8. Bilan intermédiaire

Les résultats observés sur les nombres décimaux confirment des difficultés d'apprentissage pour une part importante des élèves. Les résultats très mitigés observés en calcul mental et en calcul posé interrogent des pratiques, mais aussi des enjeux d'enseignement, comme par exemple la place, l'utilité et les conséquences de l'enseignement des techniques opératoires, ou encore la disponibilité des tables de multiplication. Clairement des élèves se présentent à l'entrée au collège en grande ou très grande difficulté, et mon hypothèse en tant que chercheur est que d'autres élèves s'y présentent comme des « experts apparents », pouvant réussir certaines tâches mais pas d'autres, car ils n'ont pas ou ils ont très peu de connaissances conceptuelles associées. Par exemple, ajouter des zéros dans la partie décimale de deux nombres décimaux afin d'avoir le même nombre de chiffres permet de les comparer sans comprendre le sens de l'écriture décimale (tout comme le décalage de la virgule dans une multiplication par 10, 100, 1 000). Cette réussite opérationnelle, qui masquerait une conceptualisation insuffisante des nombres décimaux, masquerait aussi une compréhension conceptuelle insuffisante des nombres entiers, et notamment de la numération de position, ce qui constituerait alors un obstacle très important pour tous les apprentissages arithmétiques et algébriques à venir. Le parti pris que j'ai adopté et que je défends est qu'une certaine pratique du calcul mental peut favoriser cette compréhension conceptuelle des nombres, entiers, décimaux ou rationnels, qui implique et est impliquée par une disponibilité des opérations à acquérir.

II - LE CALCUL MENTAL

Le calcul mental a toujours fait partie de mes pratiques d'enseignant, au collège et au lycée, et j'ai maintes fois eu l'occasion de constater des effets positifs sur les élèves et le travail dans la classe, au-delà de dimensions purement cognitives. Comme formateur, j'ai souvent eu l'occasion de constater le manque de familiarité des enseignants, ou des futurs enseignants, avec le calcul mental, que ce soit dans le 1^{er} ou dans le 2nd degré ; j'ai ainsi découvert l'intérêt que peut présenter le recours au calcul mental en formation comme une réponse possible à des difficultés d'enseignement des nombres et du calcul.

1. Le calcul mental dans les programmes scolaires

1.1 *Un exemple d'apport de la didactique à l'institution*

En 1999, le ministère de l'éducation nationale donne mission à un groupe d'enseignants et de chercheurs de conduire une réflexion globale et à long terme sur l'enseignement des mathématiques, de l'école élémentaire à l'université. Cette Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (la CREM) présidée par Jean-Pierre Kahane, compte parmi ses membres plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques (comme Michèle Artigue, Guy Brousseau ou Catherine Houdement). Dans son rapport sur le calcul, la CREM expose clairement la dialectique entre calcul et raisonnement, et en particulier entre calcul mental et raisonnement. Elle insiste sur la notion « d'intelligence du calcul » et met en avant « le rôle privilégié du calcul mental pour mettre en place les rapports entre calcul et raisonnement dès les débuts de la scolarité » : autrement dit, elle souligne en quoi le calcul ne peut pas, ou ne peut plus être considéré seulement comme une activité technique, qui constituerait une fin en soi, décorrélée d'une partie plus noble de l'activité mathématique, qui serait le raisonnement. Plus généralement, les travaux en didactique des mathématiques ont contribué à donner sa place au calcul mental dans les programmes actuels de l'école primaire. Je pense notamment à ceux de Denis Butlen et

de Monique Pézard (1992, 1996, 2007), dans les pas desquels je m'inscris, qui montrent que le calcul mental est une façon privilégiée de lier calcul et raisonnement en mettant en jeu les propriétés des nombres et des opérations. En 2002, on trouve cette vision du calcul mental développée dans les programmes scolaires de l'école et du collège, vision réaffirmée dans les programmes 2016 : celle d'un calcul mental qui rappelle la nécessité de connaissances automatisées et le rôle de la mémoire, mais qui va au-delà, en soulignant en quoi le calcul mental peut constituer un moyen d'apprentissage de connaissances des nombres et des opérations.

