

LES PROBLEMES DU RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN, UNE RESSOURCE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS ?

Bernard ANSELMO

ESPÉ Lyon 1, IREM de Lyon, ARMT
bernard.anselmo@univ-lyon1.fr

Michel HENRY

IREM de Franche-Comté, ARMT
michel.henry@univ-fcomte.fr

Résumé

Depuis 20 ans, le Rallye Mathématique Transalpin, s'adresse aux élèves de 8 à 15 ans de différents pays. Il leur propose de résoudre par classe entière des problèmes « atypiques » sans aide de leur enseignant. Les énoncés produits, les productions recueillies, les analyses des résultats, mais aussi les récits d'expérimentation constituent une base de données importante, aussi bien d'un point de vue quantitatif que qualitatif, disponible pour la recherche et la formation en France et à l'étranger. L'atelier propose aux participants d'interroger cette ressource pour mieux la connaître, chercher comment et dans quels buts l'exploiter en formation.

I - LE RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Le Rallye mathématique transalpin (RMT) est une confrontation entre classes, pour des élèves de 8 à 15-16 ans, dans le domaine de la résolution de problèmes de mathématiques. Il est organisé par une association internationale à but non lucratif, « l'Association Rallye Mathématique Transalpin » (ARMT). Elle se fixe comme objectif « de promouvoir la résolution de problèmes pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ».

Cette association est organisée en sections réparties dans différents pays d'Europe (Belgique, France, Italie, Luxembourg, Suisse) mais aussi hors d'Europe (Argentine).

1 Bref historique

En 1996, le rallye mathématique Romand, créé en 1993, s'ouvre à des classes italiennes. Ainsi naît le RMT. Il ne concerne alors que des classes de l'enseignement primaire. Dans les années suivantes il s'ouvre à d'autres niveaux de classes du collège, s'étend à d'autres régions et d'autres pays dont la France. En 2001 près de 1500 classes participent déjà au 9^e RMT et l'effectif des classes participantes n'a depuis cessé de croître pour dépasser aujourd'hui les 4000 classes inscrites.

Parallèlement, l'ARMT organise chaque année depuis 1998 une rencontre internationale qui réunit les représentants de différentes sections autour d'un thème de travail : « Qu'est-ce qu'un problème ? » (Bourg en Bresse 2004) ou « le RMT et la formation des maîtres » (Sienne 2014).

2 Les épreuves

Le RMT propose des épreuves de résolution de problèmes par classes entières, réparties en huit catégories, des degrés 3 à 10 (du CE2 à la seconde). Il est organisé dans chaque section selon des modalités similaires : la décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, après une épreuve d'essai organisée par l'enseignant à partir des sujets d'anciennes épreuves mis à disposition par l'association. Le rallye se déroule ensuite en trois épreuves. Les deux premières s'adressent à toutes les classes et se déroulent au cours du premier et du second trimestre. La dernière, la finale, s'adresse aux classes qui ont obtenu les meilleurs résultats.

Les épreuves se déroulent en 50 minutes, hors de la présence du maître titulaire. La responsabilité de l'organisation de recherche est laissée à la classe. Elle doit produire une solution unique pour chacun des problèmes.

L'évaluation des copies (attribution des points de 0 à 4) est faite par l'équipe régionale responsable, à partir d'une analyse *a priori* commune des problèmes, conduite lors de leur élaboration.

3 Une ressource pour la classe, la recherche et la formation

Les problèmes du RMT font tous l'objet d'une analyse *a priori* des contenus mathématiques, de la tâche de l'élève, complétée par une description des critères d'attribution des points.

Après la passation de chaque épreuve, une synthèse des premiers résultats donne pour chaque problème une « moyenne » de points par catégorie, sur l'ensemble des classes de toutes les sections, ainsi que la répartition de ces points selon les critères 0, 1, 2, 3 et 4.

Pour certains problèmes, des analyses *a posteriori* sont conduites à partir des productions d'élèves archivées dans chaque section. Elles permettent d'identifier les procédures adoptées par les élèves lors de la résolution, les difficultés, les obstacles, les erreurs récurrentes, le niveau de construction des concepts mathématiques. Elles fournissent parfois quelques idées d'exploitation didactique des problèmes à l'intention des enseignants qui voudraient les insérer dans le parcours d'apprentissage de leur classe.

L'ensemble de ces données est regroupé dans une banque de problèmes, encore actuellement en préparation¹, où tous les sujets sont accessibles par familles de tâches, par concepts mathématiques avec un système de mots-clés pour s'y orienter.

II - EXPLOITER UN PROBLEME DU RMT POUR LA FORMATION

Les participants de l'atelier se sont prêtés à suivre le début d'un dispositif de formation destiné aux enseignants du cycle 3 et construit autour d'un problème du RMT. Ce dispositif a été illustré à partir d'un problème donné, mais il pourrait être repris avec d'autres problèmes tirés de la banque du RMT.

