ÉLABORATION D'UNE RESSOURCE POUR LA FORMATION EN GEOMETRIE : LES CONSTRUCTIONS A L'AIDE D'UN GABARIT DE RECTANGLE

Stéphane GINOUILLAC
ESPE de l'Académie de Versailles
Laboratoire LMV (UVSQ)
Stephane.Ginouillac@uvsq.fr

Résumé
Nous proposons une situation pour la formation en géométrie, dans une perspective d'homologie-transposition, qui repose sur l'utilisation d'un gabarit de rectangle comme un instrument pour réaliser des problèmes de construction. Après une description de la situation proposée, ainsi que des questions et des ressources existantes qui l'ont inspirée, nous étudions certains éléments de transposition auxquelles elle peut donner lieu, d'ordre didactique (notamment la genèse instrumentale des instruments en géométrie) ou mathématique (par exemple la réactivation de savoirs de géométrie du collège ou la rédaction de programmes de construction). Nous présentons enfin une première expérimentation de cette situation qui a pu être menée en formation initiale et que nous décrivons à l'aide d'un modèle d'analyse de situations de formation, actuellement développé par la Copirelem.

Avertissement avant de commencer la lecture du texte :

Il nous semble extrêmement important, avant la lecture de ce texte, de s'approprier d'abord la situation proposée en commençant par résoudre quelques-uns des problèmes de construction demandés (ajoutons que c'est aussi la première tâche qu'ont dû effectuer les participant-es [1] de l'atelier avant de pouvoir en discuter). Ce premier temps de recherche nous semble en effet indispensable pour profiter pleinement des analyses qui vont suivre. Pour cela, il y a besoin d'une feuille de papier blanc, d'un crayon et d'un gabarit de rectangle, c'est-à-dire d'un simple morceau de papier un peu fort (ou carton, bristol, etc.) découpé en forme de rectangle, par exemple aux dimensions de 2,5 cm sur 6,5 cm[2]. On ne doit l'utiliser que comme gabarit, c'est-dire pour tracer tout ou partie de son contour, sans pouvoir écrire dessus ni le plier ni le déchirer. Au moyen de ce seul instrument, il est demandé de réaliser les constructions qui sont proposées dans la feuille A de l'annexe 2 (ou du moins, si ce n'est de les réaliser toutes, au moins celles numérotées de 1 à 12).

I - INTRODUCTION

Cet atelier a été inspiré par un atelier du précédent colloque de la Copirelem (Celi & Jore, 2014) qui proposait également d'utiliser des problèmes de constructions au moyen d'un instrument atypique, la règle à bords parallèles, dans une stratégie d'homologie-transposition en formation. Cet atelier visait explicitement la transmission de contenus mathématiques à des étudiant-es en première année de master enseignement pour le premier degré (M1-PE), l'enjeu étant en quelque sorte de leur permettre de se réapproprier autrement la géométrie du collège. Cette situation visait ainsi, comme premier enjeu, le travail de contenus mathématiques du second degré sans se centrer sur d'éventuelles possibilités de reprises directes au niveau du premier degré.

Inspiré par cette proposition (ainsi que par d'autres ressources qui seront détaillées plus loin, notamment la situation du gabarit de carré déchiré qui a fourni l'idée d'utiliser des gabarits), la question

[1] Nous utiliserons cette graphie mixte pour prendre en compte les deux genres sans en exclure aucun, dans la mesure où elle constitue un standard qui est de plus en plus répandu de nos jours, et où elle permet d'écrire des formulations moins lourdes que celles du type : « les participantes et les participants ».

[2] Pour les habitué-es des transports en commun d'Ile-de-France, un simple ticket de métro usagé peut aussi bien faire l'affaire !

s'est posée de chercher une situation du même type mais s'appuyant sur des contenus plus proches de ceux du premier degré et qui permette ainsi de travailler des enjeux mathématiques et didactiques de l'école élémentaire. Cette réflexion a conduit à la proposition de la situation présentée ici, dite « *situation des constructions au gabarit de rectangle* ».

Une expérimentation partielle en 2014-15 avec des étudiant-es-stagiaires (PES) en deuxième année de master (M2), puis une autre plus complète dans un module de formation préprofessionnelle en troisième année de licence (L3), ont renforcé l'idée que cette situation pouvait être effectivement intéressante en formation. Ces expérimentations ont servi d'appui dans ces deux niveaux (L3 et M2) à un travail sur des contenus à la fois didactiques (en particulier, la question de la genèse instrumentale des instruments de géométrie) et mathématiques (notamment la révision de certaines notions de géométrie du collège et la rédaction de programmes de construction). Restait alors la nécessité de présenter les premières intuitions qui s'en dégageaient à un collectif plus large de formateur-es afin de mieux évaluer la portée potentielle de ce qui était proposé, et ce retour constituait l'un des principaux enjeux de cet atelier. De fait, un certain nombre des participant-es de l'atelier ont confirmé l'intérêt qu'ils voyaient à utiliser cette situation en formation initiale (que ce soit pour des niveaux de L3, M1 ou M2), voire ont envisagé de la transposer en formation continue ou bien pour la classe elle-même, et nous essayons de présenter ici les principaux éléments qui ont été dégagés.

Pour cela, nous commencerons par décrire la situation proposée (partie II) et le déroulement de l'atelier (III), puis nous présenterons les questionnements qui en étaient à l'origine (IV) et les ressources qui ont contribué à l'inspirer (V). Nous analyserons ensuite certains des éléments de transposition qui nous semblent pouvoir être associés à cette situation en formation et qui ont été discutés pendant l'atelier, en développant particulièrement des questions qui relèvent de la genèse instrumentale (VI) puis plus brièvement d'autres qui ont également été discutés pendant l'atelier, notamment concernant des enjeux de démonstration et des enjeux langagiers (VII). Nous décrirons pour finir l'expérimentation qui a été menée en licence et nous analysons son déroulement à l'aide d'un modèle d'analyse de situations de formations qui est actuellement en cours de développement par la copirelem (VIII).

II - LA SITUATION DES CONSTRUCTIONS AU GABARIT DE RECTANGLE

Commençons par décrire la situation mathématique proposée, que nous désignerons dans toute la suite comme « *situation des constructions au gabarit de rectangle* » ou même seulement « *situation du gabarit de rectangle* ». Nous présentons d'abord le matériel utilisé, en soulignant certains choix opérés concernant des variables didactiques, puis les problèmes de construction qu'il s'agit de réaliser.

1 Le matériel utilisé

Pour cette situation, il y a besoin d'une feuille de papier, d'un crayon ou d'un stylo et d'un gabarit de rectangle, qui servira d'instrument de construction. Chaque personne dispose d'un seul gabarit, avec lequel elle doit réaliser toutes les constructions. Il s'agit d'un simple rectangle découpé dans un papier un peu fort (ou du bristol ou du carton léger...). Les gabarits employés dans l'atelier étaient semblables à ceux utilisés en licence ; des photographies les présentent en annexe 1. Les principales variables didactiques les concernant sont : la taille des gabarits, leur format *(rapport entre la longueur et la largeur),* le matériau dans lequel ils sont découpés et le papier utilisé pour réaliser les tracés.

Concernant ce dernier, il est bien sûr préférable de réaliser les constructions sur du papier uni et non pas quadrillé, quitte à devoir distribuer des feuilles blanches en même temps que les gabarits. Ce point était clairement évident dans l'atelier mais il ne l'était pas autant auprès des étudiant-es (que ce soit en M2 comme en licence).

Concernant le matériau, les gabarits que nous avons utilisés étaient découpés dans du papier coloré, disponible en plusieurs couleurs, d'un grammage de 160 g par m^2, c'est-à-dire seulement deux fois plus épais que du papier ordinaire. Les couleurs vives utilisées permettaient de bien voir les gabarits sur la feuille et de clairement les distinguer des constructions réalisées. Le choix d'utiliser du papier rend disponibles *a priori* de nombreuses autres utilisations possibles comme instruments (on peut notamment écrire dessus, les plier, les déchirer, etc.), mais le seul emploi qui est visé ici est celui de gabarit, c'est-à-dire pour tracer son contour. Le matériau retenu (un papier à peine plus épais que du papier ordinaire) était délibérément choisi pour être très quelconque, voire même relativement fragile. Ainsi rien ne permet au départ d'identifier ces gabarits à de véritables instruments de géométrie, et la présence des couleurs renforce encore cet effet *(une PES en M2 l'appelait ainsi par exemple « le petit rectangle orange »...)*. En revanche, le fait que ce choix permette d'autres utilisations oblige à imposer par une consigne explicite de se limiter au seul usage du tracé du contour. Un matériau plus épais (carton, bois) et/ou sur lequel il est impossible d'écrire (métal, plastique) empêcherait d'une façon automatique ces autres usages, mais aurait l'inconvénient de rapprocher de façon plus visible le gabarit d'un instrument de géométrie classique. Par ailleurs, on peut également choisir de maintenir ouverte la possibilité de ces utilisations alternatives du gabarit et nous verrons que c'est le choix qui fut expérimenté en licence. Dernier point concernant le matériau, le fait qu'il soit très léger rend les constructions effectuées relativement malhabiles ou imprécises. Ceci est en soi-même intéressant : l'instrument étant alors par nature lui-même peu précis, l'exactitude des tracés ne réside plus dans la précision des gestes ou dans la finesse des traits, mais dans la certitude qu'on a bien effectué des manipulations correctes, c'est-à-dire *in fine* dans un argument d'ordre plus théorique que graphique (les moyens de validation sont alors appauvris). Enfin, le choix a été fait ici d'un matériau opaque, qui est bien visible sur la feuille et cache en partie les constructions ; on pourrait imaginer à l'inverse la possibilité d'utiliser un matériau plus transparent (un plastique rigide et fin par exemple).

En ce qui concerne la taille des gabarits, il faut évidemment éviter que l'une de ses dimensions ne soit un multiple entier de l'autre, ou même qu'elle s'en approche pour des étudiant-es qui peuvent facilement proposer des constructions approchées. Le choix a été fait ici d'une longueur comprise entre 2 et 3 fois la largeur. Il faut par ailleurs que les gabarits ne soient ni trop grands ni trop petits, en particulier qu'ils tiennent bien dans la main comme sur la feuille, pour permettre à la fois des manipulations ergonomiques et des constructions lisibles. Da façon précise, les dimensions que nous avons retenues, (d'environ 2,5 cm sur 6,5 cm), se sont révélées assez pratiques à l'usage [3].

Enfin, pour la présentation des constructions au tableau, nous avons utilisé un gabarit agrandi, découpé dans le même matériau, et qui mesurait approximativement 12 cm sur 30 cm.

2 Les constructions demandées et leur progression

En utilisant comme seul instrument le gabarit, employé uniquement pour tracer tout ou partie de son contour, la situation demande de réaliser un certain nombre de problèmes de constructions, de difficultés variées. Le défi qui est présent dans cette situation, qui en fait tout le sel et l'intérêt, réside dans le fait qu'on emploie le gabarit d'une forme donnée (ici un rectangle) pour produire d'autres formes que la sienne, en commençant par des rectangles de tailles différentes, puis d'autres quadrilatères (carrés, losanges, parallélogrammes…) et enfin d'autres figures qui ne sont pas des quadrilatères (triangles, hexagones…). Les participant-es de l'atelier ont d'ailleurs relevé que ce point-là les avait particulièrement stimulé et, de même qu'avec les étudiant-es, il était plus facile de les lancer la recherche que de les arrêter. Ajoutons qu'on peut aussi réaliser avec cet instrument des constructions usuelles avec la règle et le compas, telles que la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un couple de droites, etc.

Les problèmes ont été proposés au moyen d'une feuille de questions qui suit une progression déterminée. La feuille utilisée pour l'atelier diffère légèrement de celle qui a été employée en licence ; la première (feuille A) est présentée en annexe 2 et la deuxième (feuille B) en annexe 3. Nous nous appuyons ici sur celle utilisée dans l'atelier. Les raisons qui ont permis d'établir la progression des questions ont été clairement perçues par les participant-es de l'atelier : il s'agit d'élargir progressivement le champ et la portée des possibilités du gabarit de rectangle en tant qu'instrument, ce qui conduit à un

[3] On peut ajouter qu'avec ces dimensions, le format du rectangle, c'est-à-dire le rapport entre sa longueur et sa largeur, est alors égal à 5/13, ce qui aussi un rapport entre deux termes de la suite de Fibonnacci. Ceci assure qu'il existe un nombre minimal de relations numériques entre les deux dimensions du rectangle.

processus de « genèse instrumentale » (cf. Rabardel, 1995a, 1995b) sur lequel nous reviendrons dans la partie VI.

Cet élargissement se produit dans au moins deux directions. D'une part, à un niveau pratique et concret, la progression vise à étendre petit à petit le répertoire des gestes que l'on effectue avec le gabarit, en exploitant certaines de ses parties différentes ou des propriétés qu'il possède. On est ainsi conduit à utiliser successivement (et sans que cela soit limitatif) sa forme entière, le segment correspondant à un côté, la longueur de ce segment, l'angle droit présent en un sommet, le parallélisme porté par une paire de côtés opposés, etc. Chacun de ces différents usages constitue ce que nous appellerons dans la partie VI des « *schèmes d'utilisation* » que l'on peut associer au gabarit.

D'autre part, la progression conduit à réemployer certaines constructions réalisées comme des « briques élémentaires » pour d'autres constructions plus élaborées. Ceci fait ainsi passer les constructions déjà faites d'un premier statut d'objet (un problème qu'il fallait résoudre, une construction particulière à effectuer) à un degré de généralisation plus grand et à l'acquisition d'un statut d'outil (servant pour d'autres constructions à réaliser). Ceci conduit à enrichir progressivement la portée conceptuelle du gabarit en lui attribuant des potentialités qui constituaient autant d'objectifs à atteindre dans des constructions précédentes. Ces deux directions, visant à étendre d'une part le registre des gestes que l'on peut faire (ou schèmes d'action) et d'autre part la portée qu'on leur accorde, relèvent d'un processus que nous appellerons dans la partie VI une « *genèse instrumentale* » de l'instrument « gabarit de rectangle ».

3 Le choix d'une situation hybride entre premier et second degré

D'une certaine façon, il s'agit ici d'une situation hybride, qui mobilise un objet usuel de l'enseignement primaire (un gabarit de rectangle) pour réaliser des tâches qui relèvent plus classiquement de l'enseignement secondaire (des problèmes de construction) et pour lesquelles on recourt en général à d'autres instruments (règle, compas, équerre, etc.). Ajoutons que les questions posées ainsi que l'ordre retenu mélangent délibérément les niveaux scolaires : certaines des constructions demandées pourraient de fait être proposées à un niveau de cycle 3 (et des participant-es de l'atelier l'ont d'ailleurs souligné) tandis que d'autres nécessitent des connaissances de collège, voire parfois de fin de collège (4e ou 3e).

Les mathématiques engagées occupent ainsi une position intermédiaire, regroupant des enjeux qui relèvent à la fois du premier et du second degré. Ainsi, ces problèmes de construction permettent de revoir si besoin est (par exemple, dans une optique de préparation du concours) un certain nombre de savoirs de géométrie élémentaire, qu'il s'agisse des notions elles-mêmes (quadrilatères, triangles, polygones particuliers ou encore segments, médiatrices, hauteurs, etc.) ou des propriétés mathématiques qu'il y a besoin de mobiliser pour certaines constructions. Nous reviendrons sur ces éléments mathématiques dans la partie VII.1 mais on peut déjà citer au moins deux exemples : pour construire un triangle isocèle-rectangle, il est intéressant de savoir que cela équivaut à tracer la diagonale d'un carré ; de même il est bien plus facile de construire un triangle équilatéral si l'on sait que l'un de ses sommets appartient à la médiatrice du côté opposé.

En définitive, ce choix d'utiliser un instrument usuel du premier degré (un gabarit de forme) pour résoudre des problèmes plus typiques du second degré (des problèmes de construction), tout en proposant dans ce cadre des questions qui peuvent effectivement relever de l'un et/ou de l'autre niveau, nous semble permettre des utilisations de cette situation en formation aussi bien pour son contenu mathématique que pour des enjeux professionnels de transposition didactique, et pouvoir être ainsi exploitée *in fine* à la fois en M2, en M1 ou en L3, avec bien entendu à chaque fois un point de vue et des enjeux visés différents.

III - DEROULEMENT DE L'ATELIER

L'atelier s'est déroulé en trois temps. Dans une première phase d'environ 1h15, les participant-es se sont approprié la situation elle-même, en cherchant par groupes de 4 les constructions demandés dans la feuille A *(annexe 2)*. Un exemple de production de l'un des groupes pendant cette phase est reproduit en annexe 4 : on peut y constater que cette production est formée d'une succession de figures sans aucun texte ni explication, ce qui fut une observation récurrente dans tous les groupes de l'atelier comme en licence.

