

QUOI DE NEUF DANS LA NUMERATION AU CP ?

LE DENOMBREMENT EN QUESTION

Eric MOUNIER

Formateur et enseignant-chercheur, ESPE de l'académie de Créteil, UPEC (Paris 12)

LDAR (Paris 7)

eric.mounier@u-pec.fr

Nathalie PFAFF

Formateur, ESPE de l'académie de Créteil, UPEC (Paris 12)

nathalie.pfaff@u-pec.fr

Résumé

Nadine Grapin, Eric Mounier, Nathalie Pfaff et Elsa Prigent forment une équipe d'enseignants et de formateurs engagés dans la recherche qui a étudié une ressource testée depuis 2009 dans une, deux, dix puis cette année douze classes de CP. Les résultats présentés ici sont extraits de ce travail plus général.

Mounier (2010) étudie les signes de la comptine numérique et ceux des écritures chiffrées, dissociant ainsi deux systèmes de numération. De nouveaux outils théoriques s'en dégagent pour analyser certaines tâches numériques effectuées par les élèves, en particulier ceux du Cours Préparatoire (CP, 1^e année de primaire, élèves âgés de 6-7 ans) lorsque du sens est donné aux chiffres, place et valeur. Dans cette communication nous questionnons ce que peuvent apporter des tests menés à grande échelle concernant plus spécifiquement la tâche de dénombrement dans laquelle on demande d'écrire « avec des chiffres » le cardinal d'une collection d'objets présents.

Nous exposons les résultats déduits de tests que nous avons menés. Le premier résultat concerne le rôle de l'énumération dans la réussite des élèves. Le second celui de la dizaine : nous interrogeons d'une part sa disponibilité et son utilité pour accomplir la tâche et d'autre part ce que son emploi révèle ou non des connaissances des élèves sur la numération écrite chiffrée.

Cette communication est aussi l'occasion de présenter les grands traits de la ressource construite pour la classe qui emprunte un itinéraire cognitif d'enseignement dit de « distinction » puisque l'écriture chiffrée y est construite initialement sans recours à la numération parlée, contrairement à ce qui est proposé actuellement dans les manuels scolaires.

Nous remercions tous les enseignants qui ont travaillé avec nous, ainsi que leurs élèves, sans lesquels ce travail n'aurait pu voir le jour.

I - LE DENOMBREMENT DANS LES EVALUATIONS DES CONNAISSANCES DES ELEVES DE CYCLE 2 EN NUMERATION

1 Les évaluations existantes

Il y a beaucoup de travaux de recherche autour des premiers apprentissages de la numération¹. Pourtant, à notre connaissance, en France, mis à part l'évaluation nationale annuelle dont nous allons parler, il n'existe pas d'évaluation sur un grand échantillon d'élèves concernant leur compréhension de la numération de position en fin de CP ou en fin de CE1. Par exemple, Collet (2003) a testé 121 élèves belges de 2^e et 3^e année (CE1 et CE2, élèves âgés de 7 à 9 ans) mais la scolarité et le système de numération oral sont différents en France.

¹ Dans ce premier paragraphe, nous utilisons le mot numération dans son acception courante, regroupant les deux systèmes de numération utilisés couramment : le système écrit positionnel des écritures chiffrées et celui oral de la comptine numérique en langue vernaculaire.

Au Cours Préparatoire (CP, élèves âgés de 6, 7 ans), année durant laquelle du sens est donné à la position des chiffres dans l'écriture chiffrée des nombres, le programme 2008 libelle les connaissances sur le nombre en termes de compétences :

- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.
- Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 (« table d'addition »).
- Comparer, ranger, encadrer ces nombres.
- Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.

Au Cours Élémentaire 1^{er} année (CE1) :

- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000.
- Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.
- Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc.

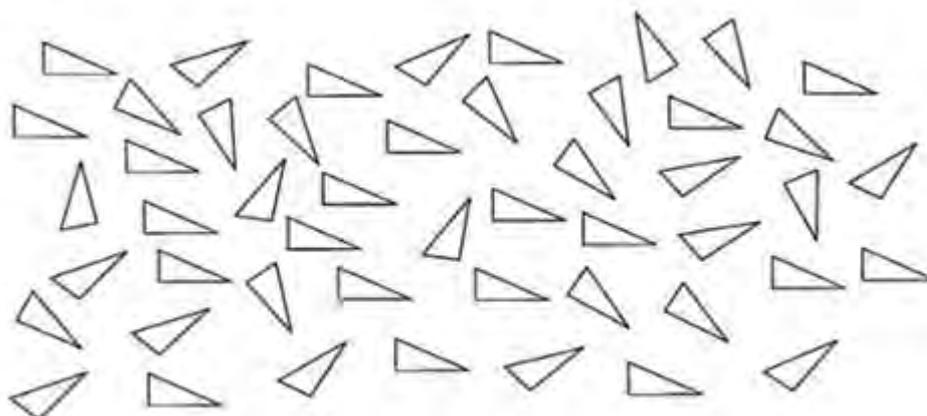
Une évaluation nationale est proposée tous les ans aux élèves de fin de CE1. Nous avons classé les items de ces évaluations de 2009 à 2013 en utilisant le document institutionnel « Le nombre au cycle 2 » (Le Poche, 2010, p. 50) qui précise chacune des compétences du programme via différents objectifs à atteindre au CE1.

| Items | Numéro des items | Nombre |
|---|---|--------|
| Savoir associer désignations orales et écrites des nombres : - de 1 à 69 en utilisant les repères mémorisés « vingt », « trente », « quarante » et « cinquante », « soixante » ; - de 70 à 99 en utilisant les décompositions complexes (additives et multiplicatives) de ces nombres qui donnent du sens à la numération orale ; - de 100 à 999 en utilisant les décompositions complexes (additives et multiplicatives) de ces nombres qui donnent du sens à la numération orale. | Ex 1 2009 Ex 1 2010 Ex 1 2011 Ex 1 2012 Ex 1 2103 | 5 |
| Savoir dénombrer une quantité d'objets pour produire une désignation écrite ou orale en les regroupant d'abord par paquets de dix objets, puis par paquets de dix paquets de dix – les paquets de cent – puis en dénombrant le nombre de paquets de cent, le nombre de paquets de dix et le nombre d'objets isolés. | | 0 |
| - Savoir que dans une écriture à trois chiffres d'un nombre désignant une quantité, le chiffre de gauche indique le nombre de groupements par cent, le second le nombre de groupements par dix et le dernier le nombre d'objets isolés. - Savoir que dans l'écriture à trois chiffres d'un nombre désignant une valeur, la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture du nombre et introduire les mots « centaine », « dizaine » et « unité » pour parler de la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture des nombres (maîtriser les décompositions canoniques). | | 0 |
| Savoir écrire le successeur de toute désignation écrite d'un nombre à 3 chiffres en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération. | Ex 8 2012 | 1 |
| Savoir comparer pour les ranger deux nombres de trois chiffres en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération. | Ex 3 2009 -2010 Ex 5 2009 Ex 3 et 22 2011 Ex 3 2012 | 7 |

| | | |
|---|--|---|
| | Ex 3 2013 | |
| Savoir encadrer entre des centaines un nombre de trois chiffres, savoir encadrer entre des dizaines un nombre de trois chiffres et en déduire un placement sur un segment gradué de 10 en 10 en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération. | Ex 13 2010 Ex 23 2011 Ex 21 2012 Ex 8 et 17 2013 | 5 |
| Savoir écrire une suite écrite de mots-nombres ou d'écritures chiffrées ou dire une suite de mots-nombres prononcés en fonction d'une règle donnée en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération ou sur la connaissance de la numération orale. | Ex 3 2009 Ex 12 2010 Ex 16 2011 Ex 15 2012 Ex 5 2013 | 5 |