1 Le dispositif de formation

1.1. Les objectifs

Outre des objectifs notionnels portés par le problème choisi, la formation vise des objectifs didactiques liés à la conception et à la conduite d'un enseignement par résolution de problèmes. Ces objectifs sont proposés aux participants sur la forme suivante :

- conduire une analyse *a priori* d'un problème pour pouvoir ensuite mieux observer les élèves au travail ;
- conduire une analyse *a posteriori* pour définir les objectifs de la mise en commun et la conduire en l'appuyant sur les productions d'élèves.

1.2. Le déroulement prévu

La formation prévue sur trois heures s'organise en quatre temps suivis chacun d'un temps d'échanges entre participants et d'éventuels apports du formateur.

1. Résolution experte du problème par les participants.

¹ On peut consulter la version en développement à l'adresse suivante : <http://www.projet-ermitage.org/ARMT/bd-armit.html>

Ils travaillent individuellement ou par groupe de deux et doivent identifier les connaissances mathématiques mises en jeu.

2. Analyse *a priori*

Elle est conduite par les participants réunis en groupe de 4 et guidés par un certain nombre de questions :

- Quelles sont les procédures de résolution, exactes ou erronées, que peuvent utiliser les élèves pour résoudre ce problème ?
- Quelles sont les difficultés que les élèves sont susceptibles de rencontrer ?
- Quelles sont les erreurs possibles ?
- Quelles sont les origines possibles de ces erreurs ?

3. Analyse de copies d'élèves

Chaque groupe reçoit des copies d'élèves (une quinzaine) et en effectue un classement en vue de conduire ensuite en classe une mise en commun des productions.

4. Bilan

Il s'agit d'explorer différentes mises en commun possibles en listant les éléments de synthèse susceptibles de s'en dégager, les modalités selon lesquelles elles pourraient être menées et d'envisager les éventuels prolongements qui pourraient leur être donnés.

1.3. Analyse du dispositif

On peut essayer d'interroger les potentialités de ce dispositif en utilisant le modèle d'analyse de situations de formation présenté, à ce 42^{ème} colloque, par Pascale Masselot, Edith Petitfour et Claire Winder (communication C26). Il est structuré en cinq paliers d'études qui caractérisent les activités de formation selon leur nature, le positionnement du formé et les connaissances convoquées.

Dans cette structure, la phase 1 de la formation se situerait d'abord au palier 0, celui de l'activité mathématique où les participants placés en position d'élèves ont un problème à résoudre, puis au palier 1, celui d'analyse réflexive de l'activité où, en tant qu'enseignants, ils échangent sur les connaissances mathématiques mises en jeu.

Les phases 2 et 3 où les participants prennent le statut d'enseignant pour anticiper l'activité des élèves, analyser des productions et envisager leur exploitation pourraient se situer au palier 2, celui de l'analyse didactique et pédagogique. La phase 4, celle du bilan, dans laquelle les formés en confrontant leurs propositions interrogent leur pratiques, pourrait être catégorisée dans le palier 3 du modèle, celui de l'analyse réflexive de l'activité didactique et pédagogique.

Ainsi le dispositif de formation apparaît potentiellement riche d'autant plus qu'on imagine facilement comment il pourrait se prolonger au palier 5 du modèle, celui dans lequel le participant prend la posture de chercheur pour questionner plus avant une problématique qui se dégage de la formation.

2 La tarte de Mamie Lucie

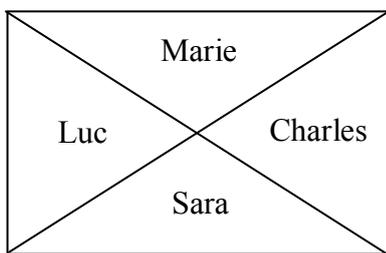
Le problème sur lequel les participants de l'atelier ont travaillé est un problème tiré du 22^e RMT qui a été proposé en 2014 aux élèves de catégories 4, 5 et 6 c'est-à-dire en France de CM1, CM2 et de sixième.

En voici l'énoncé :

LA TARTE DE MAMIE LUCIE

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

2.1 Résolution par les participants

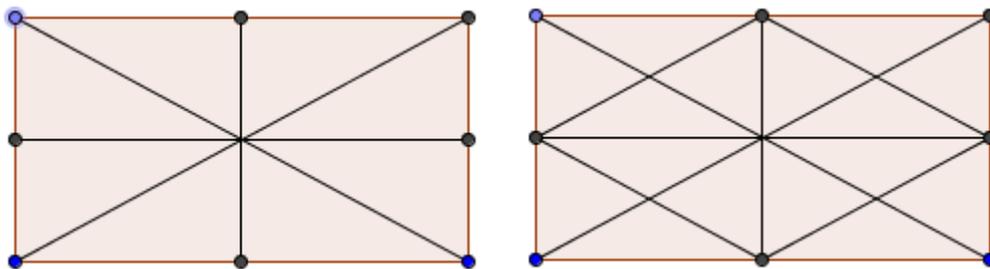
Le problème a été résolu par certains en utilisant les propriétés des axes de symétries du rectangle qui le partagent en quatre rectangles superposables puis celle des diagonales du rectangle qui partagent les rectangles obtenus en deux triangles de même aire. D'autres ont fait appel à la propriété de chacune des médianes d'un triangle qui le partage en deux triangles de même aire.