1.2 De la prescription à la réalité : des écarts importants

Des programmes aux pratiques des enseignants, on sait qu'il y a des adaptations, des déformations possibles, d'ailleurs nécessaires pour prendre en compte les différents contextes, et l'enseignement du calcul mental montre à ce titre une grande variabilité sur un certain nombre de dimensions : sur la durée et sur la fréquence d'abord – 42 % des élèves déclaraient avoir fait au CM2 du calcul mental chaque jour, 12 % deux fois par semaine, et 35 % déclaraient en avoir fait seulement de temps en temps (Chesné, 2014) –, ensuite sur les tâches proposées aux élèves et sur les déroulements : « si des progrès quantitatifs sont tangibles (pratique plus régulière dans toutes les classes), il reste beaucoup à faire qualitativement ; les séances sont trop souvent « monotones », « archaïques », pas assez dynamiques » (Rapport IGEN, 2013). Mais ce qui me semble le plus important, et qui va au-delà des tâches, c'est ce que j'entends quand Butlen, Pézard et Masselot (2010) parlent de « vigilance didactique » : ce sont les enjeux d'apprentissage et les activités potentielles des élèves liées à ces enjeux.

2 De quoi parle-t-on quand on parle de « faire du calcul mental » ?

2.1 Ce que recouvre le calcul mental

J'adopte comme définition du calcul mental l'ensemble des activités qui consistent à effectuer des opérations avec des nombres, essentiellement sans aide matérielle externe. J'étends ces activités à un travail explicite sur les désignations et représentations des nombres (écrites, orales, symboliques chiffrées ou non) et à un travail participant, tout ou en partie, à la résolution de problèmes mettant en jeu des données numériques, dans un cadre intra ou extra mathématique (qui peut aller de l'amorce de la démarche à la résolution complète). Le calcul mental est donc bien davantage que la seule activité, fréquente dans les classes de l'école primaire il y a une cinquantaine d'années, qui consistait à exécuter le plus rapidement possible des procédures opératoires sur les nombres, et dont l'objectif principal était l'automatisation de ces procédures. La définition que je propose du calcul mental se rapproche largement du concept anglo-saxon de « *number sense* » qui fait référence à « la compréhension générale des nombres et des opérations, ainsi qu'à la capacité d'utiliser cette compréhension de façon adaptée dans la gestion de situations numériques, pour porter des jugements mathématiques et élaborer des stratégies utiles et efficaces ».

Cette proximité du calcul mental avec le « sens des nombres » ou la conscience des nombres (à distinguer d'ailleurs de ce qu'entendent les neuro-sciences par le « sens du nombre ») permet de mettre en avant plusieurs dimensions du calcul mental, dont l'efficacité, c'est-à-dire le fait de produire un résultat correct dans une durée restreinte. Un algorithme de calcul posé serait quant à lui qualifié d'efficace par son caractère généralisable. Cette efficacité repose sur la mémorisation de faits numériques et sur le fait de disposer de plusieurs procédures automatisées adaptées parmi lesquelles il est possible de choisir. Elle se reconnaît aussi à l'habileté pour déterminer un ordre de grandeur, dans un objectif d'anticipation ou de contrôle d'un résultat, notamment dans des situations de la vie quotidienne.

Enfin, je reprends à mon compte ce que les chercheurs appellent *inclination* en anglais, et que je comprends comme la tendance et l'envie de recourir au calcul mental, associées à la disponibilité, au sens d'Aline Robert (1998), de connaissances sur les nombres et les opérations.

2.2 Une certaine pratique du calcul mental favorable à l'apprentissage des élèves

Ce travail de précision sur ce que recouvre le calcul mental m'amène à clarifier la nature des objectifs visés en calcul mental : fin en soi pour que les élèves acquièrent des connaissances et des capacités spécifiques parmi d'autres connaissances et d'autres capacités, et/ou moyen pour faciliter chez eux des apprentissages, ou leur permettre de les amorcer. Autrement dit, le calcul mental peut être vu comme un apprentissage parmi d'autres, mais aussi et surtout, comme une modalité d'apprentissage de connaissances qui le dépassent.

La très grande majorité des recherches, qu'elles soient nationales ou internationales, s'accordent à présenter les bienfaits du calcul mental dans les apprentissages des élèves, même s'il n'y a cependant pas convergence complète sur les bénéfices qu'en tireraient tous les élèves et sur les manières d'enseigner. Dès 1967, Biggs montre qu'une pratique régulière du calcul mental à l'école primaire a surtout comme effet d'augmenter l'anxiété des élèves sans améliorer sensiblement leurs compétences. Biggs attribue cet effet – et cette absence d'effet – à la nature des tâches proposées. D'autres recherches menées sur les pratiques d'enseignement relatives au calcul mental font également apparaître le risque de voir ces pratiques réduites à des exercices techniques routiniers. Depuis les années 1990, de nombreux chercheurs internationaux, parmi lesquels Beishuizen, Reys, Sowder ou Verschaffel, ont investi le champ du calcul mental, notamment sur des aspects qui touchent à la connaissance des faits numériques et à l'estimation d'un ordre de grandeur. Ils rejettent quasi-unaniment l'enseignement exclusif, mécanique, des algorithmes standards de calcul posé au profit d'une place plus grande en faveur du calcul mental, et en particulier de la compréhension par les élèves des méthodes et des stratégies utilisées en calcul mental.

