FORMATION INITIALE EN GEOMETRIE ET VISUALISATION

Thomas Barrier (coord.)
Groupe Recherche-Action-Formation
« Se former comme formateur/trice en géométrie »[1]
ESPE Lille Nord de France
Laboratoire de Mathématiques de Lens
thomas.barrier@espe-lnf.fr

Résumé
Nous présentons dans ce compte rendu certains résultats issus d'un travail collectif en formation initiale des professeurs des écoles en géométrie (première année de Master). Deux séances ont été conçues collectivement et mises en œuvre par trois formateurs différents. Nous mettons en évidence des variations dans les interprétations faites par ces trois formateurs au niveau des enjeux de savoirs associés aux séances. Nous nous intéressons en particulier aux processus d'institutionnalisation et à la gestion des savoirs liés à la visualisation. Nous faisons en effet l'hypothèse que le fait de donner plus ou moins de visibilité à ces savoirs est susceptible de produire des différenciations dans les apprentissages des étudiants.

L'atelier dont ce texte rend compte est issu des travaux du Groupe de Recherche-Action-Formation (GRAF) « se former comme formateur/trice en mathématiques » de l'Université d'Artois. Ce GRAF regroupe les formatrices et formateurs en mathématiques de l'ESPE Lille Nord de France intéressés par un processus d'échange de pratiques, dans la perspective de les enrichir mais aussi à les adapter au nouveau contexte institutionnel de formation. Plus précisément, l'atelier s'est construit à partir des réflexions du sous-groupe « Géométrie » de ce GRAF, consacré à la formation des professeurs des écoles en géométrie. Les membres de ce sous-groupe ont commencé par échanger autour de leur manière d'aborder la géométrie en formation initiale et autour des ressources utilisées. À partir de là, un document décrivant deux séances d'introduction à la géométrie pour les étudiants de première année du Master préparant au professorat des écoles a été collectivement conçu. Une version légèrement abrégée de ce document est proposée en annexe 1. Il a servi de support à plusieurs mises en œuvre, de la part de divers collègues. Trois d'entre elles ont été filmées. L'essentiel du matériau utilisé au cours de l'atelier provient de ces films (transcriptions, photo, extraits). L'atelier a été l'occasion de prolonger le travail du sous-groupe en engageant une démarche réflexive concernant la prise en charge des savoirs liés à la visualisation dans la formation en général, et dans ces mises en œuvre en particulier. Si cette thématique de la visualisation était présente dans les réflexions initiales du sous-groupe – notamment du fait de la « tradition » locale de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (Barrier, Hache & Mathé 2014 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclerc 2013) – la construction de la problématique au cœur de cet atelier, que nous allons expliciter par la suite, est le produit d'une posture réflexive essentiellement postérieure aux mises en œuvre des séances de formation.

I - INTRODUCTION

Le travail du sous-groupe « Géométrie » du GRAF a démarré par un questionnement général autour de l'enseignement de la géométrie pour nos étudiants en première année de master MEEF mention 1^{e} degré. Il s'agissait de trouver un moyen d'enseigner à tous les étudiants, y compris à celles et ceux, assez nombreux, qui sont en froid avec la géométrie. Pour élaborer notre réflexion en vue de l'atelier, il nous a semblé intéressant de chercher à interpréter cette difficulté de formation en nous appuyant sur deux sources principales : les travaux de Duval (2005) sur les conditions cognitives de l'apprentissage de la

[1] Outre le coordinateur, ont participé à ce groupe : Jean-Philippe Dalle, Bruno Loiseau, Anne-Cécile Mathé, Bernard Montuelle et Denis Vekemans.

géométrie d'une part, et certains travaux de didactique des mathématiques s'intéressant à la différenciation des apprentissages (Coulange 2012, 2014 ; Margolinas & Lappara 2008, 2011).

