

UNE SITUATION D'HOMOLOGIE-TRANSPPOSITION : LE SOLIDE CACHE

Jean-Claude AUBERTIN

Formateur, Espe Aquitaine
Copirelem
jclaub@gmail.com

Yves GIRMENS

Formateur, Espe Montpellier 2
Copirelem
Yves.girmens@free.fr

Résumé

La situation « le solide caché » est un problème à résoudre proposé dans la brochure « Travaux géométriques en cycle 3 » du CRDP de Lille (2000). L'enjeu de l'atelier est de réfléchir sur l'intérêt d'utiliser cette situation, à l'origine conçue pour des élèves de cycle 3, dans le cadre de la formation initiale ou continue des maîtres. En plaçant les participants en situation de résoudre eux-mêmes le problème, l'atelier a permis de réfléchir sur les mécanismes et les bénéfices d'un processus « d'homologie » en vue de la mise en œuvre de la situation en formation des maîtres puis de sa transposition en classe, avec des élèves de cycle 3.

Cette réflexion s'appuie sur les concepts d'« homologie » et de « transposition » issus des travaux d'Alain Kuzniak dans sa recherche sur « les stratégies utilisées pour former les maîtres du 1^{er} degré en mathématiques ».

Les participants doivent résoudre de manière coopérative un problème sur les solides. Dans un deuxième temps, en s'appuyant sur leur vécu, ils sont invités à faire un pas de côté pour dégager et analyser certains aspects mathématiques, didactiques et pédagogiques dans le but d'utiliser eux-mêmes cette situation en formation des maîtres et de permettre à ces maîtres de mettre en œuvre à leur tour la situation en la transposant dans leur classe.

I - PRESENTATION ET DEROULEMENT

Un solide est caché dans une boîte. Les participants doivent réaliser un patron pour fabriquer un solide « identique » au solide caché en formulant une suite de questions auxquelles des personnes connaissant le solide répondent par oui ou par non (voir l'annexe 1 pour une présentation détaillée du descriptif et du déroulement de la situation).

1 Choix du solide

D'emblée, nous avons sélectionné deux solides possibles, « le toit » et « l'antitoit » qui nous semblaient bien adaptés à une mise en situation de formateurs : ce sont des polyèdres, leur nombre de faces est petit, leurs faces sont des polygones simples.

Chacun des deux solides retenus a comme faces : un carré, deux triangles équilatéraux isométriques, deux trapèzes isocèles isométriques dont la « grande base » est le double de la « petite base ».



« L'antitoit »



« Le toit »

Nous avons opté pour le solide « antitoit » car nous voulions éviter que les participants, une fois qu'ils auraient identifié les natures des différentes faces, envisagent spontanément le solide de forme « toit », sans se poser la question de la manière dont les faces sont « attachées ». Il nous a paru intéressant d'observer si les participants se posent la question sans se laisser entraîner vers la forme « toit » qui est « culturellement » très familière.

En formation initiale et continue des maîtres, la séance a été menée en choisissant le solide « toit ».

Pour évacuer la question de la détermination des dimensions des arêtes qui n'entrait pas dans notre projet, nous avons précisé que « solide identique » devait être interprété comme « un solide de même forme », pas nécessairement à la même échelle que le solide référent caché.

2 Déroulement de l'Atelier

Premier temps : Exposé des stratégies de formation des maîtres repérées et théorisées par Alain Kuzniak (voir Annexe 2)

Il est précisé que la situation qui va leur être proposée sera étudiée dans une perspective de stratégie d'homologie et de transposition.

Deuxième temps : Mise en œuvre de la situation

Un solide est caché dans une poche. Il s'agit de réaliser un patron pour fabriquer un solide identique au solide caché par une suite de questions auxquelles on ne peut répondre que par « oui » ou par « non ».

Première phase : Un groupe de 3 personnes, nommé G1 est constitué. Le solide référent lui est confié sans que les autres participants le voient. Le groupe G1 se retire avec le solide et doit imaginer les questions qui peuvent lui être posées et quelles réponses il doit donner.