Cette première étape a permis à chaque participant-e de réaliser un processus individuel de genèse instrumentale de l'instrument « gabarit de rectangle », dont l'analyse a servi de base ensuite à la discussion. Durant cette phase, les groupes ont travaillé en complète autonomie ; en revanche les échanges au sein de chaque groupe étaient nombreux. Ils visaient à mutualiser à la fois les idées et les constructions qui étaient trouvées, les questions qui émergeaient, les besoins de justifications ressentis et les idées de preuves proposées, ainsi qu'a comparer les différentes procédures qui pouvaient répondre à une même construction. Ces échanges ont permis d'autre part de faire émerger au sein de chaque groupe des façons partagées de parler des utilisations et des usages du gabarit de rectangle qui étaient produits, par exemple des gestes et des techniques qui se constituaient.

Ce temps de recherche a été suivi d'une mise en commun et d'une discussion d'environ 1h à partir de ce que les participant-es avaient vécu durant la première phase. Ces échanges ont porté aussi bien sur ce qu'ils et elles avaient du mettre en œuvre en tant qu'acteur-es de la recherche (ou si l'on préfère, selon une posture « élève », cf. paragraphe VIII.2) que sur les contenus mathématiques mis en jeu par la situation et les enjeux pédagogiques et didactiques qu'on peut lui associer en formation (selon alors une posture de « formateur-e »). Les réflexions qui ont été échangées à ce moment-là ont permis de nourrir l'ensemble de ce texte et se retrouvent présentes dans tout ce qui suit, même si cela ne sera pas rappelé systématiquement à chaque paragraphe. Cette phase a permis de mettre en évidence en particulier un certain plaisir qui avait été ressenti pendant la phase de recherche, ainsi qu'une intérêt ressenti à reprendre cette situation en formation initiale, voire à l'étendre à des contextes de formation continue ou encore à vouloir l'adapter pour la classe.

Enfin, un troisième temps nettement plus court, d'environ un quart d'heure, a servi de conclusion et de bilan de l'atelier. Ce moment a notamment permis d'indiquer les nombreuses sources d'inspiration et les références théoriques, le plus souvent issues de recherches, qui ont contribué à l'élaboration de cette situation, et que l'on retrouvera ici décrites dans les parties V et VI de ce texte.

IV – DES INTERROGATIONS POUR LA FORMATION

Avant de signaler les ressources qui lui ont servi d'inspiration, commençons par préciser les questionnements qui ont conduit à la recherche de la situation présentée ici.

1 Interrogations sur l'enseignement de la géométrie à l'école et en formation

Parmi ces questionnements figurent en tout premier lieu des interrogations concernant l'enseignement de la géométrie en général, notamment à l'école primaire, ainsi que par voie de conséquence les enjeux à aborder en formation. Ces interrogations nous semblent pouvoir particulièrement bien se résumer par une intervention de Celi (2014, p.16) lors d'un précédent colloque de la Copirelem, précisément intitulée : « *Que veut-on que les élèves de l'école primaire apprennent en géométrie ?* ». L'auteure y rend compte d'une recherche qu'elle a menée auprès d'enseignant-es expérimenté-es, à qui elle a demandé de pointer les difficultés de leurs élèves ainsi que les leurs propres dans l'enseignement de la géométrie. En ce qui concerne les élèves, « *les réponses (…) évoquent quasi exclusivement des difficultés dans le maniement des instruments, dans la précision des tracés et dans la maitrise du vocabulaire géométrique* ». À leur propre sujet, les questions portent sur « *comment aider les élèves à apprendre et utiliser un vocabulaire idoine et surtout à manipuler correctement les instruments* ». Celi (*ib.*) en conclut alors que « *[l'on retrouve] ce qui préoccupait la CREM en 2002, à savoir que l'on réduit souvent la géométrie à l'apprentissage d'un vocabulaire et à la manipulation des instruments* ».

Nous ne pouvons que partager ce constat et cette préoccupation, et la question qui se pose à nous est alors la suivante : que peut-on faire pour contribuer à faire évoluer cet état des choses en formation ? Comment aider les futur-es professeur-e-s des écoles (PE) à se forger une vision moins restrictive de la géométrie et notamment à proposer des situations de problèmes plus riches dans ce domaine ?

Au demeurant, plutôt que chercher à modifier leurs priorités, on peut aussi envisager de les accompagner dans ces questions en les aidant à approfondir leurs interrogations. Puisque les premières questions que se posent les PE en géométrie concernent avant tout la « maitrise correcte » des instruments, on peut les amener à creuser à ce que ces questions engagent sur le plan mathématique. Est-ce déjà si clair de savoir ce qu'est un « instrument » ? Quels enjeux mathématiques peut-on associer à un travail de leur « maniement » ? Quels critères permettent de juger qu'une manipulation est plus ou moins « correcte » ? Enfin, quelles démarches peuvent contribuer à acquérir une meilleure maitrise (maîtrise) d'un instrument dans le temps, et comment identifier des problèmes susceptibles d'y contribuer ? Autant des questions qui n'ont certainement rien d'évident… Au-delà de la seule question de la maitrise des instruments de géométrie, c'est au fond toute la question de leur appropriation et des étapes de leur apprentissage qui est ici posée, et qui constitue en définitive un enjeu central de cet atelier.

Une hypothèse que nous formulons ici est qu'en faisant (re-)vivre aux PE en formation un parcours d'appropriation d'un nouvel instrument, *a priori* inconnu ou en tous cas moins usuel que la règle ou l'équerre, par le biais de problèmes de géométrie qui conduisent à en produire une variété d'usages, on peut contribuer à provoquer un déplacement personnel qui peut permettre de revenir ensuite sur ces mêmes enjeux de façon théorique avec plus de profit. Il s'agit donc manifestement d'une hypothèse qui parie sur une stratégie de type homologie-transposition, sur laquelle nous reviendrons au paragraphe IV.3.

De même, en ce qui concerne les difficultés relevées concernant la précision des tracés et l'acquisition d'un vocabulaire spécifique, on peut essayer d'amener les enseignant-es à associer des enjeux mathématiques à ces deux questions qu'ils et elles se posent. Des tracés plus précis, un vocabulaire plus correct, certes, mais pour quoi faire et répondant à quels enjeux ? Si ces demandes relèvent seulement d'exigences formelles, on peut craindre qu'elles risquent de ne pas être suivies d'effets. Il nous semble que la situation qui est proposée ici peut également permettre une réflexion sur ces deux questions en formation. D'une part, pour ce qui est des tracés, l'instrument étant en lui-même imprécis, il y a bien un enjeu de précision (les constructions doivent être correctes) mais il s'en trouve déplacé : il ne réside plus dans la justesse des traits mais dans des arguments d'ordre mathématique, c'est-à-dire dans un « bon usage » et pas seulement dans un « bon tracé ». D'autre part, pour ce qui est du vocabulaire, la recherche en groupes amène à échanger sur les constructions proposées, notamment pour en discuter la validité. Ceci conduit à la nécessité d'élaborer un langage commun pour se comprendre, notamment pour décrire les gestes et les procédures effectuées. La question du vocabulaire est alors étendue à celle plus large d'un langage à inventer, et se trouve munie d'enjeux de communication liés par exemple au fait de pouvoir partager des suggestions ainsi que de pouvoir en discuter.

2 Interrogations sur la matérialité des mathématiques du premier degré

Une autre interrogation qui nous semble importante pour la formation et que cette situation permet d'aborder concerne la prise en compte des questions liées à la matérialité des mathématiques dans le premier degré. Par opposition aux mathématiques du collège, qui adoptent souvent un point de vue plus formel et plus abstrait, associé à des définitions axiomatiques des objets, celles du premier degré nous semblent maintenir un lien beaucoup plus important avec les questions qui relèvent de leur application et de leur matérialité. Elles engagent ainsi fréquemment la mise en œuvre d'actions sur du matériel, là où celles du collège reposent beaucoup plus fréquemment sur un registre principal de type « papier-crayon ». On peut d'ailleurs imaginer que c'est en partie cet enjeu que les étudiant-es essaient de prendre en charge en formation quand ils et elles suggèrent de rajouter des étapes de « manipulation », sans toujours arriver à clairement expliciter des enjeux mathématiques qui pourraient y être associés.

Ces questions liés à la matérialité des mathématiques sont particulièrement présentes en géométrie, à travers la question des figures et celle des instruments. Dans le second degré, une figure représente en général une donnée abstraite, le plus souvent envisagée à isométrie voire à similitude près, qui sert d'illustration pour des raisonnements abstraits mais qui n'en constitue pas le support ni la matière. On retrouve le même paradigme dans la géométrie qui est travaillée pour la préparation du concours en M1, et ceci n'est pas nécessairement sans effets ensuite sur la formation. En revanche, dans le premier degré, les usages des figures sont plus divers et les aspects pratiques n'y sont pas secondaires. Non seulement on doit fréquemment utiliser des informations prises directement sur les figures mais, surtout, le fait de savoir les tracer constitue déjà en soi-même un enjeu d'apprentissage, lié à l'appropriation des instruments. Cette appropriation se développe à la fois dans ses aspects matériels (apprentissage de gestes à réaliser) et conceptuels (apprentissage de ce que l'instrument permet ou non de faire ainsi que des propriétés mathématiques qui lui sont associées).

À un niveau peut-être plus fondamental encore, la géométrie du premier degré sont situées dans un paradigme pour lequel les notions utilisées ne peuvent pas encore être définies d'une façon complètement axiomatisée. Les instruments représentent alors bien plus que de simples outils permettant de réaliser des tracés. Ils sont porteurs d'une matérialisation concrète des propriétés mathématiques qu'ils incorporent et représentent en quelque sorte des définitions en actes, par le biais des actions qu'ils permettent de réaliser, des notions mathématiques que l'on ne saurait pas toujours autrement définir. D'une certaine manière, certains instruments définissent autant les propriétés qui leurs correspondent qu'ils ne sont définis par elles. Par exemple, un objet constitue une « équerre » dès qu'il contient un angle droit, tout autant qu'un angle est qualifié de « droit » dès qu'il coïncide avec une équerre. De même, un objet forme une « règle » dès lors que les points de son bord sont alignés, tout autant qu'être « alignés » signifie pouvoir être superposés avec le bord d'une règle. Cette dualité de référence entre une propriété abstraite et un instrument matériel représente évidemment un cercle vicieux définitionnel, mais dont on ne peut sortir qu'en introduisant des définitions qui reposent sur un système axiomatique et non plus sur la matérialité des objets et des figures.

Citons pour appuyer ces réflexions la description que Perrin-Glorian, Mathé et Leclerq (2013, p. 6) font d'un manuel de géométrie de 1958 comparativement à ceux d'aujourd'hui, et qui nous parait pointer de façon particulièrement nette l'importance des enjeux qui précèdent : dans le manuel de 1958, *« le passage des objets matériels aux tracés graphiques et aux propriétés des objets géométriques est (…) relié à l'usage des instruments de tracé. (…) On a un appui sur des manipulations physiques conçues pour illustrer les concepts géométriques et guidées par la progression logique des concepts qu'il s'agit de présenter. »* Par opposition, dans les manuels actuels, *« les rapports entre géométrie théorique et objets physiques sont pudiquement passés sous silence et la question des rapports entre espace sensible et espace géométrique n'est pas vraiment abordée. »*

Ainsi, c'est toute cette gestion conjointe des registres matériels-concrets et théoriques-abstraits, construisant une relation de co-définition entre des gestes et des concepts, qui nous semble constituer une spécificité particulière du premier degré. Or ces enjeux ne sont pas pris en compte par la géométrie de type papier-crayon dont il y a besoin pour la préparation du concours, qui elle se place dans un paradigme où ces questions sont résolues et dépassées. On peut alors craindre que les enjeux mathématiques complexes liés à cette matérialité des figures et des instruments risquent de n'être pas toujours bien perçus par les étudiant-es d'aujourd'hui, d'autant plus compte-tenu de ce qui vient d'être rappelé concernant les manuels existant actuellement. Il nous semble donc important de proposer aux étudiant-es des situations qui les conduisent à travailler explicitement des aspects matériels en géométrie, notamment ceux relatifs à la prise en charge des instruments. La deuxième hypothèse que nous faisons ici est alors qu'un travail effectif sur des instruments, et plus particulièrement sur les démarches d'appropriation des instrument (par exemple en partant d'objets qui n'en constituent pas en eux-mêmes au départ) peut les aider à associer des enjeux mathématiques au travail que l'on peut effectuer dans le registre matériel, au-delà de la simple notion un peu vague et floue de « *manipulation* ».

3 La recherche d'une stratégie d'homologie-transposition

Tout ce qui précède s'inscrit clairement dans une perspective de formation qui se propose de faire vivre aux formé-es des situations analogues à celles qu'ils et elles auront ensuite à faire vivre à leurs élèves. Rappelons à ce sujet la typologie des stratégies de formation qui a élaborée par Kuzniak et Houdement (Kuzniak, 1994 ; Houdement, 1998 ; Houdement, 2014). Ces auteur-es ont dégagé quatre grands types de stratégies de formations, qui ne sont évidemment pas incompatibles ni mutuellement exclusives l'une de l'autre, et distinguent ainsi : des stratégies « *culturelles* » (visant à transmettre directement un savoir d'ordre mathématique, pédagogique ou didactique, par exemple par le biais d'un cours magistral ou dialogué), *« de monstration »* (visant à transmettre des pratiques par une observation directe et une imitation, par exemple par une pratique du type compagnonnage), *« d'homologie »* (consistant à transmettre des savoirs en agissant soi-même d'une façon conforme à une conception de l'enseignement que l'on veut également transmettre) et enfin *« de transposition »* (qui complètent des phases d'homologies par une explicitation des choix qui ont été effectués pour leur mise en œuvre). Ces dernières contenant toujours une part d'homologie, on parle aussi à leur sujet d'*« homologie-transposition »*. Elles ont pour principe fondamental de faire alterner des phases d'action avec des phases d'analyse des actions réalisées et nous retrouverons de nouveau cette dualité au paragraphe VIII.2. Ainsi, ce que nous recherchons ici est en définitive une situation permettant de travailler la question de l'appropriation des instruments de géométrie (ou, pour le dire autrement, leur genèse instrumentale, cf. partie VI) dans une perspective d'homologie-transposition.

Houdement (1998 ; p. 6) ajoute de plus que *« [les] stratégies d'homologie [sont] les seules qui peuvent se permettre de transmettre simultanément du savoir mathématique directement et des connaissances liées à l'enseignement indirectement. Ce savoir mathématique sera soit du savoir visé à l'école (homologie directe), soit du savoir spécifique aux étudiants (homologie indirecte) »*. Ceci souligne l'intérêt qu'il y a à rechercher ce que nous avons appelé au paragraphe I.3 des situations « hybrides », à savoir qu'elles permettent justement des développements d'ordre à la fois mathématique et didactique. Houdement précise de plus la distinction qu'elle considère entre des stratégies d'homologie qu'elle appelle *« directes »* ou *« indirectes »* : *« Dans une homologie directe, le type de problème choisi est presque un problème d'école ; dans une homologie indirecte, le formateur crée une question destinée à faire progresser le stagiaire sur du savoir mathématique en amont de ceux de l'école, mais nécessaire pour une compréhension fine du processus d'enseignement »*. Il nous semble que cette distinction pointe clairement le principal point qui distingue la situation de la règle à bords parallèles de Celi et Jore (2014), qui est la source principale d'inspiration de cet atelier, et celle du gabarit de rectangle proposée ici : alors que toutes deux reposent d'une façon similaire sur l'appropriation d'un instrument inhabituel, la première choisit délibérément une homologie de type indirect, tandis que celle proposée ici recherche une homologie de type plus direct.

V - SOURCES D'INSPIRATION ET SITUATIONS SIMILAIRES

De nombreuses sources ont contribué à l'élaboration de la situation du gabarit de rectangle qui est proposée ici. Elles ont pu y aider d'au moins deux façons : certaines en décrivant des situations similaires de construction au moyen de divers instruments, et d'autres en précisant des enjeux d'ordre général en géométrie, notamment en soulignant l'importance qu'il y a à travailler sur des figures et sur des instruments, et en particulier parmi ceux-ci à travailler en utilisant comme instrument des gabarits.

1 Sources d'inspiration concernant les problèmes de construction

1.1 Les constructions à la règle à bords parallèles

Comme nous l'avons déjà signalé, la principale source d'inspiration de cet atelier a été un atelier précédent de Celi et Jore (2014) qui nous a inspiré sur de très nombreux points. Cet atelier proposait de s'emparer, en formation initiale et à la destination spécifique d'étudiant-es de M1, d'un instrument de construction atypique qui avait été étudié précédemment du point de vue mathématique par Berthe et Cazier (2000), la règle à bords parallèles[4]. Ce qui était explicitement visé dans cette situation était avant tout la révision de notions et théorèmes de géométrie du collège, notamment dans l'optique de la préparation du concours. Cette proposition est évidemment la source de l'idée qui est reprise ici de confronter des étudiant-es à des problèmes de construction utilisant un instrument inhabituel.