Ils ont identifié dans ce problème les connaissances sous-jacentes liées à la notion d'aire et aux propriétés géométriques du rectangle. Ils ont remarqué qu'elles seraient souvent mobilisées en acte par les élèves et parfois utilisées de façon plus explicite, par exemple dans un calcul d'aire. Il est à noter qu'à ce moment de l'atelier, la question de la généralité de la preuve n'a pas été soulevée.

2.2 Analyse a priori

Les participants à l'atelier ont anticipé un certain nombre de procédures correctes ou erronées que les élèves pourraient mettre en œuvre.

- Interprétation uniquement visuelle :
 - o les triangles de Marie et Sara ont une base plus grande donc leur aire est plus grande ;
 - o les triangles de Luc et Charles sont plus grands car ils sont plus hauts.
- Mesure et formule de l'aire du triangle ; erreurs de mesures ou de calcul ou d'approximation.
- Découpage en huit ou en seize morceaux (pavage unité) puis comptage d'unités dans chaque part.



- Découpage avec ou sans utilisation du calque : reproduction du triangle de Luc puis découpage et superposition sur le triangle de Marie.
- Utilisation d'un quadrillage puis comptage du nombre de carrés.

- On a partagé équitablement en quatre donc chacun à $\frac{1}{4}$.

Les participants à l'atelier ont répertorié les difficultés liées à la compréhension de la notion de partage (équitable ou non), à celle de la notion d'aire (en se limitant par exemple à une comparaison de surfaces par superposition), celles liées à la notion de précision (des découpages, des quadrillages, des mesures ...). Cette dernière interrogation amène à questionner le choix des variables didactiques (dimensions du rectangle représentant le gâteau, rectangle explicitement à l'échelle ou non...).

On peut remarquer qu'à ce stade les participants n'ont pas explicitement cité parmi les difficultés, celle qui consiste à identifier la grandeur en jeu dans ce problème quand on parle de quantité de tarte.

2.3 Analyse des productions

Les participants à l'atelier se sont vu distribuer, par groupe de quatre, une vingtaine de productions d'élèves de 6^{ème} de la section de Franche-Comté (voir annexe 1). Ils ont reçu pour consigne de les classer en vue de conduire ensuite une mise en commun autour de ces productions.

Les critères de classement n'ont pas été les mêmes entre les groupes, voire même au sein d'un même groupe. Si certains se sont davantage intéressés aux procédures mises en œuvre par les élèves, d'autres se sont attachés aux justifications apportées ou à la nature des arguments donnés pour répondre au problème.

Un autre critère de classement possible a été dégagé dans l'analyse *a posteriori* menée sur deux-cent-huit copies par la section RMT de Franche-Comté (voir annexe 2) : celui du niveau de maturité géométrique, d'une géométrie perceptive à une géométrie instrumentée et du saut épistémologique du dessin à la figure.

Ceci conduit à envisager un classement en deux catégories :

A - travail sur le dessin géométrique, découpages, pliages, coloriages, mesures de longueurs et d'angles, calculs de périmètres et d'aires ;

B - rapport à la figure comme objet abstrait représenté par le dessin : référence explicite ou implicite à une propriété géométrique du rectangle, raisonnement généralisable à tout rectangle, comparaison d'aires par application de la formule générale, calcul littéral.

Une grille de classement peut être alors proposée :

A0 - Incompréhension du problème, affirmation simple, par exemple : les parts sont égales parce que chacun a reçu $\frac{1}{4}$ du gâteau.

A1 - Découpage du dessin donné, reconstitutions style puzzle et superpositions des assemblages pour faire des comparaisons.

A2 - Tracés sur le dessin donné, par exemple des médiatrices et constatations visuelles (égalité des triangles rectangles), coloriages ou autres explications.

A3 - Mesures de longueurs sur le dessin donné et calculs approximatifs

A3a : des périmètres et réponse : « les parts sont inégales » ;

A3b : des aires (formule de l'aire du triangle) et réponse : « les parts sont égales » ;

A3c : mesure des angles au sommet des triangles isocèles et réponse : « les parts sont inégales ».

