

RESSOURCES POUR LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ET LES APPRENTISSAGES GÉOMÉTRIQUES AU CYCLE 2 : UNE APPROCHE SPATIALE DES FIGURES COURBES ET DU CERCLE¹

Équipe ERMEL
IFÉ - ENS LYON

Henri-Claude ARGAUD
hargaud@gmail.com

Laura BARBIER
École de la Coucourde
barbier.laura26@gmail.com

Jacques DOUAIRE
LDAR
jacques.douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN
ESPE de l'académie de Reims, URCA-CEREP
fabien.emprin@univ-reims.fr

Gérard Gerdil-Margueron
gerard.gerdil-margueron@orange.fr

Cyril VIVIER
École de Coinaud, Saint Rambert d'Albon
csm_vivier@yahoo.fr

Résumé

Les expériences spatiales constituent une composante essentielle de la construction des apprentissages géométriques de la GS au CE1. Mais comment analyser ces expériences ? Quelles relations avec l'enseignement de notions géométriques ? Quels apprentissages spécifiques du spatio-graphique ?

A partir de la résolution d'un problème de construction de figures courbes fermées, nous analyserons les apprentissages en jeu, les caractéristiques des différentes mises en œuvre, ainsi que les besoins des enseignants. Nous présenterons un éclairage sur des situations d'apprentissage permettant des expériences spatiales et nous interrogerons sur la pertinence d'une ressource en fonction des besoins des enseignants pour sa mise en œuvre identifiés dans le cadre de la recherche Ermel en cours.

I - PRÉSENTATION DES PROBLÉMATIQUES ET DEROULEMENT DE L'ATELIER

La recherche actuelle de l'équipe ERMEL (Ifé) analyse les compétences spatiales et géométriques que les élèves de l'école primaire de la GS au CE1 peuvent construire. Elle vise donc la production de connaissances et la production de ressources pour les enseignants et les formateurs ainsi que l'étude de l'appropriation de ces ressources.

¹ Compte rendu s'appuyant sur les notes de Catherine Breynat et de Véronique Bordaz, CPC dans la Drôme que nous remercions vivement.

Dans cet atelier nous précisons des contributions d'expériences spatiales à la construction des connaissances géométriques. Cette intervention s'inscrit en continuité avec les précédentes aux colloques COPIRELEM de Nantes (Argaud & al. 2014, Douaire J., Emprin F. 2014) et de Mont-de-Marsan (Douaire J., Emprin F. 2014).

Nous présenterons une expérimentation en cours : la résolution d'un problème de production de figures courbes fermées constituées de quatre pièces (quart de cercle ou d'ellipse). L'identification des figures différentes permet aux élèves de développer et de formuler des critères d'analyse des formes géométriques.

Déroulement de l'atelier :

Après une brève présentation des recherches de l'équipe puis du problème proposé, les participants résolvent le problème et explorent les questions qu'il soulève, tant mathématiques que portant sur les apprentissages. Puis, les enjeux de trois phases importantes de cette situation sont successivement analysés, à partir de montages courts de séquences filmées dans plusieurs classes de CP et de CE1, avec une discussion après chacune des présentations : la première porte sur la phase de résolution du problème ; la seconde concerne les mises en commun qui suivent ces phases de production ; la troisième concerne la phase d'appropriation du problème.

Nous avons préféré présenter ces séquences dans cet ordre, avec la phase d'appropriation en dernier, afin que les participants à l'atelier, familiarisés avec la situation par les phases précédentes puissent plus pertinemment s'interroger sur des choix d'organisation.

Une brève synthèse abordera enfin l'explicitation des besoins des enseignants, la production de ressources et leur appropriation.

II - RÉOLUTION DU PROBLÈME PAR LES PARTICIPANTS

Chaque participant, par groupes de 4 ou 5, dispose d'un lot de 16 cartes : 4 quarts de petit cercle, 4 quarts de grand cercle et 8 quarts d'ellipse.

Le grand axe de l'ellipse est le diamètre du grand cercle. Le petit axe de l'ellipse est le diamètre du petit cercle.

