COPIRELEM

Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

Concours de recrutement
des Professeurs des Écoles

Mathématiques

Annales 2016

Sujets, corrigés et éléments de formation

+

Exercices complémentaires avec corrigés issus des concours blancs et examens des ESPE

Ces annales ont été rédigées par :

Agnès BATTON (ESPE de l'Académie de Versailles)
Anne BILGOT (ESPE de l'Académie de Paris)
Christophe BILLY (ESPE de l'Académie de Toulouse)
Laetitia BUENO-RAVEL (ESPE de Bretagne)
Richard CABASSUT (ESPE de l'Académie de Strasbourg)
Valentina CELI (ESPE d'Aquitaine)
Pierre DANOS (ESPE de l'Académie de Toulouse)
Nicolas DE KOCKER (ESPE de Lorraine)
Gwenaëlle GRIETENS (ESPE de l'Académie de Nantes)
Pascal GRISONI (ESPE de Bourgogne)
Michel JAFFROT (retraité de l'ESPE de l'Académie de Nantes)
Laurence MAGENDIE (retraitée de L'ESPE d'Aquitaine)
Christine MANGIANTE (ESPE de l'Académie de Lille)
Pascale MASSELOT (ESPE de l'Académie de Versailles)
Edith PETITFOUR (ESPE de Lorraine)
Arnaud SIMARD (ESPE de Franche-Comté)
Catherine TAVEAU (ESPE d'Aquitaine)
Frédérick TEMPIER (ESPE de l'Académie de Poitiers)
Claire WINDER (ESPE de l'Académie de Nice)
Hélène ZUCCHETTA (ESPE de l'Académie de Lyon)

Chaque sujet a été pris en charge par plusieurs correcteurs.

La relecture finale du document a été effectuée par :

Pierre EYSSERIC (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)
Michel JAFFROT (retraité de l'ESPE de l'Académie de Nantes)

Coordination de l'ensemble :
Pierre EYSSERIC (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)

REMERCIEMENTS

Ces annales ont pu être menées à bien grâce aux contributions de personnes, associations et institutions :

- **Nos collègues formateurs en mathématiques** qui nous ont transmis des sujets de concours blancs et d'examens proposés dans leurs ESPE.

- **L'ARPEME** (Association pour l'élaboration et la diffusion de Ressources Pédagogiques sur l'Enseignement des Mathématiques à l'École).
  Cette association a pour but de favoriser le développement de la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs à l'enseignement des mathématiques :
  - en aidant à la communication d'expériences, à la diffusion de documents de formation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques ;
  - en apportant un soutien à l'organisation de colloques et séminaires de réflexion rassemblant les formateurs intervenant à divers titres dans la formation en mathématiques des professeurs ;
  - en prenant en charge l'élaboration, l'impression et la diffusion de tous documents utiles pour les formateurs en mathématiques des professeurs des écoles : documents pédagogiques écrits et audiovisuels, actes des colloques, comptes-rendus de séminaires.

- **La COPIRELEM** (Commission permanente des **IREM** pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire) et l'**IREM** (Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques) de l'Université de Paris VII Denis Diderot.

SOMMAIRE

Informations

Les sujets et leurs corrigés

EXERCICES ÉLABORÉS À PARTIR DES CONCOURS BLANCS ET EXAMENS PROPOSÉS DANS LES ESPE

L'ÉPREUVE DU CRPE EN AVRIL 2016

Nous reproduisons ici les principaux textes en vigueur relatifs à l'épreuve de mathématiques des concours de recrutement de professeurs des écoles, tels que vous pouvez les retrouver sur le site ministériel à partir de la page http://www.education.gouv.fr/pid97/siac1.html.

CONCOURS CONCERNÉS

- Concours externe de recrutement de professeurs des écoles.
- Concours externe spécial de recrutement de professeurs des écoles.
- Troisième concours de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne spécial de recrutement de professeurs des écoles.

1 – DÉFINITION DE L'ÉPREUVE

Référence : Annexes de l'arrêté du 19 avril 2013 fixant les modalités d'organisation des concours de recrutement de professeurs des écoles.

« L'ensemble des épreuves du concours vise à évaluer les capacités des candidats au regard des dimensions disciplinaires, scientifiques et professionnelles de l'acte d'enseigner et des situations d'enseignement. »

Épreuves d'admissibilité

« Le cadre de référence des épreuves est celui des programmes pour l'école primaire. Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maîtrisé de ces programmes. Le niveau attendu correspond à celui exigé par la maîtrise des programmes de collège. Les épreuves d'admissibilité portent sur le français et les mathématiques. Certaines questions portent sur le programme et le contexte de l'école primaire et nécessitent une connaissance approfondie des cycles d'enseignement de l'école primaire, des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture et des contextes de l'école maternelle et de l'école élémentaire. »

Deuxième épreuve d'admissibilité : une épreuve écrite de mathématiques

« L'épreuve vise à évaluer la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la capacité à prendre du recul par rapport aux différentes notions. Dans le traitement de chacune des questions, le candidat est amené à s'engager dans un raisonnement, à le conduire et à l'exposer de manière claire et rigoureuse.

L'épreuve comporte trois parties :

1. Une première partie constituée d'un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, permettant d'apprécier particulièrement la capacité du candidat à rechercher, extraire et organiser l'information utile.

2. Une deuxième partie composée d'exercices indépendants, complémentaires à la première partie, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.

3. Une analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), et productions d'élèves de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.

L'épreuve est notée sur 40 points : 13 pour la première partie, 13 pour la deuxième et 14 pour la troisième.

5 points au maximum peuvent être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

Durée de l'épreuve : quatre heures. »

2 – PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

Référence : note de présentation des épreuves d'admissibilité des concours de recrutement de professeurs des écoles.
(http://cache.media.education.gouv.fr/file/sujets_0(2014)/59/3/nc_crpe_260593.pdf)

« Le nouveau concours de recrutement des professeurs des écoles répond au besoin de recruter des enseignants polyvalents et aux principes généraux définis pour tous les concours enseignants : un concours qui constitue un jalon déterminant du parcours intégré de formation, et s'inscrit dans le cursus de professionnalisation progressive des candidats ; un concours qui est un acte de recrutement et non de certification universitaire ; un concours, situé en fin de S2 de Master, qui repose sur des épreuves tenant compte d'un parcours progressif de professionnalisation.

Les deux épreuves écrites d'admissibilité permettent de s'assurer de la maîtrise par le candidat d'un corpus de savoir adapté à l'exercice professionnel, de sa capacité à utiliser les modes d'expression écrite propres aux domaines évalués et de présenter une maîtrise avérée de la langue française écrite. Ces écrits portent sur le français et les mathématiques à savoir les deux domaines d'enseignements fondateurs de l'école primaire. L'admissibilité permet ainsi de déterminer un groupe de candidats présentant un niveau de maîtrise suffisant du français et des mathématiques pour exercer le métier de professeur des écoles. »

Présentation de la deuxième épreuve écrite : mathématiques

« Les notions mathématiques abordées à l'école primaire constituent les bases d'un corpus plus large qui sera développé au cours la scolarité obligatoire.
Pour pouvoir les enseigner, le futur professeur des écoles se doit d'en maîtriser les fondements théoriques et de connaître les développements qu'ils permettront dans les années de collège.
Il est donc demandé au candidat au professorat des écoles un niveau de connaissances et de raisonnement correspondant à celui exigé par la maîtriser les programmes de collège.
Exposer ce raisonnement de manière claire et rigoureuse est une des manifestations de cette maîtrise.

L'épreuve comporte trois parties :

1) La première partie consiste en un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture.
Ce problème peut, autour d'un thème donné, faire appel à plusieurs registres : numérique, algébrique, géométrique, graphique, etc.
Il permet au candidat de montrer sa capacité à mettre en relation ces différents registres, mais aussi de montrer une représentation correcte des différents statuts mathématiques des énoncés rencontrés : données, hypothèses, propriétés ou théorèmes.
Ce problème peut comporter plusieurs parties; il peut être demandé au candidat de démontrer des propriétés connues, de modéliser une situation en vue de la résolution d'un exercice concret ou de mener un raisonnement à portée plus générale.

2) La deuxième partie est composée d'exercices indépendants, complémentaires à la première partie, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.
Des exercices de types différents peuvent être proposés dans un même sujet.
Les questions à choix multiples sont accompagnées d'une demande de justification ; elles permettent de mettre en œuvre des types de raisonnement variés et notamment la preuve par présentation d'un contre exemple.
Les questions à réponse construite peuvent dans certains exercices être des questions ouvertes qui demandent pour leur résolution une prise d'initiative.

3) La troisième partie consiste en une analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), et productions d'élèves de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.
Cette partie peut porter sur une notion spécifique de l'un des trois cycles, ou sur une notion abordée de façon progressive au cours de plusieurs cycles.
La maîtrise des notions s'exprime notamment à travers la capacité du candidat à mettre en perspective ces notions et à expliciter les caractéristiques mathématiques des développements ou enrichissements successifs. »

3 – MATÉRIEL AUTORISÉ LORS DE L' ÉPREUVE

Références : Arrêté du 19 avril 2013 fixant les modalités d'organisation des concours de recrutement de professeurs des écoles.

« Lors des épreuves, il est interdit aux candidats :
1° D'introduire dans le lieu des épreuves tout document, note ou matériel non autorisé par le jury du concours ;
2° De communiquer entre eux ou de recevoir des renseignements de l'extérieur ;
3° De sortir de la salle sans autorisation du surveillant responsable et sans être accompagnés par un autre surveillant ;
4° De perturber par leur comportement le bon déroulement des épreuves.
Les candidats doivent se prêter aux surveillances et vérifications nécessaires. »

Aucune autre précision n'est donnée à ce jour dans la page Guide concours – Professeurs des écoles du site ministériel. Il en résulte que, pour l'usage des calculatrices, il convient de se référer la **circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999** (B.O.E.N. n° 42 du 25 novembre 1999) ; celle-ci définit les conditions d'utilisation des calculatrices dans les examens et concours organisés par le ministère de l'éducation nationale et dans les concours de recrutement des personnels enseignants.

« Le matériel autorisé comprend toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante. »

« Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.
Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.
Les chefs de centre d'examen veilleront à ce que les candidats soient convenablement informés de cette règle qui doit être strictement respectée. »

« Dans le cadre de la réglementation des examens et concours, il appartient aux responsables de l'élaboration des sujets de décider, pour chacune des épreuves, si l'usage de l'ensemble des instruments de calcul (calculatrices, tables numériques, abaques…) est autorisé ou non. Ce point doit être précisé en tête des sujets. »

Pour l'épreuve de mathématiques, le sujet précisera donc si l'utilisation d'une calculatrice est autorisée ou non.

AVERTISSEMENT

Dans le corrigé des **exercices de mathématiques**, nous proposons souvent plusieurs méthodes de résolution pour une question. Certaines solutions sont plus longues que d'autres. Nous les donnons cependant pour que chacun puisse éventuellement reconnaître et valider la méthode qu'il a utilisée ou dans laquelle il s'est engagé sans peut-être savoir terminer.
Une méthode même longue donnera tous les points attribués à la question, du moment qu'elle a abouti au résultat demandé. Elle pénalise cependant le candidat car le temps passé à la rédiger n'est plus disponible pour traiter d'autres questions. Mais il est possible que le lecteur de ces annales la comprenne mieux qu'une méthode courte, même « élégante ». Le lecteur jugera donc par lui-même quelle(s) méthode(s) il lui convient de s'approprier.

En ce qui concerne les **analyses de productions d'élèves** et la partie 3 (**analyse de situations d'enseignement**), nous avons eu le souci de donner des réponses détaillées sur le plan didactique et donc, quelquefois, plus approfondies que ce que l'on peut attendre d'un candidat au CRPE. Certaines remarques des correcteurs sont alors ajoutées en italique.

CONSEILS AUX CANDIDATS

La lisibilité, la correction et la rigueur des réponses sur les plans mathématique et didactique sont, bien entendu, les critères principaux d'évaluation. Cependant, une écriture difficilement lisible, la présence de « fautes » d'orthographe par trop grossières et fréquentes, les coquilles fâcheuses, le verbiage pompeux et vide, l'abus d'expressions hors de propos, finissent par avoir une incidence sur l'évaluation, et cela, quelle que soit la précision du barème de notation appliqué. Nous conseillons donc de relire la copie en tenant compte de tout cela.

PROBLÈME

	Géométrie plane	Trigonométrie	Géométrie espace	Arithmétique	Numération Opérations	Équations	Probabilités	Grandeurs et mesures	Vitesses-Échelles Pourcentages-Proportionnalité	Fonctions Graphiques	Tableur
Sujet 1 2016			X	X				X	X	X	
Sujet 2 2016	X							X		X	
Sujet 3 2016	X	X				X		X			X
Sujet 4 2016	X							X		X	
Sujet 5 2016	X	X	X					X	X	X	

EXERCICES

	Géométrie plane	Géométrie espace	Numération Arithmétique	Programmes de calcul	Équations	Probabilité	Statistique	Grandeurs et mesures	Vitesses-Échelles Pourcentages Proportionnalité	Fonctions Graphiques	Tableur
Sujet 1 2016	X		X			X					X
Sujet 2 2016	X		X			X			X	X	X
Sujet 3 2016			X	X	X				X	X	
Sujet 4 2016				X		X	X		X		X
Sujet 5 2016			X		X	X	X		X		

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

	Proportionnalité	Division	Nombres	Fractions et décimaux	Multiplication	Résolution de problèmes	Grandeurs et mesures	Cycle
Sujet 1 2016			**X**			**X**		**1-3**
Sujet 2 2016							**X**	**3**
Sujet 3 2016							**X**	**3**
Sujet 4 2016		**X**				**X**		**2-3**
Sujet 5 2016		**X**				**X**		**3**

ANALYSE DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT

	Proportionnalité	Division	Nombres	Fractions et décimaux	Multiplication	Résolution de problèmes	Grandeurs et mesures	Cycle
Sujet 1 2016	**X**		**X**			**X**		**1-3**
Sujet 2 2016	**X**			**X**			**X**	**3**
Sujet 3 2016							**X**	**3**
Sujet 4 2016		**X**				**X**		**2-3**
Sujet 5 2016	**X**	**X**			**X**			**3**

LES SUJETS

DU

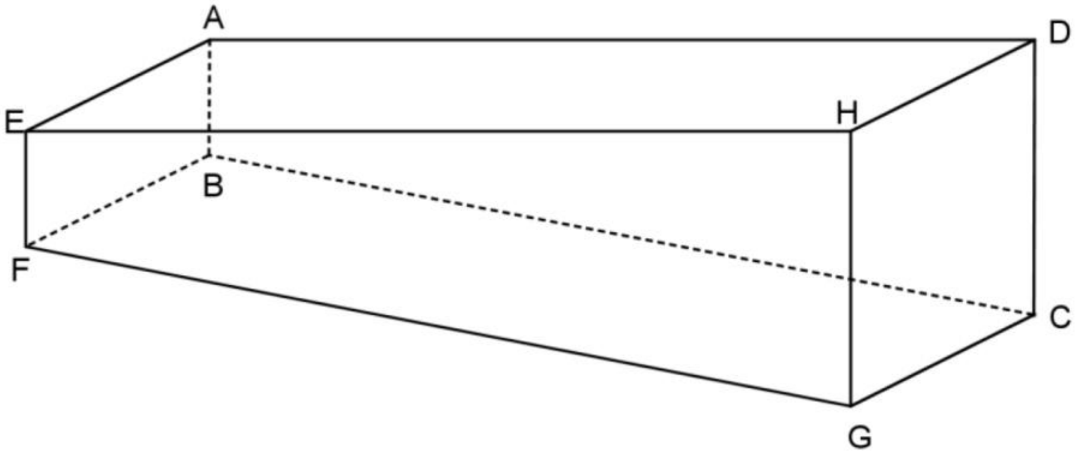
CONCOURS

2016

GROUPEMENT 1 – avril 2016

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Monsieur Durand souhaite faire construire une piscine.
Cette piscine est représentée sur le schéma ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle.



- La surface horizontale apparente EADH est rectangulaire ;
- le fond FBCG, également rectangulaire, est en pente douce ;
- les parois verticales EABF et HDCG sont rectangulaires ;
- la paroi verticale ABCD est un trapèze rectangle en A et D ;
- la paroi verticale EFGH est un trapèze rectangle en E et H ;

La piscine peut être vue comme un prisme droit de bases trapézoïdales ABCD et EFGH.

Dimensions de la piscine de Monsieur Durand

La profondeur minimale EF et la profondeur maximale HG de la piscine sont fixées :

EF = 1,10 m et HG = 1,50 m.

La longueur EH et la largeur AE de la piscine restent à déterminer.
Pour des raisons d'esthétique, Monsieur Durand souhaite que **la longueur de la piscine soit égale à 1,6 fois sa largeur**.