Les autres participants sont répartis en deux autres groupes G2 et G3 pour réfléchir et se mettre d'accord sur les questions qu'ils décideront de poser.

Chaque groupe notera ses questions sur une feuille.

Deuxième phase : Formulation des questions

Chacun des groupes pose à tour de rôle une question à laquelle le groupe G1 répond « oui » ou « non » ou bien « on ne peut pas répondre » si la question appelle une réponse autre que « oui » ou « non » ou porte sur un nom de solide.

Un animateur note au tableau les questions avec la réponse apportée dans l'ordre où elles apparaissent. Quand il l'estime utile, il peut proposer des pauses afin de permettre à chaque groupe de se concerter pour faire le point et ajuster son questionnement.

3 Le questionnement produit au cours de la recherche

G2 : Est-ce que c'est un polyèdre régulier ? Réponse : Non.

G3 : Est-ce que c'est un polyèdre ? Réponse : Oui.

G2 : Le solide a-t-il au moins 2 faces identiques ? Réponse : Oui.

G3 : Est-il convexe ? Réponse : Oui.

G2 : A-t-il 3 faces ? Réponse : Non.

G3 : A-t-il plus de 10 faces ? Réponse : Non.

G2 : A-t-il moins de 6 faces ? Réponse : Oui.

G3 : A-t-il moins de 3 faces ? Réponse : Non.

G2 : A-t-il 3 faces identiques ? Réponse : Non.

Une première pause est alors proposée, chaque groupe ayant assez d'éléments pour faire une synthèse sur le nombre de faces et passer en revue de premiers solides possibles.

G3 : Est-ce que 3 faces sont des parallélogrammes ? Réponse : Non.

G2 : Le solide a-t-il deux paires de faces identiques ? Réponse : Oui.

G3 : Le solide a-t-il 4 faces triangulaires ? Réponse : Non.

G2 : La face identique à aucune autre est-elle un parallélogramme ? Réponse : Oui.

G3 : Est-ce que 2 faces sont des parallélogrammes ? Réponse : Non.

G2 : Y-a-t-il une paire de triangles ? Réponse : Oui.

G3 : Pas de question.

G2 : Est-ce que la paire de faces non parallélogrammes sont des quadrilatères ? Réponse : Oui.

G3 : Les 2 faces quadrilatères sont-elles des trapèzes ? Réponse : Oui.

A ce stade, une deuxième pause est proposée pour que chaque groupe fasse une synthèse des caractéristiques des faces à partir des informations recueillies.

G2 : La face identique à aucune autre est-elle un carré ? Réponse : Oui.

G3 : Les trapèzes sont-ils exactement superposables ? Réponse : Oui.

G2 : Les triangles sont-ils isocèles ? Réponse : Oui.

G3 : Les trapèzes sont-ils particuliers ? Réponse : Oui.

G2 : Les triangles sont-ils équilatéraux ? Réponse : Oui.

G3 : Les 2 triangles équilatéraux sont-ils superposables ? Réponse : Oui.

Les animateurs proposent une 3^e pause pour permettre aux groupes de réfléchir s'ils ont assez d'informations pour proposer un patron.

G2 : Le petit côté du trapèze fait-il la moitié du grand côté ? Réponse : Oui.

G3 : Les trapèzes sont-ils rectangles ? Réponse : Non.

G2 : La petite base du trapèze touche-t-elle le carré ? Réponse : Oui.

G3 : Les deux trapèzes sont-ils isocèles ? Réponse : Oui.

Troisième phase : Résolution

Une pause est proposée pour que chacun des groupes G2 et G3 se concerte pour construire un patron.

Quatrième phase : Mise en commun - chaque groupe présente le patron qu'il a élaboré. Un échange a lieu entre les deux groupes autour des informations utilisées.

Cinquième phase : Validation et bilan

Le solide caché est dévoilé par le groupe G1 et est confronté aux patrons proposés par les groupes G2 et G3.

Les participants sont invités à un retour réflexif sur les questions posées, l'exploitation des informations recueillies pour ajuster le questionnement, les modes de raisonnement mis en oeuvre...