B1 - Raisonnement sans reproduction du dessin : les bases sont inégales, donc les périmètres sont différents, réponse : « les parts sont inégales »

B2a - Dessin d'un rectangle quelconque et tracés des médiatrices, égalité des triangles rectangles « car ils ont les mêmes côtés », réponse : « les parts sont égales »

B2b - Les triangles rectangles sont égaux, chacun a donc reçu $\frac{2}{8}$ de la tarte.

B3 - Calcul littéral des aires sans mesure : le rectangle a pour côtés L et l et la part des filles a pour aire $L \times l / 2$ et celle des garçons $l \times L / 2$, d'où « les parts sont égales ».

III - DISCUSSION ET PROLONGEMENTS

Les différences apparues dans les critères de classement ont amené les participants à réinterroger le choix des variables didactiques effectué dans la présentation du problème : celui de donner la figure ou non ou celui de proposer un énoncé contextualisé (partage d'une tarte) plutôt que de choisir un énoncé « mathématique », du type : « voici un rectangle partagé en 4 parties, ont-elles la même aire ? », moins porteur d'ambiguïté. Sur ce dernier point, l'importance de la modélisation dans l'activité mathématique a été mise en avant pour argumenter en faveur d'une présentation contextualisée.

La difficulté à sélectionner des productions en vue d'organiser une mise en commun en classe a été aussi soulignée. Elle renvoie aux choix des critères de classement et donc aux objectifs que l'enseignant pourrait fixer à cette mise en commun. La richesse du problème permet plusieurs pistes d'exploitation didactique qui apparaissent après une analyse que, dans une classe ordinaire, l'enseignant n'est peut-être pas en mesure de mener seul. En ce sens, les pistes fournies dans la banque de problèmes de l'ARMT (voir annexe 3) peuvent s'avérer être une aide utile.

De même en formation, l'analyse croisée des productions d'élèves sur le problème de « la tarte de Mamie Lucie » peut amener à des considérations :

- d'ordre général sur les situations de recherche :
 - la diversité des démarches utilisées par les élèves ;
 - l'inventivité des élèves ;
 - leur difficulté à expliquer leurs démarches par écrit ...
- sur l'enseignement des grandeurs :
 - la confusion entre aire et périmètre ;
 - le fait que les élèves utilisent majoritairement la mesure ;
 - le constat que l'enseignement des grandeurs va peut-être souvent trop vite vers la mesure sans prendre suffisamment de temps pour installer le concept...
 - la nécessité d'un passage par des manipulations, pavages et conservations-comparaisons de longueurs, angles et aires, avant d'introduire des mesures ;
- sur l'enseignement de la géométrie :
 - le passage d'une géométrie perceptive du dessin à une géométrie du dessin instrumenté, avec la règle et le compas comme porteurs de propriétés géométriques puis passage de la géométrie du dessin à la géométrie des figures par la reconnaissance de propriétés communes et enfin des éléments de déductions et de preuves.

Une présentation en ligne de la banque de problèmes a suivi ce débat. Elle a montré comment le dispositif de formation pouvait être prolongé avec d'autres problèmes du même type qui peuvent être rapidement identifiés et faire l'objet d'expérimentation en classe. Elle a montré aussi comment, par différentes, entrées des dispositifs similaires pouvaient être construits sur d'autres thématiques.

IV - CONCLUSION

L'atelier a permis de présenter un dispositif de formation des maîtres construit autour d'un problème du RMT et d'en montrer les potentialités.

D'autres dispositifs utilisent aussi des problèmes du RMT. En formation initiale, ils consistent par exemple à interroger les conceptions des mathématiques des étudiants stagiaires en leur faisant vivre des épreuves de rallye. En formation continue ils peuvent amener les enseignants à réfléchir sur l'apprentissage par résolution de problèmes ou le travail des élèves en collaboration.

Depuis longtemps le formateur sait qu'il peut trouver de précieuses ressources dans les rallyes mathématiques. Il dispose aujourd'hui d'un outil performant pour y accéder : la banque de problèmes du RMT.

V - BIBLIOGRAPHIE

CHARNAY R. (2006). Potentialités et limites des problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le rallye mathématique*, vol. 6, GRUGNETTI L., JACQUET F., MEDICI D., RINALDI G. (EDS.), 15-24.

DANOS A., MASSELOT P., SIMARD A., WINDER C. (1994). Analyser une ressource de formation : « exemple de la situation des annuaires », in *Actes du XXXI^e colloque COPIRELEM*, IREM d'Aquitaine.

HOUEMENT C. (2003). Autour des stratégies de formation des maîtres du premier degré, in *Carnets de route de la COPIRELEM, Concertum, Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques*, ARPEME, 23-32.

HOUEMENT C., KUZNIAK A. (1996). *Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques*. Recherches en didactique des mathématiques, 16/3, La pensée sauvage, Grenoble, 89-322.