1 Géométrie et cognition

Commençons par décrire l'approche cognitive développée par Duval (2005). Selon lui, l'apprentissage de la géométrie suppose la mise en place de conditions cognitives spécifiques à ce domaine de connaissances, qui « sont en quelque sorte des conditions pour apprendre à apprendre en géométrie » (Duval 2005, p. 8). Ces conditions sont décrites en détail dans l'article cité[2]. Pour notre part, nous retenons des travaux de Duval l'idée selon laquelle la pratique géométrique nécessite une articulation cognitive délicate entre des compétences de visualisation d'une part et des compétences discursives (i.e. verbales dans l'acception du terme par ce chercheur)[3] d'autre part.

Concernant la visualisation, la spécificité de la géométrie réside dans un traitement cognitif des figures qui s'oppose au traitement iconique des formes tel qu'il est en œuvre dans les conditions ordinaires de visualisation. Le concept clé est celui de déconstruction dimensionnelle :

« Avec la déconstruction dimensionnelle la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème. » (ibid., p. 26).

Prenons un exemple en lien avec les séances que nous allons étudier.

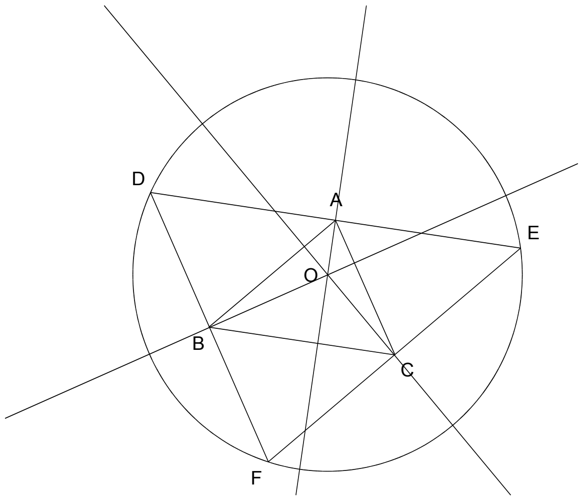


Figure 1

Plusieurs figures peuvent être « détachées » dans la figure 1. Parmi celles qui ne nécessitent pas de tracés auxiliaires, et pour en rester aux formes de dimension 2 (surfaces), on peut repérer des triangles, un cercle (des « portions » de cercle), des parallélogrammes, des trapèzes, et bien d'autres polygones. Imaginons que l'on ait pour tâche de reproduire cette figure, et que l'on commence à partir du triangle ABC. Pour construire le point E, par exemple, il est très utile de le percevoir comme le point d'intersection entre les parallèles aux côtés (AB) et (BC) passant respectivement par C et par A (point de vue réseau de droites) ou encore comme sommet du parallélogramme ABCE (point de vue polygone particulier). En d'autres termes, il faut passer d'un regard focalisé sur le triangle à un regard focalisé sur le parallélogramme (ou toute chose équivalente). La suite de la construction suppose le même type de flexibilité cognitive : le point O est d'abord identifié comme orthocentre du triangle ABC (point de concours de droites construites relativement à un triangle donné) puis comme centre du cercle circonscrit au triangle DEF. Une tâche de démonstration supposerait le même type de fonctionnement

[2] On trouvera par ailleurs divers exemples d'exploitation de son approche dans les actes de la précédente session des colloques COPIRELEM (2013, Nantes).

[3] Nous pourrions rajouter des compétences instrumentales. Cf. Barrier, Chesnais & Hache (2014) et Celi & Perrin-Glorian (2014) pour des descriptions et analyses de telles articulations.

cognitif au niveau de la visualisation (pour un exemple, *cf*. Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian 2014). Si cette tâche ne nécessite pas de tracé auxiliaire, il n'en est pas toujours ainsi. Un exemple très célèbre est donné par Kant au début de *La Critique de la Raison Pure* lorsque celui-ci considère le cas de la somme des angles d'un triangle. Alors que le philosophe en resterait à l'analyse du concept de triangle, et se trouverait dès lors démuni, le géomètre procéderait par des constructions auxiliaires : se donner un triangle, *prolonger* un côté du triangle, *tracer* des lignes parallèles. Ces constructions permettent de faire apparaître de nouvelles formes, nécessaires à l'avancée du travail géométrique, via un enrichissement du réseau de droites sous-jacent à la figure initiale (en l'occurrence cet enrichissement permet de mettre en œuvre les connaissances liées aux angles alternes-internes). Dans Duval (2005), on trouvera un exemple relatif à la construction d'un parallélogramme de même aire qu'un triangle donné. Là encore, c'est le mécanisme cognitif de déconstruction dimensionnelle qui est en jeu.