4 Quelques remarques formulées lors de l'échange de la 5^e phase

La situation proposée est la résolution coopérative d'un problème qui s'appuie sur la mise en œuvre de la plupart des opérations logiques.

Un groupe explique qu'à certains moments, il a tenté des questions « coup de poker » dans l'espoir de « récupérer d'un coup » un maximum d'informations.

Un autre raconte qu'il a écarté d'emblée l'hypothèse d'une sphère puisqu'il s'agissait de construire un patron pour chercher un polyèdre « relativement simple ».

L'un des groupes exprime qu'il a cherché à organiser et hiérarchiser les questions, animé par le désir de trouver la solution le plus rapidement possible.

Bien que le terme « solide identique » ait été explicité comme « solide de même forme » par les animateurs au moment de la formulation de la consigne, l'un des groupes avoue qu'il a été gêné par ce terme, se demandant s'il renvoyait à des longueurs « exactement superposables » ou homothétiques.

Les participants du groupe G2 précisent qu'au moment de la 3^e pause, ils étaient certains d'avoir toutes les informations et que c'est lors d'une tentative de faire le patron qu'ils se sont aperçus qu'il leur manquait le rapport entre les bases du trapèze.

Le groupe G3 déclare que sa recherche s'est plutôt centrée sur une représentation du solide en 3 dimensions.

Le groupe G3 précise qu'ils ont posé la dernière question pour se « rassurer », bien que la réponse à cette question puisse être déduite des informations recueillies précédemment.

Le groupe G1, détenant la solution et chargé de répondre aux questions des autres groupes, révèle que lors de la préparation, il avait envisagé des questions relatives à des symétries et des sections, qui n'ont été posées par aucun des groupes.

Suite à une question d'un participant de ce groupe, les deux groupes de recherche déclarent qu'ils n'ont pas ressenti une compétition entre eux, en particulier grâce aux pauses successives.

II - RETOUR SUR LE VECU DE LA SITUATION

Les animateurs proposent ensuite aux participants de faire un retour réflexif sur la situation qu'ils ont vécue selon deux perspectives : la mise en œuvre de cette situation en formation initiale de professeurs des écoles puis la transposition de la situation dans une classe de cycle 3.

Les participants sont invités en groupes à réaliser une affiche à partir des deux consignes suivantes :

1) En imaginant que vous avez fait vivre cette situation en formation initiale ou continue de professeurs des écoles, quels savoirs vous semble t-il possible d'en dégager ensuite sur les plans mathématique, didactique, pédagogique ?

2) Dans la perspective d'une mise en œuvre dans une classe de cycle 3, quels seraient les objectifs d'apprentissage mathématiques possibles et quels seraient les choix didactiques et pédagogiques pour les atteindre ?

1 Les savoirs mathématiques, didactiques et pédagogiques

Les participants ont proposé les aspects suivants pouvant être mis en évidence, selon eux, par des personnes en formation après avoir « vécu » cette situation.

1.1 Aspects mathématiques

- Des savoirs de géométrie plane et le langage associé : triangles et quadrilatères particuliers, polygones, rapport de longueurs des côtés.
- L'utilisation des instruments de géométrie pour tracer, mesurer, reporter une longueur.
- La relation d'Euler pour contrôler la pertinence des informations recueillies sur le nombre de faces, d'arêtes et de sommets.
- Des savoirs de géométrie dans l'espace : notions de faces, côtés, arêtes, sommets, position relative des faces, nombre de faces, de sommets, notion de gabarit, invariance d'un solide par rapport à son orientation, critère de classement de solides.
- Sur le patron : le concept, le passage solide/patron et inversement, la pluralité des patrons.
- Les propriétés des figures planes et des solides.
- Les formes de raisonnement : raisonnement par induction (émission et test d'hypothèses), par disjonction de cas, par déduction à partir d'une corrélation d'informations, à partir de négations de propositions.
- Des mises au point sur le sens d'expressions utilisées telles que « moins de 6 faces », « deux paires de faces superposables », « faces identiques ».