4 *Berthe et Cazier ajoutent que, bien qu'atypique, cet instrument permet d'effectuer toutes les constructions que l'on réalise classiquement à la règle et au compas. Nous ne développerons pas ce point ici mais il se trouve que de fait c'est également le cas pour l'instrument « gabarit de rectangle ».*

De façon concrète, l'instrument « règle à bords parallèles » ne permet de réaliser qu'une seule action, le tracé de bandes parallèles d'une largeur déterminée (bien que cela de deux façons très différentes, qui correspondent à deux schèmes d'actions pour cet instrument). Ceci conduit à concevoir les constructions que l'on souhaite réaliser en termes de réseaux de droites parallèles et nécessite ainsi de mobiliser le plus grand nombre possible de propriétés liées au parallélisme. Par conséquent, en adoptant comme outil central la notion de parallélisme, qui n'est introduite que dans les dernières années de l'école élémentaire et seulement en tant qu'objet (il s'agit à ce niveau-là de construire ou de vérifier des parallélismes, mais pas de construire d'autres figures à partir de cette notion), la situation d'homologie qui en découle possède nécessairement un potentiel limité de transposition dans l'enseignement primaire, c'est-à-dire pour représenter une homologie directe au sens du paragraphe précédent. Ce choix était d'ailleurs tout à fait délibéré et explicitement souligné par Celi et Jore (2014, p. 3) : « *Afin que le problème soit véritablement adapté à nos étudiants et aux savoirs mathématiques que nous visons (les propriétés de géométrie du collège pour le concours de professeurs des écoles), la situation présentée aux étudiants n'est pas susceptible d'un transfert simple à l'école primaire.* » On voit ici que la mise en œuvre de ce choix repose sur la sélection d'une propriété particulière (le parallélisme) et le recours à un instrument qui lui est étroitement associé. Recherchant au contraire une situation d'homologie qui soit plus directe et qui permette d'envisager un transfert potentiel vers l'école primaire, tout au moins d'une manière partielle, il nous fallait donc nous tourner vers un autre instrument.

1.2 La situation du gabarit déchiré

Une deuxième source d'inspiration, qui a fourni l'idée d'employer un gabarit comme instrument de construction, est la situation dite du « *gabarit de carré déchiré* ». Elle figure dans plusieurs ressources (Duval & Godin, 2005, p. 13 ; Perrin-Glorian, 2012, p. 30) et nous en proposons une présentation plus détaillée en annexe 6. En résumé, il s'agit d'utiliser un gabarit de carré que l'on déchire de plus en plus pour reproduire malgré tout à chaque fois la forme du gabarit initial. Evidemment, plus le gabarit est déchiré et plus il faut mobiliser de mathématiques pour reconstituer cette forme. Il faut notamment recourir à de plus en plus de transformations géométriques (d'abord une rotation, puis plusieurs, puis des rotations et des symétries, etc.), qui se traduisent concrètement par de plus en plus de manipulations effectives du gabarit. Nous avons repris de cette situation un certain nombre d'idées : notamment celle qui consiste à demander de tracer une forme à partir d'un gabarit qui ne la contient pas (ou plus), en s'appuyant sur des tracés partiels du contour du gabarit ainsi que sur l'emploi de différentes transformations du plan. Nous avons également repris l'idée d'une augmentation progressive du niveau de contrainte. En revanche, au moins une différence a été apportée : au lieu de modifier de plus en plus le gabarit tout en maintenant la même forme à tracer, nous proposons ici l'idée symétrique qui consiste à conserver le même gabarit tout en effectuant grâce à lui un grand nombre de constructions différentes.

1.3 La situation des droites remarquables du triangle à l'aide d'un gabarit

Au cours de l'atelier, un des participants a signalé une situation très semblable à celle présentée ici, notamment en ce qu'elle propose également des problèmes de constructions géométriques à l'aide d'un gabarit, et qui nous semble intéressante à mentionner ici. Cette situation, ainsi son exploitation en formation, sont décrites dans les cahiers du formateur de Maxéville (Maurin, 2001). Il s'agit de la situation suivante : en utilisant comme unique instrument le gabarit d'un triangle quelconque, il est demandé de tracer toutes les droites remarquables de ce triangle (médianes, médiatrices, hauteurs et bissectrices). Là encore, l'usage de transformations du plan (notamment, des symétries axiales et des rotations) ainsi que des tracés partiels du contour du gabarit permettent effectivement de réaliser chacune des constructions demandées.

1.4 Les constructions qui prennent en compte les limites des instruments

Une troisième source qui a également inspiré cette proposition figure dans des exercices proposés par Perrin (2005). Dans cet ouvrage destiné à la formation initiale des enseignant-es du premier degré, il propose (p. 201) des problèmes de construction qui utilisent comme instruments ce qu'il appelle de « *mauvais outils* ». Il s'agit en fait de prendre en compte certaines limitations des instruments, notamment dans leurs dimensions relativement à celles des figures à réaliser. Il propose ainsi des problèmes de constructions au moyen d'une « règle trop courte » ou bien encore d'un « compas rouillé » (c'est-à-dire qui possède une seule ouverture bloquée), un point commun étant que, dans les deux cas, les dimensions portées par l'instrument sont spécifiées être plus petites que celles de la figure à réaliser.

Ce point de vue rompt avec le point de vue le plus habituel des problèmes de construction, dans lesquels l'instrument est en général conçu comme un instrument idéal, infini et parfait, autrement dit comme une abstraction détachée de son support matériel. Ce point de vue est par exemple celui que l'on retrouve dans l'ouvrage classique de Carrega (2001) sur les constructions à la règle et au compas, où l'on accepte que la règle et le compas permettent toujours à partir de deux points donnés de tracer le segment qui les joint ainsi que le cercle admettant l'un comme centre et passant par l'autre, sans jamais considérer l'effectivité de ces constructions ni la taille des instruments. Bien entendu, si l'on peut utiliser des règles et des compas aussi grands que l'on veut en fonction des besoins, cela reste concevable, mais si l'instrument est conçu comme un objet matériel et physique donné, il n'en va pas de même. Par exemple, si l'on possède un double-décimètre et un compas usuels et que l'on se donne deux points *A* et *B* situés aux deux extrémités d'un tableau noir, les deux constructions en question (celle du segment *[AB]* et celle du cercle de centre *A* passant par *B)* restent effectivement possibles avec ces deux instruments, mais les procédures à suivre deviennent nettement moins évidentes. On voit donc que ce point de vue très usuel constitue en fait une abstraction qui ne prend pas en compte la matérialité des objets et des instruments que nous avons décrite au paragraphe IV.2.

Suivant ainsi les propositions de Perrin (2005), le choix a été fait ici de s'éloigner de ce point de vue abstrait et de tenir compte au contraire de façon explicite des limitations physiques liées à la taille de l'instrument, c'est-à-dire ici des dimensions du gabarit de rectangle. Pour ne citer qu'un exemple, la construction d'un carré à partir de l'un de ses côtés avec un gabarit de rectangle n'aboutit pas aux mêmes procédures selon que le segment que l'on se donne est plus petit ou plus grand que la longueur du gabarit. On retrouve notamment cet enjeu lié aux dimensions dans les questions 4, 7, 10 et 20 de la feuille A (*annexe 2)*.

2 Des ressources concernant la géométrie en général

L'élaboration de la situation du gabarit de rectangle s'est appuyée par ailleurs de façon beaucoup plus générale sur d'autres ressources qui analysent des enjeux de la géométrie à l'école élémentaire. Parmi celles-ci, on peut citer en particulier celles associées aux travaux d'une équipe mixte de formateur-es et de chercheur-es de l'IUFM Nord-Pas de Calais, qui ont particulièrement étudié des questions liées au travail sur les figures et sur les instruments. Leurs résultats soulignent en particulier l'importance qu'il y a à travailler avec d'autres instruments que la règle, l'équerre et le compas, parmi lesquels des gabarits, et précisent des enjeux dont ils sont porteurs en géométrie. Des présentations synthétiques des travaux de ce groupe figurent notamment dans les trois ressources (Perrin-Glorian, 2012), (Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013) et (Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014) et on peut en trouver des prolongements dans l'atelier A.14 (Mangiante-Orsola, 2015) du présent colloque. Enfin, parmi les productions de cette équipe, nous nous appuyons d'une façon plus particulière sur les travaux de Duval et Godin (2005) qui étudient différents regards que l'on peut porter sur les figures et en déduisent des critères portant sur le choix des instruments que l'on souhaite utiliser.

2.1 Des enjeux liés à la construction de figures et à l'utilisation de gabarits

De façon plus précise, ce groupe de recherche a élaboré de nombreuses situations pour la classe et/ou pour la formation. Celles-ci s'appuient fréquemment sur des problèmes de reproduction ou de restitution de figures, par exemple à partir d'amorces ou bien à des échelles différentes de celle de la figure d'origine, et mobilisent fréquemment pour cela un grand nombre d'instruments non-usuels (notamment : des bandes de papier informables, des gabarits d'angles, des gabarits tronqués, etc.). On y trouve la source de beaucoup d'idées qui ont été reprises ici, notamment le fait d'utiliser des instruments peu technicisés, relativement fragiles quant à leur matériau et nécessitant une certaine appropriation avant de pouvoir être utilisés, ainsi que l'importance d'une réflexion portant sur les relations entre les figures que l'on demande de tracer et les instruments que l'on propose d'employer.

Signalons cependant quelques points (à vrai dire, assez peu nombreux) sur lesquels il nous semble que la situation du gabarit de rectangle s'écarte légèrement de certaines propositions relativement fréquentes de ce groupe. Bien entendu, ces différences nous semblent intéressantes à souligner dans une optique de complémentarité et non pas d'opposition. En premier lieu, il s'agit ici un problème de construction de figures et non pas de reproduction ou de restitution. Ainsi, au lieu qu'il s'agisse de partir d'une première figure pour en (re)-produire une deuxième, le travail demande ici de produire une figure sans modèle. La démarche suit donc un chemin d'un texte à une figure et non pas d'une figure à une autre figure. De plus, la situation proposée ici porte sur un seul instrument (ou plus exactement, comme nous le verrons dans la partie suivante, sur un unique artefact qui englobe en réalité de nombreux instruments) et non sur un usage coordonné de plusieurs instruments correspondant chacun à autant de propriétés distinctes. Enfin, et c'est en partie lié au point précédent, le gabarit utilisé ici présente une figure qui est en elle-même complète et dont il s'agit d'extraire des informations partielles, faisant ainsi opérer sur elle un certain travail de déconstruction ; tandis que des situations comme celle du gabarit tronqué ou bien celles décrites dans (Duval & Godin, 2005) (qui proposent de nombreuses manières de reconstituer un triangle à partir d'instruments qui correspondent à des informations partielles : règles informables ou non, gabarits et pochoirs déchirés, etc.), conduit à l'inverse à un travail de reconstruction d'une globalité à partir d'informations décomposées. Enfin, une dernière différence, qui est évidemment essentielle mais qu'un travail d'adaptation pourrait peut-être permettre de combler, est que la situation présentée ici a été conçue d'emblée pour la formation et non pas initialement pour la classe.

2.2 Des aspects de déconstruction dimensionnelle

Le dernier point théorique qui a contribué à la conception de la situation du gabarit de rectangle et que nous souhaitons détailler ici est la notion de « *déconstruction dimensionnelle* » développée par Duval et Godin (2005). Ces auteurs distinguent différents types de regards que l'on peut porter sur les figures, notamment en termes de dimensions. Ils identifient ainsi des regards que l'on peut porter selon des points de vue en dimension 2D (une figure pouvant alors être perçue comme un assemblage de surfaces planes, que ce soit par juxtaposition ou par superposition), en dimension 1D (consistant à identifier des lignes qui permettent de définir les surfaces précédentes, par exemple celles qui en constituent le bord) ou enfin en dimension 0D (consistant à regarder des points qui définissent les lignes ou les surfaces précédentes). Ils appellent alors « *déconstruction dimensionnelle* » le processus qui consiste à déporter son regard des objets qui relèvent d'une dimension vers ceux qui correspondent aux dimensions inférieures : il s'agit ainsi (p. 8) de « *faire passer d'un regard centré sur les surfaces et leurs contours à un regard qui fait apparaitre le réseau de droites et de points sous–jacent aux différentes figures* ». Ils ajoutent que ce processus constitue un enjeu central pour les élèves en géométrie et soulignent l'importance d'un travail spécifique à mener à ce sujet. Il s'ensuit que cette question constitue un point important sur lequel attirer l'attention des étudiant-es en formation.

Pour prendre l'exemple qui nous intéresse ici du rectangle associé au gabarit, on peut ainsi le percevoir comme une plaque en deux dimensions, comme la donnée des quatre segments qui en forment le bord, ou encore ramener chacun de ces segments aux deux points qui en sont les extrémités et qui pour le rectangle sont ses quatre sommets. On retrouve alors la représentation classique de ce dernier sous une forme du type « *ABCD* », c'est-à-dire par la seule indication de quatre points.

Duval et Godin mobilisent ensuite cette distinction dans une réflexion portant sur les critères de choix des instruments que l'on peut employer. Ils établissent ainsi une classification des instruments en fonction de deux critères (p. 12) : d'une part, selon qu'ils permettent des manipulations d'objets matériels (puzzles, pailles, etc.) ou bien des opérations de tracés graphiques ; d'autre part, selon que les assemblages ou tracés qu'ils permettent produisent des formes 2D (puzzles, gabarits de formes, etc.) ou 1D (pailles, règles, etc.). Notons que, dans cette classification, les instruments usuels de géométrie (règle, compas, équerre) relèvent tous de la même catégorie : il s'agit d'objets qui produisent des tracés qui sont tous en dimension 1D (respectivement : segments, cercles, couples de segments perpendiculaires).

Par opposition, les gabarits occupent une autre position dans cette classification. Pour le premier critère, ils peuvent permettre de réaliser des figures géométriques par assemblage de formes lorsqu'on dispose de plusieurs gabarits. À l'inverse, n'en avoir qu'un seul conduit comme ici à devoir l'utiliser comme un instrument de tracés, puisqu'on ne peut ni le superposer ni le juxtaposer à lui-même. On peut cependant l'utiliser en le superposant ou en le juxtaposant sans rien tracer d'autre à des tracés déjà existants, ce qui est en soi intéressant. Pour le critère de la dimension, il possède une position qui est d'une certaine façon intermédiaire ou hybride. En effet, il possède d'une part une forme globale que l'on peut reproduire en traçant le contour entier, et on peut alors produire des figures complexes par juxtaposition ou par superposition de cette forme globale répétée. Il permet d'autre part de produire aussi un certain nombre de tracés 1D, comparables à ceux des instruments usuels, par le biais de ses contours partiels : on peut ainsi notamment s'en servir pour tracer des segments, des angles droits, etc. Ajoutons que ces différents tracés correspondent à différentes façons de déporter son regard de la figure globale 2D vers ses bords 1D, qu'il s'agisse de regarder un côté, un angle, etc. Ainsi, en tant qu'instrument possédant une forme 2D mais que l'on peut utiliser pour réaliser à la fois des tracés 2D et 1D, liés à des regards portés sur différentes formes de ses « bords », le gabarit de rectangle utilisé comme instrument de tracé nous semble incorporer de façon intrinsèque un certain nombre d'aspects de déconstruction dimensionnelle.

VI - DE L'ARTEFACT A L'INSTRUMENT : LE PROCESSUS DE GENESE INSTRUMENTALE

Nous abordons à présent un point qui nous semble représenter l'un des enjeux principaux que l'on peut associer à cette situation en formation. En effet, celle-ci conduit, au fil des constructions, à s'approprier progressivement l'objet « gabarit de rectangle » comme un véritable instrument de géométrie, dont la portée s'élargit en fonction des différentes façons que l'on a de l'utiliser. Dans une perspective d'homologie-transposition, après avoir fait expérimenter en formation cette situation, on peut souhaiter développer dans la suite une analyse des processus qu'elle mobilise. On est alors conduit à se poser rétroactivement un certain nombre de questions, telles que les suivantes : qu'est-ce définitive qu'un instrument de géométrie ? Que signifie se l'approprier et par quelles étapes cela peut-il se développer ? Quelles conditions matérielles peuvent permettre à un petit morceau de papier (voire un ticket de métro usagé…) de devenir un instrument ? Enfin, si l'on rapproche ces interrogations des questions de PE relevées par Celi (2014) que nous avons signalées au paragraphe IV.1, on peut encore les formuler ainsi : quels enjeux d'apprentissage peut-on associer à la « *manipulation* » ou au « *maniement* » corrects des instruments ? Et que signifie *« aider les élèves (…) à manipuler correctement les instruments » ?*

1 Des éléments de réflexion théoriques sur la genèse instrumentale des instruments

Pour aborder ces questions, nous nous appuyons de façon centrale sur l'approche développée par Rabardel (1995a, 1995b), en particulier sur la distinction qu'il opère entre artefact et instrument ainsi que sur la notion associée de genèse instrumentale. Précisons que nous essayons d'en donner ici bien plus une appropriation personnelle, visant à adapter cette approche à la situation étudiée et notamment dans un contexte de géométrie pour l'enseignement primaire, plutôt qu'une restitution complètement fidèle pour laquelle nous renvoyons aux écrits cités, quitte à risquer parfois de nous éloigner de ses formulations propres.