Nous constatons que n'est ainsi classifié aucun exercice sur la compréhension de la numération de position des nombres à 2 chiffres en lien direct avec une tâche de dénombrement. Cependant un exercice, un seul en quatre ans, porte sur la compréhension du nombre en tant que quantité, c'est l'exercice 6 de 2009 :

😊 Trouve le nombre total de triangles :



Il y a.....triangles

Les résultats à cet exercice interpellent : 60% de réussite. Cette réussite ne repose pas uniquement sur le dénombrement mais aussi sur la reconnaissance des triangles. Déjà à ce titre il ne peut pas être représentatif de toutes les connaissances en jeu dans une tâche de dénombrement. De plus, le résultat seul n'indique pas la procédure, procédure qui peut engager par exemple un dénombrement de un en un ou des groupements de 10. Que peut nous apprendre les tâches de dénombrement sur les connaissances des élèves concernant la numération écrite de position, objet d'apprentissage au CP ?

2 Analyse a priori de la tâche de dénombrement de l'évaluation nationale

L'exercice précédent fait intervenir un certain nombre de variables : forme, disposition, nombre et variété des objets ainsi que leur caractère manipulable ou non. Les valeurs de trois de celles-ci - les objets à dénombrer sont non manipulables, ils sont disposés sans ordre apparent et relativement proches sur un quart de feuille rectangulaire 15 x 7 cm, leur nombre est fixé à 52 - influent sur les procédures d'énumération² envisageables pour des élèves de cycle 2 (élèves de 5 à 8 ans). Pour effectuer la suite de notre analyse des stratégies nous nous référons à la distinction sémiotique de deux systèmes de

² L'énumération est la connaissance mobilisée pour passer en revue tous les objets d'une collection une seule fois (Briand et al., 1999-2000). Couplée avec l'emploi de la comptine numérique, cette procédure de dénombrement est le comptage (Mounier, 2012).

numération, l'un oral, l'autre écrit chiffré (Mounier, 2010 ; Mounier, 2012 ; Mounier & Pfaff, 2012). Ce qui nous conduit à distinguer quatre procédures.

Procédure 1 : Interprétation ordinale de la numération orale sans ou avec repérants³

Pas de groupements matérialisés, énumération un à un et utilisation de la comptine, pour tous les objets, puis le nom du nombre est transcrit avec des chiffres.

1a : énumération en numérotant (ici de 1 à 52)

1b : énumération avec marques (objets barrés, pointés, reliés, ...)

1c : énumération sans marque

Procédure 2 : Interprétation ordinale de la numération orale avec repérants ou interprétation additive

Des groupements en dizaines sont matérialisés, c'est la comptine des dizaines qui est utilisée, dix, vingt, trente, etc., puis le nom du nombre est transcrit avec des chiffres.

2a : groupements en numérotant de 1 à 10

2b : groupements avec marques (objets barrés, pointés, reliés, ...)

2c : groupements sans marque

Procédure 3 : Interprétation multiplicative de la numération orale

Pour obtenir le nom du nombre, des groupements en dizaines sont matérialisés et ils sont comptés un à un (un, deux, trois, ...), idem pour ceux qui ne sont pas groupés ; l'écriture chiffrée est obtenue à partir du nom du nombre (cinq dizaines et deux se dit « cinquante-deux » qui s'écrit « 52 »).

3a, 3b, 3c : idem précédemment

Procédure 4 : Interprétation de référence de l'écriture chiffrée

Des groupements en dizaines sont matérialisés et ils sont comptés de un en un (un, deux, trois, ...), leur nombre est retranscrit directement par un chiffre ; idem pour les objets qui ne sont pas groupés. Si l'oral « cinquante-deux » est prononcé ou pensé, il vient de la lecture de « 52 » et ne sert pas à réaliser la tâche.