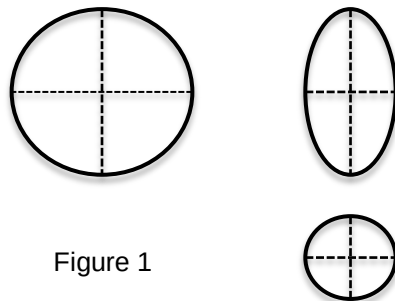


Figure 1

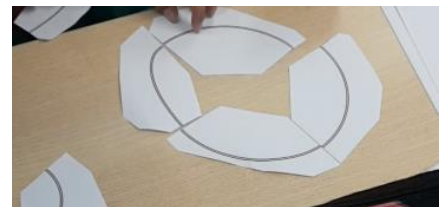


Figure 2

Chaque participant doit produire, sur calque ou par transparence, le maximum de figures fermées différentes formées avec quatre de ces cartes. Puis des comparaisons se font au sein des groupes.



Figure 3 : Quelques productions des participants.

Les échanges en grand groupe permettent de soulever plusieurs questions tant sur le problème mathématique que sur les dispositifs didactiques possibles, notamment :

- celles liées aux tracés : impact de l'épaisseur des traits,
- celles liées au respect des contraintes : quelle tolérance sur la continuité est acceptable si une courbe est fermée ? Quelle précision des points de liaison ? Peut-on superposer des arcs ?
- celles liées à l'identification des pièces et des solutions : faut-il identifier les arcs par un numéro ?

Ces échanges conduisent à préciser les consignes d'assemblage : « on n'accepte que les figures qui ont des assemblages bord à bord ». Ce choix de présentation progressive des consignes est celui fait en classe de CP ou de CE1 : les règles d'assemblage y sont présentées progressivement, afin d'en garantir l'appropriation.

Certaines interrogations portent sur les procédures de comparaison : Quelles sont les capacités des élèves de CP ou de CE1 pour distinguer un cercle d'une autre figure courbe fermée (un « presque cercle ») ? Quel recours à la superposabilité comme procédure de validation pour cette question ?

D'autres questions concernent les savoirs visés : quelles peuvent être les contributions de cette situation à la connaissance du cercle ?

Ce sont notamment ces questions que cet atelier propose d'éclairer.

III - ÉTUDE DE MISES EN ŒUVRE EN CP ET CE1

Cette partie, au cœur de l'atelier, propose l'étude de trois moments du déroulement de cette situation dans des classes de CP et de CE1² :

1. La première recherche de solutions, sitôt la consigne comprise par les élèves ;
2. La mise en commun qui suit cette phase de résolution ;
3. La phase de dévolution.

Les séances ont été filmées dans les mois ou les semaines qui précèdent le colloque. Pour chacune des phases, un montage d'une durée inférieure à 10 minutes propose des moments caractéristiques du déroulement dans au moins trois classes différentes.

L'étude de chacune de ces phases par l'atelier repose sur la même structure :

1. Une ou deux questions préalables proposées aux participants pour amorcer une réflexion commune, offrant un premier filtre au visionnement ;
2. Le visionnement de la vidéo ;
3. Un débat sur les observations et interrogations formulées par les participants.

1 La phase de résolution du problème : les élèves en situation de recherche

Les questions initiales posées aux participants sont : quelles actions les élèves vont-ils pouvoir produire ? Quels apprentissages sont-ils envisageables ?

La vidéo propose pour une des classes, le premier temps de recherche qui conduit essentiellement à la production des petits cercles, des grands cercles et des ellipses. Pour les trois autres classes, c'est l'étape suivante qui est montrée : celle où les élèves, après avoir produit ces trois figures, en cherchent d'autres.

Les constats, confirmés par les enseignants et les observateurs dans ces classes, sont que tous les élèves ont perçu le but à atteindre, à savoir produire des courbes fermées (des « circuits ») constituées de quatre arcs et qu'à l'issue de la phase de dévolution, sur laquelle nous reviendrons, les élèves ont intégré les règles d'assemblage. Les extraits de vidéos témoignent des recherches de l'ensemble des élèves.

² Classes de CE1 de Laura Barbier à La Coucourde (26), de CP de Marielle Galland à St Barthélémy de Vals (26), de CP/CE1 de Fabienne Charotte à Châlons-en-Champagne (51), de CP de Audrey Sartre à St Vallier (26)

Le matériel proposé aux élèves a évolué d'une classe à l'autre au cours des expérimentations. Le support des figures a varié : dans un premier temps les figures (quarts de petits ou de grands cercles, quarts d'ellipses) étaient tracées sur des rectangles de carton, qui, bien que de dimensions un peu variables, favorisaient, chez certains élèves, des procédures de constitution de puzzle plus centrées sur l'emboîtement de ces pièces que sur la continuité des courbes. Les quarts de cercles ou d'ellipses ont aussi fait l'objet de choix de contextes différents : soit de simples traits (parties des figures citées) soit la représentation d'objets du monde réel : des circuits de chemin de fer, en dédoublant les traits pour représenter les rails. Mais ce dernier choix permet-il une meilleure compréhension des contraintes (en particulier sur la continuité des traits) ?