Duval (2005) distingue par ailleurs plusieurs mécanismes discursifs en géométrie : dénomination, énonciation de relation et démonstration. Il soutient en particulier la thèse d'une rupture entre les mécanismes discursifs de la démonstration et de l'argumentation (Duval 1992, 1995). Dans cet article, nous laisserons en second plan la thématique spécifique de la démonstration et de ses rapports avec l'argumentation pour nous centrer sur les autres mécanismes discursifs et leurs liens avec la visualisation. Dans les contextes ordinaires, la visualisation (iconique) est première par rapport au discours. En d'autres termes, le mécanisme cognitif de visualisation iconique pilote les mécanismes discursifs. Nous disons « il y a un arbre » lorsque, en présence d'un tel objet, notre appareil perceptif le discrimine comme un objet singulier ressemblant à d'autres déjà connus et pour lesquels nous nous sommes donnés en français un moyen culturel de désignation (une dénomination). Il est plutôt inhabituel que ce soit une verbalisation qui soit à l'origine de l'identification d'un objet. Une telle hiérarchie est moins prégnante en géométrie, tout du moins lorsque l'on dépasse les mécanismes iconiques de reconnaissance globale qui ont cours, au cycle 1 notamment. Nous montrerons plus loin la dépendance au discours de l'identification des parallélogrammes de la figure 1. Pour autant, la visualisation semble souvent suffisante pour l'identification d'autres éléments de cette figure (typiquement les éléments « superposés » : les « deux » triangles et le cercle). Soulignons par ailleurs que l'énonciation de relation suppose la disponibilité d'objets susceptibles d'être mis en relation (et de noms d'objets), c'est à dire le plus souvent des points et des droites (alignement, parallélisme, etc.). Le pendant visuel de cette disponibilité est l'émergence d'un certain réseau de droites (et/ou de points d'intersection), ce qui est un aspect fondamental de la déconstruction dimensionnelle. La déconstruction dimensionnelle a donc une valence visuelle et une autre discursive, la pratique géométrique nécessitant l'articulation des deux.

Si l'enseignement scolaire de la géométrie semble avoir depuis quelques temps déjà pris en compte la nécessité d'une approche explicite des spécificités discursives de la démonstration, la place de la visualisation des figures, et a fortiori la question de son articulation avec le discursif, reste plus incertaine, y compris dans la formation des enseignants. Nous faisons l'hypothèse que les spécificités cognitives des pratiques géométriques sont impliquées dans les difficultés que nous rencontrons en formation. Nous poursuivons maintenant l'élaboration de notre problématique en nous appuyant sur le concept de savoir caché.

2 Savoirs cachés et institutionnalisation

Commençons par expliciter ce que nous entendons par savoir caché. Il s'agit pour nous d'une portion du curriculum réel (portion de la prescription de l'institution qui est effectivement enseigné) qui reste invisible ou implicite dans le jeu didactique (Perrenoud 1993). Précisons dès maintenant que nous utilisons le terme « savoir » au sens d'un savoir disciplinaire inscrit dans la culture (scolaire) et (dé)contextualisé dans une institution (Margolinas 2012), et non au sens d'une attitude générale ou d'une compétence transversale que les curricula laisseraient dans l'ombre (parce que trop centrés sur les disciplines, impensé ou inavouable etc.). Une idée force que l'on retrouve aussi bien dans les travaux de Coulange (2012, 2014) que dans ceux de Margolinas & Lappara (2008) est le fait que le caractère « caché » de certains savoir conduit à des dysfonctionnements de l'institutionnalisation, c'est-à-dire du processus de transformation de connaissances mises en jeu en situation en savoirs identifiés comme tels dans une institution donnée. Ces dysfonctionnements seraient notamment impliqués dans les processus de différenciation scolaire, de construction des inégalités scolaires dans la classe (Rochex & Crinon 2011).