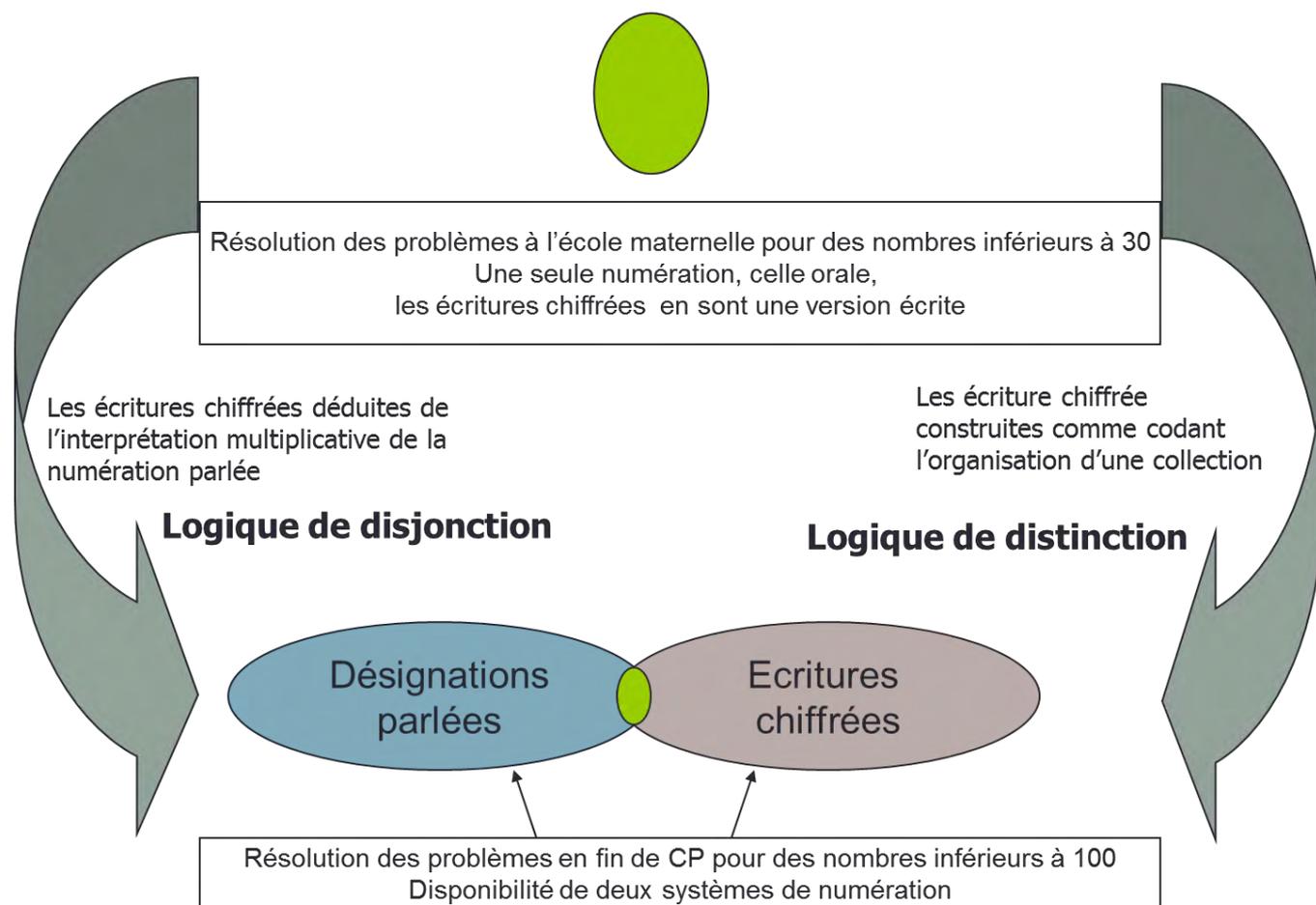
4a, 4b, 4c : idem précédemment

Contrairement à la 4^e, dans les trois premières procédures l'écriture chiffrée est obtenue à partir nom du nombre (en français).

3 Sur l'enseignement de la numération en France

Ces différentes procédures interviennent lors de l'enseignement de la numération au CP pour les nombres inférieurs à cent, mais pas toujours de la même façon. Deux grands itinéraires cognitifs d'enseignement peuvent être définis (Mounier, 2010).

³ Les repérants sont les mots qui structurent la comptine orale tels que dix, vingt, trente, etc.



Le premier itinéraire, la logique de disjonction, consiste à expliciter les écritures chiffrées à partir de la numération orale. Par exemple il va s'agir d'expliquer pourquoi « trente-deux » s'écrit « 32 » avec des chiffres. Dans le deuxième, la logique de distinction, l'écriture chiffrée est vue directement comme un système de codage de l'organisation d'une collection en dizaines et unités. Ensuite des liens sont étudiés entre ce système positionnel et le nom des nombres. Ce deuxième itinéraire rend disponible plus tôt dans les apprentissages la procédure 4. Le premier itinéraire n'engage pas nécessairement un apprentissage de cette procédure 4, pourtant identifiée comme utilisant les ressources propres au système de numération que constituent les écritures chiffrées. Par ailleurs le deuxième itinéraire n'est pas proposé dans les manuels scolaires de CP (Mounier, 2010). Cette analyse montre l'influence potentielle, à un niveau très général, de l'enseignement reçu sur les procédures favorisées, en particulier concernant l'emploi de la dizaine.

4 Problématique

La question générale que nous nous posons concerne l'accès aux connaissances sur le nombre des élèves de fin de CP. Nous nous demandons ce que peut nous apprendre la tâche de dénombrement consistant à indiquer le cardinal d'une collection par une écriture chiffrée. L'analyse *a priori* nous a montré qu'une réussite à une telle tâche pouvait relever d'utilisations différentes de la dizaine, voire du non emploi de celle-ci, et révéler des difficultés dans l'énumération. L'analyse de l'enseignement montre par ailleurs qu'une des procédures, celle ne mettant pas en jeu la traduction du nom du nombre, n'est pas favorisée par les ressources actuellement disponibles en France. Il s'agit donc d'explorer ce que cette tâche peut dire des connaissances des élèves en tenant compte de l'enseignement reçu à un niveau très général, celui des itinéraires cognitifs. Ajoutons ici qu'à notre connaissance les analyses usuellement proposées dans les recherches ou la littérature pédagogique ne distinguent pas fréquemment explicitement les procédures 2 et 3 de la procédure 4, cette dernière mettant pourtant directement en jeu les possibilités

sémiotiques du système des écritures chiffrées. Le cadre théorique que nous proposons d'utiliser permet donc d'apporter un regard nouveau.

Pour avoir des éléments de réponse à cette problématique nous avons effectué deux tests en nous concentrant sur certaines valeurs des variables de la tâche de dénombrement.

II - LES TESTS

Nous présentons ici deux tests qui nous permettent d'ébaucher des questions et hypothèses.

1 Un premier test portant sur 260 élèves

1.1 Présentation

Ce premier test concerne 260 élèves de début de CE1 (première semaine de l'année). Le nombre important d'élèves, venant de 18 classes et 6 établissements différents, permet d'atténuer un effet lié aux conditions spécifiques d'enseignement et d'apprentissage d'une classe. Par ailleurs nous voulons savoir comment la dizaine peut être utilisée (ou non) par les élèves. Nous avons alors testé deux populations. La moitié de l'effectif environ (9 classes, 132 élèves sur les 260) a suivi l'itinéraire cognitif classiquement proposé par les manuels scolaires en France, celui de disjonction des numérations. Les autres élèves (128 provenant de 9 classes) ont suivi un itinéraire de distinction. Pour proposer ce second itinéraire, nous avons utilisé la ressource nommée Champion des Nombres (CDN) que nous avons élaborée à partir d'une ingénierie envisagée dans la thèse de Mounier (2010) qui a été introduite et développée en classe ordinaire sur plusieurs années, constituant ainsi une ingénierie dite de deuxième génération (Perrin-Glorian, 2011). Les grandes lignes de cette ressource sont décrites dans l'annexe 1. Ceci nous permet d'avoir une population homogène quant à l'enseignement reçu concernant le lien de la dizaine avec l'écriture chiffrée.

Ce premier test comprend 3 exercices (voir annexe 2) dont nous étudions les résultats en utilisant l'analyse *a priori* précédente. Les élèves ont à leur disposition un crayon à papier et une gomme : ils peuvent laisser des traces, faire des essais. Le premier exercice teste leur capacité à traduire en chiffres le nom du nombre prononcé à l'oral, ce qui est en partie en jeu dans les procédures 1 à 3. Dans le deuxième exercice on demande d'écrire avec des chiffres le nombre de ronds (53) dessinés sur une feuille sans organisation. Il est proche de celui proposé aux évaluations nationales de 2009. Cependant ici nous avons recueilli les productions et donc nous pouvons voir les traces d'énumération et de groupements (des dizaines). Le troisième et dernier exercice est identique au 2^e, mais cette fois-ci il s'agit de 75 carrés organisés en 5 carrés seuls et 7 rangées de chacune dix carrés (les élèves sont informés que chaque rangée comporte dix carrés). Il nous permet de savoir ceux qui mobilisent la dizaine dans une situation qui le requiert : le temps est en effet limité, les élèves n'ont pas le temps d'utiliser la procédure 1, le comptage un à un de tous les éléments la collection.