1.2 Aspects didactiques

- Le choix du matériel mis à disposition : règle, compas ...
- Les critères de choix du solide par rapport aux connaissances supposées acquises et aux objectifs d'apprentissage.
- La notion de solide prototypique.
- Le processus de recherche : allers-retours entre réflexion théorique et expérimentations.
- La place de cette situation dans une séquence d'apprentissage : reprise d'un savoir ancien ou bien savoir nouveau.
- Le principe d'une situation qui permet de créer une référence.
- Les conceptions d'apprentissage en rapport avec la résolution du problème.
- La notion de variable didactique : nature du solide, choix des instruments disponibles...
- Différents moments d'action, de formulation, de validation repérés dans les diverses phases (en référence à la théorie des situations de Guy Brousseau).
- La situation de résolution coopérative d'un problème.

1.3 Aspects pédagogiques

- La préparation matérielle, la mise en place et le lancement de l'activité.
- Le déroulement de la séance (les différentes étapes et leur enchaînement).

- La position et le rôle de l'enseignant au cours des différentes phases.
- La constitution des groupes et notamment le choix du groupe qui répond aux questions (experts...).
- Le rôle et la place des pauses ; en particulier les pauses pour réguler le sentiment de compétition entre les groupes.
- Le rôle de l'expression orale aux différents moments.
- Le rôle du travail en groupes : écoute, prise en compte de l'apport d'un autre, échange, débat.

Les animateurs reviennent sur le rôle important des « pauses », à un moment où une concertation entre les membres de chaque groupe est nécessaire pour actualiser et ajuster le questionnement, chaque pause contribuant aussi à tempérer un esprit de compétition qui pourrait perturber l'enchaînement des questions.

2 Conditions et modalités d'une mise en œuvre de la situation en classe de cycle 3

La situation peut être mise en œuvre en classe de cycle 3 en respectant des modalités identiques et un scénario similaire.

La résolution de ce problème en formation des maîtres puis dans une classe est porteuse d'apprentissage de connaissances géométriques et de raisonnements assez similaires, tant pour les enseignants en formation que pour les élèves dans une classe.

Lors de la transmission de la consigne aux élèves, il semble nécessaire d'illustrer la notion de « solide identique » ou « solide de même forme » à une échelle différente par la présentation d'exemples : deux cubes de tailles différentes, de deux pavés droits de tailles différentes, ayant les mêmes proportions.

Les adaptations principales concernent les variables en lien avec le choix du solide.

En premier lieu, les connaissances sur la forme des faces et leur articulation doivent être « disponibles ».

En relation avec l'objectif d'apprentissage, deux variantes sur la nature du solide : le solide choisi est déjà connu et l'enjeu de l'apprentissage sera un approfondissement ou bien le solide choisi est nouveau et sa détermination se fera par un processus de rapprochement/différenciation par rapport aux solides déjà connus.

Deux variantes concernant le dispositif : le solide que l'on cherche à déterminer peut être « caché » comme dans la situation expérimentée ou bien il est présent (mais non identifié) dans une collection visible (référentiel).

Pour une mise en œuvre dans une classe de cycle 3, il est nécessaire de réfléchir à une synthèse de savoirs à l'issue de la résolution.

Dans la perspective de la transposition de cette situation en classe, il paraît opportun, en formation de professeurs des écoles, de lancer la réflexion par des questions telles que :

- D'après vous qu'est-ce que les élèves ont appris suite à cette activité ?
- Quelles sont les différentes phases que vous avez repérées et pour chacune de ces phases, quel est le rôle de l'élève et le rôle de l'enseignant ?
- Le dispositif choisi vous semble-t-il pertinent ? Pourquoi ? Quelles modifications proposeriez-vous ?

III - RETOUR SUR UNE SITUATION D'HOMOLOGIE-TRANSPOSITION

En référence à la typologie établie par Alain Kuzniak dans sa recherche (cf Annexe 2), une situation relevant d'une stratégie de formation par homologie consiste à faire vivre une situation de résolution d'un problème selon les **conceptions et choix didactiques et pédagogiques** qu'on souhaite voir mis en œuvre **dans leur enseignement** par les personnes qui l'expérimentent.