Cette réflexion m'a conduit à déterminer trois fonctions spécifiques que le calcul mental peut jouer pour permettre aux enseignants de contribuer à faire surmonter des difficultés identifiées chez les élèves :

- une fonction strictement cognitive du côté des tâches et des activités spécifiques des élèves qu'elles peuvent provoquer : le calcul mental peut participer à l'acquisition de connaissances mathématiques des élèves, c'est-à-dire développer le sens des nombres chez les élèves, avec la signification que j'ai donnée à cette expression, et favoriser des habiletés pour la résolution de problèmes ;
- du côté du rythme des apprentissages, en augmentant les occasions de fréquenter les nombres : le calcul mental offre aux enseignants la possibilité d'adopter un « rythme didactique » spécifique ; au niveau macro, dans l'organisation annuelle de leur enseignement, cela permet non seulement la fréquentation régulière, renouvelée, de notions, mais aussi l'anticipation de nouveaux apprentissages pour les élèves, avec l'élaboration progressive de représentations mentales et de formulations intermédiaires ; et au niveau local, l'organisation de moments de classe spécifiquement dédiés au calcul mental, sans lien nécessaire avec le reste des séances, permet de jouer facilement sur la répétition tout en préservant de la souplesse (rien n'empêche par exemple de commencer une séance de géométrie par quelques tâches de calcul mental) ;
- et enfin, une troisième fonction, qui porte *a priori* sur une tout autre dimension, mais néanmoins importante, notamment dans les classes de l'éducation prioritaire : la pratique du calcul mental

est un moyen d'installer un climat de classe favorable aux apprentissages, en créant des routines qui favorisent une mise en activité rapide de tous les élèves. La prise en compte de ce dernier aspect du calcul mental va d'ailleurs au-delà de ce seul aspect de gestion de classe, puisqu'il apparaît que des tâches de calcul mental peuvent être à la fois immédiatement accessibles aux élèves (donc être considérées comme « simples ») tout en leur offrant des cheminements différents pour les effectuer, avec un jeu de micro-dialectiques outils/objets sur les nombres et sur les opérations (et donc être considérées comme « complexes »).

Ces trois fonctions sont potentiellement porteuses de facteurs favorables à l'apprentissage des élèves. Ainsi :

- le calcul mental peut développer une compréhension structurale des nombres par opposition à une connaissance procédurale presque exclusivement fondée sur les chiffres, et il intervient positivement dans le développement des capacités liées à la résolution de problèmes ; il permet un engagement dans des démarches heuristiques, et mobilise des stratégies personnelles de résolution et de contrôle ;
- l'intégration du calcul mental dans une programmation annuelle, en créant des occasions fréquentes et graduelles d'apprentissage par imprégnation, peut offrir aux élèves des conditions progressives, d'acquisition par petites touches de connaissances qu'ils s'approprieraient plus difficilement, voire ne s'approprieraient pas du tout autrement (par exemple le fait que $7/3$ soit l'écriture d'un quotient peut être l'étape finale d'une succession de situations courtes, régulières et variées et non une institutionnalisation venant immédiatement après une situation introductive) ; on peut penser ici à un enseignement en spirale ;
- le calcul mental favoriserait l'engagement des élèves dans des processus d'apprentissage en respectant leur hétérogénéité par des dynamiques spécifiques de pratiques d'un enseignant dans sa classe, parce qu'il permet des modalités d'enseignement relativement faciles à mettre en œuvre et qu'il peut modifier de façon positive les interactions enseignant/élèves et élèves/élèves (choix de déroulements, explicitation individualisée possible des procédures ou, travail en groupes, travail sur ordinateur ou tablette).

Mon hypothèse globale de chercheur est donc qu'une certaine pratique du calcul mental en classe permet d'optimiser l'acquisition de connaissances des élèves grâce à des choix sur les nombres et sur les opérations et des scénarios adaptés, cette pratique étant de plus compatible avec des modalités de gestion de la classe favorables à l'apprentissage des élèves.