1.1 La distinction entre artefact et instrument et le processus de genèse instrumentale

Rabardel introduit tout d'abord une distinction centrale entre la notion *d'artefact* et celle *d'instrument.* L'artefact correspond à un objet matériel et physique qui sert de support à l'instrument, mais qui ne constitue pas en soi un instrument. Il n'en devient un que par le biais d'un processus d'appropriation, vécu à une échelle personnelle, que Rabardel appelle *genèse instrumentale.* Celle-ci se développe par le biais des usages de l'artefact qui sont produits par une personne donnée, ces usages mettant en œuvre à la fois des aspects pratiques (gestes) et mentaux (représentations). L'appropriation s'effectue alors par la répétition matérielle de ces usages et par l'intégration conceptuelle de ce qu'ils permettent de faire. Ainsi, l'évolution qui conduit un sujet à attribuer à un artefact une, ou éventuellement plusieurs, valence(s) instrumentale(s), autrement dit une ou plusieurs façon(s) de se l'approprier comme instrument, s'effectue nécessairement sur du temps long et relève véritablement d'un processus, toujours en cours et jamais figé. Pour reprendre une formulation de Rabardel (1995b, p. 64), *« l'instrument n'est donc pas un « donné » mais doit être élaboré par le sujet. L'appropriation de l'instrument par les utilisateurs résulte d'un processus progressif de genèse instrumentale. L'instrument, pour l'utilisateur, évolue tout au long de ce processus de genèse ».*

Pour sa réalisation, ce processus de genèse instrumentale repose de façon centrale sur la production, l'appropriation et la conceptualisation d'usages standardisés de l'artefact, que Rabardel appelle des *schèmes d'utilisation.* Ces schèmes se construisent dans le temps par une répétition de gestes (ce que l'on fait), qui conduit à une intégration des buts (ce que l'on veut faire) et des modes d'actions (comment on le fait) qui leur sont associés. En définitive, les schèmes d'utilisation « *forment une base stable pour [l'] activité [et] peuvent être considérés comme des invariants représentatifs et opératifs correspondant à des classes de situations d'activité avec instrument* » (1995b, p. 63). L'élaboration de ces schèmes constitue les points d'ancrage sur lesquels s'appuie la genèse instrumentale. Ce processus est géré par chaque individu (un même artefact n'est pas forcément approprié de la même façon par différentes personnes), mais l'appropriation qui en est faite peut tout de même correspondre (ou non) à des usages sociaux partagés : « *[les schèmes d'utilisation] ont une dimension privée au sens où ils sont les schèmes d'un sujet singulier. Mais ils ont également une dimension sociale essentielle* » (*ibid.*). Rabardel aboutit alors à la définition suivante de ce qu'est un instrument : «*En réalité, l'instrument est une entité mixte qui comprend d'une part l'artefact matériel ou symbolique et d'autre part les schèmes d'utilisation, les représentations qui font partie des compétences de l'utilisateur et sont nécessaires à l'utilisation de l'artefact* ». (1995b, p. 64).

Enfin, Rabardel souligne que « *la genèse instrumentale [est] un processus qui concerne à la fois l'artefact et le sujet* » (1995a, p.109). Elle s'effectue ainsi conjointement dans deux directions complémentaires et duales : Rabardel appelle *instrumentation* la dimension du processus qui est dirigée vers le sujet et « *instrumentalisation* » celle qui est dirigée vers l'objet. On peut souligner que, dans ces deux directions, le processus engage à la fois des aspects matériels (physiques, concrets, par exemple portant sur des gestes) et mentaux (conceptuels, par exemple portant sur des représentations et conceptions). Au niveau matériel, il peut s'agir de modifications que l'on apporte à l'artefact, de production d'habitudes gestuelles, de modes d'utilisation réguliers, etc. Au niveau mental, il peut s'agir de sélection ou d'attribution de propriétés au niveau de l'artefact, de production de fonctions, d'assimilation ou de comparaison à d'autres instruments connus, etc. Il y a une appropriation évolutive à la fois de l'objet lui-même, des usages que l'on en fait et des représentations et conceptions que l'on développe à son sujet.

Pour autant, l'artefact ne représente pas à l'origine un objet neutre. Il est porteur notamment d'un certain nombre de contraintes (il n'est pas possible de tout faire grâce à lui) comme de potentialités (il recèle à l'inverse un certain nombre de choses qu'il permet effectivement de faire), tout au moins de nouveau pour un sujet donné. Rabardel parle ainsi des « *contraintes propres aux instruments* » qu'il oppose aux « *ressources qu'ils offrent pour l'action* » (1995b, p. 62) : « *Ainsi, comme toute réalité, l'instrument oppose au sujet un ensemble de contraintes que celui-ci doit à la fois identifier, comprendre et gérer* » (*ibid.*). Le processus de genèse instrumentale engage donc une appropriation des possibilités portées par l'artefact comme de ses impossibilités, c'est-à-dire en définitive de la portée de l'instrument comme de ses limites.

1.2 Quelques remarques complémentaires dans le cas de la géométrie

Ajoutons à cette présentation générale quelques remarques qui nous semblent également importantes à souligner. La première est que, si les genèses instrumentales se réalisent à l'échelle individuelle, nous nous plaçons ici sous l'hypothèse qu'une démarche d'enseignement peut contribuer à cette appropriation et à cet apprentissage.

En deuxième lieu, nous souhaitons insister sur la différence que Rabardel prend toujours un grand soin à respecter, et qui nous parait effectivement cruciale, entre ce qui relève des *fonctions* et ce qui relève des *usages*. Les premières sont ce à quoi l'instrument est supposé servir. Elles correspondent à autant d'usages prédéfinis, reconnus comme légitimes et qui lui sont attribués, que ce soit à une échelle sociale ou individuelle. Les usages quand à eux représentent ce que l'on fait vraiment en pratique, que cela corresponde ou non à des fonctions reconnues ou explicitées. Rabardel introduit une distinction entre les usages qui sont perçus comme légitimes (ceux qui correspondent à des fonctions attribuées) et d'autres qui sont détournés, mais il nous semble que, dans tous les cas, qu'un usage soit ou non associé à une fonction, il importe de distinguer ce qui relève de son aspect « fonction » (sa relation avec des présupposés ou des injonctions) et de son aspect « usage » (qui correspond aux pratiques effectives). Et selon Rabardel, les genèses instrumentales reposent avant tout sur une appropriation des usages bien plus que des fonctions. Ainsi, dans une perspective d'enseignement, il appartient à l'enseignant-e de proposer des situations qui conduisent à production effective d'usages, et pas seulement de chercher à transmettre des fonctions qui, si elles ne sont pas concrétisées, risquent de ne rester que des injonctions.

Un troisième point que nous souhaitons souligner est l'importance qu'il faut accorder dans ce processus aux aspects langagiers. En effet, s'approprier un instrument nécessite de s'approprier en même temps des façons d'en parler et de le penser, c'est-à-dire de s'approprier un langage à son sujet. Ce langage contient non seulement des classes de mots (un vocabulaire spécifique) mais aussi des classes de phrases que l'on peut ou non faire à son sujet. Cela signifie non seulement savoir ce que l'on peut dire mais aussi ce dont on ne parle pas, ce qui va de soi, ce qu'il y a besoin ou non de préciser, etc. Ce langage peut porter à la fois sur l'objet-artefact lui-même, sur les schèmes d'utilisation, sur l'instrument dans sa globalité, sur des aspects pratiques ou mentaux, etc. On peut ainsi vouloir parler de certaines parties spécifiques de l'objet, de gestes ou d'actions à effectuer, de schèmes d'utilisation particuliers, de buts à atteindre, d'étapes intermédiaires, de contrôles à exercer, etc. Pour prendre un exemple en géométrie, pour utiliser un compas il faut savoir distinguer sa *pointe sèche* de sa *pointe traçante* ; savoir ce que signifie le *tourner* ; savoir que l'artefact possède un *écartement* qui correspond à un *rayon de cercle* sur le tracé ; connaitre des dénominations qui permettent de distinguer certains tracés *(cercle, demi-cercle, arc de cercle)* ; etc. Ainsi, s'approprier un instrument nécessite de s'approprier en même temps le langage, ou tout au moins un langage, à son sujet, celui-ci étant un élément indissociable de sa conceptualisation.

Enfin, une dernière particularité qui ne se retrouve peut-être pas toujours associée à tous les types d'instruments de manière générale, et qui est peut-être spécifique des instruments en mathématiques, mais qui est du moins très importante pour ceux de géométrie, est qu'ils sont associés d'une façon fondamentale à une (ou éventuellement plusieurs) propriété(s) abstraite(s) qu'ils incorporent et qu'ils représentent. Nous avons vu au paragraphe IV.2 en quoi les instruments de géométrie incarnent des définitions « en actes » de propriétés mathématiques pour lesquelles on ne dispose pas encore de définitions axiomatiques fondées sur le seul langage. Ainsi, en plus des usages matériels qui consistent à tracer des segments et vérifier des alignements, la règle non graduée possède également un usage plus abstrait, correspondant au fait qu'elle intègre une définition des notions de segment et d'alignement. Il en va de même avec l'équerre pour les notions d'angle droit et de perpendicularité, avec le compas pour celles de cercle et d'égalité de longueur, etc. Ces usages « définitionnels » des instruments nous paraissent une spécificité particulièrement importante en géométrie. Ajoutons qu'elles produisent un usage dans un registre symbolique d'un artefact qui relève lui-même d'un registre matériel.

On peut ajouter que cette identification d'un instrument de géométrie à une propriété mathématique qui lui est associée déplace pour partie la question de l'articulation entre un artefact et un instrument. En effet, si l'on désigne par *règle* l'instrument relatif aux notions de segment et d'alignement, ou par *équerre* celui associé aux notions d'angle droit et de perpendicularité, ceux-ci ne relèvent plus alors d'un objet matériel particulier possédant des caractéristiques données (forme, taille, matériau, etc.) mais d'une classe d'objets équivalents entre eux dès lors qu'ils correspondent à la même propriété mathématique embarquée.

En résumé, pour qu'un artefact soit approprié (par une personne donnée) comme un ou plusieurs instrument(s) de géométrie, il doit être muni de façon personnelle, par le biais des usages qui sont produits et en fonction des situations qui sont rencontrées, d'un très grand nombre d'éléments parmi lesquels nous pouvons citer : l'appartenance à une classe de supports matériels dont il relève ; des gestes réguliers et des façons habituelles de l'utiliser, qui sont les schèmes d'utilisation ; d'un certain nombre de fonctions assignées, que ce soit socialement ou individuellement ; d'usages effectifs et personnels, qui peuvent correspondre ou non à ces fonctions ; de la reconnaissance de sa portée comme de ses limites ;

d'un langage qui permet à la fois d'en parler et de le penser ; enfin, d'une identification explicite de la ou des propriété(s) mathématique(s) sous-jacente(s). On voit qu'il s'agit là d'un processus complexe qui ne peut s'effectuer que sur du temps très long et qu'il importe en formation d'aider les enseignant-es à en percevoir à la fois les leviers et la globalité.

1.3 Un objectif de dénaturalisation en formation

En géométrie, les instruments auxquels ce processus d'appropriation va s'appliquer pour les élèves sont en premier lieu les instruments de géométrie usuels : règles graduées ou non, équerres, compas et plus tard le rapporteur. En revanche, pour les étudiant-es en formation, ou plus généralement pour les personnes adultes, l'appropriation personnelle de ces instruments classiques est depuis longtemps réalisée et a abouti à une naturalisation de l'identification entre une classe d'artefacts matériels et des usages, des fonctions, des schèmes d'utilisation et un langage qui lui sont associés. À ce stade d'intégration, il devient même difficile de dissocier l'artefact de l'instrument. De plus, lorsqu'un artefact est porteur simultanément de plusieurs instruments (ce qui est fréquent avec les instruments de géométrie : une règle graduée contient par exemple toujours aussi une règle non-graduée ; une équerre contient également l'instrument « règle » ; etc.), il n'est pas toujours évident de les distinguer ni d'identifier l'instrument qui est mis en œuvre dans un schème d'utilisation donné. Cette reconnaissance demande d'effectuer un travail de déconstruction d'une intégration réalisée. Il n'est pas plus facile de se souvenir du processus qui a pu conduire à cette intégration. Il y a également besoin pour cela d'un travail de désappropriation pour mesurer l'ampleur du parcours accompli et en retrouver les étapes comme la démarche. Un enjeu en formation est alors d'aider les PE à retrouver le point de vue d'un-e élève qui n'a pas encore réalisé l'intégration d'un instrument, par exemple un-e élève qui découvre l'artefact « équerre » et ne maitrise encore ni comment on s'en sert, ni ce qu'il permet de faire, ni même les phrases ou les questions que l'on peut formuler à son sujet. L'hypothèse que nous faisons ici, et qui était tout aussi présente dans la situation des constructions à la règle à bords parallèles de Celi et Jore (2015), est que de proposer aux étudiant-es une démarche d'appropriation d'un nouvel instrument, au départ inconnu et donné seulement comme un artefact, donc pour lequel la démarche d'appropriation reste à réaliser, peut les aider à effectuer un tel travail de dénaturalisation et de déconstruction.

2 Le processus de genèse instrumentale de l'artefact « gabarit de rectangle »

Analysons à présent, à la lumière de ce qui précède, en quoi la situation du gabarit de rectangle peut permettre de faire vivre et d'analyser en formation un tel processus de genèse instrumentale.

2.1 L'appropriation vécue au cours de l'atelier : analyse d'une interaction langagière

Dans cette situation, l'artefact considéré est le gabarit de rectangle. Différents choix qui ont déjà été analysés (cf. paragraphe II.1) renforcent le fait qu'il ne s'identifie pas au départ à un instrument de géométrie : c'est un simple morceau de papier, à peine plus épais que du papier ordinaire, qui constitue ainsi un objet fragile, léger et très peu technicisé. Il possède des usages établis qui relèvent du quotidien mais pas du domaine des instruments ni de celui de la géométrie : on s'en sert de façon banale pour écrire dessus (par exemple pour prendre des notes) mais en général pas pour écrire à côté de lui ni pour tracer son contour. Ce sont les problèmes de construction que l'on résout qui amènent peu à peu à élargir son potentiel mathématique et à modifier la vision que l'on s'en fait en tant qu'instrument, la progressivité de ce processus ayant été soulignée par les participant-es lors de la discussion qui a suivi la phase de recherche. On est ainsi conduit à identifier les gestes que l'on réitère comme autant de potentialités intrinsèquement portées par le gabarit, autrement dit comme des schèmes d'utilisation qu'il permet, puis ensuite à associer à chacun d'eux une propriété mathématique clairement identifiée.

Pour illustrer ce point d'une façon plus explicite, et notamment en souligner les aspects langagiers, nous nous appuyons sur une interaction qui a été relevée au sein d'un groupe pendant la phase de recherche et qui nous semble particulièrement éclairante à ce sujet. À un moment donné vers la fin de la phase de recherche, une participante, qui décrivait aux autres membres de son groupe une construction qu'elle venait de trouver, a conclu son explication par ces mots que nous avons précisément relevés : « - *et, avec* *mon équerre, je termine la figure !* ». (La construction en question répondait en fait à la question 11 et elle est présentée dans les annexes 4 et 5). Ce verbatim nous semble particulièrement révélateur d'un processus qui s'était opéré au sein de ce groupe, et cela à plusieurs titres. Tout d'abord, si elle était en mesure de dire aux autres : « *avec mon équerre* », c'est qu'elle disposait effectivement à ce moment-là d'une équerre ; et pourtant, elle n'avait pas changé d'instrument, ou du moins d'artefact, depuis le début de l'atelier. Le « gabarit de rectangle » du départ avait donc acquis en cours de route un statut d'équerre, et cette participante a confirmé pendant la discussion qu'elle n'aurait surement pas prononcé la même phrase au début de la phase de recherche. L'emploi de l'adjectif possessif « *mon* » nous semble même renforcer encore ce point, en soulignant qu'il s'agissait d'une équerre qu'elle s'était elle-même donnée, ou tout au moins appropriée. Bien entendu, il s'agit en fait ici d'une métonymie : ce qui est désigné est plus exactement « l'usage du gabarit de rectangle utilisé comme une équerre ». Ceci montre bien que c'est l'usage qui confère le nom à un instrument et non pas la référence à l'objet matériel sous-jacent. De fait, c'est bien ici l'usage réitéré puis l'appropriation de cette potentialité qui a créé l'instrument « équerre » au sein du gabarit de rectangle, et non pas la nature de l'artefact lui-même. Enfin, le fait qu'elle n'ait eu aucun besoin à ce moment-là d'en dire plus, et notamment pas de préciser ce que signifiait « *je termine la figure* », souligne que la procédure en question constituait alors au sein du groupe un schème d'utilisation acquis et partagé, et qu'ainsi tout le groupe s'était approprié à ce moment-là l'emploi du gabarit comme d'une équerre.