On rappelle les formules suivantes :

$$\text{Aire du trapèze} = \frac{(\text{grande base}+\text{petite base})\times\text{hauteur}}{2}$$

$$\text{Volume du prisme droit} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

PARTIE A : volume de la piscine

1. Étude graphique

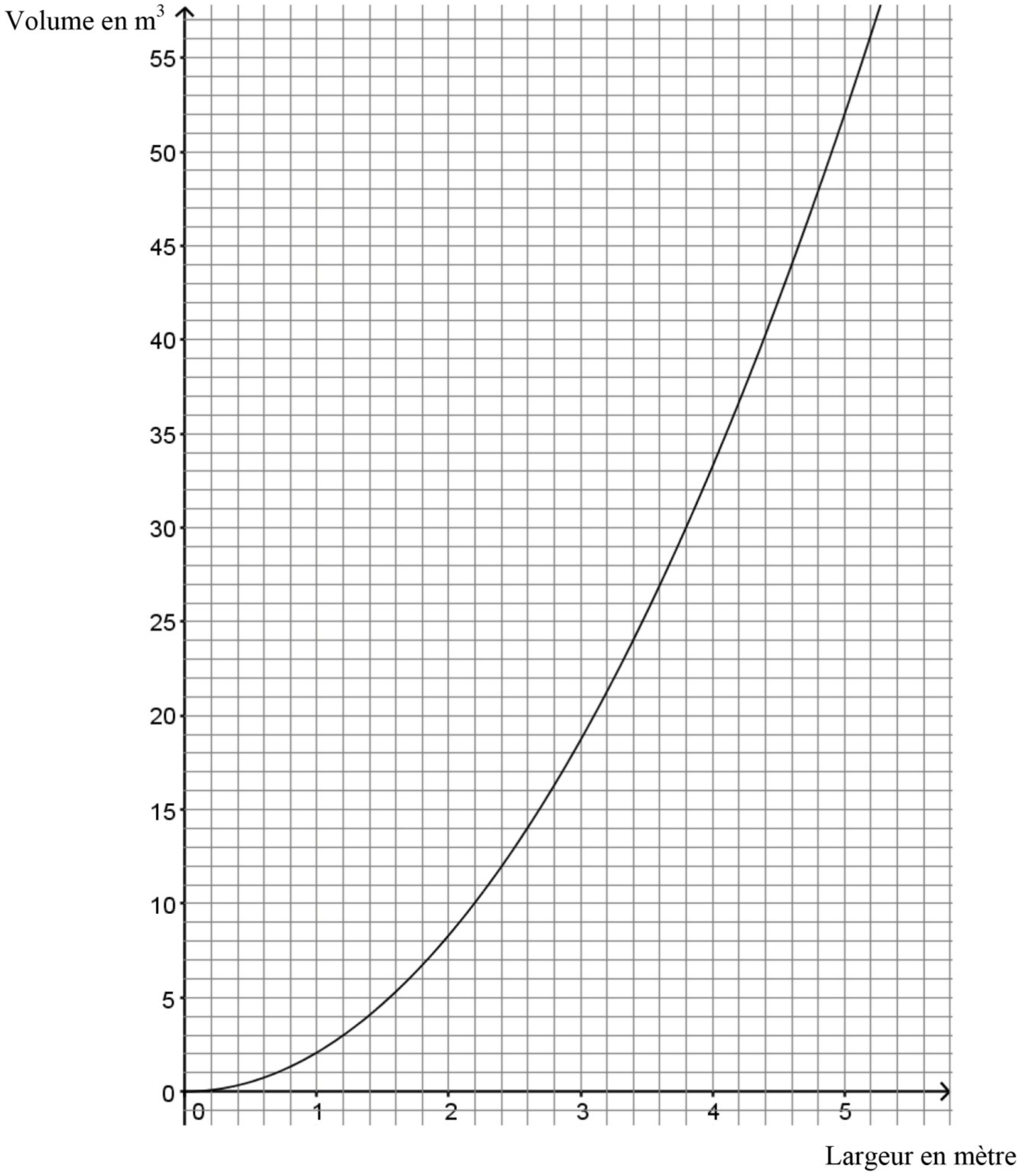
Le graphique donné ci-après représente le volume, en mètre cube, de la piscine en fonction de sa largeur, en mètre.

Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

a) Quel est le volume, en mètre cube, de la piscine si sa largeur vaut 3 m ? Arrondir à l'unité.

b) Quelle est la largeur, en mètre, de la piscine si son volume est 27 m^3 ? Arrondir au dixième.

c) Donner un encadrement du volume, en mètre cube, de la piscine si sa largeur est comprise entre 4 m et 5 m. Arrondir les valeurs utilisées à l'unité.



2. Étude algébrique

a) Démontrer que le volume de la piscine, exprimé en mètre cube, est donné par la formule

$$V(x) = 2{,}08x^2$$

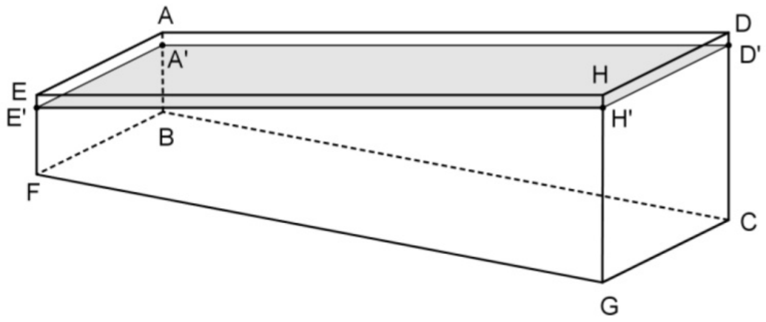
où x désigne la largeur, en mètre, de la piscine.

b) Déterminer par le calcul la valeur exacte de la largeur de la piscine correspondant à un volume de 52 m³.

PARTIE B : mise en eau

Monsieur Durand a choisi pour sa piscine une largeur de 5 m et une longueur de 8 m.
Cette piscine est maintenant construite.

1. Monsieur Durand souhaite que le niveau d'eau soit à 10 cm du bord de la piscine. Le schéma ci-dessous n'est pas à l'échelle.



a) Montrer que la piscine contient alors 48 m³ d'eau. On peut utiliser les résultats de la partie A.

b) Monsieur Durand utilise un tuyau d'arrosage dont le débit est de 18 litres par minute. Quelle est la durée de remplissage de la piscine ?

Donner la réponse en jours, heures et minutes, arrondie à la minute.

2. Un dimanche matin à 8 h, le volume d'eau de la piscine est de 48 m³. Le dimanche suivant à 8 h, Monsieur Durand constate que le niveau d'eau a baissé de 5 cm.

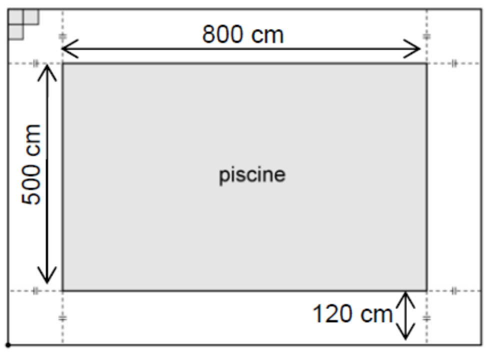
a) Déterminer la quantité d'eau perdue en une semaine.

b) Quel pourcentage de la quantité d'eau initiale cela représente-t-il ? Arrondir le résultat au dixième.

3. Monsieur Durand a dépensé 207 € pour l'eau utilisée pour sa piscine en 2015. Si le prix de l'eau augmente de 3% par an, à combien peut-il estimer ce budget annuel en 2020 ?

PARTIE C : dallage du sol autour de la piscine

Monsieur Durand veut faire poser des dalles carrées autour de la piscine sur une largeur de 120 cm comme indiqué sur le schéma ci-après où on a représenté dans le coin supérieur gauche la disposition des premières dalles convenue avec le carreleur.



Les dalles utilisées sont toutes identiques et la longueur, en centimètre, de leur côté est un nombre entier.
On néglige l'épaisseur des joints.

1. Monsieur Durand souhaite ne pas avoir à couper de dalles. Quelles sont toutes les valeurs possibles pour la longueur du côté des dalles carrées ?

2. Monsieur Durand choisit des dalles carrées de 20 cm de côté.

a) Combien de dalles seront utilisées ?

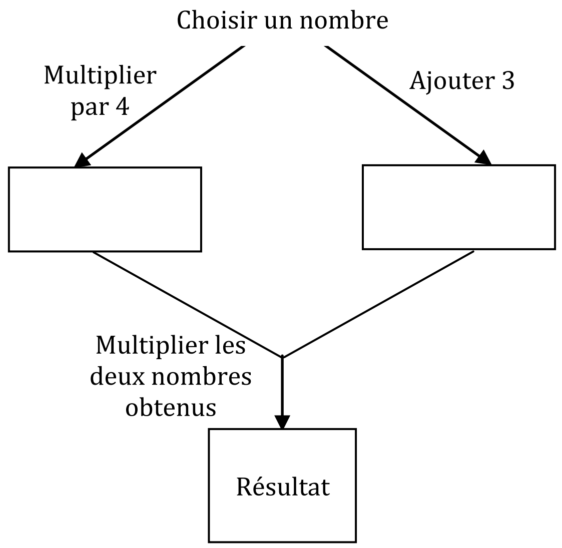
b) En déduire le nombre de dalles nécessaires, s'il avait choisi des dalles carrées de 5 cm de côté.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Voici deux programmes de calcul :

Programme 1	Programme 2
- Ouvrir une feuille de calcul de tableur. - Choisir un nombre. - Entrer ce nombre en cellule A1. - Saisir en cellule B1 la formule : (2*A1 + 3)*(2*A1 + 3) - 9 - Appuyer sur la touche « Entrer ». - Lire la valeur numérique affichée en cellule B1.	

1. **a)** Montrer que si on choisit 3 comme nombre de départ, alors le résultat obtenu avec chaque programme est 72.

   b) Calculer le résultat obtenu avec chaque programme si on choisit $-\frac{5}{4}$ comme nombre de départ.

2. Obtient-on toujours le même résultat avec les programmes 1 et 2 quel que soit le nombre choisi au départ ? Justifier.

3. Quel(s) nombre(s) faut-il choisir pour obtenir 0 avec le programme 1 ? Justifier.

Exercice 2

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse fausse n'enlève pas de points, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 :

« Le produit de deux nombres décimaux strictement positifs a et b est plus grand qu'au moins un de ces nombres. »

Affirmation 2 :

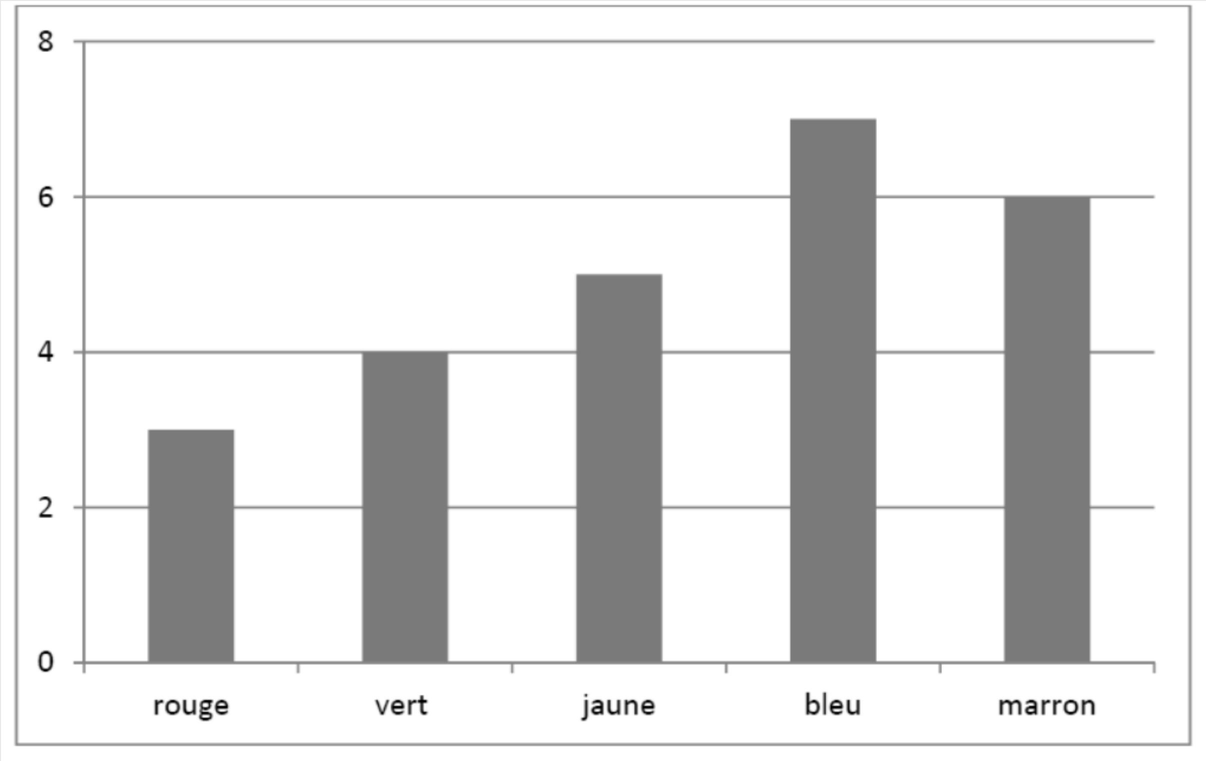
« Pour tout nombre entier naturel n le nombre $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ est un multiple de 4. »

Affirmation 3 :

« Pour tout nombre entier naturel n le nombre $(n + 1)(n - 1) - 1$ est le carré d'un nombre entier. »

Exercice 3

Une urne contient des boules de couleurs différentes indiscernables au toucher.
Le nombre de boules de chaque couleur dans cette urne est indiqué sur le diagramme ci-dessous :



1. On tire au hasard une boule dans l'urne. On regarde sa couleur et on la remet dans l'urne.
   Quelle est la probabilité que la boule tirée soit bleue ?
2. On souhaite que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4.
   Combien de boules bleues doit-on ajouter au minimum dans l'urne avant le tirage pour qu'il en soit ainsi ?
3. On considère à nouveau l'urne dont la composition est donnée par le diagramme ci-dessus.
   Combien de boules rouges doit-on ajouter au minimum dans l'urne avant le tirage pour que la probabilité d'obtenir une boule bleue à l'issue d'un tirage au hasard d'une boule soit inférieure ou égale à 0,2 ?

Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que AB = 65 cm, AC = 56 cm et BC = 33 cm. Soit R le point du segment [AB] tel que AR = 39 cm. La perpendiculaire à [AC] passant par R coupe (AC) en S.

1. Réaliser la figure à l'échelle 1/10.
2. Démontrer que (RS) et (BC) sont parallèles.
3. En déduire la longueur AS.
4. Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{ARS}$ arrondie à l'unité.

TROISIEME PARTIE (14 points)

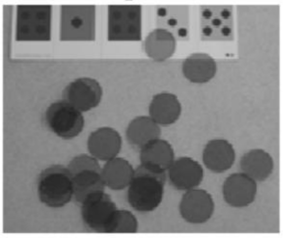
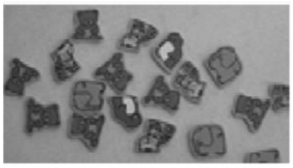
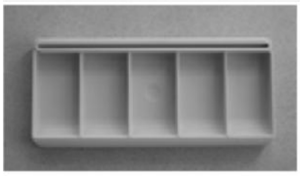
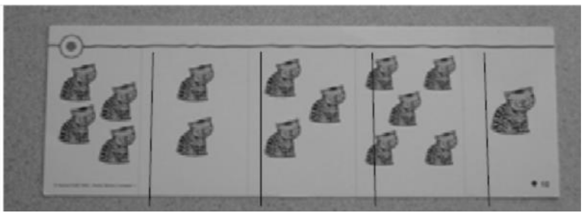
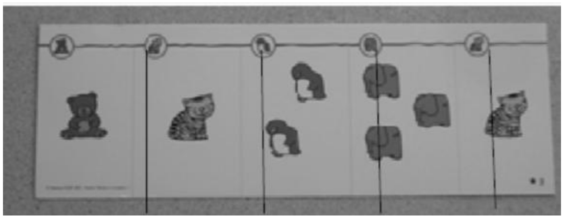
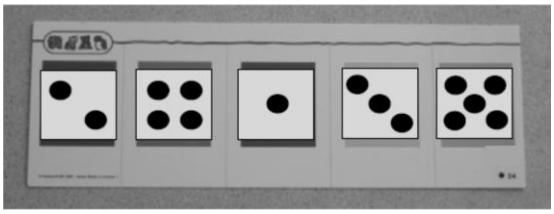
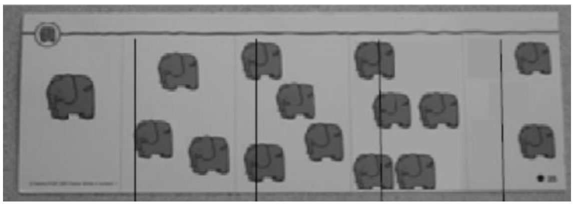
Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Un enseignant de Moyenne Section de maternelle utilise le jeu ci-dessous avec ses élèves.