Avant de chercher à instancier cette hypothèse dans le cas qui nous occupe, il nous semble nécessaire de procéder à une précision théorique concernant la thématique du « caché » dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Nous utiliserons ici, à notre manière, la distinction entre paradigme de la censure et paradigme de la méconnaissance opérée par Perrenoud (1995). Dans un premier cas, le savoir n'est pas à proprement parler caché pour l'enseignant. Il existe différentes raisons pour lesquels un enseignant (une institution, un groupe social etc.) peut souhaiter enseigner des savoirs à l'insu des élèves. Notre point de vue de didacticien des mathématiques nous conduit ici à en retenir une en particulier, explicitée par Brousseau (1986) sous une forme paradoxale : l'enseignant ne peut pas dévoiler aux élèves les savoirs qu'il souhaite leur enseigner sans dans le même temps les soustraire aux conditions de possibilité de leurs apprentissages (les élèves ne pourraient plus agir de leur propre mouvement). En d'autres termes, le caractère caché des savoirs, la rétention didactique, est une nécessité « grammaticale » des jeux didactiques (Sensevy 2008). Pour autant, les phases adidactiques des situations didactiques, phases dans lesquelles l'intention du professeur d'enseigner un savoir particulier est « cachée », ne se suffisent pas à elles-mêmes. Il est tout aussi nécessaire d'ancrer les connaissances des élèves construites dans ces phases adidactiques au sein de l'institution scolaire, d'expliciter les savoirs culturels qui sont visés. Toute la difficulté pour l'enseignant est alors de lever le voile sur ses intentions, de se ressaisir « les savoirs dont il se départit nécessairement à un moment » (Coulange 2014), alors même que les expériences cognitives effectives des élèves relèvent du privé (nous ne pouvons, au mieux, que faire des hypothèses sur ce que les élèves ont effectivement vécu). Nous avons donc ici affaire à une première source potentielle de dysfonctionnement pour l'institutionnalisation, prenant ces racines dans la nature même du jeu didactique, dans la difficulté pour le professeur (le formateur) d'articuler les processus de dévolution et d'institutionnalisation (Margolinas & Laparra 2008).

Venons-en maintenant au paradigme de la méconnaissance, qui offre un regard complémentaire, plutôt que contradictoire, sur les analyses précédentes. Les difficultés identifiées ci-dessus se trouvent encore renforcées si l'enseignant lui-même peine à identifier les enjeux de savoirs implicitement présents dans les situations d'apprentissage qu'il propose à ses élèves. Au-delà des questions de formation (des enseignants comme de leurs formateurs), il nous semble que ce cas de figure est d'autant plus probable si les savoirs en question ne font pas l'objet d'une reconnaissance institutionnelle explicite, notamment dans les documents officiels à disposition des enseignants. Nous rejoignons donc ici les choix théoriques de Joigneaux, Laparra & Margolinas (2012, p. 3) pour qui les savoirs cachés relèvent de la partie du curriculum réel « composée des savoirs absents dans des programmes alors même que les connaissances associées à ceux-ci sont nécessaires pour réussir les tâches proposées à l'école ». Un exemple d'un tel savoir est fourni par l'énumération (Briand, 1999). Issu de la recherche en didactique, ce savoir essentiel à diverses tâches scolaires reste absent des programmes et peu connu des enseignants (Margolinas & Laparra 2011). Il existe une certaine similitude entre le concept d'énumération et celui de déconstruction dimensionnelle auquel nous nous sommes intéressés au cours de l'atelier. Tous les deux sont issus de la recherche sur l'enseignement-apprentissage des mathématiques, et non de la recherche en mathématique. Aucun des deux ne fait l'objet d'un enseignement explicite dans les filières de mathématiques à l'université ; on pourrait d'ailleurs discuter de la qualification de « mathématiques » pour de tels concepts qui ont émergé de l'analyse des pratiques mathématiques scolaires et non des mathématiques elles-mêmes. Quoi qu'il en soit, ni l'un ni l'autre ne figure explicitement dans les programmes de l'école alors qu'ils sont tous deux nécessaires à la réalisation de diverses tâches qui, elles, y figurent explicitement.