2.2 Combien d'instruments dans un même instrument ?

La citation qui vient d'être analysée souligne que, dans certaines conditions, le gabarit de rectangle peut être assimilé à une équerre, ou que l'artefact « gabarit » a été associé à un instrument « équerre ». Ce n'est pas le seul instrument usuel de géométrie que l'on retrouve dans cette situation. En effet, elle conduit progressivement à utiliser le même artefact « gabarit de rectangle » selon différentes fonctions et usages, qui correspondent en définitive à autant d'instruments, et dont plusieurs correspondent même à des instruments usuels de géométrie. Ainsi, et sans que cela soit exclusif d'autres possibilités encore, les constructions demandées conduisent à des usages du gabarit qui correspondent au moins aux différents instruments suivants : on s'en sert successivement pour tracer des segments, donc comme d'une règle non-graduée ; pour tracer des segments perpendiculaires à d'autres, c'est-à-dire comme d'une équerre ; pour reporter des longueurs fixées (que ce soit la longueur ou la largeur du gabarit), autrement dit comme d'un étalon de longueur dans certaines constructions ou comme d'un compas rouillé dans d'autres ; éventuellement pour construire une règle grossièrement graduée si l'on pense à itérer l'opération de report de cette longueur ; et enfin pour certaines constructions (notamment pour la construction d'un parallélogramme qui figure en annexe 7), comme d'un instrument permettant de tracer deux segments parallèles possédant un écartement fixé, c'est-à-dire comme d'une règle à bords parallèles... Ce simple morceau de papier, qui ressemble au départ si peu à un instrument, finit ainsi par en regrouper en son sein au moins 5 ou 6 différents, pour ne citer que les plus usuels. Ceci permet de souligner en formation que, ce qui fait ici l'instrument, c'est bien l'usage que l'on en fait et non pas la nature de l'artefact, qui reste ici constant. Ajoutons que l'on retrouve là une situation qui est tout à fait habituelle avec les instruments usuels de géométrie, qui sont rarement univoques : une règle graduée contient toujours en même temps une règle non-graduée, une équerre contient toujours également une règle non-graduée, et parfois aussi graduée, etc.

On peut ajouter que, même employé au titre d'un même « instrument », le gabarit peut encore conduire à plusieurs usages qui correspondent à autant de schèmes d'utilisations. Par exemple, utilisé en tant que règle non-graduée, il permet au moins deux usages différents : d'une part, tracer un segment joignant deux points donnés lorsque ceux-ci sont assez proches l'un de l'autre ; d'autre part, prolonger aussi loin que l'on veut un segment déjà tracé. Ces deux usages mobilisent des gestes différents, des conditions d'usage différentes, des contrôles à exercer différents (le côté du gabarit doit s'appuyer dans un cas sur deux points distincts et dans l'autre sur toute une partie à choisir d'un segment), etc. Ils constituent ainsi de fait des schèmes d'utilisation différents. Cependant, on peut les regrouper comme relevant du même instrument (ici , « *règle non graduée* ») parce qu'ils reposent *in fine* sur la même propriété mathématique, qui est ici l'alignement. De même, dans son usage en tant qu'équerre, on peut employer le gabarit d'au moins trois façons différentes : pour tracer un segment perpendiculaire à un segment donné en un point de ce segment ; ou bien en un point extérieur à ce segment ; ou encore pour tracer un angle droit à partir de deux amorces fournies par deux segments orthogonaux mais non sécants (pour terminer le tracé d'un rectangle, par exemple). Là encore, les gestes, les conditions d'usages et les contrôles à effectuer sont différents, donc il s'agit bien de plusieurs schèmes d'utilisation ; mais tous relèvent du même instrument « équerre » parce qu'ils mobilisent la même propriété d'orthogonalité des angles du rectangle. On voit donc que, alors que ce sont bien les usages qui définissent les schèmes d'utilisation, ce sont ici les propriétés mathématiques mobilisées qui permettent de reconnaitre les instruments.

2.3 Du côté de l'artefact : de quoi un gabarit est-il le gabarit ?

L'analyse qui précède portait sur la distinction entre plusieurs instruments portés par le même artefact. Si l'on reporte cette analyse du côté de l'objet matériel lui-même, on constate que les différents emplois que nous venons de citer correspondent à porter son regard sur différentes parties du gabarit : l'usage en tant que règle non graduée revient à considérer le segment porté par un côté, celui comme équerre mobilise l'angle droit porté par un sommet, etc. On peut analyser si on le souhaite ces différentes parties du gabarit comme autant de « sous-gabarits » qu'il contient, que l'on peut extraire ou isoler mentalement du gabarit complet. On constate ainsi que l'artefact « gabarit de rectangle » comporte aussi, outre le gabarit de sa forme globale, un gabarit de droite ou de segment, un gabarit d'angle droit, deux gabarits de longueurs différentes, un gabarit de couple de droites parallèles, etc. On pourrait d'ailleurs très facilement, en le déchirant ou en tronquant certaines de ces parties, fabriquer à partir de lui autant d'artefacts différents qui correspondraient à chacun ces sous-gabarits de manière distincte et isolée (en ne conservant qu'un côté, qu'un sommet, qu'un couple de côtés opposés, etc.). On retrouverait alors le point de vue proposé par Duval et Godin (2005), qui suggèrent d'utiliser des gabarits spécifiques qui correspondent à autant de propriétés et d'instruments différents. À l'inverse, une des particularités de cette situation, et qui nous semble en constituer l'un des intérêts, réside précisément dans la juxtaposition au sein d'un même artefact de ces différents instruments, et au sein d'un même gabarit de tous ces différents sous-gabarits. En un sens, on pourrait dire que la démarche qui conduit à identifier, au sein du gabarit global, les différents sous-gabarits qu'il contient et que l'on utilise (gabarits de côté, d'angle, de longueur, de couple de côtés opposés, etc.), qui correspondent à des parties ou à des éléments particuliers de cette forme, revient à opérer directement sur le gabarit le processus de déconstruction dimensionnelle dont nous avons décrit au paragraphe V.2.2.

2.4 Du côté des mathématiques : de la figure du rectangle à ses propriétés

Nous pouvons enfin relire ce qui précède à un troisième niveau, en portant cette fois notre regard non plus sur les différents instruments, ni sur les différents artefacts (ou gabarits), mais sur les différentes propriétés mathématiques utilisées, qui sont en définitive les propriétés de la figure « rectangle ». Outre sa forme globale, qui permet de le reconnaître de façon perceptive, un rectangle possède de très nombreuses propriétés : il a des angles droits, des segments pour côtés, des longueurs fixes et égales deux à deux, des côtés opposés parallèles entre eux, etc. Chacune de ces propriétés s'incarne ici comme correspondant à l'identification d'un sous-gabarit différent, dont l'usage relève d'un instrument différent. On retrouve ce faisant une mise en œuvre des problématiques de matérialité que nous avons soulignées au paragraphe IV.2 : chacune des propriétés mathématiques classiques du rectangle s'incarne dans le gabarit par le biais d'un regard différent porté sur lui, qui conduit à un usage propre et à la production de gestes spécifiques. S'approprier ce regard et ces gestes permet alors de s'approprier les propriétés concernées ; et reconnaître l'instrument que l'on a utilisé équivaut à identifier la propriété du rectangle que l'on a mobilisée. La « manipulation » de l'objet acquiert alors un enjeu plus essentiel, qui consiste à repérer une propriété mathématique derrière chaque geste effectué.

VII - D'AUTRES ENJEUX MATHEMATIQUES ET DIDACTIQUES PRESENTS DANS CETTE SITUATION

Les participant-es de l'atelier ont également souligné d'autres enjeux que l'on peut à associer en formation à cette situation, au-delà des questions de genèse instrumentale que nous venons de détailler, et qui ont également fait l'objet d'échanges importants dans la phase de discussion de l'atelier. Faute de place pour pouvoir ici tous les détailler, nous nous contentons d'en citer brièvement deux : certains qui portent sur des aspects d'ordre mathématique et d'autres sur des aspects langagiers. Les deux peuvent conduire notamment à des exploitations en M1 dans l'optique de la préparation du concours, et se rapprochent ainsi plus directement des enjeux que Celi et Jore (2015) décrivent à propos de la situation des constructions à la règle à bords parallèle.

1 Des enjeux mathématiques de preuve et de justification

Nous ne nous attarderons pas sur le premier enjeu mathématique et qui est peut-être le plus évident, à savoir de permettre à des étudiant-es de se réapproprier « d'une autre façon » des contenus de géométrie du collège qu'ils et elles ont pu parfois oublier, par exemple concernant un certain nombre de notions usuelles (quadrilatères et triangles particuliers, ainsi que leurs propriétés, médiatrices, hauteurs et bissectrices, polygones réguliers, etc.). Nous nous attacherons plutôt au point suivant : un certain nombre des constructions demandées conduisent naturellement à devoir mobiliser des théorèmes ou des savoirs mathématiques du second degré, voire nécessitent parfois de produire des justifications qui relèvent d'une démarche de preuve ou de démonstration. Des besoins de ce type ont été relevés dans tous les groupes lors de l'atelier et il en a été de même en licence. Dans ces moments-là, la situation dévie alors spontanément d'une recherche pratique de constructions à une recherche plus théorique d'arguments mathématiques. Bien entendu, le fait que cette nécessité soit spontanément éprouvée par les personnes qui sont en train de chercher une construction est un important levier pour conférer un enjeu réel à cette démarche de démonstration. Des besoins de ce type se sont manifestés de différentes façons, parmi lesquelles on peut au moins citer au moins les trois suivantes : pour justifier des constructions proposées, pour mesurer la portée réelle de constructions qui ont été réalisées, ou enfin pour invalider des propositions qui sont envisagées. Donnons ici un exemple de chacun de ces cas.

Pour ce qui concerne le premier type, le besoin de mobiliser des connaissances théoriques pour trouver des constructions est celui qui est le plus fréquent et il se présente naturellement dans un certain nombre des question posées. Par exemple, pour construire un triangle équilatéral à l'aide du gabarit de rectangle *(question A-14)*, on peut commencer par se donner d'abord un premier côté puis exploiter le fait que le troisième sommet se situe sur sa médiatrice. Il est alors possible d'achever la construction lorsque la longueur choisie au départ était celle de l'un des côtés (grand ou petit) du gabarit. Pour construire ensuite un triangle équilatéral plus petit ou plus grand que celui-là *(question A-15)*, on peut exploiter une autre propriété des triangles équilatéraux, en l'occurrence ici leur caractérisation par les angles, en traçant à partir du triangle équilatéral précédent un segment parallèle à l'un des côtés. On voit ainsi qu'une suite de constructions de figures pourtant semblables (ici, plusieurs triangles équilatéraux) peut conduire à devoir mobiliser successivement différentes caractérisations d'un même objet géométrique.

D'autre part, le besoin d'arguments théoriques peut aussi se manifester pour invalider des idées inopérantes. Citons à nouveau un exemple, relevé cette fois en licence. Une étudiante proposait la construction suivante pour construire un parallélogramme qui ne soit pas un losange :

et elle affirmait sur des bases graphiques que : « *d'accord, si l'écart de hauteur que je choisis au départ est trop grand, je ne peux pas effectuer la dernière étape, mais s'il est suffisamment petit j'arrive bien à la tracer* ». La seule ressource qui a alors permis de la convaincre que cette construction était impossible dans tous les cas a été le recours au théorème de Pythagore pour justifier que la diagonale d'un rectangle est toujours plus longue que son plus grand côté, et donc qu'ici les deux segments « obliques » sont inévitablement plus longs que la longueur du gabarit. *(En revanche, si l'on reprenait la même idée mais en utilisant une translation du gabarit dans la direction perpendiculaire, c'est-à-dire dans la direction parallèle au grand côté, par exemple ci-dessus dans le sens horizontal et non pas vertical, alors cette procédure aboutirait.)*

Enfin, troisième façon, le recours à des arguments théoriques s'est aussi manifesté pour mesurer la portée effective de certaines constructions qui avaient été réalisées. Un exemple en particulier s'est produit dans l'atelier comme en licence, et nous le détaillons plus précisément dans l'annexe 7. Pour construire un parallélogramme *(question A-8)*, des personnes ont proposé la construction qui consiste à tracer les deux longueurs du gabarit placé dans une première position, puis à le refaire dans une deuxième position légèrement oblique par rapport à la première *(cf. figure de l'annexe 7)*. Il se trouve que cette construction produit nécessairement des losanges, donc répond en même temps aux deux questions A-8 et A-9, mais cela n'a rien d'évident. S'il est manifeste que l'on produit bien ainsi des parallélogrammes, il faut trouver un argument pour justifier que ceux-ci sont toujours des losanges. De nombreuses preuves sont possibles ; nous en proposons une en annexe 7.

Ajoutons que des discussions dans la suite de cette question se sont ensuite produites dans l'atelier comme en licence. Elles ont conduit au constat qu'en réalité toute réponse à la question A-9 *(« tracer un losange »)* répondait nécessairement aussi à la question A-8 *(« tracer un parallélogramme »)*, qui s'avérait donc en quelque sorte redondante. Ces groupes ont alors proposé de modifier l'énoncé et de reformuler la question en : *« tracer un parallélogramme non-losange »*. Ils ont ensuite prolongé cette interrogation à l'ensemble de la feuille, soulignant par exemple que la construction d'un carré *(question A-3)* produisait toujours en même temps un rectangle, un losange et un parallélogramme, et proposant alors des reformulations telles que : *« tracer un rectangle non-carré »*, etc. Bien entendu, cette analyse critique des énoncés nous semble une tâche mathématique tout à fait importante. S'il était tout à fait attendu qu'elle se produise au sein de l'atelier, il nous semble extrêmement intéressant de constater qu'elle s'est également produite spontanément et de façon identique avec les étudiant-es de licence.

2 Des enjeux langagiers : vers les programmes de construction

Outre les enjeux que nous venons de citer, des enjeux langagiers (mais qui ne sont pour autant pas dépourvus d'enjeux mathématiques) sont également présents dans la situation considérée. Nous en relevons ici de trois types : ceux, dont nous venons en partie de parler, qui portent sur les formulations mêmes de l'énoncé ; d'autres qui se sont fait jour via les échanges au sein de chaque groupe ; enfin d'autres encore qui ont été mis en évidence au moment de la mise en commun.

Dès le départ de la phase de recherche, les participant-es se sont interrogé-es sur la façon dont les questions étaient posées. Nous venons de voir au paragraphe précédent comment certains groupes ont proposé de modifier l'énoncé pour préciser certains implicites (*un rectangle « non carré », un parallélogramme « non-losange »,* etc.) et d'autres ont souligné pendant la phase de discussion des ambigüités (qui étaient délibérées) dans la formulation de certaines questions. Par exemple, dès la première question : que signifie pour un rectangle d'être *« plus petit »* ou *« plus grand »* qu'un autre ? Doit-on l'entendre au sens des longueurs, de l'aire, pour l'inclusion ? Ces questions ont également été repérées par les étudiant-es en licence. Dans les deux cas, la réponse a consisté à leur renvoyer l'interrogation sans prendre partie : *« Si vous pensez qu'il y a là des questions différentes, répondez à toutes ! »*.

D'autres enjeux langagiers sont apparus ensuite à travers la collaboration au sein de chaque groupe et le besoin de communiquer à propos du gabarit, que ce soit pour échanger des questions, des idées ou des productions. Cela a conduit les groupes à élaborer dans l'interaction un langage commun, au moins informel, leur permettant de parler aussi bien de l'artefact lui-même, des schèmes d'utilisation qui apparaissaient, etc. Nous avons déjà souligné en quoi cette production langagière constitue une partie essentielle du processus de genèse instrumentale.

Enfin, d'autres enjeux langagiers plus formels ont été rendus visibles pendant la discussion pour la mise en commun des procédures trouvées. Dans l'atelier comme en licence, ce moment s'est déroulé de la façon suivante : les participant-es restaient à leurs tables et devaient dicter les constructions proposées pour qu'elles soient reproduites au tableau par le biais de leur description verbale, sans pouvoir montrer ni recourir à des déictiques (*« de ce côté »*, *« comme ça »*, etc.). Cette tâche permet d'aborder en formation la question de la rédaction de programmes de constructions tels que ceux qui sont demandés au concours. Dans le cas du gabarit de rectangle, il s'agit là d'un exercice qui se révèle extrêmement difficile dans la mesure où, contrairement aux instruments usuels de géométrie, on ne dispose d'aucun langage standard pour en parler. Comment décrire alors de façon claire les opérations à réaliser ? Comment désigner les différentes parties du gabarit ou les différents gestes à effectuer ? De fait, cet exercice n'a pas paru plus facile aux participant-es de l'atelier qu'il ne l'a été pour les étudiant-es de licence. Ce constat nous semble intéressant à souligner parce qu'il montre la profonde difficulté de cette tâche de verbalisation, y compris donc pour nous-mêmes, lorsque l'on ne dispose pas de formules préétablies sur lesquelles s'appuyer. Nous essayons dans l'annexe 4 de proposer des descriptions verbales de quatre constructions particulières, mais il n'est pas sur que le résultat soit déjà satisfaisant. De fait, le travail collectif pour produire un langage formel standardisé adapté à l'instrument « *gabarit de rectangle* » n'est pas encore achevé et reste donc à poursuivre.

VIII - UNE EXPERIMENTATION MENEE EN FORMATION INITIALE

Outre des expérimentations partielles en M2, une expérimentation plus complète de la situation du gabarit de rectangle a été conduite en formation initiale dans un module de préprofessionnalisation en troisième année de licence (L3). Après une présentation du déroulement de cette expérimentation, nous mobiliserons un modèle d'analyse de situations de formation actuellement en cours de développement par la copirelem pour décrire plus finement la stratégie de formation qui a été suivie.