L'homologie visée par cette situation concerne tout à la fois une activité mathématique (la résolution d'un problème sur les solides), des aspects didactiques (par exemple le choix du solide par rapport à

l'objectif d'apprentissage, la place de cette situation dans une séquence...) et des modalités pédagogiques (par exemple le dispositif, le déroulement et la gestion par l'animateur).

Dans le cadre de l'atelier, et en se référant à la grille d'analyse d'une situation de formation présentée en annexe 3, **l'homologie concerne trois « étages »**. En effet, cette situation a été mise en œuvre avec des formateurs dans le but qu'ils la mettent, à leur tour, en œuvre avec des professeurs des écoles en formation pour qu'eux-mêmes, dans leurs classes, fassent vivre cette situation à leurs élèves, ceci moyennant une adaptation au niveau où ils enseignent de certains aspects mathématiques (le choix du solide par exemple), didactiques et pédagogiques (travail de transposition).

La mise en œuvre d'une telle situation de formation relevant d'une stratégie d'homologie mais aussi de transposition fait intervenir des activités intellectuelles se situant à différents niveaux, facilement repérables dans le déroulement de l'atelier.

Le niveau 0 est relatif à l'activité mathématique pour résoudre le problème, dans ses différents aspects : l'apprentissage de connaissances relatives aux solides et à l'espace ainsi que différentes formes de raisonnement constituant les étapes de la démarche pour résoudre le problème.

Cette activité mathématique a été pratiquée par les participants de l'atelier (i.e. des formateurs), comme elle sera pratiquée par des maîtres en formation (lors de la mise en œuvre de la situation en formation) puis par des élèves (lors de la mise en œuvre de la situation transposée dans une classe de cycle 3).

Pour des formateurs (dans cet atelier) et des maîtres en formation, le fait de résoudre le problème comme s'ils étaient des élèves, leur permet de saisir les enjeux de la situation et son potentiel mathématique ; pour des maîtres en formation ainsi que pour leurs élèves en classe, la résolution du problème génère des apprentissages de connaissances et de raisonnements mathématiques qui seront dégagés au cours d'un moment d'institutionnalisation.

Au niveau 1, il s'agit, pour les participants de l'atelier et les maîtres en formation, une fois qu'ils ont résolu le problème, de faire un pas de côté pour repérer et analyser des aspects mathématiques, didactiques et pédagogiques de la situation qu'ils ont « vécue », afin d'identifier des savoirs et savoir-faire sur les plans mathématique, didactique et pédagogique potentiellement présents dans la situation.

Au niveau 2, en se plaçant en position d'enseignant, il s'agit de réfléchir, en s'appuyant sur les éléments dégagés au niveau précédent, sur les modalités de mise en œuvre de cette situation et sur les adaptations possibles dans une perspective de mise en pratique de l'activité, en formation pour un formateur ou dans une classe pour un professeur d'école.

C'est à ce niveau qu'un enseignant en formation est amené à envisager les conditions de la « transposition », pour ses propres élèves, de la situation « vécue ».

Au niveau 3, toujours en position d'enseignant, tant pour les participants de cet atelier que pour les maîtres en formation, il s'agit d'identifier, au delà du contexte, des aspects génériques présents dans la « situation vécue » qu'ils pourront utiliser en tant qu'enseignant pour enrichir leurs pratiques d'enseignement : par exemple, la manière de gérer une activité de recherche en groupes, de gérer un déroulement complexe d'une activité en différentes phases, la manière d'organiser et d'animer une mise en commun à partir d'affiches, etc...

La réflexion au niveau 4 consiste, dans une position s'apparentant à celle d'un chercheur, à problématiser certains aspects mathématiques, didactiques ou pédagogiques pour initialiser une démarche de recherche. Ce niveau d'analyse n'a pas été abordé lors de cet atelier.

Lors de la mise œuvre de la situation en formation initiale ou continue des maîtres, le **retour réflexif** sur **la situation vécue**, doit permettre de conduire des analyses aux niveaux 1, 2, 3.