Reprenons l'exemple de la somme des angles du triangle déjà utilisé plus haut et imaginons qu'une étudiante parvienne à trouver une solution. Celle-ci pourrait très bien présenter ce qu'elle a fait au tableau, expliciter chacun des tracés auxiliaires qu'elle aurait été amenée à faire, et ainsi de suite. Pour autant, une telle explicitation peut-elle être reçue par les autres étudiants ? Peuvent-ils percevoir les enjeux d'apprentissage liés à la déconstruction dimensionnelle (décomposer une figure en réseaux de droites, enrichir un tel réseau, en détacher de nouvelles formes etc.) ? En l'absence d'une inscription institutionnelle explicite de ce savoir, le formateur peut-il parvenir à faire fonctionner le processus d'institutionnalisation ?

Nous arrivons ainsi à un deuxième niveau d'élaboration de notre problématique. En appui sur l'analyse développée par Duval des conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie, nous avions émis l'hypothèse que nos difficultés de formation étaient *en rapport* avec les difficultés cognitives spécifiques à la géométrie. Le recours à la notion de savoir caché nous permet de préciser notre questionnement autour de ce rapport : nos difficultés de formation sont-elles liées au caractère caché, implicite des savoirs liés à la visualisation et à la déconstruction dimensionnelle ? Peut-on les analyser comme relevant d'un dysfonctionnement du processus d'institutionnalisation ? Notre gestion des moments d'institutionnalisation renforce-t-elle la différenciation des apprentissages au profit de celles et ceux qui sont « avancés » en géométrie ?

Ces questions ont été soumises aux participants à l'atelier, tout en étant conscient que les réponses étaient à l'évidence hors de portée. Il s'agissait essentiellement de présenter le contexte général de notre questionnement réflexif. L'atelier s'est ensuite organisé en deux phases successives. Dans un premier temps, les participants ont travaillé sur les séances que nous avons conçues (extraits vidéo, transcriptions, productions etc.). L'objectif était de discuter de leur potentiel pour faire émerger les enjeux d'apprentissage liés à la posture cognitive à adopter en géométrie. Ensuite, nous nous sommes intéressés à la manière dont les trois mises en œuvre filmées organisaient (ou non) des moments d'institutionnalisation autour de ces savoirs. Ce compte rendu reprend cette organisation.

II - ANALYSE DU POTENTIEL DIDACTIQUE DES SEANCES

L'analyse de la séquence a débuté par une phase d'appropriation générale, à partir du document figurant en annexe 1. La tâche des participants a été d'en repérer les grandes phases et leurs objectifs principaux. Nous nous contenterons ici d'en rappeler les grandes lignes. L'ensemble de la séquence s'appuie sur une seule et même figure, déjà présentée plus haut (figure 1). Dans une première partie, cette figure est projetée au tableau, puis cachée. La tâche des étudiants est alors de la reproduire à main levée. Ils doivent ensuite en proposer une description. Dans une deuxième partie, il s'agit d'écrire des programmes de construction. Trois cas de figures sont envisagés, selon l'ancrage initial retenu : le triangle ABC, le triangle EDF ou le cercle de centre O. La troisième et dernière partie de la séquence porte sur la démonstration. Il s'agit d'exploiter le travail préalable sur la visualisation et la verbalisation (partie 1) et celui sur les programmes de construction (certains énoncés relèvent parfois de la construction, parfois non) pour nourrir le travail sur la démonstration.