1.2 Résultats et premières analyses

Exercice 1 : écrire avec des chiffres le nom des nombres

Le nom des nombres qui posent des difficultés sont ceux après soixante-dix ; les autres sont très bien réussis, au-delà de 93% pour huit, treize, vingt-six et cinquante-trois. Le tableau suivant précise les effectifs des réponses exactes.

| | cinquante-trois | soixante quinze | quatre-vingt-treize |
|----------------------|-----------------|-----------------|---------------------|
| Total des 260 élèves | 248 (95 %) | 201 (77 %) | 185 (71%) |
| Non CDN, 132 élèves | 123 (93%) | 96 (73%) | 88 (67%) |
| CDN, 128 élèves | 125 (98%) | 105 (82%) | 97 (76%) |

On voit un faible écart de réussite entre les deux groupes qui montre que les élèves CDN savent écrire les nombres avec des chiffres à partir de leur nom même si le lien entre écriture chiffrée et le nom des nombres est peut être travaillé plus tardivement dans l'année par rapport aux autres méthodes. Ce lien est quand même travaillé régulièrement à partir de la période 3 (sur 5 périodes d'environ 7 semaines). Presque tous les élèves savent écrire cinquante-trois en chiffres, le nombre en jeu dans l'exercice suivant du test (dénombrer 53 ronds).

Exercice 2 : dénombrer 53 ronds non organisés (écriture chiffrée demandée)

| Réponse | 53 | 52 | 54 | 51 | 55 | Pas de réponse | Autres réponses |
|----------------------|------------|----------|----------|----------|---------|----------------|-----------------|
| Total des 260 élèves | 118 45% | 17 7% | 15 6% | 10 4% | 2 1% | 17 7% | 81 31% |
| Non CDN (132) | 59 45% | 9 7% | 5 4% | 4 3% | 0 0% | 10 8% | 45 34% |
| CDN (128) | 59 46% | 8 6% | 10 8% | 2 2% | 2 2% | 7 5% | 40 31% |

Il n'y a pas d'écart de réussite entre CDN et non CDN mais moins de la moitié des élèves réussissent cet exercice. Ce résultat est cohérent avec les 60% de réussite à l'exercice de dénombrement des triangles de l'évaluation nationale 2009 pour des élèves de fin de CE1 : sur une année on passe de 45% à 60 %.

La différence entre CDN et non CDN est significative sur l'emploi de la dizaine dans les procédures utilisées. Ici nous considérons que les élèves tentent de faire des dizaines lorsque nous relevons des groupements matérialisés comportant 9, 10, ou 11 objets.

| Réponse | Présence dizaines | Réussite si dizaine | Non présence dizaines | Réussite si non dizaines |
|------------------------|-------------------|---------------------|-----------------------|--------------------------|
| Total des 260 élèves | 108 41% | 55/108 (51%) | 152 59% | 63/152 (41%) |
| Non CDN, 132 élèves | 31 23% | 18/31 (58%) | 101 77% | 41/101 (41%) |
| CDN, 128 élèves | 77 60% | 37/77 (48%) | 51 40% | 22/51 (43%) |

60% des élèves CDN effectuent des groupements par dix alors que c'est le cas pour seulement 23% des élèves non CDN. Par contre, ils ne réussissent guère mieux en effectuant des groupements. De manière générale, l'emploi de la dizaine n'assure pas une réussite supérieure. Une difficulté commune concerne l'énumération comme le montre le tableau suivant.

| Réponse | Traces d'énumération | Réussite | Pas de traces d'énumération | Réussite |
|------------------------|----------------------|--------------|-----------------------------|-------------|
| Total des 260 élèves | 164 63% | 84/164 (51%) | 96 37% | 34/96 (35%) |
| Non CDN, 132 élèves | 90 68% | 46/90 (51%) | 42 32% | 13/42 (31%) |
| CDN, 128 élèves | 74 58% | 38/74 (51%) | 54 42% | 21/54 (39%) |

Dans ce tableau nous n'avons pas comptabilisé les productions avec des groupements sans traces d'énumération, ce qui représente 47 élèves sur les 132 de CDN et 22 sur les 128 de non CDN. Les traces d'énumération considérées ici sont le numérotage ou le marquage des ronds un à un, que ce soit pour constituer des groupements ou non. Globalement, nous avons remarqué l'importance des erreurs d'énumération, CDN ou non CDN. Plus d'un tiers des élèves ne laisse pas de traces. En examinant les traces laissées nous constatons en outre que même ceux qui font des marques ont des difficultés à énumérer tous les éléments : certains sont oubliés, que ce soit avec ou sans groupement. Ainsi, le dénombrement semble poser des difficultés moins par une incompréhension d'une procédure à mettre en œuvre que par des erreurs de comptage dues à l'énumération : mauvais comptage des groupements, oubli de compter certaines unités, groupements effectués ne comportant pas toujours 10 ronds mais 8, 9 ou 11. La connaissance de la comptine numérique et celle de la coordination avec l'énumération semblent jouer un rôle moins important. Un facteur significatif de réussite proviendrait donc d'une énumération exacte, que ce soit avec des dizaines ou non. Le gain de performance sur l'année de CE1, 45% de réussite à notre test de début d'année et 60% au test national de fin d'année, proviendrait-il de manière significative de l'amélioration des compétences en énumération en cours d'année ?

Exercice 3 : dénombrer 75 carrés organisés avec 7 dizaines visibles et 5 « tout seuls » visibles

| Réponse | 75 | 73 ou 74 | 65 | Pas de réponse | Autres réponses |
|------------------------|------------|----------|---------|----------------|-----------------|
| Total des 260 élèves | 114 44% | 8 3% | 5 2% | 87 33% | 46 18% |
| Non CDN, 132 élèves | 48 36% | 1 1% | 4 3% | 51 39% | 28 21% |
| CDN, 128 élèves | 66 52% | 4 3% | 1 1% | 36 39% | 21 16% |

Les nombreuses non réponses sont imputables au fait que les élèves qui dénombraient tous les carrés de un en un n'ont pas eu le temps de terminer (le temps imparti étant de moins d'une minute). Un écart de réussite entre CDN et non CDN est perceptible mais on peut constater une certaine faiblesse de réussite pour un tel exercice mettant en jeu les compétences attendues en fin de CP : à peine la moitié pour les CDN et un peu plus d'un tiers pour les non CDN. Pourtant la tâche de l'exercice 2 nécessite de les employer pour réussir, contrairement à celle précédente.