Les participants ont relevé :

- les actions :
 - choisir des pièces au hasard ;
 - substituer des pièces dans un assemblage déjà réalisé ;
 - essayer les morceaux, quatre par quatre, puis en cas d'échec repartir de zéro ;
 - essayer une pièce dans le cas où trois sont déjà placées, éventuellement de façon systématique ;
 - choisir comment placer la 3^{ème} par rapport à l'assemblage des deux premières ;
 - poser deux morceaux, puis essayer pour les deux autres ;
- les difficultés :
 - perte de vue de la tâche ;
 - oubli d'une partie de la consigne, par exemple en oubliant qu'il doit y avoir quatre morceaux ;
 - confusions par rapport aux puzzles : privilégier le support matériel sur lequel les figures sont tracées ;
- les apprentissages :
 - courbe fermée ;
 - jonction de courbes, « ça se suit » ;
 - notion de quart de tour ;
 - recherche perceptive d'une courbure constante ;
- la compréhension par les élèves de la consigne ;
- la persévérance dans la recherche : les élèves ont confiance et vont jusqu'au bout de la tâche ;
- des questions :
 - les élèves sont-ils sûrs qu'il y a une solution ?
 - quels apprentissages : courbure ? occupation de l'espace ?
 - quel serait l'intérêt d'un essai avec du matériel plus grand (notion de micro et de méso espace et d'espace spatio-graphique)
 - l'un des intervenants revient sur l'analyse des procédures observées dans la recherche du dernier quart par les élèves : « Quand ils cherchent le dernier quart, comment procèdent-ils ? Choix aléatoire ou repérage préalable ? ». En réponse, les observations montrent qu'il y a souvent de l'anticipation, avec des critères portant sur la forme (arc de cercle ou ellipse) et la taille (« l'encombrement ») de la pièce cherchée, avec des réajustements de positionnement. Mais un élève, dans l'extrait de vidéo, regarde la pièce et sans la poser, l'élimine ; il n'a pas besoin de la réalisation pratique et peut donc anticiper son contrôle.

Ces réactions des participants, notamment, sur l'activité mathématique des élèves mettent en évidence l'intérêt pour ce problème sollicitant la notion de courbure.

2 La phase de mise en commun après la production des circuits

Les suggestions initiales posées aux participants sont : repérer les procédures de validation des élèves et repérer les difficultés des élèves.

Deux classes sont concernées par cet extrait de vidéo : celle de CP/CE1 de Fabienne Charotte et celle de CP de Marielle Galland.

Les buts de la mise en commun sont de repérer les productions qui respectent ou non les contraintes et d'identifier les solutions identiques.

Les procédures de validation observables, dont la présentation est sollicitée par les enseignants sont principalement :

- la validation globale de la forme ;
- la reconnaissance perceptive des formes : petit cercle, grand cercle, ovale (ellipse) ;
- la superposition des pièces sur les feuilles affichées des productions des élèves pour identifier quelles sont les figures utilisées ;
- la description par l'élève de la façon dont il a construit sa figure, avec, éventuellement le fait de la refaire devant la classe.

Plusieurs questions sont exprimées par les participants, notamment autour de la signification de « pareil – pas pareil » : comment décider que deux constructions assez proches sont pareilles ou non ? Des remarques sont formulées sur l'utilisation d'un calque : deux figures symétriques sur papier, deviennent « pareilles » par retournement du calque.

Ces procédures mobilisent une comparaison de productions présentant, suite à leur déplacement ou à leur affichage vertical, de légères approximations dans leur réalisation (les pièces peuvent bouger...) : le « collage » des formes, ne garantit pas leur juxtaposition initiale, d'autant que pour savoir si deux formes apparemment voisines sont semblables, il est parfois nécessaire d'en déplacer une ; une validation par la perception induit l'expression de différences et n'est plus toujours fiable.