2.3 Calcul mental versus calcul posé

Lieven Verschaffel³⁰, lors de la conférence sur la numération de novembre 2015, a bien montré en quoi le calcul mental est porteur d'un intérêt primordial, notamment par comparaison avec le calcul posé. Du point de vue de la nature de l'activité cognitive, le calcul posé repose sur des algorithmes, il fonctionne sur les chiffres des nombres, et il exige de travailler « de droite à gauche » (sauf pour la division), alors que le calcul mental a un fondement heuristique, il opère sur les nombres au lieu des chiffres, et il va « de gauche à droite » (comme on dit et comme on écrit les nombres).

Prenons le cas d'une somme à calculer, par exemple $37 + 99$. Dans un calcul posé, il s'agit d'abord pour un élève de reconnaître qu'il s'agit d'une addition de deux entiers et éventuellement de repérer qu'ils

³⁰

La présentation de L. Verschaffel est disponible à l'adresse : <http://www.dailymotion.com/video/x3fg51f>

ont le même nombre de chiffres. La deuxième étape consiste à choisir une organisation spatiale adaptée (écriture des nombres l'un en-dessous de l'autre avec alignement des chiffres de même rang), puis à gérer l'écriture de nouveaux chiffres, y compris celle de la retenue intermédiaire. Enfin, vient une phase de traitement qui est ici un algorithme et qui comporte au moins 3 étapes : « $7 + 9 = 16$, je pose 6 et je « retiens » 1 ; $3 + 1 = 4$ et $4 + 9 = 13$ ». Le résultat est le nombre qui s'écrit avec un 1, un 3 et un 6 dans cet ordre, donc $37 + 99 = 136$. Cette analyse vaut peu ou prou pour tous les calculs posés, notamment l'étape finale, « reconstitutrice » du résultat obtenu à partir de chacun de ses chiffres, et éventuellement avec une virgule à placer correctement. Une ultime étape pourrait être – ou devrait être – un contrôle *a posteriori* de l'ordre de grandeur du résultat, mais l'activité menée dépasse alors l'application stricte de l'algorithme.

Sur la même somme ($37 + 99$) à effectuer mentalement, il s'agit toujours de reconnaître une addition de deux entiers, mais en identifiant cette fois dès le départ que l'un des deux est très proche de 100. Le travail consiste d'abord à remplacer la somme à effectuer par celle de 100 et de 37 et de compenser ensuite (ou avant). Le traitement interne qui suit est donc anticipé par la double reconnaissance de l'opération à effectuer et de la spécificité des nombres en jeu. C'est comme si cette phase avait été déclenchée avant d'avoir réellement débuté le calcul, par la transformation de 99 en $100 - 1$. Il reste alors à effectuer $37 + (100 - 1)$: on remplace un entier par une différence d'entiers (choisie lors de l'anticipation), puis une somme de deux entiers par une somme/différence de trois entiers, et on table sur la disponibilité de $37 + 100$, de $137 - 1$ et de l'associativité en actes, qu'on considère ici comme naturelle.

Le calcul mental permet en outre, une articulation aisée entre différents registres de représentation sémiotique, oraux et écrits ; l'exemple d'un quart, écrit sous forme décimale ou sous forme fractionnaire, me paraît à ce titre significatif.

3. Les recommandations du jury de la conférence de consensus de 2015 sur la numération³¹

Cette conférence de consensus, présidée par Michel Fayol, a permis à plus de 20 chercheurs de présenter leurs travaux sur l'apprentissage et l'enseignement des nombres et du calcul à l'école primaire. Quatre rapports spécifiquement rédigés pour la conférence portent sur :

- l'apport de la recherche sur les premiers apprentissages en mathématiques : Michel Fayol y expose trois moments clés dans l'apprentissage des nombres et des opérations ;
- les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire, rapport que j'ai rédigé avec Jean-Paul Fischer ;
- l'offre éditoriale et l'utilisation des manuels scolaires à l'école primaire (Eric Mounier & Maryvonne Priolet) ;
- les pratiques des enseignants en éducation prioritaire (Denis Butlen, Monique Charles-Pézarid et Pascale Masselot).