Atelier Boîtes à compter 1, Nathan, 2003

La boîte contient le matériel suivant :

<table>
<tr><td>Des jetons classiques transparents
</td><td>Des jetons-animaux opaques
</td><td colspan="2">Des boîtes à compter où l'on insère une carte
 </td></tr>
<tr><td colspan="4">Des cartes variées comme par exemple</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carte A
</td><td colspan="2">Carte B
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carte C
</td><td colspan="2">Carte D
</td></tr>
</table>

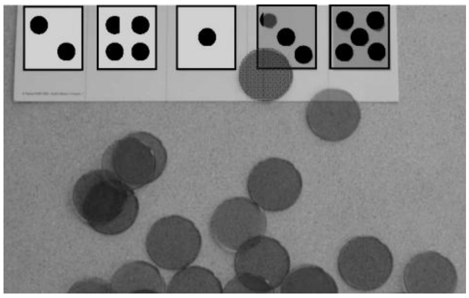
Pour chaque élève, l'enseignant choisit une carte et des jetons (animaux ou classiques).

L'objectif du maître est de faire réaliser par l'élève des collections de jetons de cardinaux identiques à ceux de la carte.

1. a) Analyse a priori.

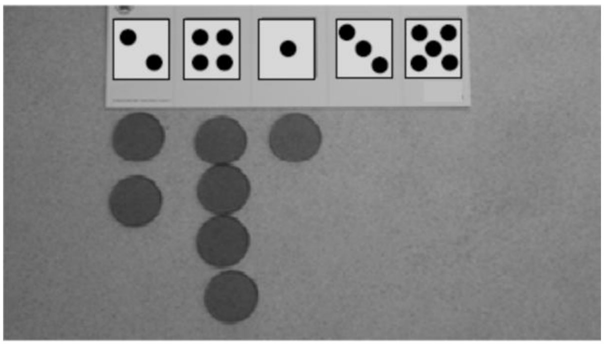
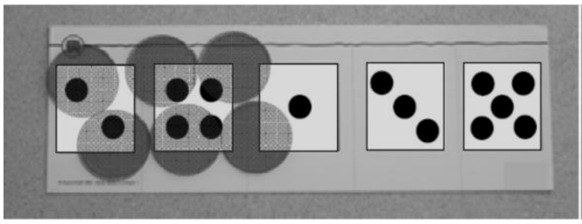
Pour chacune des deux configurations matérielles ci-dessous :

- donner deux méthodes que pourraient utiliser les élèves pour dénombrer les collections proposées.
- donner deux erreurs que les élèves sont susceptibles de faire en réalisant les collections.

Configuration 1 carte D + boîte + jetons-tigre	*Configuration 2* carte C + pas de boîte + jetons classiques
	

b) Voici deux réalisations d'élèves pour la *configuration 2*.

Que semblent-ils avoir compris tous les deux ? Analyser les différences éventuelles.

Louise	Kévin
	

2. Voici une autre production d'élève en réponse à une autre configuration matérielle.

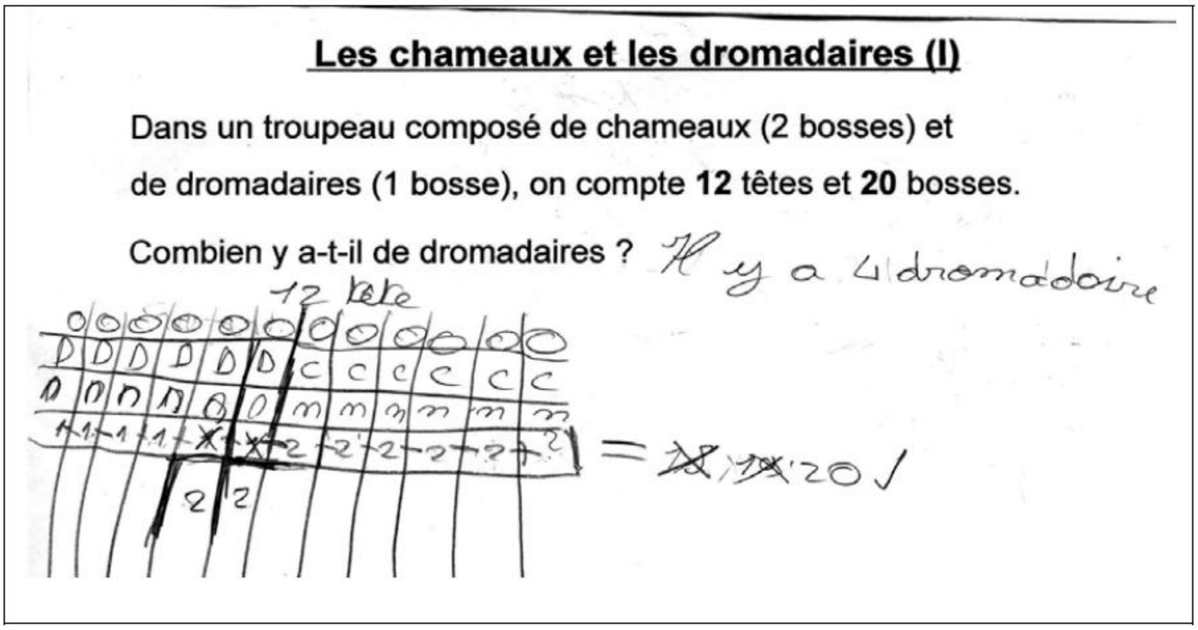
Citer une facilité et une difficulté qu'apporte le choix d'une configuration matérielle incluant une boite.

SITUATION 2

Le problème suivant est proposé à une classe de cycle 3.

> **« Les chameaux et les dromadaires »**
> Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte 12 têtes et 20 bosses.
> Combien y a-t-il de dromadaires ?

1. **Voici la réponse de Quentin.**



Les chameaux et les dromadaires (I)

Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte **12** têtes et **20** bosses.

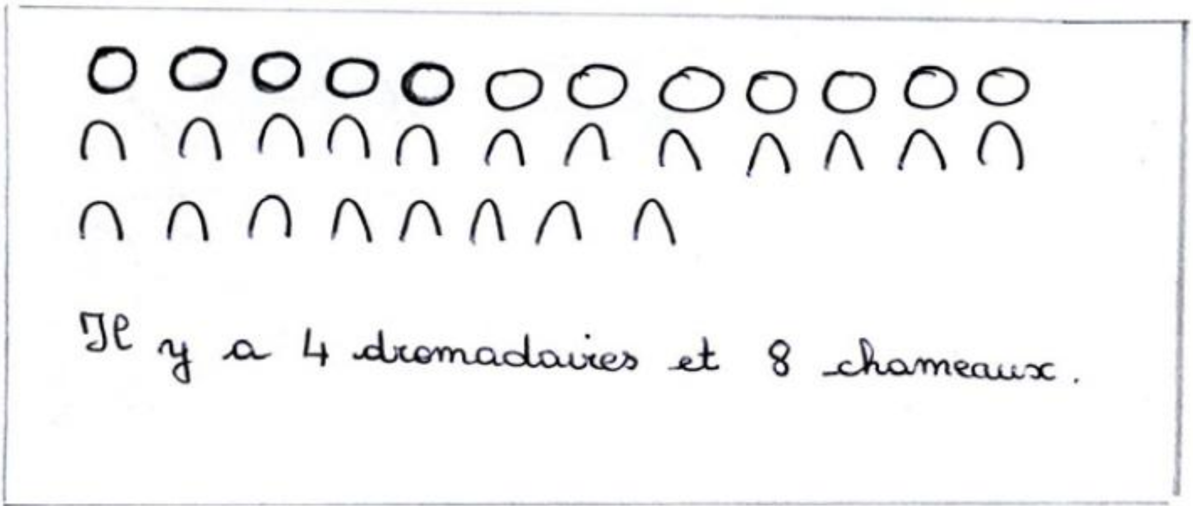
Combien y a-t-il de dromadaires ? Il y a 4 dromadoire

a) Expliquer sa démarche.

b) Appliquer le raisonnement de Quentin au problème suivant :

« Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte 152 têtes et 216 bosses. Combien y a-t-il de dromadaires ? »

2. Voici la réponse de Ramia.



a) Expliquer sa démarche.

b) Appliquer le raisonnement de Ramia au problème suivant :

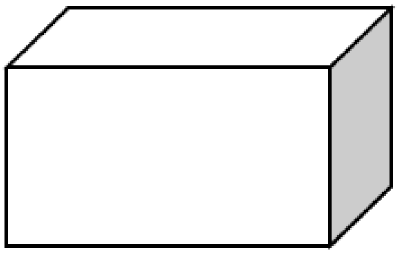
« Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte 546 têtes et 700 bosses. Combien y a-t-il de dromadaires ? »

SITUATION 3

L'exercice suivant est donné à des élèves de CM2.

L'aquarium de Pierre a la forme d'un pavé droit.

Quand il verse 4 litres d'eau dans l'aquarium, le niveau monte de 2 cm.



A – De combien monte le niveau d'eau quand il verse 8 litres ?

B – De combien monte le niveau d'eau quand il verse 6 litres ?

C – Combien de litres doit-il verser pour que le niveau d'eau monte de 14 cm ?

Extrait de l'Évaluation Nationale des Acquis des élèves en CM2, mai 2012.

Proposer trois résolutions différentes pour la question B qui peuvent être attendues d'un élève de CM2.

Expliciter les propriétés mathématiques sous-jacentes.

GROUPEMENT 2 – avril 2016

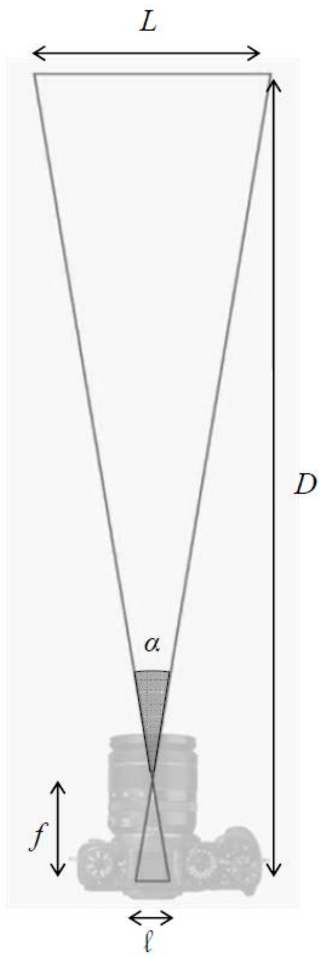
PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Ce problème porte sur l'utilisation d'un appareil photo numérique et étudie son fonctionnement.

L'appareil photo

Notations et vocabulaire utilisés dans tout le problème

- L est la largeur de la scène photographiée ;
- α est l'**angle de champ** (angle sous lequel la scène est vue) ;
- ℓ est la largeur du capteur numérique situé à l'arrière de l'appareil photo ;
- D est la distance entre la scène photographiée et le capteur numérique ;
- f, qui sera appelée **focale** de l'objectif, est la distance entre le capteur et le centre optique de l'objectif. C'est une caractéristique essentielle d'un objectif. Elle s'exprime généralement en millimètre (mm).

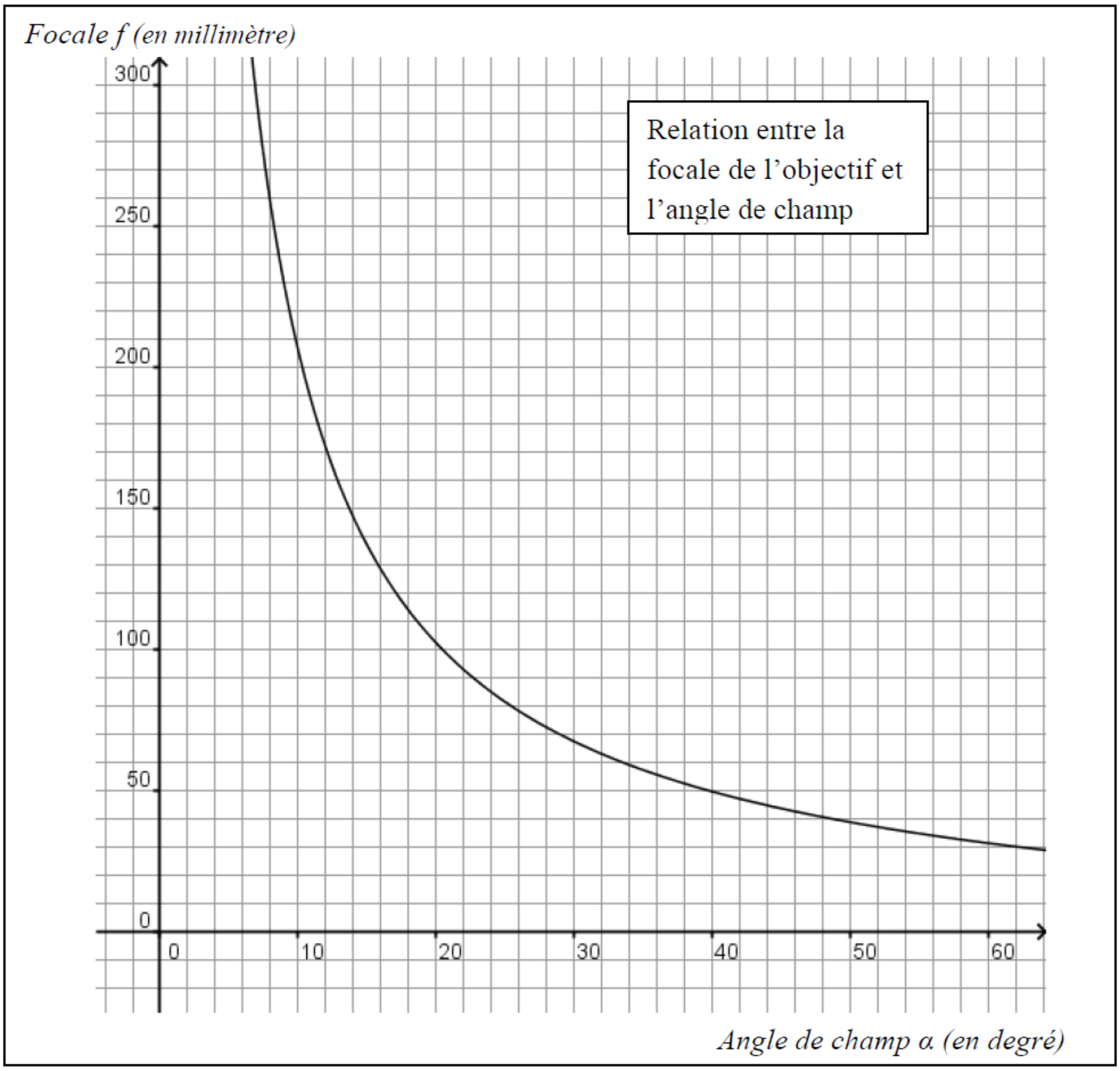


PARTIE A : lectures graphiques

Un photographe doit couvrir un spectacle théâtral.
Le graphique ci-après indique, pour son appareil, la relation entre la focale f de l'objectif et l'angle de champ α.

1. Du fond de la salle, il veut prendre une photo du spectacle avec un angle de champ α = 30°.

   Déterminer à l'aide du graphique à quelle focale cela correspond.
2. À l'aide du graphique, estimer à quel angle de champ correspond une focale de 100 mm.
3. Le photographe dispose d'un objectif permettant d'obtenir une focale comprise entre 55 mm et 200 mm. Quels angles de champ peut-il obtenir avec cet objectif ?



PARTIE B : prises de vue dans un théâtre

Formule fondamentale

La formule suivante, dans laquelle toutes les distances doivent être exprimées dans la **même unité**, est admise dans cette partie B. Elle sera démontrée dans la partie C.

$$\boxed{\frac{D}{f} = \frac{L}{\ell} + 1}$$

1. On considère que le capteur de l'appareil a pour largeur $\ell = 36$ mm et que le photographe est placé à $D = 12$ m de la scène du théâtre au centre de la salle.