LE BORGNE P. (2003). Des rallyes pour faire des mathématiques autrement, in *Actes du XXX^e colloque COPIRELEM*, IREM de Marseille, 419-448.

VI - SITOGRAPHIE

Association Rallye Mathématique Transalpin : <http://www.armtint.org/>

Banque de problèmes du RMT (en développement) : <http://www.projet-ermitage.org/ARMT/bd-armt.html>

Association RMT section de l'Ain: <http://arma01.fr/rallye/>

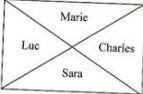
Le RMT en Franche-Comté : <http://www.apmep.fr/-Rallye-Mathematique-Transalpin-RMT>

ANNEXE 1 (PRODUCTIONS D'ELEVES)

6FC6032

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

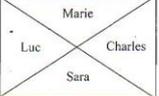
On a fait : $1 \div 4 = \frac{1}{4} = 0,25$. $0,25 \times 4 = 1$.

C'est Sara et Marie qui ont raison car on partage un gâteau en 4 = $1 \div 4 = \frac{1}{4} = 0,25$. $0,25 \times 4 = 1$. Les enfants avaient $\frac{1}{4}$ du gâteau.

6FC6008

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

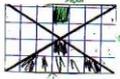
6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Marie et Sarah ont raison

ils ont tous la même part



6FC6045

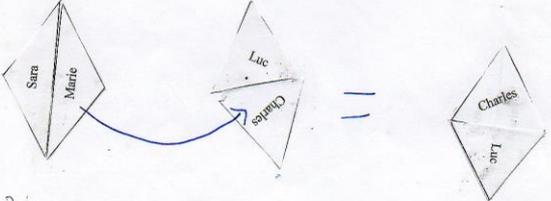
22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Sara et Marie ont raison car, quand on superpose les parts de Charles et de Luc sur les parts Sara et Marie, on observe qu'elles se superposent parfaitement !



6FC6178

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :

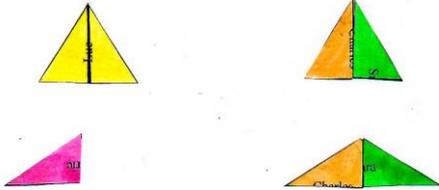


Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Je suis Marie et Sara qui ont raison.

Si on coupe le rectangle en longueur et en largeur on voit apparaître 8 rectangles identiques, de même taille et qu'on superpose.

- : part de Charles
- : part de Marie
- : part de Sara
- : part de Luc



6FC6086

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

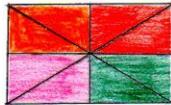
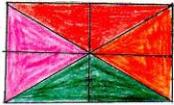
6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



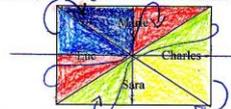
Si on coupe le rectangle en 4 et qu'on se souvient en 4 on voit que chacun des enfants a $\frac{1}{4}$ du gâteau. Donc se sont Sara et Marie ont raison.

6FC6180

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

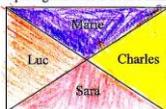
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

On coupe la part de Luc et Charles en 2 parties égales par les axes de symétrie du rectangle. Les 2 parts de Luc et on les superpose sur celle de Marie et on fait pareil avec celle de Charles et Sara. Donc c'est Sara et Marie qui ont raison.

6FC6211

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :

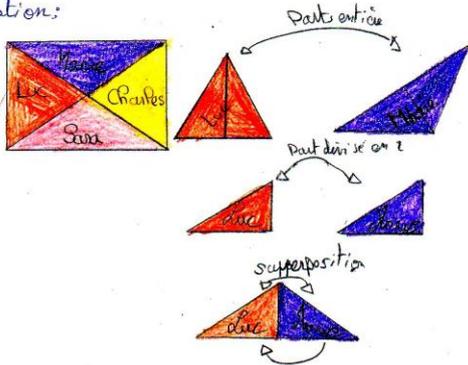


Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Sara et Marie ont raison car si on divise par deux symétriquement leurs parts, elles se superposent avec la symétrie de Charles et Luc.



6FC6029

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

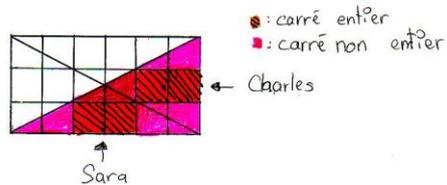
6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



- Sara à deux carré entier Charles aussi en à deux
- Sara à deux carré non entier qui peuvent s'assembler et Charles aussi.
- Alors c'est Sara et Marie qui ont juste en disant qu'ils ont la même quantité de tarte.