À l'issue de la conférence, un jury d'une vingtaine de personnes (enseignants, inspecteurs, formateurs, parents) a rédigé un ensemble de recommandations articulées autour de cinq grands axes :

³¹ L'ensemble des rapports rédigés pour la conférence, les vidéos des interventions des experts et les recommandations du jury sont disponibles sur le site du Cnesco : <http://www.cnesco.fr/fr/numeration/>

1. l'évolution des pratiques quotidiennes des enseignants ;
2. le partage avec les parents d'occasions d'apprentissage ;
3. l'accès pour les enseignants à des ressources pédagogiques de qualité, facilement accessibles et adaptatives (notamment des ressources numériques, dont je ne parlerai pas aujourd'hui) ;
4. l'adaptation de la formation initiale des enseignants, notamment celle des enseignants du premier degré, et la nécessité de les accompagner ;
5. l'intégration des résultats de la recherche dans les programmes (mais nous avons vu que cela avait commencé) et l'évaluation de leur mise en œuvre.

Parmi les recommandations qui ont trait aux pratiques des enseignants, plusieurs ont à voir, directement ou indirectement, avec le calcul mental et montrent bien comment le calcul mental peut être un moyen d'apprentissage des mathématiques :

- **S'appuyer sur l'oral avant de passer à des écritures symboliques**, c'est-à-dire prendre appui sur des connaissances « déjà-là » et donner du temps aux élèves pour passer du tangible au symbolique en accordant de la place à l'oral : c'est important pour les nombres entiers, mais aussi pour les fractions et les décimaux ; un quart, c'est d'abord un quart de quelque chose ; 25 centièmes, c'est aussi 25 centièmes de mètre ou de litre (penser aux liens de la numération avec les grandeurs), puis un nombre qui pourra se dire puis s'écrire de différentes façons.
- **Ne pas attendre la maîtrise parfaite d'une notion pour en aborder une nouvelle avec les élèves** : à partir d'une vision strictement cumulative des mathématiques, les enseignants privent les élèves de processus d'apprentissage dialectiques ; cette recommandation me semble particulièrement importante pour l'apprentissage des fractions et des décimaux, qui nécessite du temps et des ruptures de représentations par rapport aux entiers.
- **Insister davantage sur l'apprentissage des tables d'addition et de multiplication.**
- **Privilégier le calcul mental par rapport au calcul posé** : à ce sujet, des documents d'accompagnement sur le calcul pour les cycles 2 et 3, avec des exemples de tâches et de cheminements possibles pour les traiter, vont bientôt être disponibles, avec un accent sur le calcul mental, et sur le calcul en ligne, sorte de calcul mental étayé par la possibilité d'écrire des calculs intermédiaires qui permettent de libérer la mémoire de travail ;
- **Faire dire à l'élève comment il a fait pour arriver à son résultat** : une séance de calcul mental est un moment particulièrement opportun pour avoir accès aux conceptions et aux stratégies des élèves, correctes ou erronées ; la nature des tâches et la faible part de l'écrit sont des occasions favorables pour que les élèves verbalisent leurs différentes conceptions ou procédures ; l'enseignant peut alors décider de les laisser en l'état, sans chercher à les modifier ni à les hiérarchiser (mais il les a identifiées) ; il peut aussi les reformuler afin de les faire évoluer ou privilégier certaines d'entre elles, ou encore faire émerger et institutionnaliser des conceptions correctes ou des procédures expertes ;
- **Associer l'apprentissage des techniques opératoires à la compréhension des nombres** : il y a un vrai enjeu sur l'apprentissage des techniques opératoires au 21^e siècle, qui n'est pas encore tranché en France : en quoi est-il utile, important, nécessaire pour un élève, pour un adulte, de les connaître ou de les maîtriser ? En l'état actuel des programmes, les enseignants (et les formateurs) doivent se poser un certain nombre de questions à ce sujet, avoir des éléments de

réponse et les partager « aux bons moments » avec les élèves : par exemple pourquoi enseigner de telle ou telle façon la technique de la soustraction ? Qu'est-ce qui est en jeu dans la multiplication ? Dans une division à quotient décimal, ou à quotient dont l'écriture décimale « ne se termine pas » ? A ce sujet, l'atelier animé par Céline Constantin a bien mis en évidence, à partir de la question de la multiplication et celle de la distributivité, les tensions auxquelles doivent faire face les enseignants du premier degré dans l'enseignement des techniques opératoires.

On voit donc bien les perspectives encourageantes d'amélioration de l'apprentissage des élèves *via* un enrichissement des pratiques des enseignants, et donc par corollaire, l'importance de la formation correspondante. Cela amène à chercher à identifier des facteurs clés d'efficacité d'une telle formation, même si c'est difficilement évaluable. On peut ainsi s'interroger sur la place du calcul mental dans une formation d'enseignants, et se demander s'il constitue un de ces facteurs, dépassant la seule fonction d'une composante spécifique de la formation qu'on pourrait lui attribuer *a priori*.