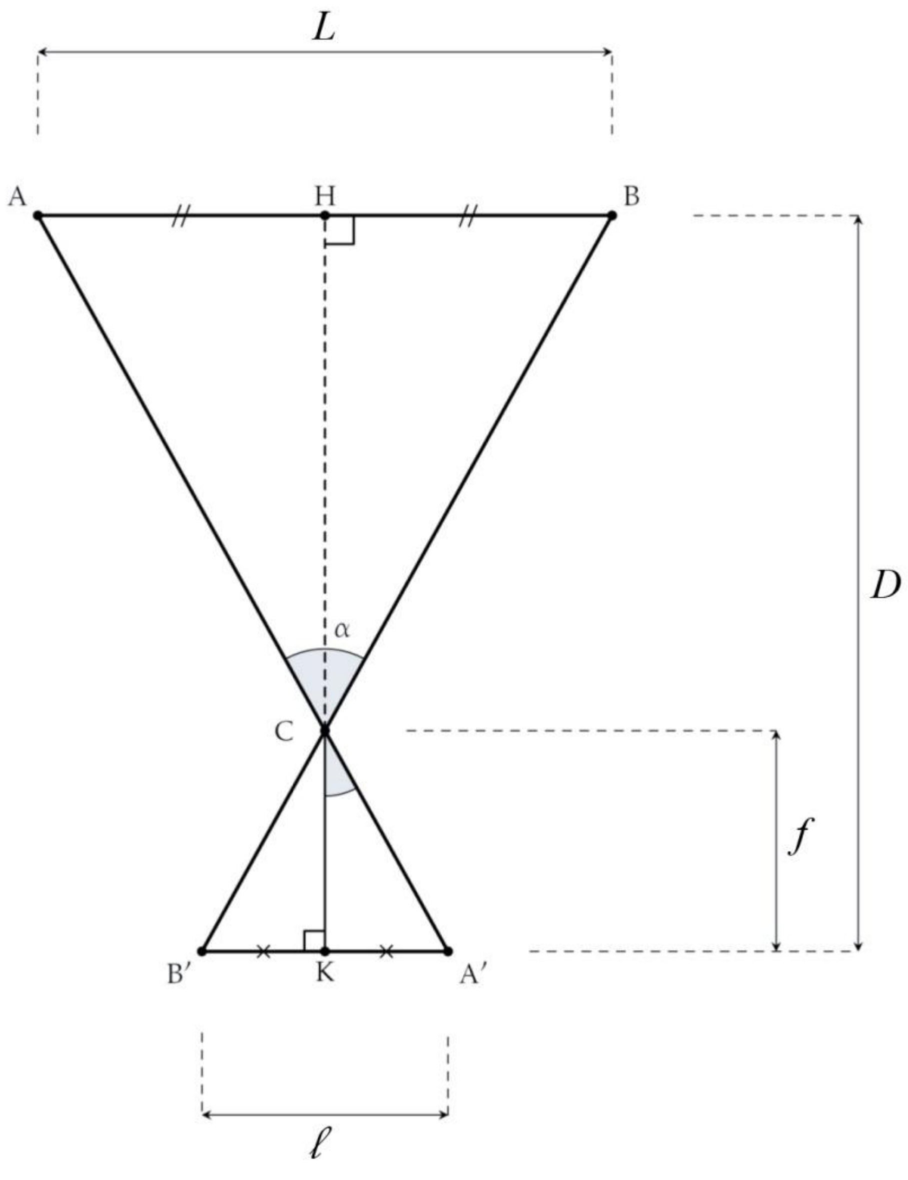
a) En utilisant la formule précédente, déterminer la largeur de la scène photographiée L qui correspond à une focale de 35 mm. Donner la valeur arrondie au dixième de mètre.

b) La scène du théâtre mesure 15 m de large. Quelles focales, en millimètre, le photographe peut-il utiliser pour que la largeur de la scène photographiée soit au moins aussi grande que la largeur de la scène du théâtre ?

2. L'affirmation « Si on est placé deux fois plus loin de la scène, il faut une focale deux fois plus longue pour photographier la même largeur de scène. » est-elle vraie ? Justifier la réponse.

PARTIE C : étude théorique

Le but de cette partie est de démontrer la formule fondamentale utilisée dans la partie B.
On schématise la situation par la figure ci-contre dans laquelle les droites (AA'), (BB') et (HK) sont concourantes en C.



1. À l'aide des informations portées sur la figure :

a) Justifier que les droites (AH) et (A'K) sont parallèles.

b) Démontrer que la droite (HK) est un axe de symétrie de la figure.

2. Justifier l'égalité :

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CK}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{A'K}}$$

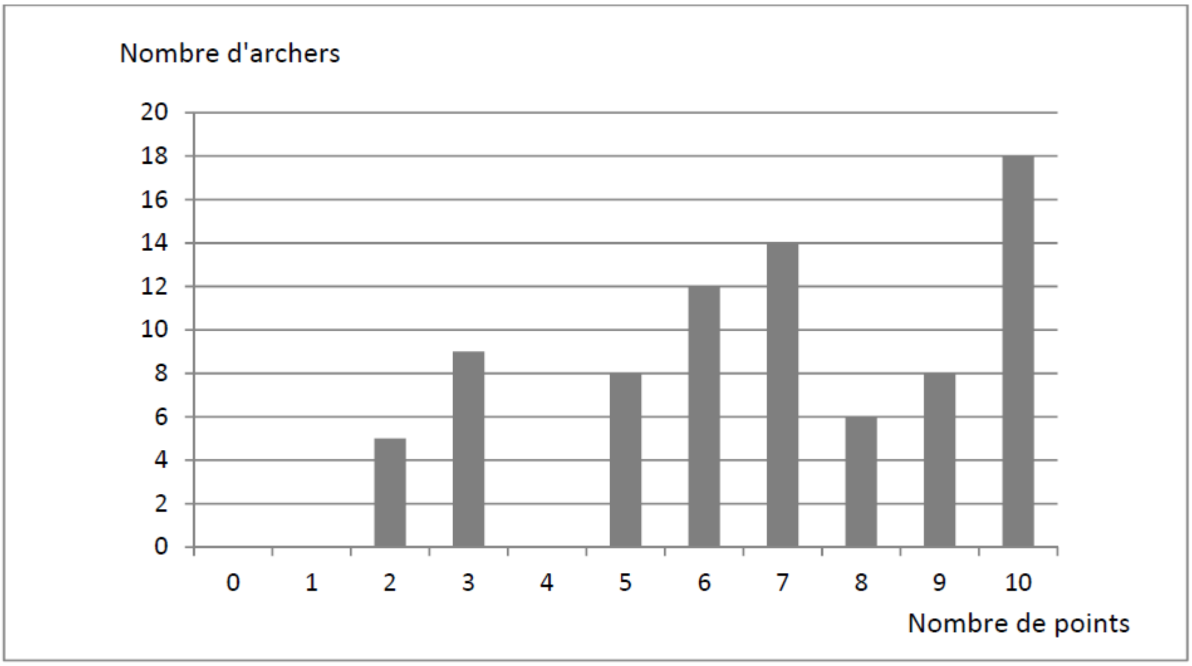
3. En déduire la relation :

$$\frac{D}{f} = \frac{L}{\ell} + 1$$

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Exercice 1

Quatre-vingts archers d'un club de tir à l'arc A ont participé à un championnat. Le nombre de points obtenus par chaque archer du club est donné par le diagramme ci-dessous.



1. Répondre à l'aide du diagramme précédent aux questions suivantes.
   a) Combien d'archers ont gagné exactement six points lors de ce championnat ?
   b) Combien d'archers ont gagné trois points ou plus lors de ce championnat ?
   c) Quel est le score médian des archers du club A ?
2. Le club de tir à l'arc voisin B a aussi participé à ce championnat. Voici quelques données relatives aux résultats des archers de ce club :
   - Le score moyen des archers lors du championnat est 7 points.
   - Le score moyen des dix meilleurs archers lors du championnat est 9,9 points.

   a) Comparer les résultats des deux clubs selon leurs scores moyens.
   b) Comparer les résultats des deux clubs selon les scores de leurs dix meilleurs archers.

Exercice 2

D'après MATh.en.JEANS, 2011‑2012, Collège Mermoz, Marly

Une règle du jeu :

Le jeu se joue avec **deux** dés (dés cubiques non truqués, avec des faces numérotées de 1 à 6).

But de la partie :

Obtenir un cochon composé d'un corps, de deux yeux, de deux oreilles, de quatre pattes et d'une queue.

Début de la partie :

Chaque joueur lance un dé.
Celui qui obtient le score le plus élevé commence à jouer puis chaque joueur joue successivement, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

Déroulement du jeu :

Lorsque c'est son tour, le joueur lance les **deux** dés (non truqués).
Si le joueur n'a pas encore pris le corps de son cochon, il doit obtenir un 6 au moins avec l'un des deux dés :
- s'il n'obtient pas de 6, il passe les dés au joueur suivant ;
- s'il obtient un 6 au moins, il prend le corps de son cochon et relance les dés.

Si le joueur a déjà pris le corps de son cochon, il doit obtenir un ou plusieurs 1 pour prendre les attributs du cochon :
- s'il n'obtient pas de 1, il passe les dés au joueur suivant ;
- s'il obtient un seul 1, il peut prendre un œil, une oreille ou une patte, puis il relance les dés ;
- s'il obtient deux 1, il peut prendre la queue du cochon ou deux autres attributs (oreilles, yeux, pattes) identiques ou non, puis il relance les dés.

Fin de la partie :

Le gagnant est le premier joueur à avoir complété son cochon.

1. Nicolas affirme : « Si dans la règle on remplaçait la valeur 1 par la valeur 2, on aurait deux fois moins de chances de gagner. ».
   A-t-il raison ? Justifier.
2. Sophie affirme : « J'ai deux fois plus de chance de pouvoir prendre une oreille que la queue ! »
   A-t-elle raison ? Justifier.
3. Quelle est la probabilité qu'un joueur ne puisse pas prendre le corps du cochon ni lors de son premier tour de jeu ni lors de son deuxième tour de jeu ?

Exercice 3

Les télésièges sont équipés de véhicules fixés à un câble. Sur un télésiège donné, tous les véhicules ont le même nombre de sièges, généralement compris entre deux et six.

Exemple de véhicule à quatre sièges

Pour des raisons de sécurité, l'espacement minimal entre deux véhicules sur le câble dépend de la vitesse de déplacement des véhicules et du nombre de sièges par véhicule selon la formule ci-dessous, valable pour un nombre de sièges inférieur ou égal à six :

$$\boxed{E = V\left(4 + \frac{n}{2}\right)}$$

où E désigne l'espacement minimal en mètre (m), V désigne la vitesse des véhicules en mètre par seconde (m/s) et n désigne le nombre de sièges par véhicule.

Une feuille de tableur a été créée en vue de calculer l'espacement minimal entre deux véhicules d'un télésiège :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			**Nombre de sièges par véhicule**					
2		**Vitesse en m/s**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
3		**2**	10	11	12	13	14	
4		**2,1**	10,5	11,55	12,6	13,65	14,7	
5		**2,2**	11	12,1	13,2	14,3	15,4	
6		**2,3**	11,5	12,65	13,8	14,95	16,1	
7		**2,4**	12	13,2	14,4	15,6	16,8	
8		**2,5**	12,5	13,75	15	16,25	17,5	
9		**2,6**	13	14,3	15,6	16,9	18,2	
10		**2,7**	13,5	14,85	16,2	17,55	18,9	
11		**2,8**	14	15,4	16,8	18,2	19,6	
12		**2,9**	14,5	15,95	17,4	18,85	20,3	
13		**3**	15	16,5	18	19,5	21	
14		**3,1**	15,5	17,05	18,6	20,15	21,7	
15		**3,2**	16	17,6	19,2	20,8	22,4	
16		**3,3**	16,5	18,15	19,8	21,45	23,1	
17		**3,4**	17	18,7	20,4	22,1	23,8	
18		**3,5**	17,5	19,25	21	22,75	24,5	
19		**3,6**	18	19,8	21,6	23,4	25,2	
20		**3,7**	18,5	20,35	22,2	24,05	25,9	
21		**3,8**	19	20,9	22,8	24,7	26,6	
22		**3,9**	19,5	21,45	23,4	25,35	27,3	
23		**4**	20	22	24	26	28	
24		**4,1**	20,5	22,55	24,6	26,65	28,7	
25		**4,2**	21	23,1	25,2	27,3	29,4	
26								
27								

Dans la suite de l'exercice on considère que l'espacement entre les véhicules est l'espacement minimal ainsi calculé.

1. La cellule E13 contient la valeur 18. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
2. Choisir une formule parmi celles données ci-dessous qui peut être saisie en E3 puis étirée vers le bas pour calculer l'ensemble des valeurs de la colonne E.

=$B3*(4+E$2/2)	=2*(4+4/2)	=12
=B3*(4+E2/2)	=B3*(4+4/2)	=$B$3*(4+$E$2/2)

3. Le débit D en nombre de personnes par heure est fourni par la formule :

$$D = 3\,600\, n\, \frac{V}{E}$$

L'affirmation suivante est-elle cohérente avec les données de cet exercice ?

Les télésièges fabriqués en 2010 sont généralement équipés de véhicules à quatre places, avec une vitesse de ligne de 2,3 m/s et peuvent, au maximum, atteindre un débit de 2 400 personnes par heure.

Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Télésiège

4. Pour des véhicules à quatre sièges, une vitesse de 2 m/s fournira-t-elle un meilleur débit qu'une vitesse de 3 m/s ? (On se placera dans le cadre d'un espacement minimal dans chaque situation.)
5. Montrer que, dans le cas où on choisit l'espacement minimal en fonction de la vitesse, le débit peut s'exprimer uniquement en fonction du nombre de sièges par véhicule. Cela confirme-t-il ou non le résultat trouvé à la question **4** ?

Exercice 4

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse fausse n'enlève pas de points, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. ABCD est un quadrilatère.

Affirmation : si ses diagonales sont perpendiculaires, alors c'est un losange.

2. À l'occasion des soldes, le prix d'un article est réduit de 25 %.
   Avec sa carte de fidélité, Carine bénéficie de 20 % de réduction supplémentaire sur le prix réduit.

Affirmation : Carine bénéficie d'une réduction égale à 40 % du prix initial de l'article.

3. Dans une classe, le nombre de filles est exactement égal à $\frac{3}{4}$ du nombre de garçons.

Affirmation : Exactement un quart des élèves de la classe sont des garçons.

4. Soient a et b deux nombres entiers.
   On effectue la division euclidienne du nombre a par 7. On trouve comme reste 3.
   On effectue la division euclidienne du nombre b par 7. On trouve comme reste 4.

Affirmation : le nombre $a + b$ est divisible par 7.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Les trois situations sont indépendantes.

SITUATION 1

Voici l'extrait d'un article sur les nombres décimaux et les fractions de l'ouvrage « *Le nombre au cycle 3, les apprentissages numériques* », publié aux éditions Scérén.

> *« Pour permettre aux élèves de donner du sens à ces nouveaux nombres, et justifier leur introduction, il est nécessaire de proposer des activités qui leur permettent de prendre conscience que :*
> *- les nombres décimaux, et plus généralement les fractions, permettent de résoudre de nouveaux problèmes ;*
> *[...]*
> *- certains raisonnements et certaines procédures correctes avec les nombres entiers peuvent ne plus l'être avec les nombres décimaux et les fractions. »*

1. Existe-t-il des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction mais qui ne sont pas des nombres décimaux ? Si oui, donner un exemple d'un tel nombre, si non, justifier.
2. Existe-t-il des nombres décimaux qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction ? Si oui, donner un exemple d'un tel nombre, si non, justifier.
3. Donner un exemple de procédure ou de raisonnement correct avec les nombres entiers mais qui peut s'avérer erroné avec les nombres décimaux.

SITUATION 2

Un enseignant propose le problème suivant à ses élèves de cycle 3 :

> *« Nicolas a acheté 2 kg de pommes. Il a payé 4 €. Léo a acheté la même variété de pommes dans le même magasin. Il a payé 5 €. Quelle masse de pommes a-t-il achetée ? »*

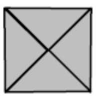
Proposer trois procédures, attendues d'élèves de cycle 3, pour résoudre ce problème, l'une au moins ne nécessitant pas le recours aux nombres décimaux.

SITUATION 3

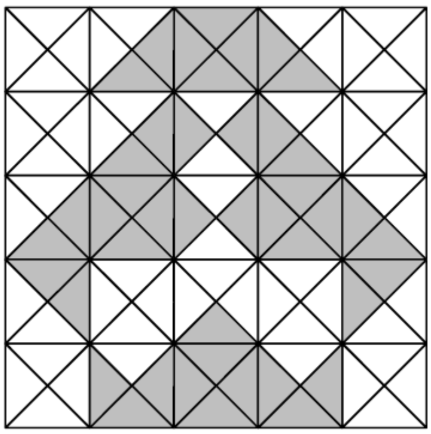
Dans une classe de CM2 un professeur propose le travail suivant aux élèves.

Exercice :

Quelle est l'aire, en cm², de la figure grise ?