Croisement des exercices 2 et 3

L'analyse des productions à l'exercice 2 et plus encore au 3 nous montre une utilisation plus fréquente des dizaines pour les élèves CDN, résultat qui était envisageable avec cette ressource puisque c'est son axe majeur. Cela questionne les autres ressources utilisées par les non CDN, mais notre protocole ne permet pas d'aller plus loin. Cependant, comme nous l'avons signalé, les élèves CDN n'ont pas

significativement une plus grande réussite à l'exercice 2. En outre, l'emploi de dizaines à l'exercice 2 n'entraîne pas automatiquement une réussite à l'exercice 3.

| | Présence dizaines ex 2 | Réussite ex 3 si dizaines ex 2 | Non présence dizaines ex 2 | Réussite ex 3 si non dizaines ex 2 |
|-------------------------|---------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|
| Total des 260 élèves | 108 41% | 59/108 (55%) | 152 59% | 55/152 (36%) |
| Non CDN, 132 élèves | 31 23% | 15/31 (48%) | 101 77% | 33/101 (33%) |
| CDN, 128 élèves | 77 60% | 44/77 (57%) | 51 40% | 22/51 (43%) |

On aurait pu s'attendre à ce que les élèves mobilisant la dizaine quand ce n'est pas indispensable (exercice 2) pensent à mobiliser celle-ci quand c'est nécessaire (exercice 3) : ce n'est pas significativement le cas puisqu'ils ne sont que 55% dans cette situation. Dans ce cas, la mobilisation de la dizaine dans le 3^e exercice est néanmoins plus importante que pour les élèves qui n'ont pas mobilisé la dizaine dans l'exercice 2 (36% dans ce dernier cas). Les résultats sont un peu meilleurs dans le groupe CDN mais ne changent pas ce constat.

Ces résultats questionnent l'interprétation de ce type de tests quant aux connaissances des élèves sur le nombre. La réussite ne semble pas indiquer un niveau de conceptualisation facilement identifiable. Pour aller plus loin, nous avons observé de plus près les procédures des élèves dans des tâches similaires.

2 Un deuxième test portant sur 155 élèves

2.1 Présentation

Dans les deux dernières tâches du test précédent, les collections ne sont pas manipulables et nous n'observons pas les procédures des élèves. Il n'est donc pas possible de distinguer les élèves ayant utilisé les procédures 2, 3 ou 4. Pourtant celles-ci renvoient à une utilisation différente de la dizaine en lien avec le nom du nombre ou/et son écriture chiffrée. C'est pourquoi nous avons fait un second test dans lequel nous proposons trois autres exercices à 155 élèves ayant tous suivis le même itinéraire cognitif d'enseignement à travers CDN. Ce groupe CDN qui comprend les mêmes 128 élèves précédent plus d'autres qui n'ont pas pu être testé dans le premier test, nous apparaît plus intéressant à étudier pour mieux comprendre les questions soulevées par le 1^e test, en particulier relatives à l'utilisation de la dizaine puisqu'ils ont suivi un itinéraire dans lequel la dizaine est utilisée d'emblée pour introduire les écritures chiffrées, sans passer par le nom des nombres. Par ailleurs, nous avons limité un éventuel effet de contrat dans lequel les élèves seraient habitués à réaliser les tâches proposées selon une procédure attendue par le professeur. Nous avons donc proposées des tâches dans un contexte problématique et non plus sous forme de tâches simples et isolées rencontrées usuellement en classe. En outre chaque élève est testé de manière individuelle par le chercheur. Il nous a aussi semblé important de proposer des objets manipulables afin en particulier que la dizaine puisse être mieux identifiable que dans l'exercice 2 du test précédent : des barres dizaines sont constituées de cubes sécables déjà vues en classe et il est prévu pour chaque élève un nouveau temps d'appropriation de ce matériel. Nous cherchons ici des résultats qualitatifs sur l'emploi de la dizaine.

Le 1^e exercice, l'exercice A, permet de vérifier les connaissances des élèves quant à la lecture et l'écriture des nombres. Les 2^e et 3^e exercices sont insérés dans une même tâche inspirée de la « situation fondamentale du nombre » de Brousseau (voir par exemple Margolinas & Wozniak, 2012). L'élève peut manipuler une réserve de cubes emboîtables constituée de barres sécables de dix cubes déjà assemblés et de cubes « seuls ». A un autre endroit on lui présente une collection de carrés non organisés dessinés sur une feuille (voir annexe 2). On demande à l'élève d'aller chercher en un seul voyage le nombre de cubes

nécessaire pour mettre un cube par carré. On fournit une barquette pour le transport. A son retour il vérifie sa réponse en posant les cubes sur les carrés. L'élève a réussi si un cube est sur chaque carré et s'il ne reste rien dans sa barquette : il ne peut défaire les cubes assemblés que dans ce moment de vérification et non au moment où ils les prennent. Pour s'assurer de la compréhension de la tâche on lui propose tout d'abord une collection de 3 carrés puis s'il échoue de 4 carrés. Ensuite commence le test avec une collection de 52 carrés. Avant d'aller chercher les cubes, on impose à l'élève d'écrire sur un morceau de papier le nombre qu'il lui faut. Nous appelons exercice B cette tâche de dénombrement de carrés dessinés qui est similaire à l'exercice 2 du test précédent. Nous appelons exercice C la tâche suivante constituant à prélever dans sa barquette le nombre de cubes à l'aide du morceau de papier sur lequel est écrit en chiffre le nombre obtenu précédemment. Cet exercice C s'apparente à la tâche réciproque de l'exercice 3 du 1^e test et nous permet de voir de quelle manière les élèves mobilisent la dizaine dans une situation qui favorise sa convocation, sans que cela soit absolument nécessaire. On observe la procédure utilisée pour les deux exercices.

2.2 Résultats et premières analyses

Exercice A : écrire et lire les nombres

Les résultats à l'exercice A sont similaires à l'exercice 1 précédent et montrent que les élèves savent bien lire et écrire les nombres proposés (correspondance écriture chiffrée/nom du nombre), moins en ce qui concerne les nombre au-delà de 70. Ceci n'empêche donc pas la mobilisation des procédures 1 à 3 pour la suite du test lorsqu'il y a 52 carrés à dénombrer.