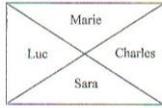
6FC6088

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

on fait $2,8 \times 2 + 3,1 = 8,7$ la part de luc et charle fait $8,7$ cm.
 On fait $2,8 \times 2 + 4,8 = 10,4$ la part de Sara et Marie fait $10,4$ cm.
 C'est luc et charle qui on raison car les part de marie et sara ont de $10,4$ cm et cel de luc et charle $8,7$ cm donc la part de marie et sara est plus grande donc c'est luc et charle qui on raison

6FC6016

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :

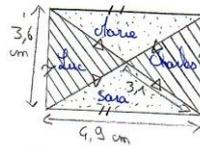


Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Nous avons présenté la tarte de Mamie Lucie pour vous montrer que Luc et Charles ont raison :



Marie = $\begin{matrix} 4,9 \text{ cm} \\ + 3,1 \text{ cm} \\ + 3,1 \text{ cm} \\ \hline 11,1 \text{ cm} \end{matrix}$

Luc = $\begin{matrix} 3,6 \text{ cm} \\ + 3,1 \text{ cm} \\ + 3,1 \text{ cm} \\ \hline 9,8 \text{ cm} \end{matrix}$

Nos calculs seront présentés grâce à Marie et Luc car ils n'ont pas les mêmes morceaux. (Luc = morceau de gauche et Marie = morceau haut, en haut). Mais nous aurions pu aussi prendre Sara et Charles. Si on mesure des périmètres de Luc et Charles, ils ont un plus petit morceau que Sara et Marie.

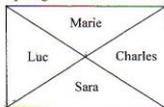
6FC6144

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :

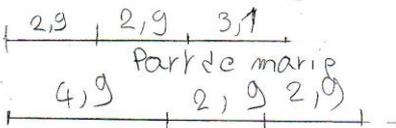


Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Luc et Charles ont raison car si on étale les mesures on formant une droite on voit que Marie et Sara ont une plus grande portion de tarte.
 Part de Luc



6FC6103

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

J'ai calculé le périmètre de chaque part de tarte.

Marie	Luc	Sara	Charles
$\begin{matrix} 2,4 \\ + 2,4 \\ + 4,6 \\ \hline 9,4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2,8 \\ + 2,6 \\ + 2,6 \\ \hline 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2,4 \\ + 2,4 \\ + 4,6 \\ \hline 9,4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2,8 \\ + 2,6 \\ + 2,6 \\ \hline 8 \end{matrix}$

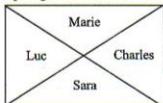
C'est Charles on raison.

Explication : j'ai calculé le périmètre de chaque part de tarte. Luc et Charles le périmètre est égale à 8 cm. Sara et Marie le périmètre est égale à 9,4 cm. donc Luc et Charles ont une plus petite part de tarte.

6FC6092

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ? Marie et Sara ont raison.
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



$\text{hauteur} \times (\text{base} : 2) = \text{aire du triangle isocèle}$
Luc et Marie: $1,5 \times (5 : 2) = 3,75 \text{ cm}^2$
Luc et Charles: $2,5 \times (3 : 2) = 3,75 \text{ cm}^2$
Toutes les parts ont la même aire.

6FC6010

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?

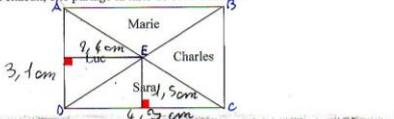
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.
C'est Luc et Charles ont raison. On a fait base fois hauteur et on a divisé par 2.

$$\begin{array}{r} 3,1 \\ \times 2,5 \\ \hline 155 \\ + 620 \\ \hline 7,75 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,9 \\ \times 1,5 \\ \hline 245 \\ + 490 \\ \hline 7,35 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7,35 \div 2 = 3,675 \\ 7,75 \div 2 = 3,875 \end{array}$$

6FC6147

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



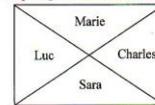
Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

$(4,6 \times 1,5) : 2 = 3,45$ l'aire du triangle EDC est de $3,45 \text{ cm}^2$
 $(3,1 \times 2,4) : 2 = 3,75$ l'aire du triangle AED est de $3,75$

6FC6014

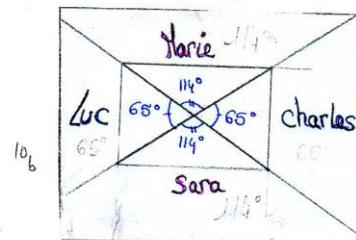
22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Luc et Charles ont raison. Car on a reproduit le dessin et mesurer les angles, il y a une différence de mesure.
Les parts ne sont pas égales. Donc Marie et Sara ont les plus grosses parts.



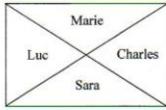
6FC6085

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Le rectangle a deux diagonales qui se coupent et forment le milieu du rectangle. Le milieu du rectangle est aussi le milieu des deux diagonales. Ce qui pourrait faire 4 parts égales mais ces triangles n'ont pas la même mesure de base car les bases des 4 triangles (les 4 parts) sont les longueurs et largeurs du rectangle. Donc c'est Luc et Charles qui ont raison.