1 Une expérimentation de la situation dans un module de préprofessionnalisation

Cette expérimentation s'est déroulée auprès d'un groupe d'étudiant-es de fin de licence qui se destinaient à entrer l'année suivante en M1 PE. Ils et elles suivaient des études dans cinq licences du domaine « lettres et sciences humaines » (histoire, géographie, lettres modernes, anglais et espagnol) et effectuaient en parallèle un stage d'observation sur l'année dans une école. Le module disposait d'un volume de douze séances de 2h et le travail sur la géométrie a occupé les trois dernières de ces douze séances, les neuf premières ayant été essentiellement consacrées à un travail sur des résolutions de problèmes dans le domaine numérique. Les étudiant-es ont travaillé avec les mêmes gabarits que ceux de l'atelier et à partir de la feuille de questions B *(annexe 3)*, qui ne diffère que sur quelques points de la feuille A. Les deux premières séances ont consisté en une exploitation directe de la situation du gabarit de rectangle, tandis que la troisième séance visait à transposer ce qui avait pu être ainsi dégagé pour analyser deux ressources portant sur la genèse instrumentale de l'équerre en CM1.

Pendant la première séance, les étudiant-es ont commencé par travailler pendant 1h30 sur la situation elle-même par groupes de 4, en complète autonomie et sans aucune restriction concernant les usages possibles du gabarit *(« vous pouvez faire ce que vous voulez ! »)*. L'enjeu était de permettre une appropriation par tout le monde de la situation ainsi que des rappels au sein de chaque groupe concernant des notions et des propriétés de géométrie qui avaient pu être oubliées. Les étudiant-es ont alors mobilisé de multiples usages du gabarit (notamment : tracer son contour, écrire dessus, le plier, le déchirer) et ont produit des constructions qui pouvaient être, selon les cas, exactes et approchées. Cette recherche a été suivie par un bilan de 30 minutes qui a comporté une mise en commun des usages de l'artefact qui avaient été produits, une présentation de compléments théoriques sur les notions d'artefact et d'instrument, la mise en évidence du processus de genèse instrumentale qui venait d'être vécu et enfin la formulation du critère de distinction entre les constructions exactes et approchées. En revanche, aucune correction ni validation d'ordre mathématique n'a été apportée à ce moment-là.

La deuxième séance a commencé par une nouvelle phase de recherche à nouveau de 1h30 sur la même situation et à partir de la même feuille de questions, mais cette fois avec un niveau d'exigence plus élevé, explicitement formulé en début de séance : le seul emploi autorisé du gabarit devenait celui du tracé de son contour et toutes les constructions se devaient à présent d'être exactes. Dans tous les groupes, le défi soulevé par ces deux exigences a été suffisamment fort pour que tout le monde accepte de chercher à nouveau les mêmes problèmes *(« - Ah, mais ça c'est beaucoup plus difficile ! Il va nous falloir tout refaire… »)*. En revanche, avec ces nouvelles contraintes, certains groupes n'ont pas su trouver toutes les constructions demandées, les questions B. 16, 20, 21 et 22 notamment se révélant les plus résistantes. La recherche a alors été suivie d'une mise en commun qui a porté cette fois sur une mutualisation des constructions qui avaient été trouvées par d'autres groupes pour ces quatre questions, en prenant soin pour chacune de présenter plusieurs constructions différentes qui avaient été proposées.

Enfin, la troisième séance a porté sur la comparaison de deux ressources pour le CM1 qui visent à faire travailler la genèse instrumentale de l'équerre : d'une part, un fichier qui répète essentiellement une seule question : *« Avec ton équerre, trace la droite perpendiculaire à la droite donnée et qui passe par le point donné »* et d'autre part la situation du *« Rectangle à terminer 2 (CM1) »* de ERMEL (2006, p. 221-229). Nous ne reviendrons pas ici plus en détail sur cette troisième séance, au-delà de la seule remarque suivante : si, à la fin de ces trois séances, les étudiant-es percevaient bien l'intérêt que présente pour les élèves une situation telle que celle proposée par ERMEL, il leur semblait à ce moment-là (en fin de licence et avant d'entrer en M1) très difficile de s'imaginer un jour capables de la mettre en œuvre eux- et elles-mêmes.

Signalons pour conclure deux éléments qui ont pu fournir des formes d'évaluation, tout au moins empirique, d'effets qui ont pu être produits par cette expérimentation. D'une part, l'appropriation constatée des mots « artefact » et « instrument » par les étudiant-es, qui ont par exemple spontanément posé lors des séances suivantes des questions telles que celle-ci : *« Je voudrais être sur : là, vous parlez bien de l'instrument et pas de l'artefact ? »* ; et, d'autre part, la réussite constatée dans la rédaction de problèmes de constructions du type de ceux demandés au concours, par opposition à un test effectué un peu plus tôt dans le semestre. Après ces trois séances, les étudiant-es ne décrivaient plus des gestes à effectuer mais bien les propriétés mathématiques que ces gestes représentent. On peut faire l'hypothèse que la distinction introduite entre les notions d'artefacts et d'instruments a pu en aider certain-es à identifier qu'on leur demandait en fait de rédiger des textes qui parlent des seconds et non pas des premiers.

2 Un modèle d'analyse de situations de formation développé par la Copirelem

Pour une meilleure description de l'expérimentation qui vient d'être présentée, nous allons nous appuyer sur un modèle d'analyse des situations de formation qui est actuellement en cours d'élaboration par la commission de la copirelem et qui a été présenté notamment au cours du colloque précédent (Aubertin & Girmens, 2015 ; Danos, Masselot, Simard & Winder, 2015 ; Mangiante-Orsola & Petitfour, 2015) et dans celui-ci (Masselot, Petitfour & Winder, 2016). Plutôt que de reproduire ce qui figure déjà dans ces ressources, nous essayons d'en donner ici une présentation plus personnalisée, s'appuyant notamment sur nos propres notes personnelles prises lors du colloque de Besançon (2015).

Ce modèle distingue 5 paliers (ou niveaux) d'études qui caractérisent différents types d'activités que l'on peut proposer en formation. Ces paliers sont présentés dans le modèle comme hiérarchisés et emboités, le passage vers un palier « plus élevé » correspondant à une prise de recul et à l'analyse d'enjeux ou d'effets produits au palier précédent, tandis qu'un passage « descendant » correspond à l'inverse à une mise en œuvre des enjeux dégagés et à un passage à la pratique. L'hypothèse de ce modèle est que les scénarios de formation de type homologie-transposition conduisent fréquemment à revisiter une même situation à différents paliers, sans que ceux-ci ne soient nécessairement dans l'ordre du modèle ni consécutifs pour le modèle. Au contraire même, de nombreuses circulations entre paliers semblent possibles et chacun d'eux peut constituer un possible point d'entrée pour un scénario de formation. (En revanche, une hypothèse minimale est qu'une majorité des scénarios de formation, si ce n'est tous, passent au moins à un moment donné par une phase de travail dans le palier purement mathématique, hors de toute considération didactique, ce qui justifie que celui-ci soit numéroté « 0 » dans le modèle. En revanche, rien n'oblige à ce que ce passage « fondamental » soit nécessairement situé au départ du scénario de formation). Il s'en dégage alors une notion que l'on pourrait appeler le « parcours » associé à un scénario de formation et qui correspond à la circulation qui est proposée entre les différents paliers.

Les cinq paliers du modèle se distinguent entre eux selon au moins trois dimensions. Ils diffèrent d'abord par ce qui est considéré dans l'activité d'enseignement étudiée, que ce soit ses aspects mathématiques, didactiques ou pédagogiques. Ils se distinguent ensuite par des centrations différentes qui peuvent porter, soit sur une activité ou une action à réaliser, soit sur une analyse des effets, modalités et leviers que l'on peut associer à une telle action. Bien entendu, le fait d'analyser une action située à niveau donné constitue en soi-même une nouvelle action, qui relève d'un registre supérieur, ce qui justifie l'aspect hiérarchique du modèle. Les paliers se distinguent enfin par les postures qu'ils endossent pour porter ces différents regards, et que l'on peut identifier par exemple à des points de vue d' « élève », d'enseignant-e, de formateur-e ou encore de chercheur-e.

Dans le modèle tel qu'il a été présenté, ces paliers sont numérotés (de 0 à 4), ce qui souligne fortement la hiérarchie qui existe entre eux. Nous essayons ici de les désigner plutôt par des noms, ce qui permet au contraire d'atténuer cet aspect hiérarchique. Ces cinq paliers sont :

- Un *palier de l'activité (ou de l'action) mathématique* (numéroté 0 dans le modèle), qui correspond à réaliser une tâche mathématique pour elle-même, par exemple résoudre un problème posé. Cela correspond à l'adoption d'une posture d'élève, ou plus largement si l'on préfère de mathématicien-ne.

- Un *palier de l'analyse de contenus et d'enjeux mathématiques* (ou palier 1). Ce palier correspond à l'analyse des potentiels enjeux d'apprentissage que l'on peut associer à une situation mathématique donnée. Il peut correspondre à la posture d'un-e élève qui cherche à dégager ce qu'il faut retenir d'une activité effectuée, ou à celle d'un-e enseignant-e qui réfléchit en termes des contenus visés à la préparation d'une séance.

- Un palier que l'on peut qualifier à la fois de *palier de l'analyse didactique et pédagogique d'une activité* comme de *palier de l'action didactique et pédagogique* (palier 2). Ce palier consiste à dégager des éléments de mise en œuvre d'une situation mathématique à partir d'enjeux de contenus identifiés. Il porte à la fois sur l'analyse didactique d'une activité mathématique donnée et sur la conception d'actions à engager. Il peut correspondre à nouveau au point de vue d'un-e enseignant-e qui réfléchit à la préparation d'une séance, mais cette fois-ci du côté des modalités, des gestes professionnels et des choix de gestion à mobiliser. Un des enjeux de ce niveau est d'articuler des choix de gestion (modalités) avec des enjeux mathématiques repérés.

- Un *palier de l'analyse didactique et pédagogique* (palier 3). Ce palier consiste à analyser les ressorts et leviers de la mise en œuvre précédente, par exemple en pointant des contraintes qui peuvent peser sur elle, des marges de manœuvre disponibles ou encore l'existence d'éventuelles alternatives. Il peut correspondre au point de vue d'un-e enseignant-e qui se questionne cette fois-ci à une échelle plus globale (par exemple de l'année, du programme, etc.) ainsi qu'à celui d'un-e formateur-e qui cherche à prendre en compte une diversité de pratiques et de conceptions personnelles au sein d'un collectif d'enseignant-es ou de stagiaires.

- Enfin, un *palier de la problématisation d'une question professionnelle* (palier 4) qui consiste à articuler les analyses précédentes à la lumière d'une problématique identifiée. Ce palier correspond *a priori* naturellement à une posture de chercheur-e, mais il peut être aussi par moments celui d'un-e stagiaire en formation, par exemple dans le cadre d'un mémoire de M2 portant sur des mathématiques, et il est bien entendu encore très fréquemment celui d'un-e formateur-e.

3 Analyse de l'expérimentation à l'aide de ce modèle

L'expérimentation décrite précédemment au paragraphe VIII.1 a été conçue indépendamment du modèle qui vient d'être présenté, mais celui-ci nous semble à même de permettre une description plus éclairante du parcours de formation qu'elle a tenté de mettre en œuvre.

Dans la première séance, un travail de recherche situé au palier de l'action mathématique (palier 0), mais qui présentait au fond peu de difficultés mathématiques dans la mesure où tout usage du gabarit était permis et où on ne rejetait pas les constructions approchées, a été suivi d'une synthèse au palier de l'analyse didactique et pédagogique (palier 2), qui a pointé la genèse instrumentale qui venait d'être effectuée et explicité en quoi certains choix de mise en œuvre avaient pu y contribuer. Dans la deuxième séance, une reprise du travail de la même situation, donc à nouveau au palier de l'action mathématique (palier 0), mais avec cette fois plus de contraintes et donc plus d'enjeux et de difficultés mathématiques, a conduit à une mise en commun et une synthèse situées cette fois dans le palier de l'analyse réflexive mathématique (palier 1), visant à dégager ce que l'on pouvait en retenir en termes de contenus, notamment dans une perspective de préparation du concours. Enfin, la troisième séance, que nous n'avons pas décrite ici en détail, a commencé par une analyse comparée des contenus et des modalités proposées dans deux ressources pour la classe, donc par un travail qui se situait conjointement dans les paliers de l'analyse mathématique (palier 1) et de l'action didactique (palier 2), pour se conclure par une mise en commun visant à comparer les effets susceptibles d'être produits sur le long terme par ces deux ressources sur les élèves, donc dans le palier de l'analyse de l'action didactique et pédagogique (palier 3).

Ajoutons que ce modèle peut également être utilisé pour décrire le déroulement qui a été suivi par l'atelier : la phase initiale de recherche de la situation elle-même correspondait au palier 0 de l'action mathématique ; la discussion qui a suivi, cherchant à dégager des enjeux mathématiques, didactiques et de formation que l'on peut associer à cette situation en formation, revenait à explorer simultanément les paliers intermédiaires (1, 2 et 3) ; enfin la phase d'exposition finale, qui a tenté de prolonger les éléments produits par des références à des recherches existantes, relevait quand à elle du palier 4.

IX - CONCLUSION

Au-delà du plaisir lié à la recherche de la situation elle-même du gabarit de rectangle, plaisir qui s'est clairement manifesté au cours de l'atelier et qui fut tout autant présent en licence, les participant-es ont semblé en définitive répondre par l'affirmative à la question qui leur était posée et confirmer l'intérêt qu'ils et elles voyaient à utiliser cette situation en formation initiale. Cet intérêt semble pouvoir se développer dans plusieurs directions potentielles, qu'il s'agisse de contribuer à une réappropriation de certaines notions de géométrie élémentaire, de servir d'ancrage à un travail sur la rédaction des programmes de constructions ou encore, bien entendu, d'aborder la question de la genèse instrumentale des instruments de géométrie en dégageant des enjeux qui y sont associés et en proposant des situations qui peuvent y contribuer. Pouvant ainsi conduire à aborder à la fois des contenus d'ordre mathématique et didactique, cette situation semble permettre des exploitations aussi bien dans des objectifs de préparation du concours que de formation professionnelle, avec bien entendu la nécessité d'adopter des modalités spécifiques à adapter à chaque cas. Pour l'instant, le trop petit nombre d'expériences réalisées (une seule expérimentation menée jusqu'au bout dans un module de formation préprofessionnelle) ne suffit pas pour constituer une base solide et il y aurait besoin d'autres retours d'expériences, notamment en M1 et en M2, pour mieux mesurer la portée effective et le potentiel de cette situation pour la formation. Nous incitons donc les collègues qui le souhaitent à s'emparer de cette proposition et à partager ensuite leurs retours d'expériences, l'un des buts de cet atelier comme de cet article étant de permettre justement de telles reprises. Enfin, certain-es participant-es ont signalé des envies d'adapter cette situation, d'un côté pour la formation continue, et d'un autre pour la classe elle-même. Ces deux chantiers sont pour l'instant entièrement ouverts et tout reste à entreprendre à leur sujet, mais les perspectives qu'ils dégagent semblent *a priori* représenter des pistes particulièrement stimulantes.

X - BIBLIOGRAPHIE

AUBERTIN J.-C., GIRMENS Y. (2015). Une situation d'homologie-transposition : le solide caché, Atelier A36, in *Actes du XLI^e Colloque COPIRELEM,* Mont de Marsan.

BERTHE D., CAZIER B. (2000),.La règle à bords parallèles, *Repères IREM,* **40,** 43-70.

CARREGA J.-C. (2001). *Théorie des corps. La règle et le compas,* Paris : Hermann.

CELI V. (2014). Que veut-on que les élèves de l'école primaire apprennent en géométrie ?, Regard croisé N° 1, in *Actes du XL ^e Colloque COPIRELEM,* Nantes.

CELI V., JORE F. (2015). Les constructions à la règle à bords parallèles en formation initiale des professeurs des écoles. Pourquoi ? Comment ?, Atelier A.34, in *Actes du XLI ^e Colloque COPIRELEM,* Mont de Marsan.

DANOS P., MASSELOT P., SIMARD A, WINDER C. (2015). Analyser une ressources de formation : exemple de la « situation des annuaires », Atelier A15, in *Actes du XLI^{e} Colloque COPIRELEM,* Mont de Marsan.

DUVAL R., GODIN M (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures, *Grand N,* **76**, 7-27.

ERMEL (2006). Rectangle à terminer 2 (CM1), in : *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*, Paris : Hatier, 221-229.

HOUDEMENT C. (1998). Stratégies de formation des maitres du premier degré en mathématiques, in *Les Cahiers du formateur,* Tome 2, Actes du séminaire de Tarbes, 1-14.

HOUDEMENT C. (2014). Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques, Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, LDAR Paris-Diderot.

KUZNIAK A. (1994). Les stratégies utilisées pour former les maitres du premier degré en mathématiques, in *Actes du XXI^{e} colloque de la COPIRELEM,* Chantilly.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C., LECLERCQ R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments, *Repères IREM,* **90,** 5-41.

MANGIANTE-ORSOLA C., PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maitres, Conférence No. 2, in *Actes du XL^{e} Colloque COPIRELEM,* Nantes.