Exercices B et C : dénombrer des carrés sur une feuille, écrire le nombre, aller chercher la quantité correspondante de cubes (disponibles sous forme de dizaines et de cubes isolés)

Nous livrons les résultats des exercices B et C sous la forme d'un tableau.

| | | Exercice B : écrire 52 pour dénombrer les carrés | | | | | Total ex. C |
|----------------------------------|-------------|--|-------------|-------------|-------------|-------|-------------|
| | | Procédure 1 | Procédure 2 | Procédure 3 | Procédure 4 | Autre | |
| Ex. C Prendre ... cubes | Procédure 1 | 44 | 1 | 0 | 2 | 3 | 50 |
| | Procédure 2 | 24 ⁴ | 10 | 1 | 1 | 0 | 36 |
| | Procédure 3 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| | Procédure 4 | 26 | 1 | 0 | 22 | 1 | 50 |
| | Autres | 8 | 0 | 0 | 6 | 0 | 14 |
| Total exercice B | | 106 | 13 | 1 | 31 | 4 | 155 |

Pour l'exercice B, 106 élèves, les 2/3, n'utilisent pas de groupement pour dénombrer, alors que 60% les utilisaient dans le test précédent, et ceci pour une tâche similaire. Pour expliquer cette différence, nous avançons l'hypothèse qu'il existe effectivement un effet de contrat lié à la proposition d'une tâche isolée couramment travaillée en classe dans un même contexte de passation (exercice 2 précédent proposé en classe, même s'il ne s'agissait pas de la classe de CP). En outre ceci renforce l'idée déjà ébauchée à la suite des résultats précédents que l'utilisation de groupements n'est pas perçue par les élèves de cet âge comme élément facilitateur de la tâche de dénombrement d'une collection d'objets (ici entre cinquante et soixante). Leurs connaissances du rôle de la dizaine sont-elles insuffisantes pour être mobilisables pour la tâche de dénombrement de l'exercice B ou la réussite de cette tâche ne requiert-elle pas la mobilisation de telles connaissances ?

⁴ Lecture de cette case du tableau : 24 élèves ont utilisé la procédure 1 pour faire l'exercice B suivie de la procédure 2 pour l'exercice C.

Concernant l'exercice B, ils sont 91 sur 155 (58%) à mobiliser la dizaine dans une tâche dont la réussite est largement facilitée par un tel emploi. Ce résultat est à rapprocher des 52% de l'exercice 3 précédent.

Observons maintenant l'évolution des procédures entre les deux exercices proposant deux tâches liées.

Environ la moitié des élèves conservent la même procédure pour résoudre les deux exercices.

Le profil 1 : 1 (44 élèves, 28%) : Procédure 1 (un, deux, etc.) → Procédure 1 (un, deux, etc.)

Dans les tâches effectuées, les élèves comptent un par un, même si le milieu matériel favorise l'utilisation de la dizaine. L'interprétation ordinale est convoquée que ce soit avec repérant ou non, et ceci sans utilisation du fait qu'entre deux repérants (dix à vingt, vingt à trente, etc.) il y a une dizaine.

Le profil 2 : 2 (10 élèves, 6%) : Procédure 2 (dix, vingt, trente, etc.) → Procédure 2 (dix, vingt, trente, etc.)

Dans les tâches effectuées, les élèves convoquent de la dizaine via la numération parlée, sans mettre en jeu le nombre de dizaines. La structuration de la numération parlée de dix en dix est perçue sans que le nombre de dizaines indiqué par le nom du nombre le soit nécessairement.

Le profil 4 : 4 (22 élèves, 14%) : Procédure 4 (codage de l'organisation des carrés à l'aide de deux chiffres ordonnés) → Procédure 4 (le chiffre « 5 » de l'écriture « 52 » indique que le nombre de dizaines). La place et le sens des chiffres sont utilisés pour résoudre les tâches proposées.

L'autre moitié des élèves change de procédure :

Les profils 1 : 2, 3, 4 (54 élèves, 35%) : Procédure 1 → Procédure 2, 3 ou 4.

Dans les tâches proposées, les élèves passent du comptage un par un (interprétation ordinale) à la prise en compte de la dizaine quand le milieu matériel s'y prête (exercice C).

Ces profils identifiés *a posteriori* sont liés à l'itinéraire cognitif proposé via la ressource dans la mesure où les effectifs relevés dépendent de celui-ci. Si on observait des élèves n'ayant pas suivi la ressource CDN, on peut penser que d'autres profils *a posteriori* pourraient être relevés, en particulier liés à la procédure 3 dans laquelle le nombre de dizaines est perçu via le nom du nombre (aucun élève ne relève ici du profil 3 : 3). La ressource CDN ne favorise pas cette procédure puisqu'elle propose un itinéraire cognitif de distinction et non disjonction. Mais la tâche est aussi à questionner. Rien ne permet de dire que les profils ci-dessus sont des catégories qui partitionnent les élèves. L'appartenance à un profil peut changer suivant les tâches proposées et les connaissances des élèves vont évoluer au fur et à mesure des apprentissages. Pour autant, l'analyse effectuée permet de percevoir des conceptions qui peuvent s'avérer intéressantes à considérer en particulier si des difficultés d'apprentissages sont constatées. Ainsi, certains élèves perçoivent le nombre essentiellement de manière ordinale (à travers le comptage), même quand la tâche proposée rend cette utilisation peu efficace pour sa résolution (exercice C). Les autres mobilisent la dizaine pour l'exercice C et certains aussi pour le B (seuls 3 élèves sur 155 mobilisent la dizaine dans l'exercice B sans le faire dans le C). Cependant, cette mobilisation s'opère de manière différente à la fois dans la perception ou non du nombre de dizaines et dans son lien avec le système de numération, comme l'illustre le tableau suivant.

| | Via le nom du nombre | | Via l'écriture chiffrée |
|--|--|---|-------------------------------------|
| | Procédure 2 (dix, vingt, trente, ...) | Procédure 3 (5 dizaines dans cinquante-deux) | Procédure 4 (5 dizaines dans 52) |
| Dénombrer 52 carrés non organisés (écrire la quantité) | 8% | 0,6% | 20% |
| Prendre ... cubes (autant de cubes que de carrés précédents) | 23% | 3% | 32% |
| | Pas d'utilisation ostensible du nombre de dizaines | Utilisation ostensible du nombre de dizaines | |

Des élèves utilisent la dizaine à travers la comptine des dizaines, la procédure 2. Ce type de procédure peut être efficace dans un certain nombre de tâches proposées aux élèves de CP, mais cela n'atteste pas qu'ils perçoivent le nombre de dizaines dans un nombre. D'autres encore perçoivent le nombre de dizaines dans un nombre via son nom, la procédure 3. Le lien avec l'écriture chiffrée n'est cependant pas forcément immédiat. Réciproquement, certains élèves perçoivent le nombre de dizaines dans un nombre via son écriture chiffrée, la procédure 4. Le lien avec le nom du nombre n'est ici pas forcément immédiat.