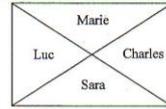
6FC6091

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



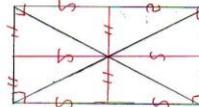
Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Si on trace les médianes des côtés du gâteau on obtient des rectangles identiques, ce qui prouve qu'il ont eu la même part donc Sara et Marie ont raison

14a



6FC6083

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Sara et Marie ont raison car si on fait la coupe en 8 toutes les parts sont égales. Luc a deux huitièmes et tous ses yeux et ceux aussi.

6FC6193

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

*Pour calculer l'aire d'un triangle on fait : base x hauteur ÷ 2
Pour les parts de Marie et Sara on fait : longueur x la moitié de la largeur ÷ 2
Pour les parts de Luc et Charles on fait : longueur x la moitié de la largeur ÷ 2 = longueur x largeur ÷ 2.
Donc Marie, Luc, Sara et Charles ont tous les mêmes parts.*

6FC6159

22^e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Si, par exemple, la largeur du rectangle fait 6 cm et la longueur 10 cm, et comme le rectangle découpé par les diagonales fait 4 triangles isocèles alors la hauteur du triangle de Luc ou Charles fait 3 cm et base x hauteur (6 x 3) = 30. Comme la largeur du rectangle fait 6 cm la hauteur du triangle fait 3 cm et base x hauteur (3 x 10) = 30. Sara et Marie ont donc raison.



ANNEXE 2 (ANALYSE DES COPIES DE 6^{ÈME} DE FRANCHE-COMTE)

Classement selon la grille en deux catégories A et B.

	Incompréhension	Travail sur le dessin					Raisonnements sur la figure			
	A0 4 parts égales	A1 perceptif	A2 tracés	A3a périmètres	A3b aires	A3c angles	B1 bases et périmètres	B2a égalités de triangles	B2b partages en triangles	B3 Calculs d'aires
Total	56	28	33	33	43	3	2	5	3	2
%	27%	14%	16%	16%	21%	1%	1%	2,5%	1,5%	1%
% regroupés	27%	67%					6%			

Attribution des points RMT, de 0 à 4 : 201 copies.

Moyenne en Franche-Comté : 1,35

Points	0	1	2	3	4
Nombres de copies	123	1	11	15	51
En pourcentages	61%	0,5%	5,5%	7,5%	25,5%

Critères :

- 4 Réponse correcte (Sara et Marie ont raison) avec justifications claires (découpage / pliage ou dessin d'une trame et explications, ou encore calculs utilisant la formule de l'aire d'un triangle).
- 3 Réponse correcte avec découpage ou trame mais explications incomplètes.
- 2 Réponse correcte avec découpage ou trame, mais sans explications, ni calculs.
- 1 Découpage ou dessin de la trame mais sans réponse ou seulement l'affirmation que les parts de Sara et Marie sont identiques ainsi que les parts de Luc et Charles sans explication.
- 0 Incompréhension du problème ou réponse fondée sur les périmètres des parts, celles des filles ayant un périmètre plus grand que celles des garçons.

ANNEXE 3 (EXTRAIT DE LA BANQUE DE PROBLEMES DU RMT)

La tarte de Mamie Lucie

Identification

Rallyes: 22.II.06 ; catégories: 4, 5, 6 ; domaines: GP

Familles:

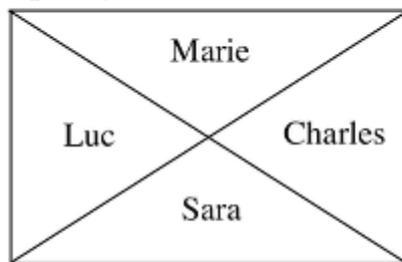
Résumé

Montrer qu'un rectangle partagé par ses deux diagonales donne quatre parties de même aire.

Enoncé

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- S'assurer (éventuellement) que les parts des deux filles sont égales, ainsi que les parts des deux garçons.
- Comparer ensuite une part d'une fille et une part d'un garçon :

Sans faire appel aux calculs d'aire, imaginer et/ou dessiner une trame sur la figure en traçant les médianes du rectangle, ce qui permet d'observer un « pavage » de la figure en 8 triangles rectangles, constater qu'ils sont égaux et en tirer l'égalité des parts, formées chacune de deux de ces triangles. Par mesures prises sur le dessin, se référer à la formule de l'aire d'un triangle et l'appliquer judicieusement.