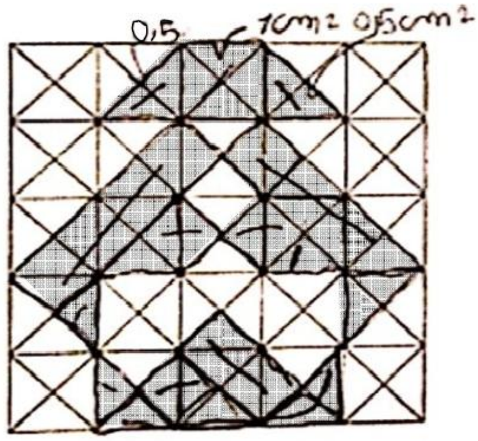
4 triangles = 1 cm²



Les productions de quatre élèves sont présentées ci-après. Pour faciliter leur lecture, certaines réponses d'élèves ont été transcrites en italique et entre parenthèses.

1. Pour les productions de Terry et de Raphaëlle, citer trois compétences qui semblent acquises et analyser les éventuelles erreurs.
2. Pour les productions de Clément et de Cloé, analyser les procédures en pointant les éléments qui les rapprochent et ceux qui les séparent.

Production de Raphaëlle



1cm² ÷ 2 = 0,5cm²
0,5 ÷ 2 = 0,25 cm²
1 triangle = 0,25 cm²

2
+ 2
+ 2
+ 1
+ 1
+ 0,5
+ 0,5
+ 0.25
+ 1
10,25cm²

l'aire de la figure grise et de 10,25

(L'aire de la figure grise et de 10,25)

Production de Terry

Il y a 43 triangle donc 10 unité + $\frac{3}{4}$ cm²

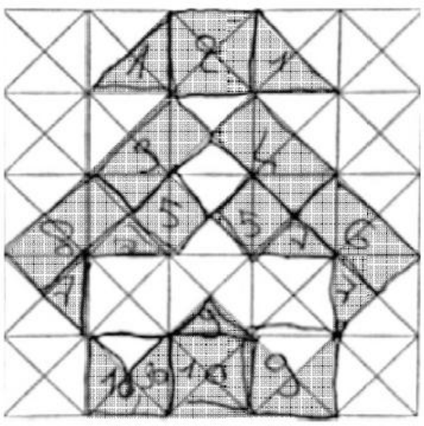
(Il y a 43 triangle donc 10 unité + $\frac{3}{4}$ cm²)

Production de Clément

$$\begin{array}{r|l} 43 & 4 \\ \hline -4 & 10 \\ 03 & \\ -0 & \\ 3 & \end{array}$$

La figure grise fait 10,3 cm².

Production de Cloé



j'ai compté 10,3 carrés

je vérifie

$$\begin{array}{r|l} 43 & 4 \\ \hline -4 & 10,7 \\ 03 & \\ -0 & \\ 30 & \\ -28 & \\ 02 & \end{array}$$

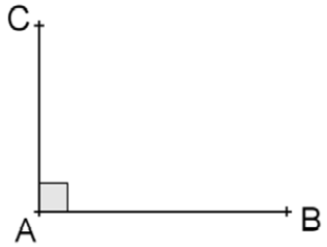
L'aire de cette figure est de 10,3 cm²

GROUPEMENT 3 – avril 2016

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

On donne trois points A, B, C tels que :
- AB = 8 cm,
- AC = 6 cm,
- les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

(le dessin ci-contre n'est pas à l'échelle).



On place :
- un point D appartenant au segment [AB] distinct de A et B ;
- le point E, intersection du segment [BC] et de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par D ;
- le point F, intersection du segment [AC] et de la perpendiculaire à la droite (AC) passant par E.

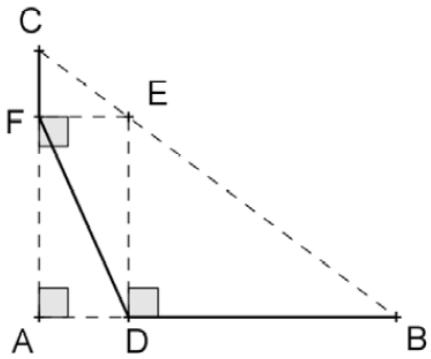


Figure 1

Le but du problème est de déterminer la position du point D pour laquelle la distance DF est minimale.

PARTIE A : questions préliminaires

Les deux résultats démontrés dans cette partie pourront être utilisés dans les parties suivantes.

1. Démontrer que BC = 10 cm.
2. Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ (on donnera le résultat arrondi à l'unité).
3. Démontrer que AE = DF.

PARTIE B : étude analytique du problème

1. Cas particulier

On suppose que AD = 3 cm.

a) Calculer BD, puis en déduire DE.

b) Montrer que DF = $\sqrt{23{,}0625}$.

2. Cas général

Dans cette partie, on pose AD = x.

a) Quelles valeurs x peut-il prendre ?

b) Démontrer que DE = 6 – 0,75x.

c) En déduire que $DF^2 = 1{,}5625x^2 - 9x + 36$.

d) Vérifier que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question **1.b.**

3. Recherche de la valeur de *x* pour laquelle DF est minimale.

On admet qu'il existe une position du point D telle que DF est minimale, et donc une valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal.
Afin de déterminer la position du point D recherchée, on utilise un tableur :

	A	B	C
1	*x*	**DF²**	
2	0	36,0000	
3	0,5	31,8906	
4	1	28,5625	
5	1,5	26,0156	
6	2	24,2500	
7	2,5	23,2656	
8	3	23,0625	
9	3,5	23,6406	
10	4	25,0000	
11	4,5	27,1406	
12	5	30,0625	
13	5,5	33,7656	
14	6	38,2500	
15	6,5	43,5156	
16	7	49,5625	
17	7,5	56,3906	
18	8	64,0000	
19			
20			

Tableau 1

a) Une fois la colonne A et la cellule B1 remplies, indiquer quelle est, parmi les propositions suivantes, la formule rentrée en cellule B2 et ayant permis par recopie le remplissage la colonne B.

- Proposition 1 : = 1,5625 * 0² – 9 * 0 + 36
- Proposition 2 : = 1,5625 * A2 ^2 – 9 * A2 + 36
- Proposition 3 : = 1,5625 * *x* ^2 – 9 * *x* + 36
- Proposition 4 : = 1,5625 * A1 ^2 – 9 * A1 + 36

b) Expliquer pourquoi l'utilisateur, après avoir observé les valeurs apparaissant dans la colonne B du tableau 1, a choisi de poursuivre la recherche avec les valeurs données dans la colonne D du tableau 2 ci-après.

c) L'utilisateur affine encore les calculs, en remplissant les colonnes G et H du tableau.
En déduire un encadrement d'amplitude 0,02 de la valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal.

D	E	F	G	H
x	**DF²**		**x**	**DF²**
2,5	23,2656		2,8	23,0500
2,6	23,1625		2,81	23,0477
2,7	23,0906		2,82	23,0456
2,8	23,0500		2,83	23,0439
2,9	23,0406		2,84	23,0425
3	23,0625		2,85	23,0414
3,1	23,1156		2,86	23,0406
3,2	23,2000		2,87	23,0402
3,3	23,3156		2,88	23,0400
3,4	23,4625		2,89	23,0402
3,5	23,6406		2,9	23,0406
			2,91	23,0414
			2,92	23,0425
			2,93	23,0439
			2,94	23,0456
			2,95	23,0477
			2,96	23,0500
			2,97	23,0527
			2,98	23,0556
			2,99	23,0589
			3	23,0625

Tableau 2

PARTIE C : résolution du problème par une méthode géométrique

1. Construire une droite Δ et un point O n'appartenant pas à Δ. Placer le point H, intersection entre la droite Δ et la perpendiculaire à Δ passant par O, puis placer sur la droite Δ un point M distinct de H.

   Expliquer alors pourquoi OH < OM.

2.

   a) Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 8 cm et AC = 6 cm.

   Utiliser la question précédente pour construire le point E sur [BC] de telle sorte que la distance AE est minimale.

   Placer les points D et F de façon à retrouver la configuration de la figure 1, puis tracer le segment [DF].

   b) En exprimant l'aire du triangle ABC de deux façons différentes, déterminer la longueur AE et en déduire la longueur DF.

   c) Calculer la distance AD et conclure par rapport au problème de départ.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1

(D'après Dimathème 2de, édition 2000, Didier)

On admet que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à 3×10^8 m/s (mètres par seconde).

1. Une unité astronomique (1 UA) est égale à la distance moyenne Terre – Soleil ; elle vaut 150 millions de kilomètres.
   Calculer le temps, exprimé en minute et seconde, nécessaire à un signal lumineux émis par le Soleil pour parvenir à la Terre, en supposant qu'il parcourt 1 UA dans le vide.

2. Une année-lumière (1 AL) est la distance parcourue dans le vide par la lumière en une année julienne (c'est-à-dire 365,25 jours).
   Calculer une valeur approchée, en kilomètre, d'une année-lumière.

3. Dans le système solaire, la planète la plus éloignée du Soleil est Neptune, et sa distance moyenne par rapport au Soleil est de 4,5 milliards de kilomètres.

   a) Exprimer cette distance en UA.

   b) Si on réalisait une maquette du système solaire dans laquelle Neptune est placée à 1 m du Soleil, à quelle distance du Soleil faudrait-il placer la Terre ? On donnera le résultat arrondi au millimètre.

Exercice 2

Dans cet exercice, quatre affirmations sont proposées.
Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse fausse n'enlève pas de points, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

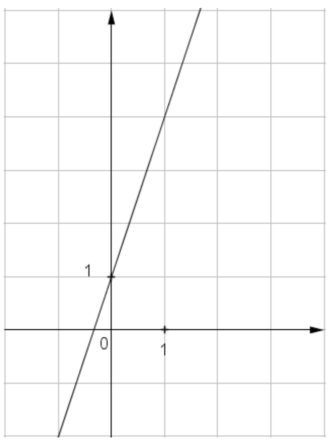
1. Une bouteille d'eau pleine a une masse de 1 215 g.
   À moitié vide, elle a une masse de 840 g.

   Affirmation 1 : Cette bouteille vide pèse alors 465 g.

2. Dans une classe de 25 élèves, exactement 10 élèves sont partis en vacances à la montagne l'hiver, exactement 8 élèves sont partis en vacances à la montagne l'été et exactement 5 élèves sont partis en vacances à la montagne l'hiver et l'été.

   Affirmation 2 : 12 élèves de cette classe ne sont pas partis en vacances à la montagne (ni l'hiver, ni l'été).

3. **Affirmation 3 :**
   La droite ci-dessous, dans un repère orthogonal, représente la fonction affine f définie par :
   $$f(x) = -3x + 1$$



4. **Affirmation 4 :** Le PGCD de 2016 et de 6102 est 2.

Exercice 3

Un enseignant demande à ses élèves d'une classe de troisième d'appliquer le programme de calcul suivant :

- choisir un nombre a quelconque ;
- le multiplier par 4 ;
- ajouter 7 à ce produit ;
- mettre le tout au carré ;
- écrire le résultat.

1.

a) Vérifier que le nombre obtenu sera 225 si le nombre de départ est 2.

b) Déterminer le nombre obtenu, si le nombre de départ est $\frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour un nombre de départ a, le nombre obtenu est $16a^2 + 56a + 49$.

3.

a) Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 0.

b) Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 49.

c) Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à – 1.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de deux situations indépendantes.

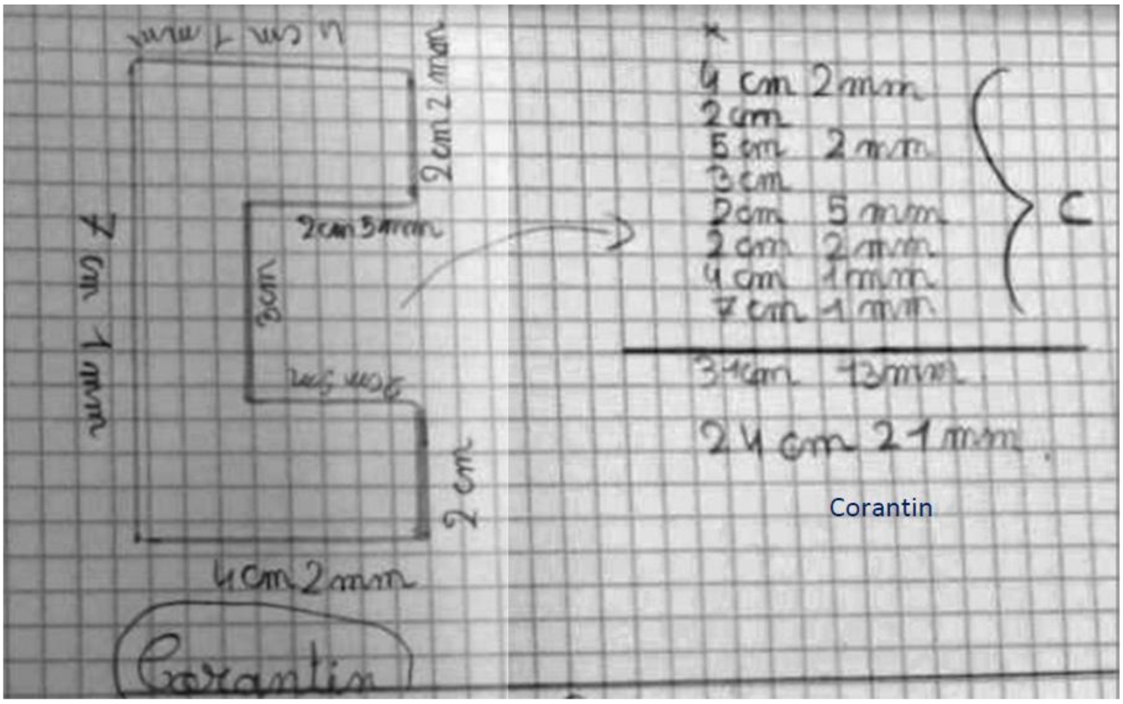
SITUATION 1

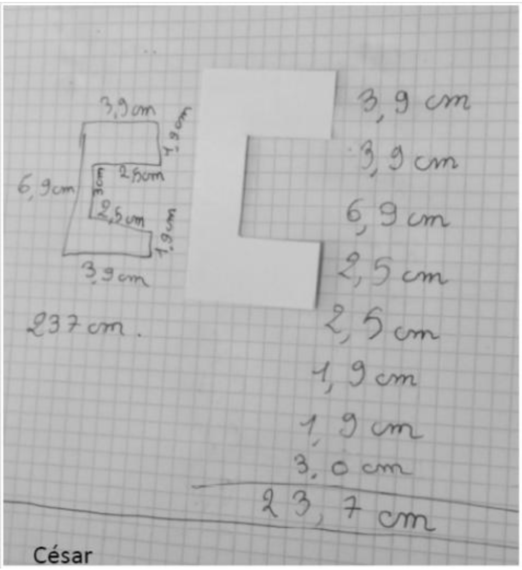
Un maître a distribué à ses élèves de CM1 des gabarits de lettres et leur a demandé de trouver la longueur de leur contour.
Un groupe de trois élèves est chargé de travailler sur le gabarit de la lettre C.

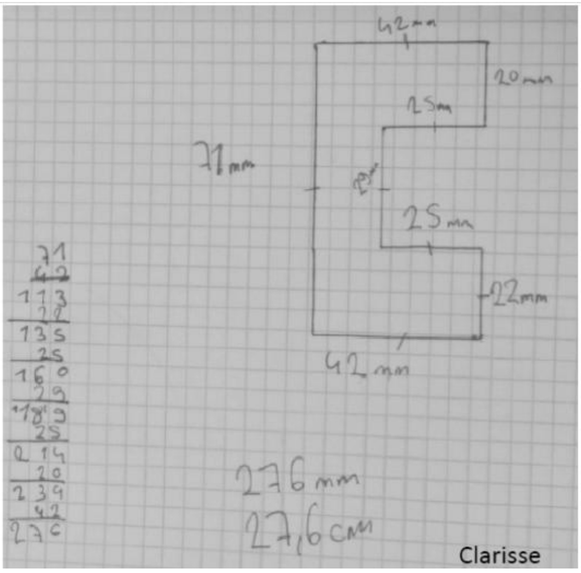
1. Donner quatre compétences nécessaires pour déterminer la longueur du contour.

2. Donner deux difficultés que les élèves pourraient rencontrer pour cette tâche.

3. Voici les productions de trois élèves (Corantin, César et Clarisse) :







Pour chacun de ces travaux :

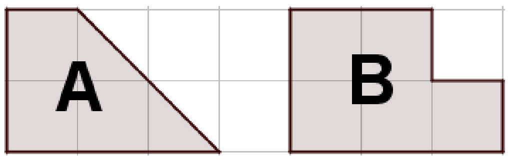
a) Analyser la trace écrite (procédures suivies, compétences mises en œuvre, erreurs éventuelles).

b) Proposer une remédiation que le professeur pourrait mettre en place pour César et Corantin.