La continuité des lignes et les différences de figures constituées nécessitent donc souvent le recours à la superposition des formes pour les identifier et à la description de la procédure de construction. Cela contribue aussi à un décentrement d'un problème d'assemblage de pièces vers un problème « graphique » de tracés. En effet, l'espace sensible a changé : de l'action sur les formes pour assembler, qui a pu être première parmi les procédures personnelles des élèves dans la phase de résolution précédente, la mise en commun permet de se centrer sur la continuité des courbes, c'est à dire des tracés graphiques, comme nouvel objet de questionnement. La validation permet donc une évolution des procédures de jugement sur des questions de régularité des courbes.

La question se pose de ce que les enseignants doivent institutionnaliser à l'issue de cette mise en commun.

3 La phase de dévolution du problème : l'entrée dans la solution

Nous avons choisi de présenter en dernier l'étude de cette phase qui est, naturellement, la première de la séquence, afin que les participants puissent disposer d'une connaissance à la fois du problème posé, avec les dispositifs matériels utilisés et les organisations didactiques développées, mais aussi des compétences des élèves tant dans les procédures de résolution que dans les formulations exprimées. Cet ensemble d'observables, ainsi que les réflexions des participants, qu'elles aient été formulées dans l'atelier ou soient restées personnelles ou partagées au sein des groupes leur permettent même si leur expérience des activités dans des classes de ces niveaux est variable de s'approprier les questions constituant un des enjeux posés à notre recherche.

Les axes d'observations proposés aux participants sont :

- repérer les ressemblances et les différences entre les trois scénarios d'entrée ;
- repérer les effets de ces choix.

Dans les séances filmées les différences portent sur :

- les consignes données avec ou sans la mise à disposition du matériel aux élèves ;
- la définition d'un chemin fermé, évoquée ou non par des gestes ;

- l’affichage de quelques morceaux ;
- la description des cartes ;
- la compréhension du terme « fermé ».

Nos interrogations concernent deux aspects de la même question, côté élève et côté enseignant : l’intérêt et les limites d’une contextualisation.

Le premier aspect déjà rapidement entrevu, porte sur l’intérêt de la présence ou non d’un contexte familier, par exemple les rails d’un circuit électrique (ou circuit automobile) évoquant pour les élèves une activité connue. Sous son aspect principal, l’enjeu est le suivant : la facilitation créée ainsi pour la compréhension des contraintes (continuité des courbes) ne risque-t-elle pas d’entraîner un glissement de l’objet de travail et des connaissances utilisées par les élèves, des contraintes du tracé vers d’autres modèles spatiaux ? Et, plus largement les moyens complémentaires pour représenter cette réalité évoquée (par exemple, doubler les traits pour représenter les rails) ne risquent-ils pas de compliquer la formulation des critères de validation abordés dans la mise en commun ?

Le second aspect porte sur la liberté de choix de l’enseignant quant à la phase d’appropriation, c’est à dire celle qui garantit la compréhension par les élèves, du but et des contraintes, formulés par une consigne.

- La présence d’un contexte évoqué, auquel il sera ensuite fait référence pour, par exemple, préciser les contraintes, justifier les impossibilités (« le train ne peut pas rouler... »). Dans cette situation, compte tenu de la diversité des expériences spatiales des élèves placés face à un objet qu’ils n’ont très certainement pas encore rencontré comme support d’un travail scolaire, de quelle liberté dispose l’enseignant dans l’évocation de contextes variés ? Le traitement des détours imprévus suscités par des remarques des élèves, ne risque t’il pas de créer plus de perturbations que d’avantages ?
- Quelle est la marge de manœuvre pédagogique dans cette situation didactique ? Si nous nous centrons sur les actions du maître, en particulier de l’enseignant en début de carrière, comme dans certaines classes où les vidéos ont été filmées, la proposition d’une situation contextualisée dont les étapes d’évocation ou de simulation du réel seraient précisément décrites constitue-t-elle une aide pour le maître ?
- Plus largement, la précision d’une consigne garantissant le travail mathématique de l’élève dans la phase de résolution, implique-t-elle une mise en œuvre pédagogique unique ? Et, dans ce cas celle-ci doit-elle être détaillée avec précision ?
- Autrement dit, quelles relations entre la présentation pédagogique, l’organisation didactique et l’activité mathématique des élèves ? Bien évidemment, nous n’ambitionnons pas de répondre dans l’absolu, mais au sein de notre équipe de recherche, où, heureusement pour la qualité des débats qui structurent notre réflexion et nos propositions, les approches sont variées. Aussi, dans les mois qui ont précédé cette présentation à la COPIRELEM, nous avons filmé des mises en œuvre pédagogiques différentes.