L'utilisation de la formule fait intervenir la hauteur du triangle, qui n'est pas marquée ici mais qu'il faudra tracer. Ce segment divise une part triangulaire en deux triangles rectangles (du pavage précédent). En remarquant les liens (moitié et double) entre les côtés de l'angle droit de ces triangles rectangles, les côtés du rectangle (tarte), les « bases » et « hauteurs » des parts, on en déduit que les mesures nécessaires au calcul des aires à comparer sont les mêmes. Sans cette constatation, l'imprécision des mesures peut conduire à des aires différentes.

Préalablement à la prise de mesures, il s'agit de se convaincre que, si le périmètre se calcule par une addition des mesures des côtés, le calcul de l'aire exige une multiplication des mesures.

Il faut aussi se rendre compte qu'une simple compensation qualitative (plus long mais moins large) ne suffit pas pour s'assurer de l'égalité des parts.

Mots-clés

rectangle, diagonale, triangle, équivalence, partage, aire, périmètre, mesure,

Résultats

Points attribués sur 2125 copies de 21 sections

22.II.06

Points attribués	0	1	2	3	4	Nb. classes	moy
Cat 4	272 (51%)	105 (20%)	22 (4%)	36 (7%)	97 (18%)	532	1.21
Cat 5	236 (42%)	87 (16%)	47 (8%)	54 (10%)	133 (24%)	557	1.57
Cat 6	450 (43%)	132 (13%)	96 (9%)	101 (10%)	257 (25%)	1036	1.6
Total	958 (45%)	324 (15%)	165 (8%)	191 (9%)	487 (23%)	2125	1.49

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

- **4 points:** Réponse correcte (Sara et Marie ont raison) avec justifications claires (découpage / pliage ou dessin d'une trame et explications, ou encore calculs utilisant la formule de l'aire d'un triangle)
- **3 points:** Réponse correcte avec découpage ou trame mais explications incomplètes
- **2 points:** Réponse correcte avec découpage ou trame, mais sans explications, ni calculs
- **1 point:** Découpage ou dessin de la trame mais sans réponse
 - ou seulement l'affirmation que les parts de Sara et Marie sont identiques ainsi que les parts de Luc et Charles sans explication
- **0 point:** Incompréhension du problème ou réponse fondée sur les périmètres des parts, celles des filles ayant un périmètre plus grand que celles des garçons.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

(Sur 124 copies de la section SR)

- Quelques rares copies font état explicitement de l'égalité des parts des deux filles, ainsi que les parts des deux garçons. (par superposition, visuelle ou manipulatoire, ou par symétries axiales ou centrales suivant les niveaux). Dans la grande majorité des cas, cette égalité semble admise implicitement et c'est celle des parts d'une fille et d'un garçon qui est au centre des réflexions.

- 38 copies sur 124 (31%) font apparaître les deux médiatrices des côtés du rectangle qui le « pave » en huit triangles rectangles, permettant une comparaison directe.

Exemple : *Explications : Comme vous pouvez le constater j'ai coupé les tranches en deux (les deux médiatrices sont dessinées) et ça fait des triangles rectangles et chaque tranche ont les mêmes triangles rectangles sauf qu'ils sont pas de la même manière alors chaque enfant ont la même quantité de tarte.* - 6 (5%) explications concluent à l'égalité par « compensation » qualitative.

Exemple : *... Celles de Marie et Sara sont plus larges et celles de Luc et Charles sont plus longues donc ils ont la même part. C'est Sara et Marie qui ont raison.*

- 33 (27%) des copies font apparaître les mesures des côtés des parts et le calcul du périmètre, et concluent que la part des filles est plus grande.
- 15 copies (12%), de catégorie 6 en majorité, présentent des produits de mesures. 12 d'entre elles se rapportent clairement à la formule de l'aire du triangle (une base et la hauteur correspondante sont mesurées). La conclusion dépend de la précision des mesures et, évidemment de la formule appliquée.
- On trouve encore quelques procédures par découpages, tentatives de pliages et recouvrements ou recherches d'autres unités, qui en général ne concluent pas à l'égalité des parts : 11 (9%) copies.
- Finalement, il y a 21 (17 %) copies blanche ou non rendues.

Exploitations didactiques

Sur un thème aussi essentiel que la détermination de l'aire d'un triangle, le problème de La tarte de Mamie Lucie offre de multiples possibilités d'exploitations :

- la confrontation entre une procédure par pavage ou par la recherche d'unités d'aire « non-conventionnelle » et la procédure par calcul d'un produit de mesures,
- le lien entre l'aire d'un rectangle et celle des deux triangles rectangles qui le composent,
- l'affrontement direct du conflit aire-périmètre,
- l'imprécision des mesures de longueur prises à la règle et ses effets sur le calcul des aires,
- l'approche de raisonnement déductifs à propos de la partition d'un rectangle par ses diagonales et médiatrices, des mesures des longueurs et des aires des huit triangles rectangles.

Pour aller plus loin

Bibliographie

Jaquet. F. : 2014 *A propos de triangles* In *Math-Ecole* 222 pp