SITUATION 2

Voici l'énoncé d'un problème qui a été proposé dans le cadre du *rallye mathématique CM2-6ème de l'IREM Paris-Nord.*

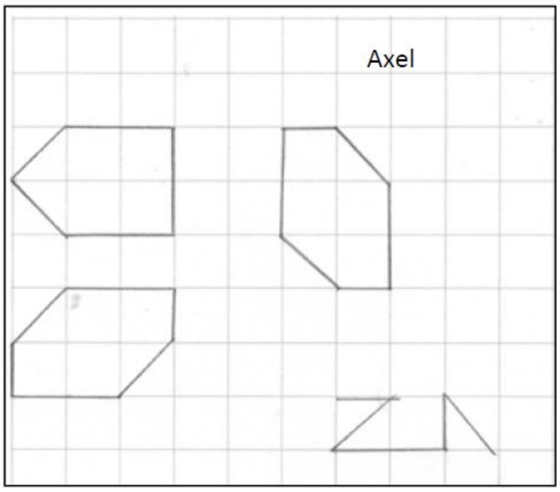
« Construire trois figures différentes dont les sommets sont des nœuds du quadrillage et qui à la fois ont même périmètre que la figure A et même aire que la figure B. »

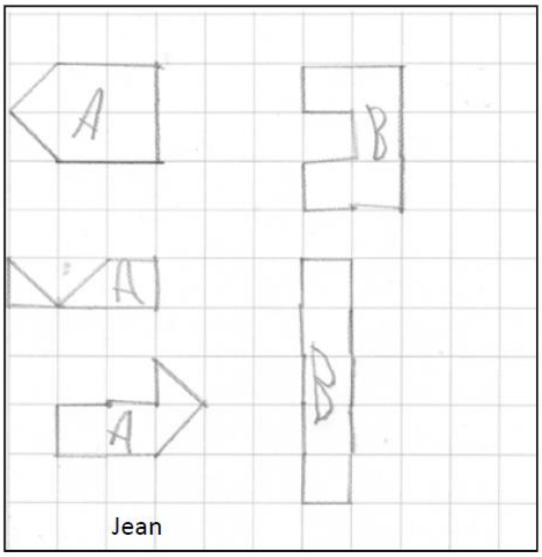


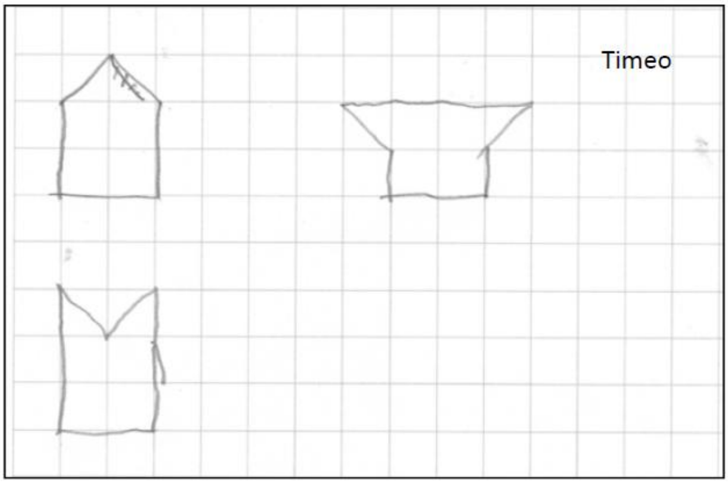
1. Citer trois compétences dans le domaine « grandeurs et mesures » qui permettent de construire les figures demandées.

2. L'enseignant a choisi d'utiliser du papier à quadrillage carré. Citer une difficulté qu'apporterait l'utilisation de papier pointé (à réseau carré).

3. Voici la production de trois élèves : Axel, Jean et Timeo.







a) Production d'Axel :

Pour quelle raison le professeur a-t-il demandé à Axel de trouver une autre figure, après les trois premières dessinées ?

Proposer une explication possible au fait qu'Axel n'a pas terminé le quatrième tracé.

b) Production de Jean :

Analyser les réponses de Jean, en lien avec les objectifs de l'exercice.

c) Production de Timeo :

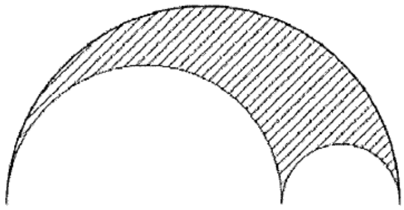
Analyser les réponses de Timeo, en lien avec les objectifs de l'exercice.

d) Proposer une aide possible que le maître pourrait apporter à Jean et à Timeo.

POLYNÉSIE FRANÇAISE – avril 2016

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

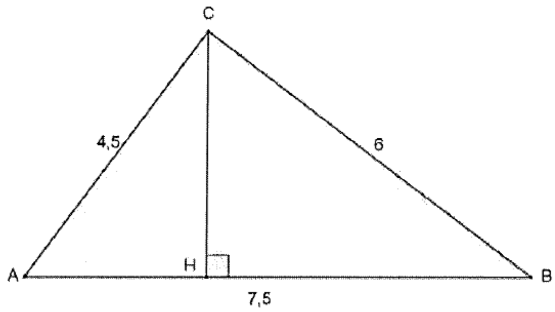
L'arbelos est une figure géométrique qui doit son nom à un outil appelé *tranchet du cordonnier*. Cette figure a été étudiée par Archimède il y a plus de deux millénaires.



PARTIE A : étude préliminaire – relations métriques dans un triangle rectangle

1. Étude d'un cas particulier

Soit ABC un triangle de dimensions : AB = 7,5 cm ; BC = 6 cm ; AC = 4,5 cm.
On appelle H le pied de la hauteur issue du sommet C.



a) Vérifier que le triangle ABC est rectangle en C. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à 13,5 cm^2.

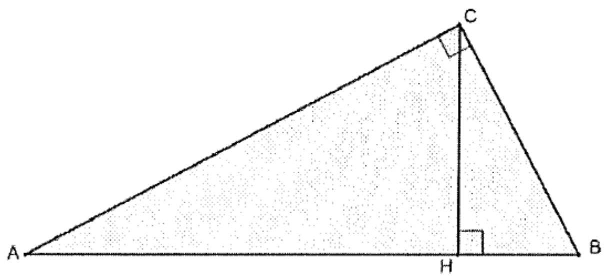
b) En calculant d'une autre façon l'aire du triangle ABC, en déduire que la longueur CH est 3, 6 cm.

c) Calculer les longueurs AH et BH.

d) Vérifier que dans ce triangle CH^2 = AH × BH.

2. Étude du cas général

Soit ABC un triangle rectangle en C.
On appelle H le pied de la hauteur issue du sommet C.



a) Montrer que les angles $\widehat{CBH}$ et $\widehat{ACH}$ ont même mesure.

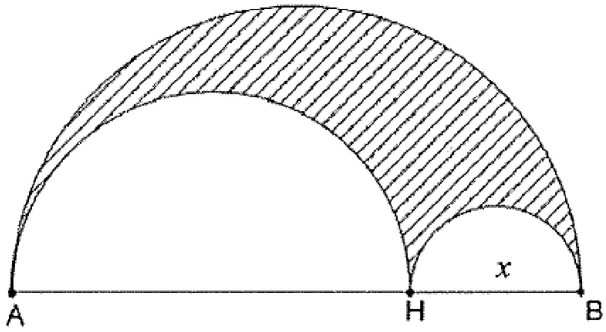
b) En déduire à l'aide des relations trigonométriques que :

$$\frac{\text{CH}}{\text{BH}} = \frac{\text{AH}}{\text{CH}}$$

puis que HC^2 = AH × BH .

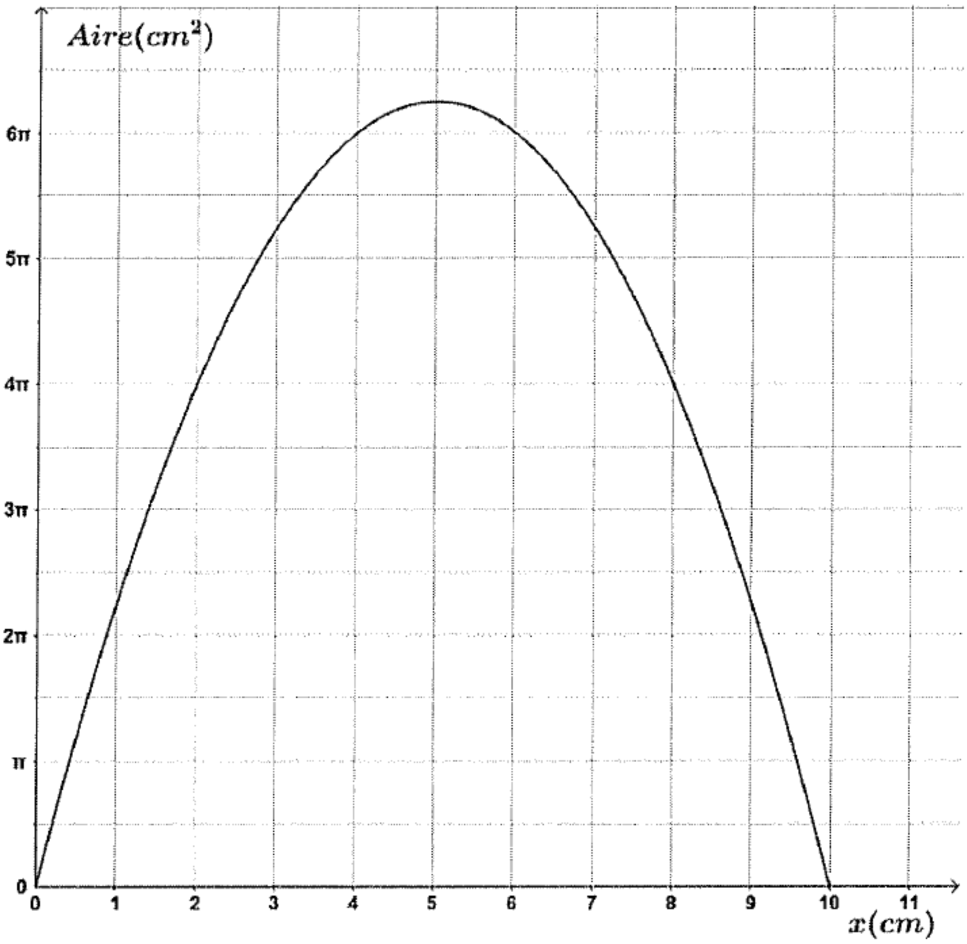
PARTIE B : étude de l'aire d'un arbelos dans un cas particulier

Dans cette partie, on fixe Ab = 10 cm.
On considère un point H appartenant au segment [AB], et on note x = BH.



1. Étude graphique de l'aire

La représentation graphique de la fonction *A* exprimant l'aire de l'arbelos en fonction de la distance BH est donnée ci-dessous.



Les réponses aux questions suivantes seront données par lecture graphique.

a) Donner en fonction de π l'aire de l'arbelos lorsque $x = 4$.

b) Pour quelles valeurs de BH l'aire de l'arbelos est-elle égale à 2π cm² ?

c) Pour quelles valeurs de BH l'aire est-elle comprise entre 0 et 4π cm² ?

d) **i.** Pour quelles valeurs de BH l'aire de l'arbelos est-elle maximale ?

ii. Donner en fonction de π la valeur de cette aire maximale.

2. Vérification algébrique

On rappelle que l'aire d'un disque de diamètre d est égale à $\frac{1}{4}\pi d^2$.

a) Quelles valeurs x peut-il prendre ?

b) Exprimer l'aire de l'arbelos *A(x)* en fonction de x.

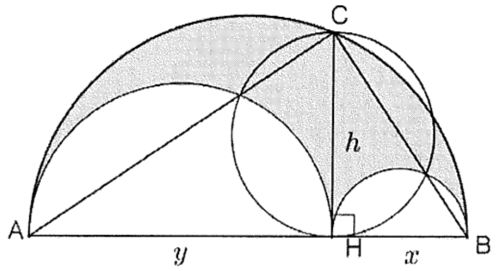
c) Montrer que l'on peut écrire :

$$A(x) = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}(x-5)^2 \ .$$

d) Vérifier par le calcul les valeurs déterminées graphiquement pour l'aire maximale à la question **B-1.d**.

PARTIE C : étude de l'aire d'un arbelos dans le cas général

On donne deux points distincts A et B. On construit un demi-cercle de diamètre [AB].
Soit C un point de ce demi-cercle distinct de A et B.
On appelle H le pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.
On construit les deux demi-cercles de diamètre [AH] et [HB] situés dans le demi-plan délimité par la droite (AB) contenant C.
On note x la longueur BH, y la longueur AH et h la longueur CH.
L'arbelos est la zone du plan grisé sur la figure.



1. Montrer que l'aire de l'arbelos est égale à

$$\frac{\pi}{4}xy \ .$$

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

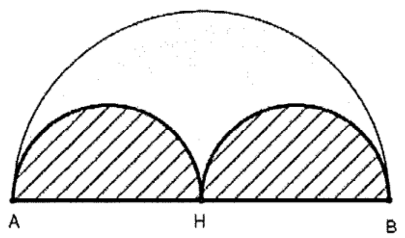
3. Utiliser la relation métrique établie à la question **A-2.b** pour montrer que l'aire de l'arbelos est égale à l'aire du disque de diamètre [CH].

PARTIE D : prolongements

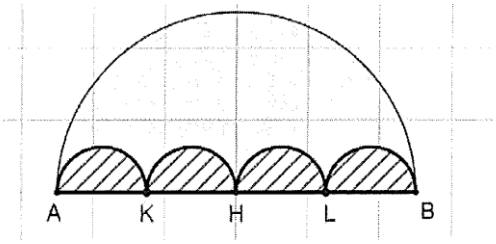
Dans cette partie, le segment [AB] mesure 10 cm. On le partage en n segments d'égale longueur, n étant un entier naturel non nul, puis on construit n demi-disques de diamètres ces n segments comme indiqué dans les exemples ci-dessous.

On s'intéresse au périmètre et à l'aire des figures formées de ces n demi-disques, délimitées par le diamètre [AB] et les n demi-cercles (hachurées dans les deux exemples ci-dessous).

Pour $n = 2$



Pour $n = 4$



1. Dans le cas où $n = 2$, vérifier que le périmètre de la partie hachurée est égal à $5\pi + 10$ cm et que son aire est égale à $6{,}25\pi$ cm^2.
2. Déterminer les valeurs exactes du périmètre puis de l'aire de la partie hachurée dans le cas où $n = 4$.
3. Étude du cas général
   a) Montrer que le périmètre de la surface hachurée est le même quelle que soit la valeur de n.
   b) Monter que l'aire de la surface hachurée est égale à
   $$\frac{25\pi}{2n}\ \text{cm}^2 .$$
4. Trouver la plus petite valeur de n pour que l'aire de la surface hachurée soit inférieure à 0,1 cm^2. Combien mesure le périmètre pour cette valeur de n ?

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Exercice 1

1. On lance un dé bien équilibré et on considère les points portés sur la face supérieure.
   Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de points ?
2. On lance deux dés bien équilibrés et on effectue la somme des points portés sur les faces supérieures. Quelle est la probabilité d'obtenir 8 ?
3. On considère un sac contenant 25 jetons rouges et 17 jetons bleus indiscernables au toucher. On tire deux jetons l'un après l'autre, sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur ?

Exercice 2

Louise affirme que si on augmente la longueur du côté d'un carré de 100 % alors son aire augmente de 200 %.
Tessa n'est pas d'accord avec elle et affirme que l'aire sera doublée.
Eva soutient, quant à elle, que l'aire augmentera de 300 %.

Qui a raison ? Justifier la réponse.

Exercice 3

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Ajouter 6.
- Multiplier par le nombre de départ.
- Ajouter 9.
- Afficher le résultat.

1. **a)** Monter que si le nombre de départ est 5, le résultat affiché sera 64.
   b) Quel nombre sera affiché si le nombre choisi au départ est 10 ?

Un tableur a été utilisé pour mettre en œuvre ce programme de calcul. Une copie de l'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*nombre de départ*	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	*résultat*	0	1	4	9	16	25	36

2. Une formule a été saisie dans la cellule B2 et recopiée ensuite vers la droite pour compléter la plage C2 : H2.
   Parmi les formules suivantes, laquelle a été saisie ?
   `= B1+6*B1+9` `= (B1+6)*(B1+9)` `= (B1+6)*B1+9`

3. En observant la copie d'écran ci-dessus, émettre une conjecture sur le résultat obtenu en fonction du nombre de départ choisi.

4. Démontrer cette conjecture.

Exercice 4

Un producteur de légumes sème des carottes sur deux parcelles différentes.
Pour répondre aux demandes de l'industrie agroalimentaire, les carottes doivent respecter certains calibrages.
On s'intéresse tout particulièrement à la longueur des carottes.