Les participants repèrent notamment[4] :

- le fait que les tracés à main levée (ni manipulation des instruments, ni vocabulaire spécifique) sont suivis d'une phase de verbalisation permettant de préciser le vocabulaire spécifique à la géométrie.
- le fait qu'un même objet mathématique peut être vu (nous pourrions rajouter décrit) de différentes façons, en lien avec les choix implicites de reproduction.
- le point de vue séquentiel (ordre) qu'il est nécessaire d'adopter pour rédiger un programme de construction
- le fait que le travail sur les démonstrations nécessite de voir des relations entre objets, et de changer de point de vue.

Nous avions ensuite procédé à des analyses plus ciblées, portant essentiellement sur la première partie de la séquence. Nous en rendons compte ci-dessous.

[4] Nous profitons ici, et plus loin, de la prise de notes de Sara Arditi lors de l'atelier. Merci à elle.

1 Reproduction à main levée et description : le cas des parallélogrammes

Nous nous intéressons ici à la tâche de reproduction à main levée et aux descriptions proposées par les étudiants en nous centrant spécifiquement sur le cas des parallélogrammes de la figure 1. Nous cherchons ici à éprouver le point de vue cognitif de Duval (2005) à partir de l'étude des pratiques effectives des étudiants, mais aussi à analyser dans quelle mesure les savoirs en lien avec la visualisation et la déconstruction dimensionnelle sont effectivement en jeu.

Les supports proposés aux participants ont été de quatre types (annexe 2) : un extrait vidéo recueilli dans le groupe d'un premier formateur (appelons le F1), quatorze productions d'étudiants correspondant à la tâche de reproduction à main levée recueillies dans le groupe d'une autre formatrice F2 (nous désignerons le troisième collègues par F3), une photo du tableau de F1 après que les étudiants ont terminé de recenser ce qu'ils voyaient, et de cours extraits de transcription pour chacune des trois mises en œuvre. En complément de ces données, les participants avaient été invités eux-mêmes, dès le démarrage de l'atelier, à dire ce qu'ils avaient vu sur la figure 1, préalablement projetée puis rapidement cachée.

Dans un premier temps, les participants ont eu pour tâche d'identifier les objets et relations qui étaient prioritairement perçus par les étudiants. Sur le plan méthodologique, il s'agissait d'exploiter deux types d'indices : quels étaient les éléments mobilisés pour la reproduction à main levée (un tracé à main levé nous renseigne plus finement qu'un tracé aux instruments ; on peut tracer deux droites perpendiculaires à une même droite sans nécessairement tracer deux parallèles !), et quels sont les éléments qui font l'objet d'une verbalisation. L'activité de description ayant été préalablement proposée aux participants, les difficultés qu'ils avaient eux-mêmes rencontrées ont fortement pesé sur les analyses de ce paragraphe. Les participants avaient spontanément relevé un cercle, deux triangles, des droites, des médiatrices, un cercle circonscrit, son centre, un orthocentre, un triangle (peut-être équilatéral) inscrit dans le cercle, des points codés, la droite « des milieux », des hauteurs. Mais ils n'avaient perçu ni les parallélogrammes, ni les trapèzes, lesquels n'ont été identifiés que lors de l'étude générale du document (annexe 1). Ce phénomène a donc été pris en compte lors de l'analyse. Les participants ont rapidement repéré que les parallélogrammes n'avaient pas été identifiés par les étudiants non plus, tout du moins dans un premier temps.

Nous reprenons ici rapidement les éléments de synthèse que nous avons proposés :

- Les extraits vidéo montrent deux procédures de reproduction : la première débute par le « grand » triangle, la seconde par les trois droites concourantes et le cercle ayant pour centre le point de concours de ces droites. Dans les deux cas, les « unités » du tracé (ce qui est tracé dans une certaine continuité) sont des droites, des triangles (ABC et EDF) et un cercle.
- Ce constat semble être confirmé par l'analyse des productions, même si la marge d'interprétation est plus grande. Prenons l'exemple de la figure 10 (annexe 2-1). Nous faisons l'hypothèse que ce sont les triangles qui ont été représentés, et non les parallélogrammes. Selon cette lecture, le fait que les quadrilatères ADBC, EABC et ABFC aient une certaine ressemblance avec des parallélogrammes est une conséquence (non perçue à ce moment de la séance) du positionnement approximatif des sommets du triangle ABC au milieu des côtés du triangle DEF. Nous considérons que l'identification des parallélogrammes aurait conduit à une meilleure prise en compte de ses propriétés.
- La photo montre l'état du tableau à l'issue de la phase de description (figure cachée, groupe de F1), avant que F1 n'ait à nouveau projeté la figure pour valider et compléter cette liste. Comme lors des deux autres mises en œuvre, les étudiants n'ont pas spontanément identifié les parallélogrammes (il faudra un dialogue avec le formateur ou la formatrice pour y parvenir). Ils perçoivent néanmoins des parallèles, le théorème de Thalès et celui de la droite des milieux.