MANGIANTE-ORSOLA C., PETITFOUR E. (2015). L'analyse de manuels en formation : pour quoi faire ? Atelier A.25, in *Actes du XLI^{e} Colloque COPIRELEM,* Mont de Marsan.

MANGIANTE-ORSOLA C. (2016). De l'étude d'une situation de restauration de figure au cycle 3 à l'élaboration d'une ressource, Atelier A.14, in *Actes du XLII^{e} Colloque COPIRELEM,* Besançon.

MASSELOT P., PETITFOUR E., WINDER C. (2016). Présentation d'un cadre d'analyse de situations de formation des professeurs des écoles, Communication C26, in *Actes du XLII^{e} Colloque COPIRELEM,* Besançon.

MAURIN C. (2001). Utilisation d'un triangle gabarit pour tracer des droites remarquables dans un triangle, in Atelier A : Approche de la géométrie en formation initiale : témoignages de pratique, Les cahiers du formateur, Tome 5, Copirelem, Maxéville, 18-23.

PERRIN D. (2005). *Mathématiques d'école,* Paris : Cassini.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (2012). La géométrie (plane) du CP à la cinquième : quelques réflexions pour le comité scientifique des IREM, <http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/Annexe_2-CS-IREM-8_juin_2012.pdf> (consulté le 31 août 2015).

RABARDEL P. (1995, a). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains,* Paris : Armand Colin.

RABARDEL P. (1995, b). Qu'est-ce qu'un instrument ?, CNDP - Dossiers de l'ingénierie éducative, **19**, 61-65.

LISTE DES ANNEXES

1 **Présentation des gabarits**

2 **Les questions utilisées dans l'atelier (Feuille A)**

3 **Les questions utilisées en licence (Feuille B)**

4 **Un exemple de production d'un groupe de l'atelier**

5 **Deux constructions pour la question 11 (partager le rectangle du gabarit par la moitié)**

6 **La situation du gabarit déchiré**

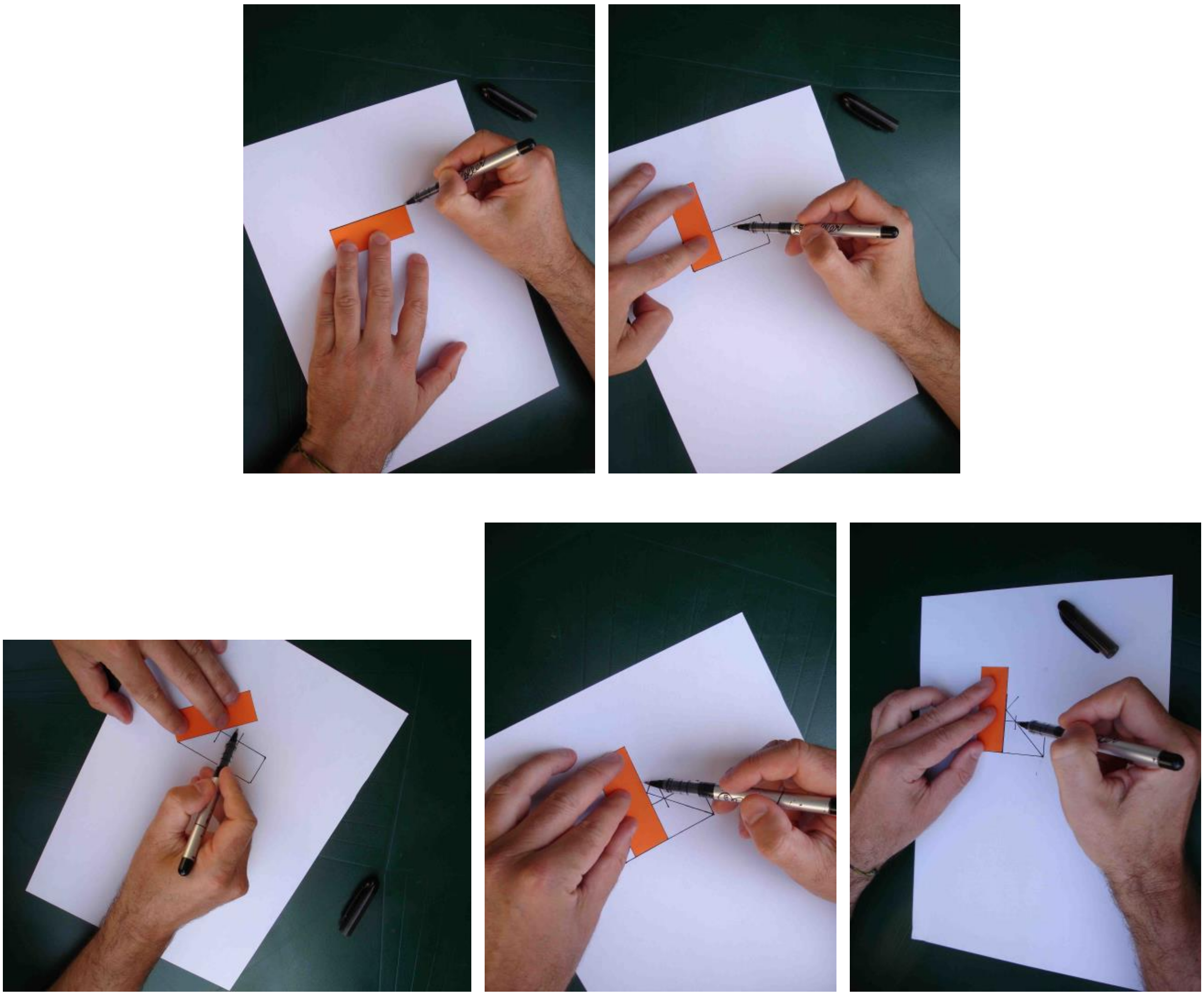
7 **Un parallélogramme qui est aussi un losange**

ANNEXE 1 : PRESENTATION DES GABARITS

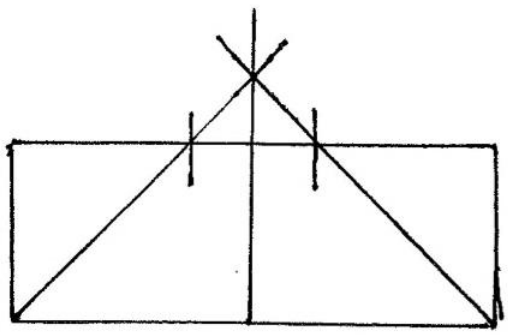
Les photographies qui suivent présentent les gabarits qui ont été utilisés lors de l'atelier comme en licence, d'abord de façon statique puis dans leur utilisation. La photographie ci-dessous présente cinq gabarits de couleurs différentes (jaune, orange, rouge, vert et bleu) disposés sur une feuille A4, ce qui en montre l'échelle. Les couleurs vives utilisées permettaient de bien voir les gabarits sur la feuille et de les distinguer clairement des tracés effectués.

(Cinq gabarits disposés sur une feuille A4.)

La série de photographies qui suit présente différentes étapes d'une construction qui a été proposée dans l'atelier en réponse à la question 11 de la feuille A, « *tracer un rectangle qui a les mêmes dimensions que le gabarit puis partager ce rectangle en deux rectangles superposables* » *(ici, en traçant la médiatrice de sa longueur).* Cette construction est celle qui a donné lieu à l'interjection verbale : « *- et avec mon équerre, je termine la figure !* » qui est analysée dans le texte au paragraphe VI.2.1. Une reproduction de la construction effectivement produite par ce groupe pendant l'atelier figure en annexe 4. Une description plus détaillée de la procédure suivie figure en annexe 5.



(Quelques étapes d'un construction répondant à la question 11 : partage du rectangle du gabarit en deux moitiés superposables.)



(La figure produite par la procédure ci-dessus)

Ajouton que cette figure suit la même procédure de constructions que celle, produite pendant l'atelier, qui figure dans l'annexe 4 sous le numéro 11. On voit, en comparant ces deux tracés graphiques, à quel point une même procédure constructive peut conduire à des tracés matériels qui peuvent parfois sembler à première vue très différents.

ANNEXE 2 : LES QUESTIONS UTILISEES DANS L'ATELIER (FEUILLE A)

Le morceau de carton que vous avez reçu est un gabarit de rectangle. En utilisant seulement ce gabarit (ainsi qu'un stylo et du papier), il vous est demandé de réaliser les constructions suivantes :

1) Tracer un rectangle plus petit et un rectangle plus grand que le gabarit.

2) Tracer un rectangle deux fois plus long que large.

3) Tracer trois carrés ayant des longueurs de côtés différentes.

4) Tracer un segment plus grand que la plus grande longueur du gabarit, puis tracer un carré qui admette ce segment comme côté, puis tracer l'une des diagonales de ce carré.

5) Tracer un triangle rectangle-isocèle.

6) Tracer un triangle rectangle-isocèle qui a comme longueur isocèle la *(grande)* longueur du gabarit.

7) Tracer un triangle rectangle-isocèle qui a comme hypoténuse la *(grande)* longueur du gabarit.

- Variante : Tracer un carré dont la diagonale a comme longueur la (grande) longueur du gabarit.

8) Tracer un parallélogramme.

9) Tracer un losange.

10) Tracer un losange qui a comme longueur de côté la *(grande)* longueur du gabarit.

11) Tracer un rectangle qui a les mêmes dimensions que le gabarit, puis partager ce rectangle en deux rectangles superposables, d'abord dans un sens puis dans l'autre.

12) Tracer un segment plus long que le grand côté du gabarit puis tracer sa médiatrice.

13) Tracer un rectangle superposable au gabarit puis tracer ses diagonales.

14) Tracer un triangle équilatéral.

15) Tracer un triangle équilatéral plus petit ou plus grand que le précédent.

16) Tracer un hexagone régulier.

17) Se donner deux droites sécantes *(représentées par des segments suffisamment longs)* et tracer leur bissectrice.

18) Se donner une droite *(représentée par un segment suffisamment long)* et un point extérieur à cette droite, puis construire les deux droites qui passent par ce point et qui sont respectivement perpendiculaire et parallèle à la première droite.

19) Tracer un segment plus long que la longueur du gabarit et partager ce segment en trois segments égaux.

- Variante : Partager le rectangle du gabarit en trois rectangles identiques (dans un sens ou dans l'autre).

20) Se donner deux points situés à une grande distance l'un de l'autre *(notamment, plus grande que la longueur du gabarit)* puis tracer le segment qui joint ces deux points.

ANNEXE 3 : LES QUESTIONS UTILISEES EN LICENCE (FEUILLE B)

Le petit morceau de carton que vous avez reçu est un gabarit de rectangle. En utilisant ce gabarit ainsi qu'un stylo et du papier, il vous est demandé de réaliser les constructions qui suivent :

1) Tracer un rectangle.
2) Tracer un rectangle plus petit que le premier.
3) Tracer un rectangle plus grand que le premier.
4) Tracer un rectangle aussi petit que possible.
5) Tracer un rectangle aussi grand que possible.
6) Tracer un rectangle deux fois plus long que large.

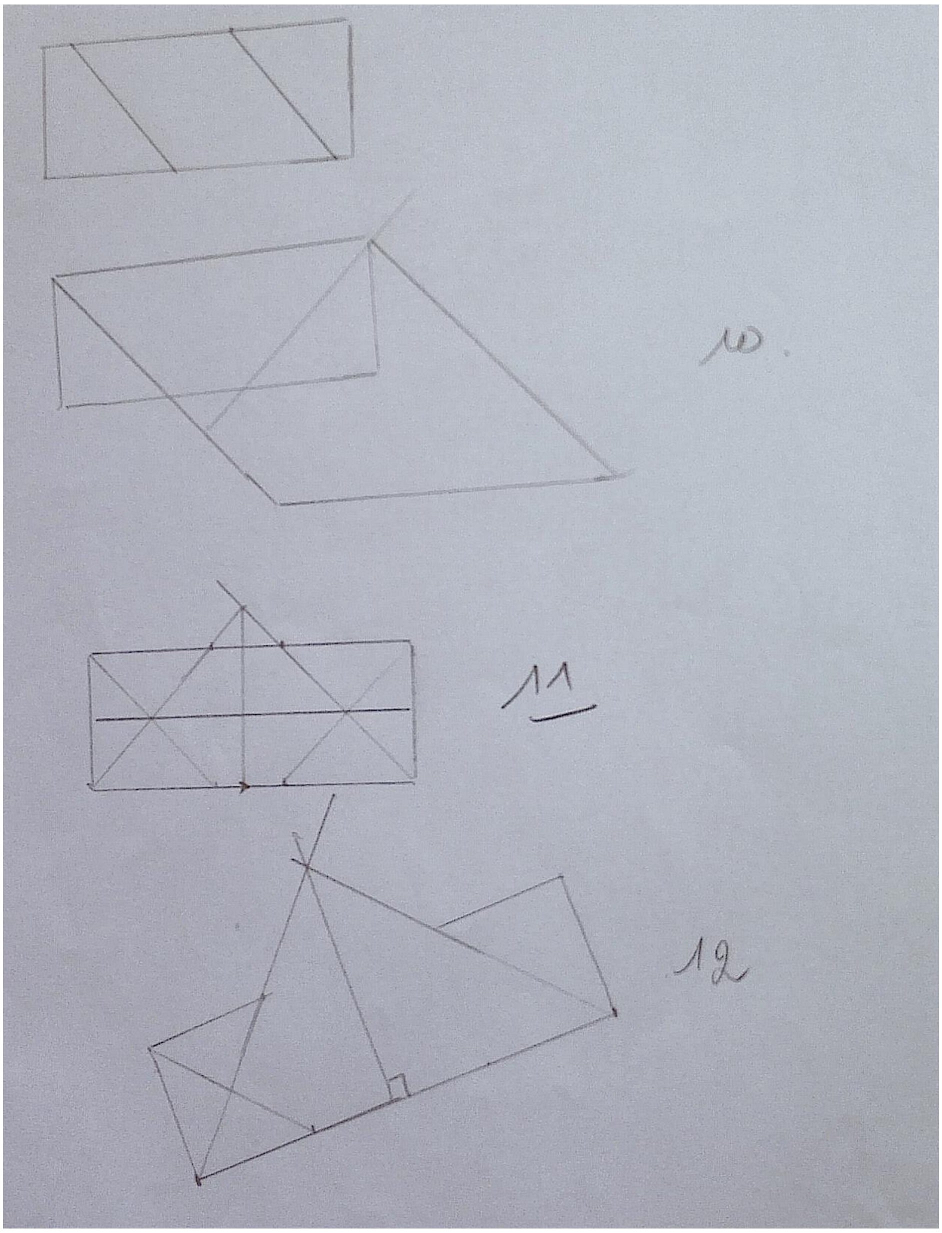
7) Tracer un carré.
8) Tracer un carré ayant une longueur de côté différente du premier.
9) Tracer un carré plus grand que ces deux-là.
10) Tracer un carré plus petit que ces trois-là.

11) Tracer un triangle isocèle.
12) Tracer un triangle rectangle.
13) Tracer un triangle rectangle-isocèle.
14) Tracer un triangle rectangle-isocèle qui ait comme longueur de ses deux côtés isocèles la plus petite longueur du gabarit *(c'est-à-dire la largeur du gabarit)*.
15) Tracer un triangle rectangle-isocèle qui ait comme longueur de ses deux côtés isocèles la *(grande)* longueur du gabarit.
16) Tracer un carré qui ait comme longueur de côté la (grande) longueur du gabarit et tracer ses deux diagonales.
17) Tracer un parallélogramme.
18) Tracer un losange.
19) Tracer un losange qui ait pour longueur de côté la *(grande)* longueur du gabarit.
20) Tracer un rectangle qui soit exactement la moitié du gabarit dans le sens de la longueur.
21) Tracer un rectangle qui soit exactement la moitié du gabarit dans le sens de la largueur.

22) Tracer un triangle équilatéral qui ait comme longueur de côté la grande longueur du gabarit.
23) Tracer un triangle équilatéral différent du précédent.
24) Tracer un carré dont la diagonale a pour longueur la longueur du gabarit.
25) Partager le rectangle du gabarit en trois rectangles identiques.
26) Tracer un hexagone régulier.

ANNEXE 4 : UN EXEMPLE DE PRODUCTION D'UN GROUPE DE L'ATELIER

Nous reproduisons ci-dessous une page qui a été produite par un groupe au cours de l'atelier, que nous analysons à la suite. Cette page contient les réponses proposées par ce groupe aux quatre questions 9, 10, 11 et 12 de la feuille A.