Après récolte, le producteur prélève un échantillon sur chacune des deux parcelles. Les résultats des mesures des longueurs des carottes de ces échantillons sont regroupés ci-dessous :

Parcelle A (400 carottes)	**Parcelle B (500 carottes)**
premier quartile : 7 cm	premier quartile : 7 cm
troisième quartile : 12 cm	troisième quartile : 9 cm
médiane : 10 cm	médiane : 8,5 cm
moyenne : 9,5 cm	moyenne : 8,8 cm
étendue : 9 cm	étendue : 10 cm
minimum : 4,5 cm	minimum : 5 cm

Dans cet exercice, il s'agit de dire si chacune des affirmations est vraie ou fausse et de le justifier.

Affirmation1
Au moins 75 % des carottes de l'échantillon prélevé sur la parcelle B mesurent moins de 10 cm.

Affirmation 2
La plus grande carotte de l'échantillon prélevé sur la parcelle A mesure 14 cm.

Pour les deux affirmations suivantes, on considère que le producteur regroupe les échantillons des deux parcelles.

Affirmation 3
La longueur moyenne d'une carotte est 9,15 cm.

Affirmation 4
La valeur médiane des longueurs des carottes est 6,9 cm.

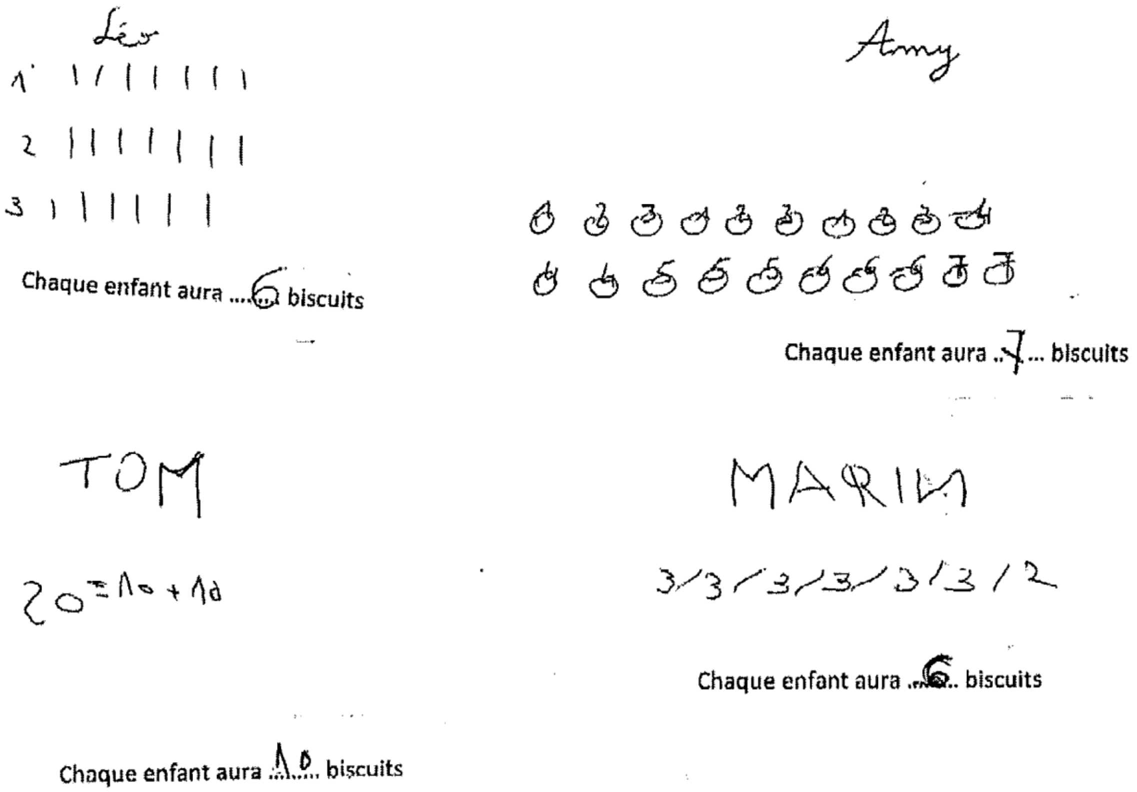
TROISIEME PARTIE (14 points)

SITUATION 1

Dans une classe de CE1, l'exercice suivant a été proposé.

Une mère décide de partager **équitablement** entre ses trois enfants **les 20 biscuits** d'un paquet. Combien de biscuits va-t-elle donner à chaque enfant ?

1. **Analyse du texte du problème**
   - Donner une difficulté que comporte la présentation de cet énoncé de problème et expliquer une conséquence possible.
   - Citer deux incidences sur la résolution du problème que le choix des nombres 3 et 20 va engendrer.
2. Voici les productions de quatre élèves :



Présenter dans un tableau :

- La démarche probable de chaque élève ;
- Les éventuelles erreurs de chacun ;
- Une origine possible de chacune de ces erreurs ;
- Les connaissances mathématiques illustrées par ces démarches.

SITUATION 2

Voici quatre problèmes extraits du manuel de mathématiques de CM1 de la collection LITCHI (Istra, Paris 2014).

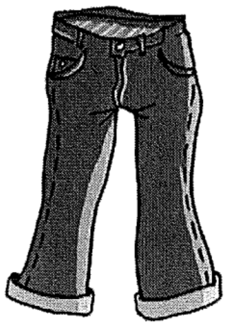
Résoudre des problèmes

A5 Ingrid achète 32 bouteilles de soda pour la fête de son club de danse. Elle achète les bouteilles par packs de 6. Elle met 5 packs dans son chariot.
Combien de bouteilles doit-elle encore ajouter ?

A6 Les stylos verts sont vendus par paquets de 4 ou bien à l'unité. Il en faut 29 pour donner un stylo à chaque élève du CM1.
- Combien de paquets faut-il acheter ?
- Combien de stylos à l'unité faut-il acheter pour compléter ?

B5 Pour la nouvelle année, le garagiste veut offrir un porte-clés à ses 78 clients. Les porte-clés sont vendus par lots de 8 ou bien à l'unité.
- Combien de lots doit-il acheter ?
- Combien de porte-clés à l'unité doit-il acheter pour compléter ?

B6 Julien possède deux boutiques de vêtements. Il commande 55 jeans pour l'un des magasins et 36 pour l'autre. Le livreur lui donne des paquets de 8 jeans et complète avec des pantalons à l'unité.



- Combien de paquets sont livrés ?
- Combien de jeans sont livrés à l'unité pour compléter ?

quarante-neuf **49**

1. Précisez pour chaque problème s'il s'agit de la recherche de la valeur d'une part, de la recherche du nombre de part ou de la recherche du reste.
2. Créer un exercice proposant la recherche de la valeur d'une part en reprenant les données numériques du problème A6.
3. Quelle différence peut-on identifier entre les problèmes B5 et B6 ?

SITUATION 3

Le problème suivant est posé à des élèves d'une classe de CM2.

Dans son verger de pommiers, Laurent a récolté 890 kg de pommes. Il les entrepose dans des caisses contenant chacune 23 kg de pommes. Combien de caisses Laurent va-t-il remplir ? Que lui restera-t-il ?

1. Quelle est la notion mathématique mise en jeu dans cet exercice ? Quelle est l'écriture mathématique de l'opération en ligne ?
2. En quoi les deux questions de l'énoncé du problème sont-elles importantes ?

Voici les productions de trois élèves : Arthur, Océane et Dylan.

Arthur

```
  8 9 0 | 23
- 6 9   | 38
  2 0 0
- 1 8 4
  0 1 6
```

Laurent va remplir 38 caisses et il va lui rester 16 kg de pommes

```
   2 3
 + 2 3
 + 2 3
 -----
   6 9
```

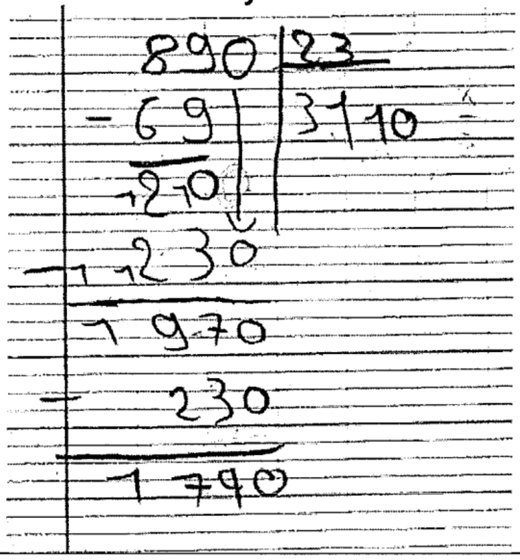
```
   2 3
 + 2 3
 + 2 3
 + 2 3
 + 2 3
 + 2 3
 + 2 3
 + 2 3
 -----
 1 8 4
```

Océane

```
  8 9 0 | 23
- 6 9   | 373
  3 0 0
- 2 9 9
  0 0 7
```

23 x 0 = 0
23 x 1 = 23
23 x 2 = 46
23 x 3 = 69
23 x 4 = 92
23 x 5 = 115
23 x 6 = 138
23 x 7 = 161
23 x 8 = 184
23 x 9 = 207
23 x 10 = 230
23 x 11 = 253
23 x 12 = 276
23 x 13 = 299
23 x 14 = 322

Dylan



3. Relever les réussites d'Arthur et celles d'Océane.

4. À partir de la démarche d'Arthur, proposer des étapes didactiques pour faire évoluer sa procédure.

5. Relever la ou les erreurs d'Océane, puis émettre des hypothèses sur son ou leur origine.

6. Citer deux erreurs de Dylan et, pour chacune donner des éléments d'analyse.

CONCOURS EXEPTIONNEL CRÉTEIL – mai 2016

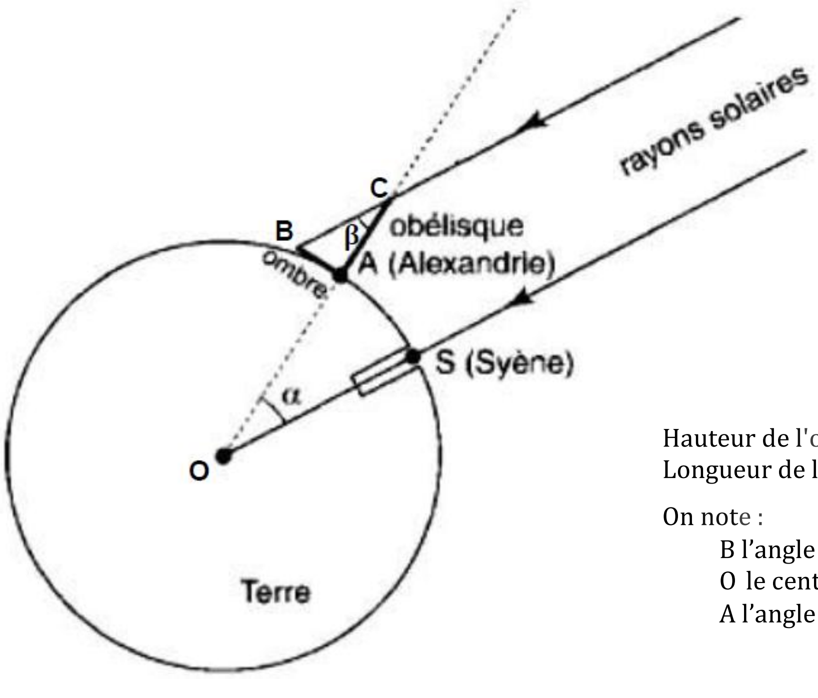
PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Sur les pas d 'Ératosthène

Au III[ème] siècle avant notre ère, Ératosthène, astronome et géographe, fait l'hypothèse que la Terre est une boule et entreprend alors d'en calculer la circonférence en utilisant un obélisque situé à Alexandrie.
Dans ce problème, les mesures faites à l'époque d'Ératosthène sont exprimées avec les unités actuelles.

PARTIE A : calcul de la circonférence de la terre

Ératosthène sait, d'après les voyageurs qui parcourent l'Égypte, que, le jour du solstice d'été à midi à Syène (Assouan), les rayons du soleil frappent la Terre à la verticale car on peut voir l'astre se refléter dans les puits de la ville.
À Alexandrie, le même jour, à la même heure, il mesure l'ombre de l'obélisque et relève 3,07 m. La hauteur de l'obélisque est 24,3 m.
En prenant comme hypothèse le parallélisme des rayons du soleil, on a alors la schématisation suivante :



Hauteur de l'obélisque : AC = 24,3 m
Longueur de l'ombre : AB = 3,07 m

On note :
- B l'angle $\widehat{ACB}$
- O le centre de la boule (Terre)
- A l'angle $\widehat{AOS}$

1. On cherche la mesure de l'angle α.
   On considère que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.
   a) Montrer que la mesure de l'angle β, arrondie au dixième de degré, est 7,2°.
   b) Justifier que les angles α et β ont même mesure et en déduire la mesure en degré de l'angle α.

Ératosthène fait appel à un bématiste (arpenteur chargé de mesurer les distances entre les villes) pour connaitre la distance de Syène à Alexandrie, c'est-à-dire la longueur de l'arc $\widehat{AS}$ sur le schéma précédent. Le bématiste lui indique 5000 stades de l'époque soit 787,5 km.

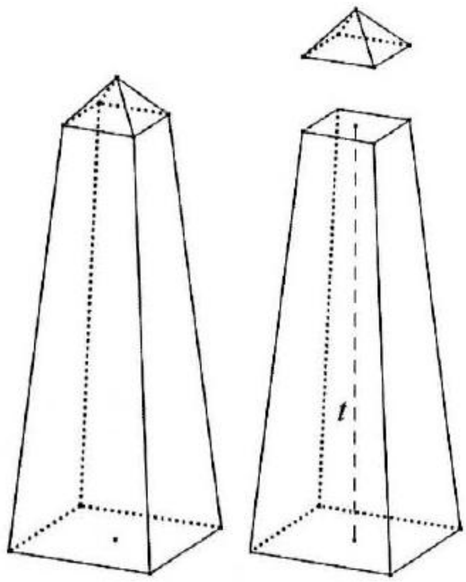
2. Calculer, en kilomètre, la circonférence de la Terre trouvée par la méthode d'Ératosthène.
3. En déduire la valeur du rayon de la Terre, arrondie au kilomètre, trouvée par la méthode d'Ératosthène.
4. On considère de nos jours que le rayon moyen de la Terre mesure 6 367 km. Calculer, en pourcentage, l'erreur commise en utilisant la méthode d'Ératosthène. Arrondir le résultat au centième.

PARTIE B : étude d'un obélisque

On considère un obélisque constitué d'un tronc de pyramide régulière de base carrée coiffé d'une petite pyramide qui respecte les contraintes de construction suivantes :

- le tronc est obtenu en coupant une pyramide à la moitié de sa hauteur par un plan parallèle à la base ;
- la base de la petite pyramide est la face supérieure du tronc de pyramide ;
- la hauteur de la petite pyramide est 1/20 de la hauteur du tronc de pyramide.

On appelle t la hauteur du tronc de pyramide.



1. On a représenté ci-contre le tronc de pyramide ABCDA'B'C'D'. ABCD est un carré de centre 0 et A'B'C'D' est un carré de centre 0'. S est le sommet de la pyramide qui a été tronquée.

Ainsi, 00' = t et 0' est le milieu du segment [SO].

a) Montrer que A' est le milieu du segment [SA].

b) Montrer que A'B' = $\frac{1}{2}$ AB.

2. On appelle x la longueur AB du côté de la base ABCD de l'obélisque.
Soit V le volume de l'obélisque. Montrer que :

$$V = \frac{47}{80}x^2t$$

On rappelle la formule donnant le volume d'une pyramide :

$$Volume = \frac{1}{3}Aire\ de\ la\ base \times Hauteur$$

3. On appelle h la hauteur totale de l'obélisque.
On a alors :

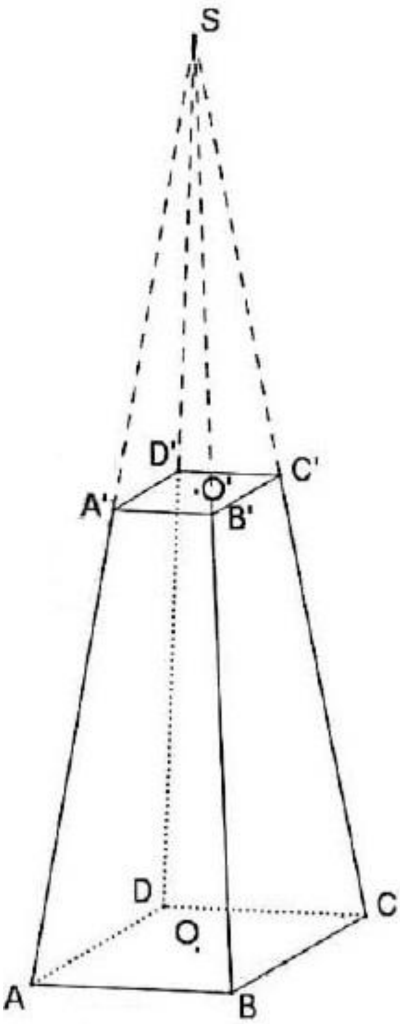
$$h = t + \frac{1}{20}t$$

a) Vérifier que la hauteur t du tronc de pyramide s'exprime en fonction de h par :

$$t = \frac{20}{21}h$$

b) En déduire que :

$$V = \frac{47}{84}x^2h$$



PARTIE C : dimensions de l'obélisque de Séthi 1er

Un élève souhaite connaître les dimensions de l'obélisque de Séthi 1er.
Il a effectué une recherche sur Internet et a trouvé les renseignements suivants :

<u>Obélisque de Séthi 1er</u>	<u>Granit Rose d'Égypte</u>
Hauteur de l'obélisque : 24 m Masse de l'obélisque : 235 tonnes Matériau : granit rose Construction : XIIIème siècle avant JC	Résistance à la compression : 200 MPa Masse volumique : 2 600 kg/m^3 Température de fusion : 1 250 °C

Il veut déterminer la longueur du côté de la base carrée de l'obélisque.