III - QUELS « FACTEURS CLÉS D'EFFICACITÉ » DANS UNE FORMATION D'ENSEIGNANTS : QUELLE PLACE POUR LE CALCUL MENTAL ?

1. L'expérimentation PACEM

Pour répondre à ces questions, je vais m'appuyer sur le travail de recherche que j'ai mené à partir de l'expérimentation PACEM.

1.1 Présentation et résultats de l'expérimentation

L'expérimentation PACEM est une expérimentation à grande échelle visant à favoriser l'acquisition de compétences par les élèves en mathématiques, à travers une formation continue d'enseignants, dont le scénario et les contenus sont sous-tendus par une vision particulière de l'enseignement des mathématiques, et qui a donné une place importante au calcul mental.

Le protocole de mesure d'impact de l'expérimentation est effectué par la comparaison des résultats des élèves à un pré-test et à un post-test, que j'ai construits à partir d'items d'évaluations nationales (standardisées) antérieures, et validés d'un point de vue psychométrique³². Un groupe expérimental et un groupe témoin ont été constitués, avec à l'intérieur de chacun de ces deux groupes, deux catégories d'enseignants : le groupe expérimental est composé d'enseignants formés en présentiel, et de leurs collègues dans leurs établissements, c'est-à-dire d'enseignants potentiellement formés, indirectement, par dissémination de la formation reçue en présentiel. Le dispositif visait en effet une évolution des pratiques individuelles des enseignants, mais aussi de leurs pratiques collectives, intra-établissements. Le groupe témoin est composé d'enseignants comparables à ceux qui ont été formés en présentiel³³, et de leurs collègues dans leurs établissements.

Les résultats obtenus, par-delà les biais possibles liés à l'expérimentation, ont montré un impact global positif et significatif de l'expérimentation avec :

³² Les items retenus étaient identifiés comme pertinents et variés pour évaluer les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul, au niveau scolaire considéré (en particulier, les taux de réussite aux évaluations standardisées antérieures étaient connus).

³³ Le choix des enseignants formés en présentiel a été effectué à partir d'un groupe d'enseignants tous remarqués par les IA-IPR de Créteil, et volontaires. Les enseignants non retenus dans le groupe expérimental et les collègues de leurs établissements ont constitué le groupe témoin.

- un effet positif direct de la formation, c'est-à-dire sur les élèves des enseignants formés ;
- un effet positif indirect de la formation : on observe une nette progression des élèves des enseignants de la seconde catégorie du groupe expérimental, c'est-à-dire des élèves des enseignants qui ne sont jamais venus en formation ;
- des tendances intéressantes sur les résultats des filles, sur ceux des élèves d'éducation prioritaire, et sur ceux des élèves de bas niveau, qui semblent marquer des « effets de rattrapage » ;
- un effet positif durable du dispositif, mesuré par deux tests effectués en fin de 5^e (un test spécifique lié à l'expérimentation, et le test national proposé en 2012).

1.2 Cadre théorique

Une partie importante de mon travail de recherche a consisté à interroger et à comprendre *a posteriori* ce qui avait été mis en place dans la formation lors de l'expérimentation PACEM, pour en quelque sorte dénaturer les éléments qui la composaient, les analyser, identifier ceux qui pouvaient être considérés comme des facteurs d'efficacité, et enfin repérer des marges d'évolution ou des alternatives.

Même si dans la réalité, l'expérimentation a été *a priori* sous-tendue par des conceptions personnelles de l'enseignement des mathématiques et de la formation, elle avait fortement été influencée par un cadrage théorique que j'ai été ensuite amené à préciser et à adapter à mes questionnements. Je me réfère à deux cadres théoriques principaux :

- la théorie de l'activité (Chesné, 2014), qui permet d'étudier, en situation scolaire et en mathématiques, les apprentissages des élèves en relation avec leurs activités provoquées par leurs enseignants, ce qui m'a conduit, pendant la formation, à mettre les activités mathématiques des élèves au centre de ce qui peut provoquer leurs apprentissages ;
- et la théorie de la double approche, didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002) qui est un moyen de prendre en compte la complexité des pratiques (réelles) des enseignants, et qui en formation permet d'anticiper sur les pratiques potentielles des enseignants, leurs priorités, leurs besoins, déclarés ou non, et les déroulements possibles de ce qui peut se jouer en classe.