IV - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Revenons succinctement sur des questions abordées :

Sur les apprentissages visés : Quels apprentissages peuvent être développés en s’appuyant sur la perception (régularité d’une figure) pour contribuer à l’analyse de propriétés géométriques ? Nous évoquons « un décentrement d’un problème d’assemblage de pièces vers un problème « graphique » de tracés ; dans cette mesure, l’espace sensible a changé : de l’action sur les formes pour assembler, qui a pu être première parmi les procédures personnelles des élèves dans la phase de résolution, la mise en commun permet de se centrer sur la continuité des courbes, c’est à dire des tracés graphiques, comme nouvel objet de questionnement ».

Sur la prise en compte des connaissances initiales des élèves : Comment des connaissances langagières et gestuelles participent-elles à l'appréhension des éléments communs et à la diversité des types d'espaces dans lesquels les représentations des objets géométriques se construisent et les analyses de leurs propriétés se développent ?

1. Comment s'articulent les premières procédures et connaissances sur le « spatio-graphique » avec les expériences antérieures sur des objets ? En particulier, ces connaissances antérieures ne sont pas principalement « déclaratives », mais s'appuient sur des gestes (par exemple la différence entre tourner et retourner, l'utilisation de tracés instrumentés sans forcément une visée de représentation d'objets géométriques,...)
2. Mais elles s'expriment aussi sous des formes langagières, dans le cadre d'un langage de l'élève pour contrôler son action, ou dans celui d'une communication autour d'une production (formulation d'une procédure, vérification des contraintes, validation d'une solution...) dont l'importance pour les apprentissages est souvent sous-estimée dans l'enseignement au profit du recours à un vocabulaire stéréotypé et déconnecté de la résolution de problèmes.

Sur le rôle et les interactions entre les contextes : celui évoqué d'un jeu familier (rails d'un train), celui matérialisé par des pièces à assembler, celui plus épuré de traits où la pièce matérielle n'intervient peut-être que pour les règles d'assemblage de continuité ? Ce dernier aspect que l'on pourrait qualifier "spatio-graphique" est-il une variante de l'espace sensible ou un véritable espace "autonome" entre un espace sensible et un éventuel espace géométrique non accessible aux élèves de cet âge ?

Nous tenons, aussi à rappeler le rôle important des ateliers de la COPIRELEM pour nos recherches qui comportent - intrinsèquement - la prise en compte des besoins des enseignants et la diffusion auprès d'eux et des formateurs de résultats (problématiques d'apprentissage, dispositifs d'enseignement...). En effet, ces colloques nous imposent une double exigence, d'une part, celle de clarté pour la communication de ces questionnements et résultats à un public intéressé et connaisseur, et d'autre part, celle d'explicitation de problématiques qui en sont issues relevant parfois de différences d'approche au sein de l'équipe. Cette nécessité, résolue par des analyses et des expérimentations complémentaires, dans les mois qui ont précédé le colloque, nous a déjà permis de réelles avancées théoriques.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage.

ARGAUD H.-C. (1998). *Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre*, Thèse, Université Joseph Fourier-Grenoble 1.

ARGAUD H.-C., COMBIER G., DOUAIRE J., DUSSUC M.-P., GERDIL-MARGUERON G., MAZUY C., VIVIER C. (2014). Angle droit à l'articulation entre le cycle 2 et le cycle 3, *Actes du XLème colloque COPIRELEM*, Nantes.

BERTHELOT R., SALIN M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse, Université Bordeaux 1.

DOUAIRE J., EMPRIN F. (2014). Apprentissages mathématiques à l'école et ressources pour les enseignants, *Actes du XLème colloque COPIRELEM*, Nantes.

DOUAIRE J., EMPRIN F. (2015). Quels critères de validité, quelle appropriation par les enseignants de ressources issues de recherches en didactique, *Actes du XLIème colloque de la COPIRELEM*, Mont-de-Marsan.

EQUIPE ERMEL (2006), *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*, Hatier.

LABORDE C. (1989). L'enseignement de la géométrie entant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques, *RDM vol 9/3*, La pensée sauvage Editions.