IV - BIBLIOGRAPHIE

KUZNIAK A (2003) Les stratégies utilisées pour former les maîtres du 1^{er} degré en mathématiques, *Carnets de Route de la Copirelem, Concertum tome 3, COPIRELEM*, 7-22

BRACONNE-MICHOUX A. & ZUCHETTA H. (2011) Intérêts et limites pour la formation d'une situation d'homologie, in *Actes du XXXVIII^e colloque COPIRELEM*, IREM de Dijon.

AUBERTIN J C. (2005) & GIRMENS Y & MAURIN C & ROYE L (2005) A propos de l'enseignement des solides : quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour la formation des maîtres ? p 153, in *Actes du XXXII^e colloque COPIRELEM*, IREM de Strasbourg.

ROYE L (2000). Le solide caché, *Travaux géométriques en cycle 3 : Apprendre à résoudre des problèmes*, p 150, CDDP Lille.

V - ANNEXES

Annexe 1 : Description et déroulement de la situation

Tâche : Un solide est caché dans une boîte. Il s'agit de réaliser un patron pour fabriquer un solide identique au solide caché par une suite de questions auxquelles on ne peut répondre que par oui ou par non.

Dispositif :

- Un groupe G1 de trois personnes connaît le solide caché. Il répondra par « oui » ou par « non » aux questions qui sont posées.
- Les autres personnes sont réparties en plusieurs groupes. Chacun des groupes pose à tour de rôle une question demandant une réponse « oui » ou « non ». La question ne doit pas porter sur un « nom » de solide.

Phase 1 : Préparation de la situation :

- Le groupe G1 de 3 personnes reçoit le solide et se retire de la salle pour imaginer les questions qui peuvent être posées et quelles réponses il doit donner (*le solide ne sera plus visible pendant le questionnement*)
- Les autres groupes réfléchissent pour se mettre d'accord sur les questions qui vont être posées. Ces questions sont notées par écrit.

Phase 2 : Collecte d'informations :

- Chaque groupe pose, à tour de rôle, une question.
- Le porte-parole du groupe G1 répond « oui » ou « non ». S'il ne peut pas répondre par « oui ou non », il dit « on ne répond pas ».
En cas de doute, le groupe G1 peut se retirer pour se concerter et prendre une décision.
- L'animateur écrit toutes les questions au tableau avec les réponses fournies. Il décide de faire des « pauses » pour permettre à chaque groupe de faire le point et de réajuster son questionnement.
-

Phase 3 : Résolution

- Au bout de plusieurs tours, l'animateur demande aux groupes qui questionnent s'ils estiment avoir assez d'informations pour construire un patron.
S'il y a consensus, il propose à chaque groupe de se concerter pour construire le patron.

Phase 4 : Mise en commun des patrons proposés par les groupes

Chaque groupe présente sa proposition de patron. La confrontation des différentes propositions peut faire naître un débat sur l'interprétation, la corrélation des informations, leur insuffisance. ...

Phase 5 : Validation et bilan

Le groupe G1 dévoile le solide caché qui est confronté aux différents patrons (validation matérielle). Un bilan permet de revenir sur la suite des questions posées : nature, redondance, ordre...

V- ANNEXES

Annexe 2 : Stratégies de formation repérées par Alain Kuzniak

- **Stratégies culturelles** : le formateur diffuse une information ; il veut accroître le savoir mathématique (ou éventuellement didactique) de l'étudiant, sans se préoccuper de la mise en œuvre ultérieure par l'étudiant dans les classes.
- **Stratégies de « monstration »** : le formateur cherche à transmettre une pratique d'enseignement, en montrant la mise en œuvre effective dans les classes, soit in vivo, soit via une vidéo ...
L'étudiant regarde un maître qui fait la classe en visant un objectif mathématique.
- **Stratégies d'homologie** : le formateur cherche à transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, ainsi que des habiletés de gestion d'un groupe classe ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes, des mises en œuvre proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves.
- **Stratégies de transposition** : le formateur cherche à transmettre un savoir de référence sur l'enseignement et tente de maîtriser le phénomène d'adaptation opéré par les étudiants.

Annexe 3 : Grille d'analyse d'une activité de formation