Aline Robert et moi-même sommes aussi engagés depuis plusieurs années dans un travail de modélisation, qui s'inspire de la notion de zone proximale de développement. Nous définissons ainsi une zone proximale de développement des pratiques (ZPDP), associée à des activités d'enseignants proches des leurs, qu'ils peuvent reconstituer, apprécier, analyser et enrichir. L'hypothèse que nous faisons est que pour qu'un travail en formation enrichisse les pratiques, et pas seulement des connaissances sur les tâches à proposer aux élèves ou les déroulements, il est important que ce travail s'appuie sur des éléments des pratiques relevant de cette ZPDP, dont les enseignants ont conscience ou peuvent prendre conscience.

1.3 Caractéristiques de la formation des enseignants

Concrètement, la formation des enseignants a duré 18 heures réparties en 1 journée puis 4 demi-journées sur la première moitié de l'année scolaire. Tout en étant centrée sur le calcul mental, la formation a abordé des points cruciaux du programmes de 6^e (multiplication des décimaux, passage du partage au quotient, résolution de problèmes). Elle a comporté quatre temps :

- **une phase d'amorce** destinée à favoriser des prises de conscience des enseignants sur des notions clés, à partir d'items et de résultats d'évaluations nationales, puis des résultats des élèves au pré-test (cf ci-dessus) ; cette première phase était également destinée à faire émerger ou à évoquer des

pratiques, et à faire exprimer des besoins par les enseignants ;

- **un apport** de connaissances mathématiques et didactiques par le formateur, s'appuyant sur ce qui précède, dans le domaine des nombres et du calcul, et particulièrement en calcul mental ;
- **une phase d'appropriation** par les enseignants de ces connaissances pour les inscrire dans des pratiques de classe possibles, grâce à des exemples concrets de couples tâches/déroulements en calcul mental ;
- **une phase de structuration**, permettant aux enseignants d'organiser les différentes séances de calcul mental entre elles d'une part, et les séances de calcul mental dans une programmation globale annuelle des nombres et du calcul d'autre part.

Au final, avec des contenus pertinents, il apparaît qu'une « formation à l'envers » (Robert, Lattuati et Penninckx, 2012) – c'est-à-dire une formation dans laquelle les apports du formateur sont non donnés d'emblée, mais adaptés aux besoins des enseignants, soit qu'ils aient été exprimés par eux, soit qu'ils aient été identifiés par le formateur – est un facteur d'efficacité dans une formation visant à faire évoluer les pratiques d'enseignants. Cette stratégie inductive de formation part d'éléments de pratiques locales des enseignants, pour remonter ensuite vers des alternatives et des pratiques plus globales. Ce type de formation apparaît particulièrement cohérent avec le domaine qui nous intéresse aujourd'hui, et ceci à plusieurs niveaux, car :

- il offre aux formateurs **un moyen d'accès aux pratiques des enseignants**, et en ce sens l'utilisation d'un matériau neutre et riche comme des items d'évaluations externes est très intéressant ;
- il ouvre une **palette de pratiques possibles intégrables localement** : parmi l'immense variété des tâches et des scénarios possibles, tous les enseignants peuvent s'en approprier certains ;
- ces choix de déroulement et de contenus possibles se révèlent « **non globalement déstabilisateurs** » : ils peuvent dans un premier temps être intégrés localement par les enseignants, dans leurs contenus et/ou dans la durée, sans remettre en cause l'ensemble de leurs pratiques ;
- enfin, cette entrée locale du type « cheval de Troie » peut avoir **une portée globale sur les pratiques des enseignants**.

Le travail sur le calcul mental favoriserait donc à la fois une entrée locale, et donc à effets rapides, sur les représentations et des pratiques des enseignants, et une évolution de celles-ci plus en profondeur.

IV - BILAN ET PERSPECTIVES

En ce qui concerne le champ de la didactique des mathématiques, on peut donc apporter des réponses aux questions posées, qui ne sont pas toutes de même nature, et sans doute pas à considérer au même degré de développement. Parmi elles, notamment dans des contextes où les conditions d'enseignement sont difficiles et les enjeux particulièrement importants, je retiendrai :

- **l'intérêt du calcul mental** comme élément d'apprentissage des élèves, comme élément de pratiques des enseignants et comme élément de formation des enseignants ;
- **du côté de la formation des enseignants** : la validité d'un travail de formation dans une zone proximale de développement des pratiques des enseignants, et l'ancrage d'une formation sur au moins deux composantes des pratiques au sens de la double approche.