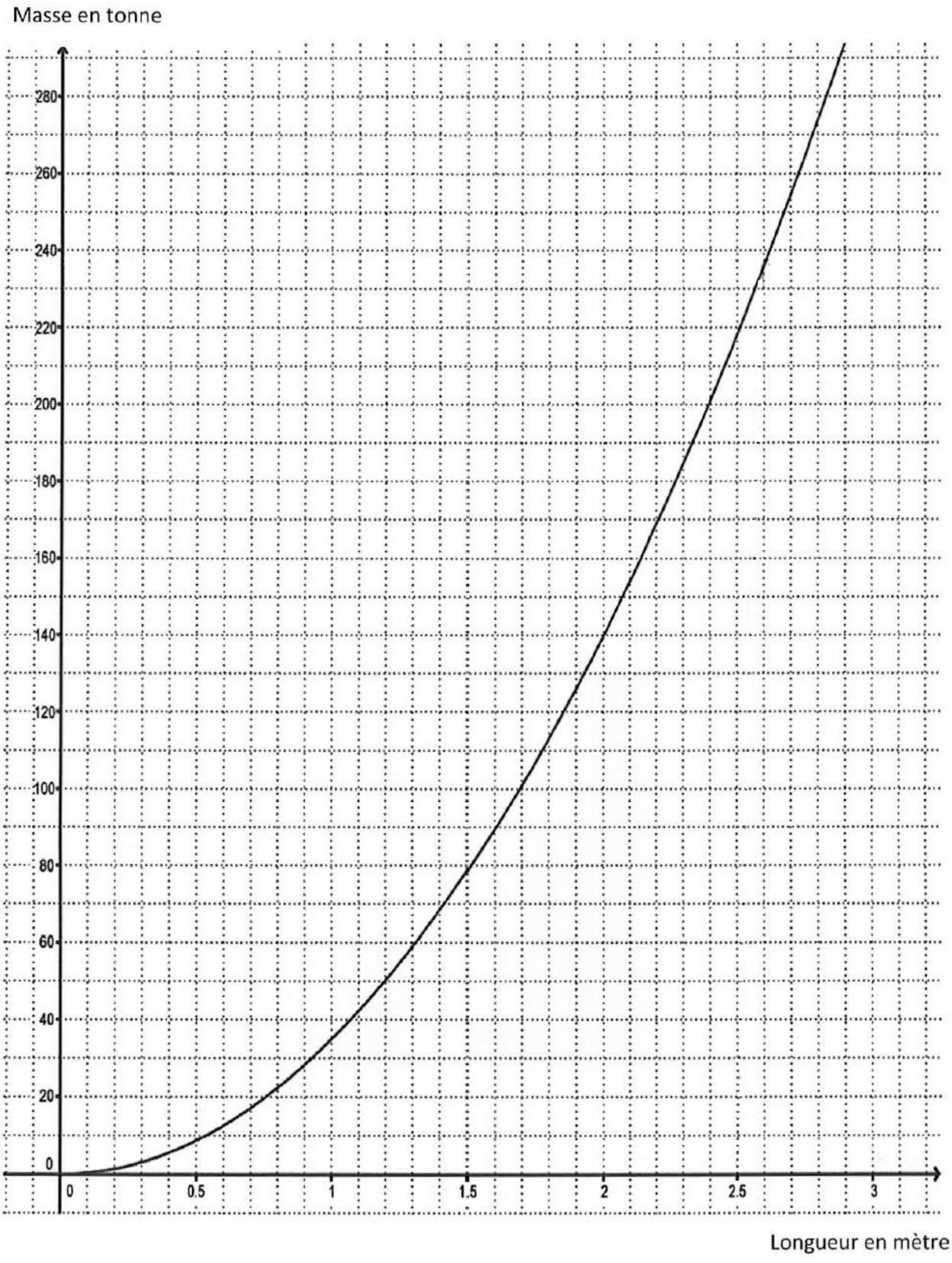
En classe il a démontré que le volume de cet obélisque est donné par la formule

$$V = \frac{47}{84}x^2h$$

dans laquelle h est la hauteur de l'obélisque et x la longueur du côté de sa base carrée.

À l'aide de cette formule et des données trouvées sur Internet, il construit le graphique de la page suivante qui donne la masse, en tonne, d'un obélisque de granit rose de même forme que celui de Séthi 1er en fonction de la longueur x, en mètre, du côté de la base.

1. À l'aide du graphique, déterminer une valeur arrondie au décimètre de la longueur x du côté de la base de l'obélisque de Séthi 1er.
2. Déterminer par le calcul l'arrondi au centimètre de la longueur x du côté de la base de l'obélisque de Séthi 1er.


Masse en tonne
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Longueur en mètre

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.
Une réponse exacte, mais non justifiée, ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

Affirmation 1 :

Si un nombre entier est multiple de 6 et de 8, alors il est aussi multiple de 48.

Affirmation 2 :

Le nombre 60 a exactement 10 diviseurs.

Affirmation 3 :

143 a exactement deux diviseurs.

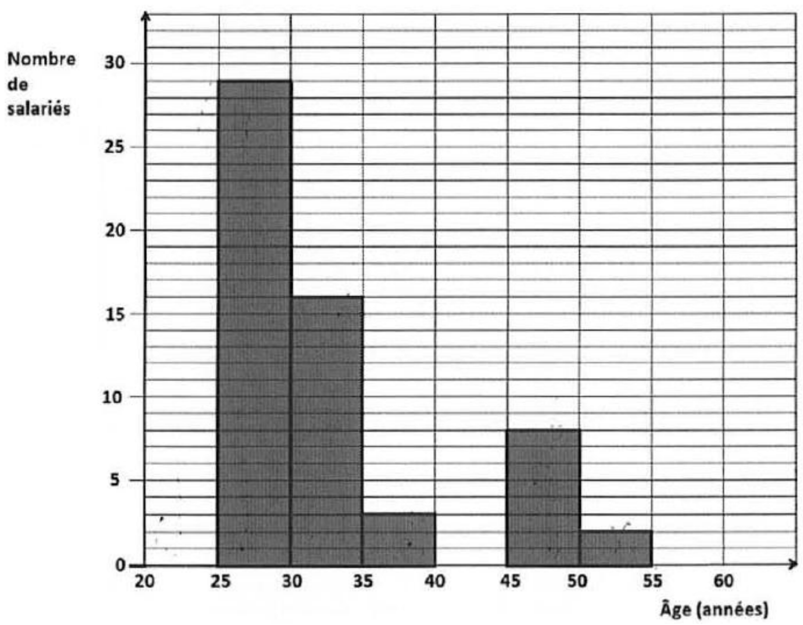
Affirmation 4 :

Le 2 mai 2016 est un lundi. Le 2 mai 2026 sera aussi un lundi.

Exercice 2

Dans une entreprise de 58 salariés la répartition des âges est donnée par l'histogramme ci-dessous :

Répartition des salariés de l'entreprise en fonction de leur classe d'âge

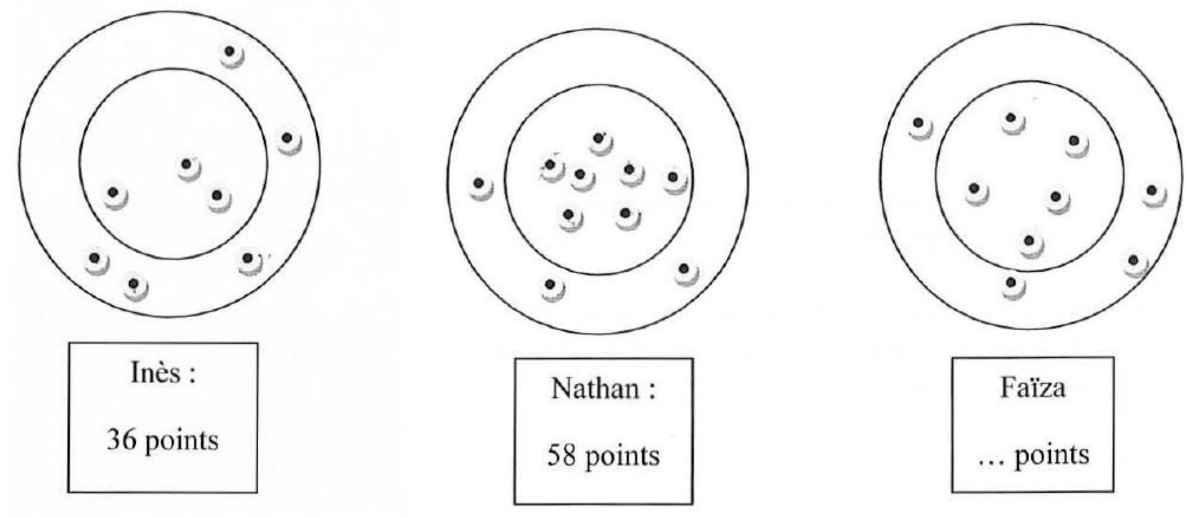


Répondre aux questions suivantes en utilisant l'histogramme.

1. Calculer l'âge moyen des salariés de cette entreprise.
2. Déterminer l'âge médian des salariés de cette entreprise.
3. L'entreprise organise pour ses salariés une loterie dont le premier prix est une paire de rollers.
   Le nom d'un salarié est tiré au hasard. Le tirage est organisé de telle sorte que tous les salariés ont la même chance d'être tirés au sort.
   a) Quelle est la probabilité que le gagnant appartienne à la classe des salariés ayant entre 30 et 35 ans ?
   b) Quelle est la probabilité que le gagnant ait plus de 44 ans ?

Exercice 3

Trois enfants jouent aux fléchettes.
Les fléchettes situées dans une même zone rapportent le même nombre de points.
Inès et Nathan ont obtenu les scores ci-dessous.
Quel est le score de Faïza ?



Exercice 4

Béatrice repeint son salon en 4 heures.
Si Samira avait fait ce même travail, elle l'aurait effectué en 2 heures.
Combien de temps Béatrice et Samira mettraient-elles pour repeindre ensemble le salon ?

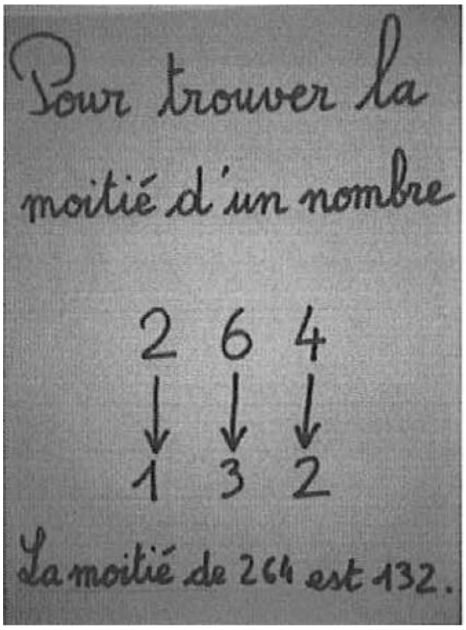
TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de quatre situations indépendantes.

SITUATION 1

Le document ci-contre est une trace écrite affichée dans une classe de CE2.

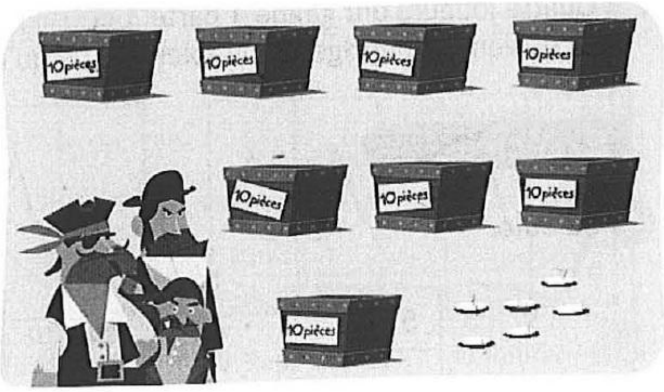
1. Proposer un nombre pair à trois chiffres pour lequel la procédure ne fonctionne pas.
2. Pour ce nombre, proposer une procédure écrite de calcul de sa moitié qui ne nécessite pas le recours à une opération posée.



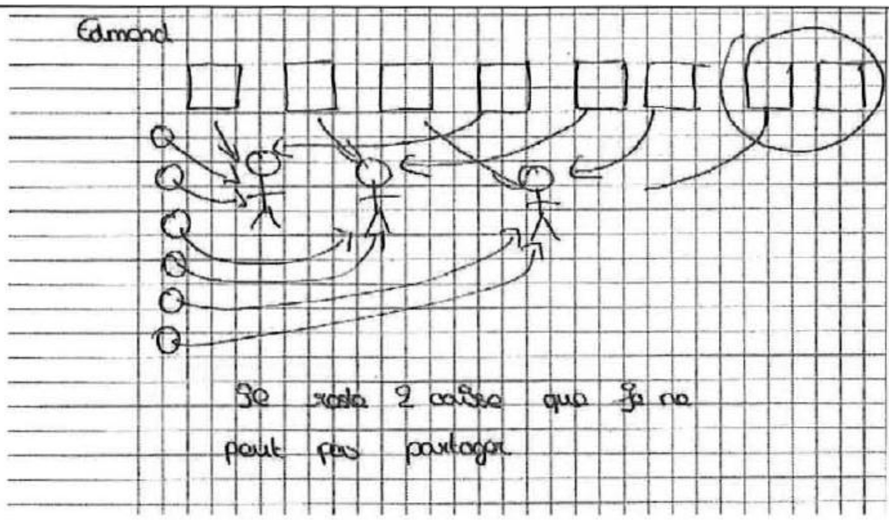
SITUATION 2

Un enseignant propose à ses élèves l'exercice suivant, inspiré d'un exercice du manuel *Cap maths,* Hatier 2011 :

> Trois pirates doivent se partager équitablement ces pièces d'or.
>
> Combien de pièces recevra chaque pirate ?



1. Analyse des productions d'Edmond et de Ninon exposées ci-après :
   a) Qu'est-ce que Edmond semble avoir compris et qu'est-ce qu'il semble ne pas avoir compris ?
   b) Quelle compétence supplémentaire à celles d'Edmond la procédure de Ninon exprime-t-elle ?
2. En quoi cet exercice permet-il de donner du sens à l'algorithme de la division posée avec une potence ?



Ninon

je donne 2 caisse à chacun.
Il reste 26 pièces
3 x 8 = 24
donc je redonne 8 pièces
ça fait 28 pièces par pirates

SITUATION 3

Un enseignant propose à ses élèves les exercices suivants :

Exercice 1 Huit enfants se partagent équitablement 204 billes. Combien chacun va-t-il recevoir de billes ?	**Exercice 2** Huit amis souhaitent participer équitablement à l'achat d'un cadeau d'un coût total de 204 euros. À combien s'élèvera la participation de chacun ?
Exercice 3 Un restaurant scolaire achète des gâteaux pour le dessert. Il faut un gâteau pour 8 enfants. Combien de gâteaux faut-il acheter pour servir 204 enfants ?	**Exercice 4** Pour son anniversaire, Marc a acheté 204 bonbons. Il confectionne des sachets de 8 bonbons chacun. Combien de sachets complets peut-il réaliser ?

1. Indiquer les exercices qui relèvent d'un problème de partage (détermination de la valeur d'une part) et ceux qui relèvent d'un problème de groupement (détermination du nombre de parts).
2. Recopier en la complétant l'égalité traduisant la division euclidienne de 204 par 8 :
   204 = ... × .... + ...
3. Pour les quatre exercices proposés par l'enseignant, une exploitation différente du reste obtenu lorsque l'on pose la division euclidienne est nécessaire. Expliciter ces différentes exploitations.

SITUATION 4

Un enseignant propose dans une classe de CM2 cet exercice posé aux évaluations nationales de CM2 en 2011 :

10 objets identiques coûtent 22 euros. Combien coûtent 15 de ces objets ?

Exposer trois démarches différentes pouvant être utilisées par les élèves pour résoudre cet exercice en explicitant les propriétés mathématiques qu'elles mobilisent.