III - CONCLUSIONS

Concernant la tâche de dénombrement telle que proposée par l'évaluation nationale de 2009, nous avons montré que l'énumération a une influence notable sur sa réussite. Ainsi, en ne considérant que le taux de réussite, le test national nous apparaît comme un test des connaissances sur l'énumération dans le sens où ce sont des échecs dans l'énumération qui contribuent notablement aux résultats. Par ailleurs, la réussite n'indique pas si la dizaine est convoquée. Le groupement en dizaine, qui semble la procédure attendue si on se réfère aux documents institutionnels, n'est d'ailleurs pas le gage d'un meilleur succès pour les élèves de cet âge. Un élève peut ne pas utiliser la dizaine dans ce type de test en étant pour autant capable de le faire dans des exercices qui la requièrent. Nous l'avons relevé dans le changement de procédures entre les exercices 2 et 3 du premier test. Un autre facteur intervient en outre sur cette mobilisation : ce sont certaines conditions de passation – hors ou dans la classe ; en présence de l'enseignant ou non – ou relevant du contexte dans lequel est proposée l'exercice – tâche isolée ou problématisée. C'est ce que nous avons inféré de la différence d'emploi de la dizaine entre l'exercice 2 du 1^e test (60% convoquent la dizaine) et l'exercice B du 2^e (seulement 33%). En conclusion, même les informations supplémentaires provenant de l'analyse des traces des productions des élèves, en particulier concernant la mobilisation ou non de la dizaine, ne nous permettent pas de rendre compte du niveau de mise en fonctionnement des connaissances des élèves concernant la numération.

Un exercice tel que l'exercice 3 du premier test pourrait révéler si les élèves emploient la dizaine, cette fois-ci dans une tâche qui la requiert. Notre analyse théorique nous alerte cependant sur le fait que cette dernière pouvait être utilisée de manière très différente, en particulier sans que la connaissance du nombre de dizaines ne soit nécessaire à l'obtention d'une réponse exacte (procédure 2). La réussite à un tel exercice ne permet donc pas de mettre en évidence certaines des connaissances essentielles à la compréhension du système positionnel des écritures chiffrées.

Dans le 2^e test, nous avons exploré plus attentivement une population d'élèves ayant tous suivi un enseignement dans lequel l'écriture chiffrée a été introduite directement comme codage d'une collection d'objets organisée en dizaines. Dans un premier temps, nous avons confirmé les résultats précédents concernant la tâche de dénombrement telle que proposée à l'évaluation nationale. En particulier, dans ce contexte de passation hors la classe avec des tâches problématisées, non seulement il y a encore plus d'élèves qui ne convoquent pas la dizaine mais 35% d'entre eux le font pourtant ensuite dans l'exercice

C dans lequel la dizaine facilitait beaucoup sa réalisation. Dans un second temps nous avons élaboré des profils d'élèves révélant non seulement l'emploi ou non de la dizaine dans les deux tâches liées du test, mais aussi et surtout la façon dont elle est employée. Parmi les 54 élèves qui utilisent la dizaine dans l'exercice B, proche de l'item de l'évaluation nationale, les 24 élèves empruntant la procédure 2, c'est-à-dire 44% des 54, n'ont pas besoin de savoir le nombre de dizaines pour donner l'écriture chiffrée indiquant la quantité d'objets à dénombrer. En ce qui concerne l'exercice C, ils sont 36 dans ce cas parmi les 91 qui utilisent la dizaine, c'est-à-dire 40%. Les résultats montrent donc que pour un nombre important d'élèves les chiffres ne désignent pas nécessairement un nombre de dizaines et d'unités. Les écritures chiffrées sont perçus avant tout comme une traduction écrite des mots de la langue, comme les lettres ou les syllabes le sont. Cette proportion est relativement importante, d'autant qu'elle a été obtenue sur une population dont l'itinéraire cognitif introduisait l'écriture chiffrée directement comme codage d'une organisation. Nous faisons l'hypothèse que ce phénomène est au moins aussi important pour l'ensemble des élèves en France puisqu'ils suivent l'autre itinéraire cognitif via les manuels scolaires, l'itinéraire qui présente l'écriture chiffrée comme une traduction écrite du nom des nombres.

Les résultats obtenus sont à affiner. Par exemple les effectifs des profils relevés sont susceptibles de différer selon que les élèves aient suivis un itinéraire cognitif ou un autre. Les recherches menées dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) nous permettent de nous alerter sur d'autres facteurs à prendre en compte. Ainsi pour une même ressource, un même manuel, les résultats peuvent être relativement différents selon la classe. En quoi les connaissances des élèves, les conditions d'exercice du métier ou ce qui relève de la composante personnelle de l'enseignant influent-ils ? Par ailleurs les tâches proposées ici ne suffisent pas à fournir un état des lieux sur la conceptualisation des élèves concernant le nombre, en particulier du fait qu'elles ne relèvent que de certaines classes de problèmes du champ conceptuel de ce dernier (Vergnaud, 1991 ; voir aussi Fénichel & Pfaff, 2004-2005). Ceci indique des directions pour poursuivre le travail.

Au-delà de ces limites et perspectives, les conclusions de notre recherche apportent un éclairage sur les conceptions des élèves quant à la numération via la tâche de dénombrement, en particulier dans le lien entre la dizaine et la numération écrite chiffrée. Ceci donne des pistes pour comprendre les difficultés de certains élèves dans certains exercices mettant en jeu les nombres, par exemple dans les opérations, qu'elles soient posées donc utilisant la signification des chiffres ou effectuées mentalement avec les mots de la numération orale.

BIBLIOGRAPHIE

- BRIAND, J., LACAVE-LUCIANI, M-J., HARVOUËT, M., BEDERE, D., & GOUA DE BAIX, V. (1999-2000). Enseigner l'énumération en moyenne section, *Grand N*, 66, 7-22.
- COLLET, M. (2003). Le développement du système en base dix chez des élèves de 2^{ème} et de 3^{ème} année primaire, une étude exploratoire, *Education et francophonie*, XXXI:2, 218-241.
- FENICHEL, M., & PFAFF, N. (2004-2005). *Donner du sens aux Mathématiques* (2 tomes). Paris : Bordas.
- LE POCHE, G. (2010). Débuter la numération, In *Le nombre au cycle 2*, Durpaire J.-L. et Mégard M. (dir.), Poitiers (Futuroscope) : Scérén CNDP, 39-50.
- MARGOLINAS, C., & WOZNIK, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique*. Bruxelles : De Boeck.
- MOUNIER, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP : vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Diderot (Paris 7). Repéré à <http://tel.archives-ouvertes.fr/>
- MOUNIER, E. (2012). Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique, application à la numération parlée en France. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 17, 27-58. Repéré à <http://turing.scedu.umontreal.ca/Annales/index.html>.
- MOUNIER, E., & PFAFF, N. (2012). Quoi de neuf dans la numération au CP ?, In Actes du XXXVII^e Colloque COPIRELEM, *Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants*, 22-24 juin 2011, IREM de Dijon, France.
- PERRIN-GLORIAN, M-J. (2011). L'ingénierie à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématique : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.
- VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 133-170.