Des pistes restent bien entendu à explorer pour la recherche :

- **sur le calcul mental**, avec des études plus poussées sur sa mise en place en classe, sur les tâches, des études cliniques sur les liens tâches/activités/productions des élèves, sur l'articulation avec l'ensemble des mathématiques enseignées pendant l'année scolaire, sur l'utilisation de ressources numériques.
- **sur la formation des enseignants** : sur la spécificité du domaine (nombres et calcul), sur des adaptations et alternatives (par exemple en terme de supports servant à l'amorce), sur le format spatio-temporel (hybridation, formation de proximité), sur la dimension (comment passer à une extension ou à une généralisation ?) et sur le rôle des formateurs dans les formations d'enseignants (analyse de l'activité des formateurs) ?
- **sur les évaluations standardisées**, avec un travail de croisement entre différents types de tâches, une analyse des activités des élèves pendant un test, formes différentes d'évaluation (en groupes, avec aides), un travail de croisement entre évaluations de classe et évaluations standardisées.

V - BIBLIOGRAPHIE

BEISHUIZEN M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294-323.

BEISHUIZEN M. (1997). Mental arithmetic: Mental recall or mental strategies? *Mathematics Teaching*, 160, 16-19.

BIGGS J. B. (1967). *Mathematics and the conditions of learning*. Slough: National Foundation for Educational Research.

BUTLEN D. (2007). Le calcul mental entre sens et technique, *Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution des problèmes numériques*. Presses universitaires de Franche-Comté.

BUTLEN D. & PÉZARD M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM2, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 12(2/3) 319-368.

BUTLEN D. & PÉZARD M. (1996), Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire. *Cahier de DIDIREM n°27*. Paris, IREM Paris 7.

BUTLEN D., CHARLES-PÉZARD M. & MASSELOT P. (2010). Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique in *Actes du colloque « Les didactiques en question : état des lieux et perspectives pour la recherche et la formation »*, Université de Cergy-Pontoise, IUFM de Versailles.

CHESNÉ J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot (Paris 7).

CHESNÉ J.-F. & FISCHER J.-P. (2016). « Partir des pratiques » en formation professionnelle des enseignants de mathématiques des lycées et collèges. *Petit x*, 97, 78-80.

CHESNÉ J.-F., LARDEUX R. & PROST S. (2012). PACEM : une expérimentation de formation continue d'enseignants en mathématiques. Résultats en sixième. *Note d'Information 12.23* – Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance.

CHESNÉ J.-F., PARIÈS M. & ROBERT A. (2009). « Partir des pratiques » en formation professionnelle des enseignants de mathématiques des lycées et collèges. *Grand N* 80, 25-46.

DARLING-HAMMOND L. & ROTHMAN R. (Eds) (2011). *Teacher and Leader Effectiveness in High-Performing Education Systems*. Washington, DC : Alliance for Excellent Education and Stanford, CA: Stanford Center for Opportunity Policy in Education.

IGEN (2013). *Bilan de la mise en œuvre des programmes issus de la réforme de l'école primaire de 2008*. http://cache.media.education.gouv.fr/file/2013/72/8/2013-066-Rapport-IGEN-Bilan-de-la-mise-en-oeuvre-des-programmes-issus-de-la-reforme-de-2008_284728.pdf

KAHANE J.-P. (Ed) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Paris, Odile Jacob.

REYS B. (1991). Number sense: Building on student's intuitive knowledge. In C. J. Irons (Ed.), *Challenging children to think when they compute: Developing number sense, mental computation and computational estimation*, Proceedings of the 1st annual conference on Mathematics Teaching and Learning presented by The Centre for Mathematics and Science Education, Queensland University of Technology, Brisbane.

REYS B. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 1, 3, 114-120.

ROBERT A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2) 139-190.

ROBERT A., LATTUATI M., PENNINCKX J. & al. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Besançon : Presses universitaires de Franche -Comté.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4) 505-528.

SOWDER J. (1990). Mental computation and number sense. *Arithmetic Teacher*, 37, 7,18-20.

SOWDER J. (1991). Teaching computation in ways that promote number sense. In C. J. Irons (Ed.), *Challenging children to think when they compute: Developing number sense, mental computation and computational estimation*, Proceedings of the 1st annual conference on Mathematics Teaching and Learning. Queensland University of Technology, Brisbane.

VERSCHAFFEL L. & DE CORTE, E. (1996). Number and arithmetic. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, 99-137. Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer.

VERSCHAFFEL L., GREER B., & DE CORTE E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Greenwich, CT: information Age Publishing.