Cette production est représentative de celles qui ont pu être observées, aussi bien pour les autres questions, que dans les différents groupes. Parmi les observations que l'on pourrait généraliser à tout l'atelier (et que l'on retrouvait également en licence) figure l'absence complète de textes ou d'explications écrites, ainsi que le fait que ce qui est visé semble être au moins autant la production d'un schéma explicitant un procédé de construction qu'une réalisation purement graphique ou plastique. Ces dessins représentent ainsi des constructions en un sens un peu plus abstrait que leur seule trace graphique ne pourrait le laisser penser, et correspondent à des « figures » prototypiques bien plus qu'à des « dessins » particuliers. On peut noter d'ailleurs que, dans la construction numéro 12, le groupe a jugé utile de noter sur le dessin le codage de l'angle droit, permettant ainsi de conserver une trace mnémotechnique de l'usage « *équerre* » qui a été effectué du gabarit *(cf. ci-dessous).*

Enfin, une dernière observation typique, et qui est bien entendu liée à l'absence d'explications et de textes, est la difficulté qu'il y a à reconstituer après coup les procédures de construction qui ont pu être suivies à partir de ces seules traces écrites. Essayons cependant de proposer ici des reconstitutions possibles des procédures qui ont pu être mobilisées, tout en mesurant qu'il ne peut s'agir évidemment là que d'interprétations. On peut formuler par exemple les hypothèses suivantes :

- Pour la question 9 *(tracer un losange),* il semble que la procédure ait consisté à tracer d'abord un rectangle superposable au gabarit, puis à reporter deux fois la largeur du gabarit sur les deux longueurs de ce rectangle, à partant de deux sommets opposés donc en le faisant dans le sens opposé sur chaque longueur. On obtient alors un parallélogramme en joignant les 4 points ainsi obtenus ; et on peut ajouter qu'il s'agit là d'une construction d'un parallélogramme qui n'est pas un losange.

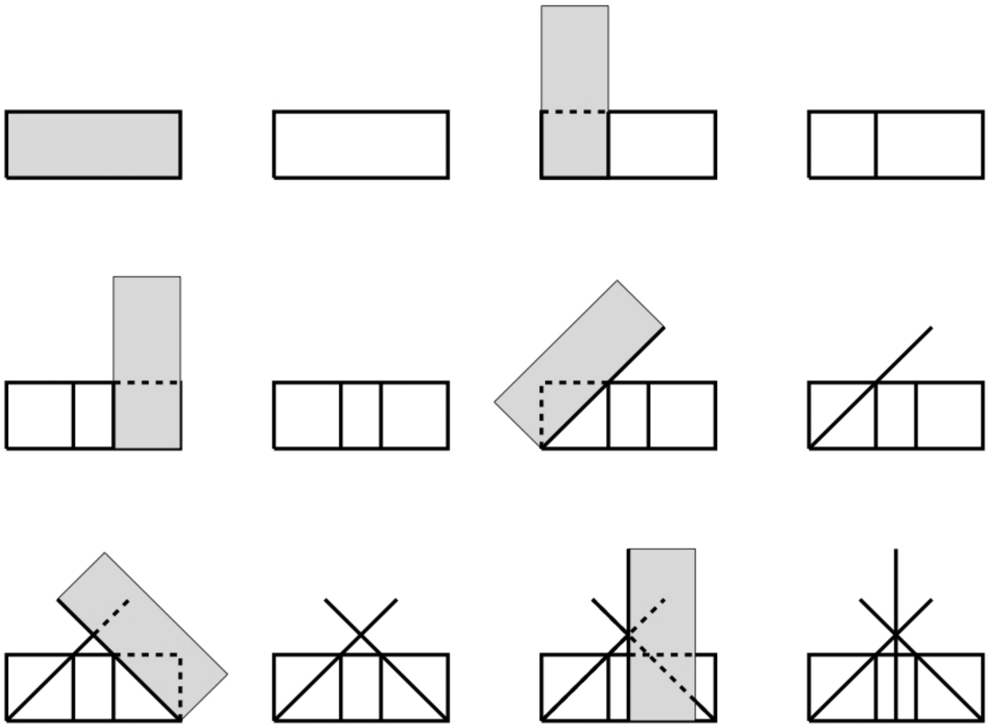
- Pour la question 10 *(tracer un losange ayant pour longueur de côté la longueur du gabarit),* la procédure suivie est plus difficile à reconstituer Elle pourrait cependant être la suivante : tracer d'abord un rectangle superposable au gabarit, que nous nommerons ici *ABCD* par commodité, et qui fournira un des premiers côtés du losange cherché, par exemple la longueur *[AB].* Tracer ensuite un deuxième segment d'extrémité *A* et de même longueur *AB,* qui fournira un deuxième côté du losange cherché ; nous appellerons ici ce deuxième segment *[AE].* En traçant ensuite un segment perpendiculaire à *[AE]* passant par *B,* puis un segment perpendiculaire à celui-ci et passant par *B,* on construit alors un segment qui est parallèle à *[AE]* et qui a la même longueur que lui, que nous nommerons *[BF]*. Il ne reste plus alors qu'à tracer le segment *[EF]* pour achever la construction du losange *ABFE.*

- Pour la question 11 *(partager un rectangle superposable au gabarit en deux rectangles identiques),* la procédure semble avoir été la suivante : tracer un rectangle superposable au gabarit et commencer par faire apparaitre, à l'intérieur de celui-ci et à ses « extrémités », deux carrés admettant comme côté les deux largeurs de ce rectangle. (Ici, ces carrés ne figurent pas en entier : seuls leurs sommets sont indiqués, mais leur quatrième côté n'est pas tracé). Les centres de ces deux carrés appartiennent à la médiatrice de la largeur du rectangle et ils permettent donc de la tracer. Enfin, le point d'intersection de deux diagonales de ces deux carrés appartient à la médiatrice de la longueur du rectangle. Celle-ci s'obtient alors en traçant un segment qui passent par ce point et qui est perpendiculaire à une largeur du rectangle. *(Et c'est précisément cette dernière étape de la construction qui a donné lieu à l'interjection «et avec mon équerre, je termine la figure ! » du paragraphe VI.2.1).* Nous proposons une autre description de cette construction (à l'aide de schémas et non plus comme ici à l'aide d'un texte) dans l'annexe 5.

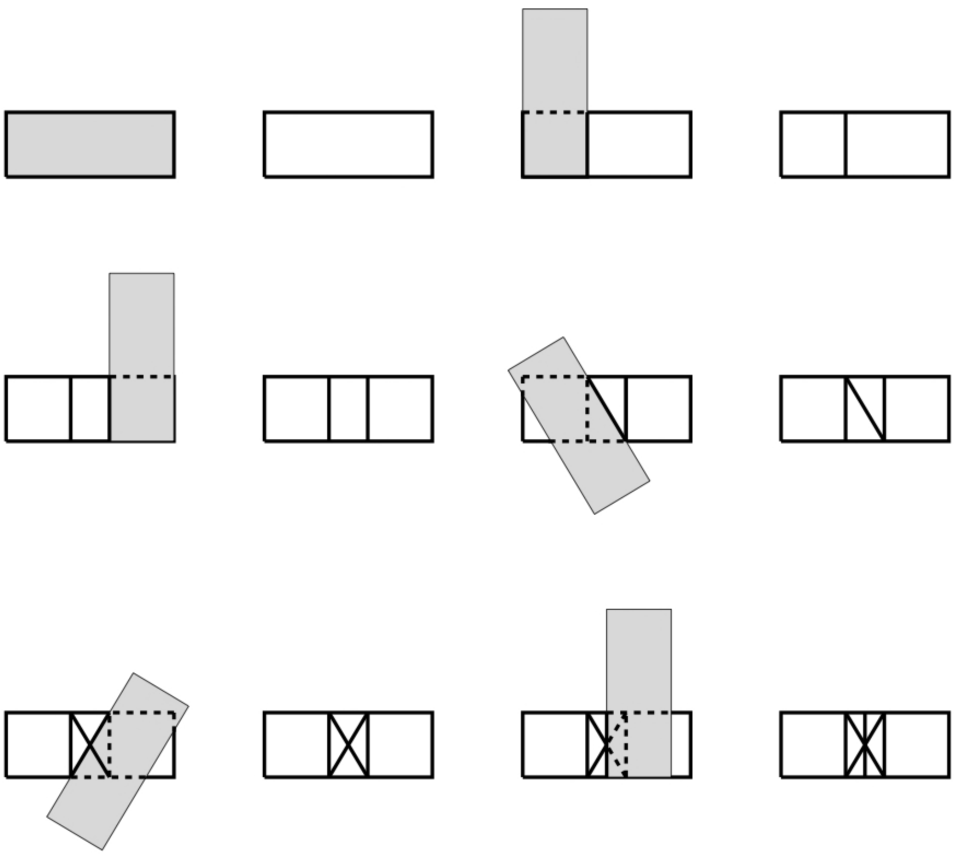
- Enfin pour la question 12 *(tracer la médiatrice d'un segment plus long que la longueur du gabarit),* on observe une reprise de la technique qui a été produite à la question précédente, consistant à faire apparaitre deux carrés aux deux extrémités du segment en question, puis à utiliser le point d'intersection des diagonales de ces deux carrés comme un point appartenant à la médiatrice cherchée. Il ne reste alors qu'à tracer un segment passant par ce point et perpendiculaire au segment initial pour obtenir la médiatrice recherchée (en utilisant donc à nouveau la fonction « équerre » du gabarit). On peut ajouter que cette construction aboutit effectivement dans ce cas de figure parce que le segment initial était en fait suffisamment court, mais qu'elle n'aboutirait pas de la même façon et demanderait à être adaptée dans le cas d'un segment initial plus long. (Une telle adaptation ne serait par ailleurs pas difficile à concevoir : si les deux carrés que l'on a fait apparaitre aux deux extrémités ne suffisent pas parce que le segment initiale est trop long, ils permettent tout de même de faire apparaitre un segment plus court et qui possèdent la même médiatrice, donc à partir duquel il suffit de renouveler la même opération…)

ANNEXE 5 : DEUX CONSTRUCTIONS REPONDANT A LA QUESTION 11 (PARTAGER LE RECTANGLE DU GABARIT PAR LA MOITIE)

Nous proposons deux constructions différentes qui répondent à la question *11 (partager le rectangle du gabarit par la moitié),* la première qui a été produite dans l'atelier et la deuxième qui l'a été par des étudiant-es de licence. Nous présentons ici ces deux constructions par le biais d'une suite de figures qui illustrent les différentes étapes , ce qui évite du coup de devoir recourir à des textes.- La première construction, produite dans l'atelier, est la suivante :

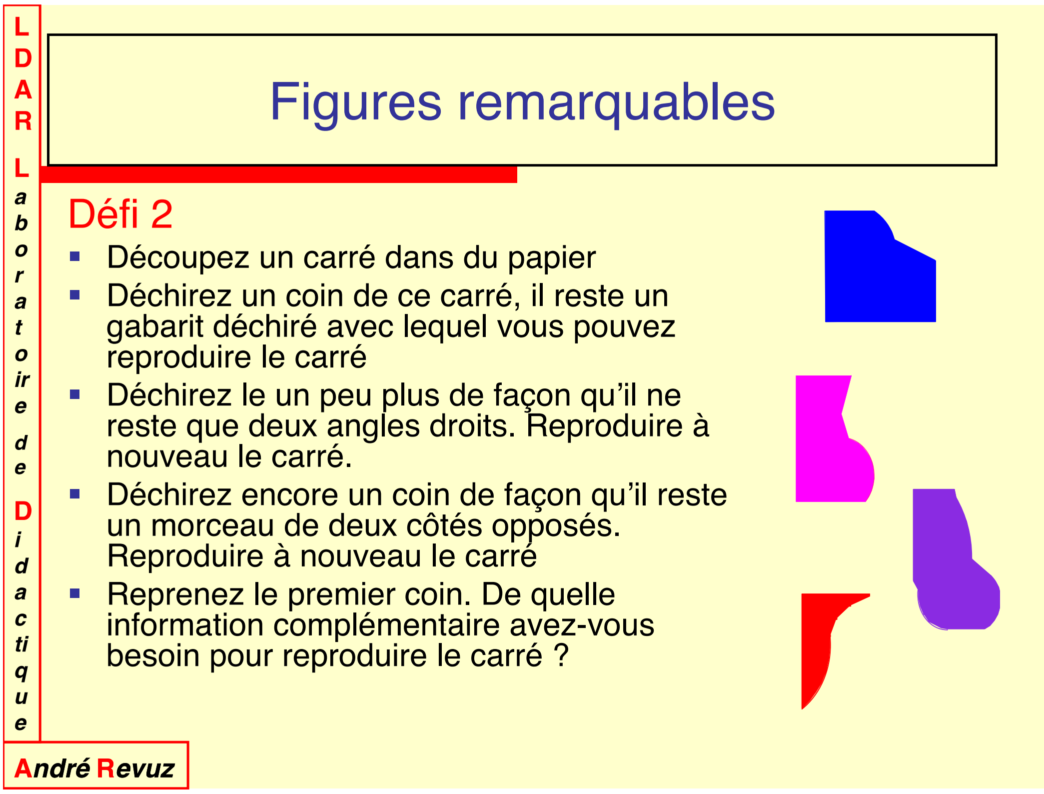


- La deuxième construction, produite elle par des étudiant-es de licence, est la suivante :



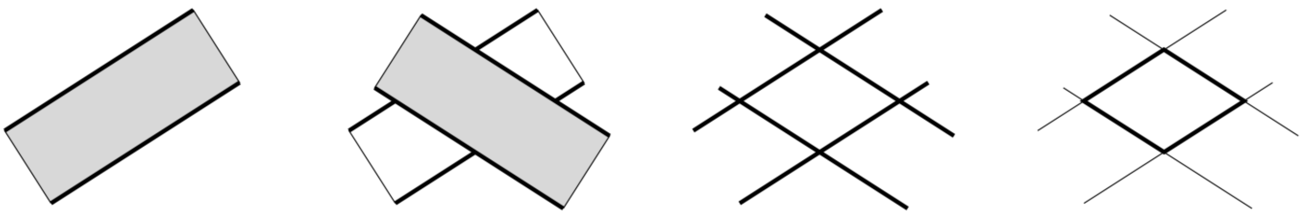
ANNEXE 6 : LA SITUATION DU GABARIT DECHIRE

La présentation de la situation du « gabarit de rectangle » reproduite ci-après est une page extraite du document (Perrin-Glorian, 2012, p.30). Il s'agit, à l'aide d'un gabarit de carré tout d'abord entier, puis de plus en plus déchiré, de reconstruire à chaque fois la même figure, à savoir le carré initial. Quand on résoud ce problème, on constate que plus le gabarit est déchiré et plus il y a besoin de mobiliser de transformations géométriques, qui se traduisent par le fait de devoir réaliser du côté pratique un plus grand nombre de superpositions du gabarit déchiré. Avec seulement un coin déchiré, il suffit d'utiliser deux positions différentes reliées par une rotation ; avec deux coins et un côté déchirés, il y a besoin de quatre positions obtenues par l'itération de la même rotation ; enfin lorsque le carré est encore plus déchiré, il peut y avoir besoin d'utiliser une symétrie en plus de la rotation, et éventuellement de recourir à un nombre plus grand encore de superpositions du gabarit.



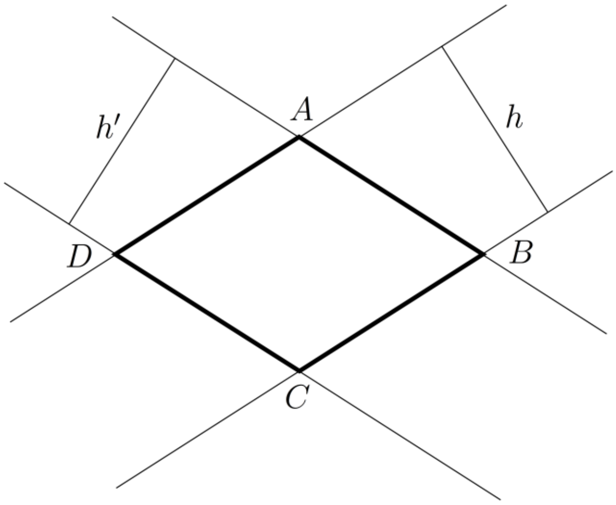
ANNEXE 7 : UN PARALLELOGRAMME QUI EST AUSSI UN LOSANGE

Pour construire un parallélogramme à l'aide du gabarit de rectangle (utilisé en fait ici de la même façon règle à bords parallèles), on peut penser à la construction très simple suivante, dans laquelle il est évident que l'on obtient une figure dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux, donc qui est un parallélogramme :



Il se trouve que cette construction produit en fait toujours des losanges, mais cette propriété est un peu moins évidente et nécessite de produire une justification. Nous en indiquons une qui nous semble particulièrement simple et que nous devons à Celi et Jore (2014). Elle présente de plus l'intérêt d'utiliser la notion d'aire comme un outil pour des démonstrations mathématiques, ce qui est une pratique relativement rare dans l'enseignement scolaire en France (à l'inverse de ce qui se pratique par exemple en Italie).

Nous nous appuyons pour le raisonnement sur la figure suivante, qui précise les nominations des points :



Par construction, le quadrilatère $ABCD$ est obtenu comme intersection de deux bandes à bords parallèles qui possèdent de plus la même largeur, dont $ABCD$ est un parallélogramme. En calculant de deux façons différentes l'aire $\mathcal{A}$ de ce parallélogramme, on obtient l'égalité : $\mathcal{A} = AB \times h' = AD \times h$. Les deux bandes à bords parallèles ayant la même largeur, on a $h' = h$. On en déduit l'égalité $AB = AD$, donc le parallélogramme $ABCD$ est bien toujours un losange.