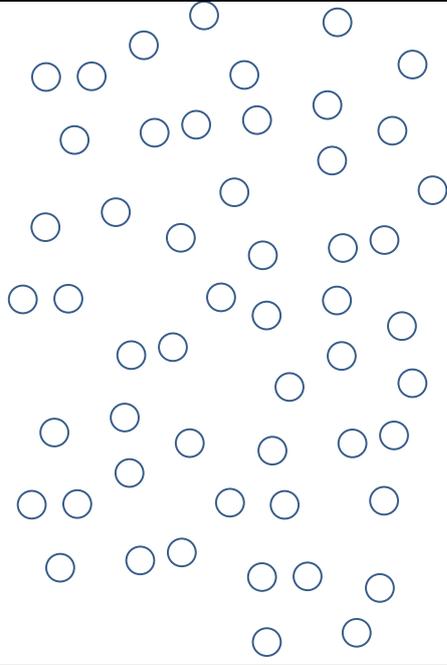
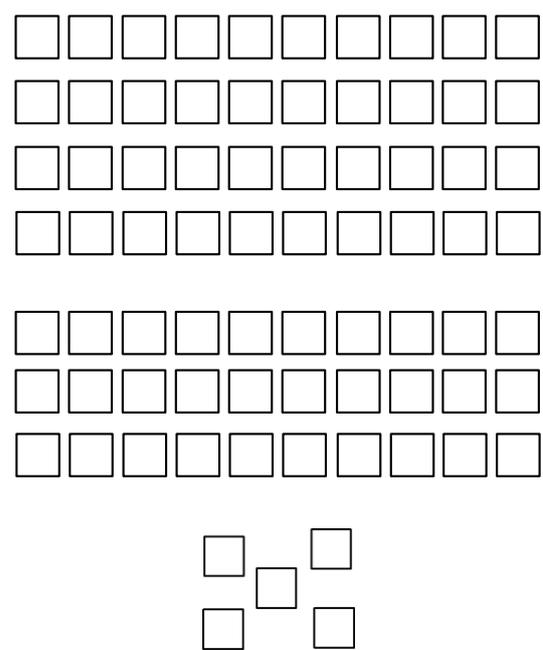
ANNEXE 1 : LA RESSOURCE CHAMPION DES NOMBRES (CDN)

En 2012-2013, l'enseignant dispose, pour les périodes 1 et 2, d'un recueil développant une séquence thématique hebdomadaire, avec une description de la séance à mener chaque jour. Ce dispositif a été étendu à toute l'année en 2013-2014. Les situations didactiques dans lesquelles de nouvelles notions apparaissent se veulent des situations problèmes au sens pris par Pfaff et Fénichel (2004-2005). L'itinéraire d'enseignement cognitif proposé est celui de distinction des numérations. Les écritures chiffrées sont introduites via la comparaison de collections qu'il va s'agir d'organiser pour réussir ces comparaisons (étapes 1, 2 et 3). Ces organisations sont ensuite codées (étapes 4 et 5). Ceci conduit en particulier les élèves à savoir indiquer le cardinal d'une collection avec des écritures chiffrées directement pour tous les nombres inférieurs à 100. La comptine numérique est, elle, introduite progressivement en s'appuyant sur les repérants. Dès que le système des écritures chiffrées est élaboré, des liens explicites sont faits entre les deux numérations pour les nombres dont les noms sont connus. La distinction entre les deux numérations est reprise pour les opérations : les opérations posées sont dites opérations « avec les chiffres », le calcul mental est dit « avec le nom des nombres ». Voici un tableau indiquant la programmation de la progression.

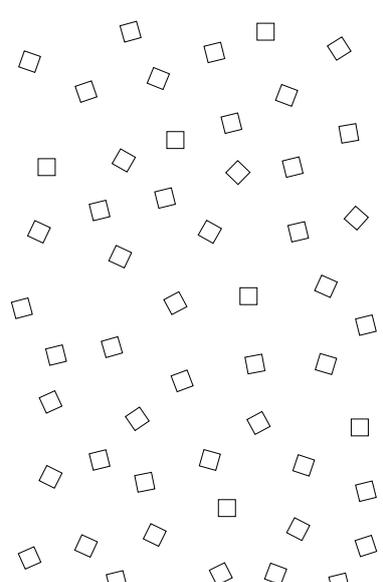
| | PERIODE 1 | | | | PERIODE 2 | | | PERIODES 3 A 5 |
|---|---|---|--|---|---|--|--|---|
| NUMERATION ECRITE CHIFREE (via des problèmes) | CHAMPION DES NOMBRES ≤ 100 | | | | PAUSE | CHAMPION DE L'ECRITURE ≤ 100 | | Addition posée Liens entre les 2 numérations PROBLEMES NUMERIQUES utilisant les 2 numérations Comptine jusqu'à cent ; tables ; Calcul mental |
| | ETAPE 1 (SEPTEMBRE) Grouper pour réussir | ETAPE 2 (SEPTEMBRE OCTOBRE) Un même type de groupement | ETAPE 3 (1) (OCTOBRE) Le groupement par dix | ETAPE 3 (2) (NOVEMBRE) Le groupement par dix | CONSOLIDATION (NOVEMBRE) Organiser/désorganiser Utilisation de groupements : « autant que » | ETAPE 4 (DECEMBRE) L'utilité de l'écriture : différentes possibilités | ETAPE 5 (DECEMBRE) L'écriture employée dans le monde entier | |
| NUMERATION PARLEE (via des problèmes) | COMPTINE JUSQU'A VINGT TABLES JUSQU'À DIX | | | | COMPTINE JUSQU'A TRENTE TABLES JUSQU'À DIX | | | |

ANNEXE 2 : LES TESTS

1 Le premier test

| <p>Exercice 2 (feuille A4)</p> <p>On demande à l'élève d'écrire avec des chiffres le nombre de ronds.</p> | <p>Exercice 3 (feuille A4)</p> <p>On demande à l'élève d'écrire avec des chiffres le nombre de carrés. On lui indique que chaque rangée comporte exactement dix carrés et que l'exercice se fait en temps limité, moins d'une minute.</p> |
|---|---|
|  |  |

2 Le second test

| <p>Exercice B (feuille A4)</p> <p>On demande à l'élève d'écrire sur une feuille le nombre de carrés (écriture chiffrée) afin de savoir le nombre qu'il faut pour réussir l'exercice C.</p> | <p>Exercice C</p> <p>Des cubes sont disposés dans un endroit non visible du lieu où se trouve la feuille avec des carrés de l'exercice B. Les carrés sont disponibles en barres dizaines et en unités (matériel manipulé et testé auparavant avec chaque élève) : 8 barres dizaines et 9 cubes seuls. On a demandé à l'élève de compter les cubes seuls et de constater qu'on ne peut former une nouvelle dizaine.</p> <p>On demande à l'élève d'apporter dans une barquette le nombre de cubes nécessaires, ni plus ni moins, afin que sur chaque carré de la feuille précédente il y ait un cube. Il dispose du nombre écrit avec des chiffres obtenu auparavant (exercice B). Les barres dizaines sont sécables en dix cubes mais ne doivent être dissociées que lors de la vérification. La barquette ne contient donc que des barres dizaines et des cubes seuls (9 au maximum).</p> |
|--|---|
| <p>Classe :</p>  | |