D'une manière générale, les analyses convergent pour convenir que les étudiants ont prioritairement repéré les « deux » triangles (ABC et DEF) et le cercle, avant les autres triangles, les parallélogrammes et les trapèzes. Conformément au cadrage théorique développé plus haut, nous en avons proposé une interprétation de nature cognitive. Cette interprétation consiste à attribuer l'identification des triangles et du cercle à un processus relevant de la division méréologique des figures au sens de Duval (juxtaposition et/ou superposition). Ce processus peut se développer indépendamment du discours. Comme pour la visualisation iconique (identification d'une forme par ressemblance à une forme typique), la visualisation est alors première par rapport à la verbalisation. Cette caractéristique distingue la division méréologique du processus de déconstruction instrumentale, qui pour sa part est intimement liée à une activité discursive (Duval 2005, p. 23). Selon nous, c'est ce second processus qui est en jeu dans l'identification des parallélogrammes. Avant d'expliciter ce point de vue, il nous semble important de revenir sur certaines discussions qui ont eu lieu au cours de l'atelier.

Comment expliquer le phénomène observé et sa régularité dans les trois groupes (l'identification des parallélogrammes vient dans un deuxième temps, elle émerge dans le dialogue) ? Une première explication pourrait consister à attribuer ce phénomène aux caractéristiques visuelles de la figure et à celles de notre appareil perceptif (biologiquement et culturellement déterminées). Le fait que les triangles et les cercles soient abordés à l'école avant les parallélogrammes pourrait en effet avoir une incidence sur la formation de notre regard géométrique et expliquer des différenciations dans le traitement des figures. Qui plus est, la nature des expériences liées à la visualisation évolue sensiblement du cycle 1 (où commencent à être abordés les triangles et les cercles) au cycle 3 (apparition des parallélogrammes) : la visualisation iconique et la division méréologique deviennent moins prépondérantes. Une participante a par ailleurs souligné que la présence du point O au milieu de la figure, point de concours de trois droites, est quelque chose qui focalise particulièrement l'attention. Les objets 2D qui lui sont culturellement liés sont le cercle (les droites en sont des diamètres et le point O le centre), et les triangles ABC et DEF (les droites en sont des hauteurs ou des médiatrices, le point O respectivement l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit). Terminons en évoquant le choix de codage : celui des deux triangles respecte l'ordre alphabétique, ce qui est d'usage lorsque l'on définit un objet en mathématiques, pas celui des parallélogrammes.

Une autre explication consiste à s'intéresser non seulement à la tâche de description mais plus généralement à la situation dans laquelle celle-ci s'insère. Cette tâche de description fait suite à une première tâche de reproduction à main levée. Il nous faut donc envisager l'influence de cette première tâche sur le comportement des étudiants dans la seconde. Un participant a avancé qu'il est peu usuel de commencer une reproduction de figure par un parallélogramme. Le fait qu'il y ait des contraintes à respecter pour le tracé, liées aux relations qui lient leurs côtés, en font des objets plus délicats à construire, y compris dans le cas d'un tracé à main levée. Dans la tâche proposée, il est possible, et assez facile, de se passer du recours au parallélisme pour la construction[5]. En ce qui concerne notre figure, il aurait alors fallu construire le triangle DEF comme une superposition de parallélogrammes, ce qui est en pratique plutôt laborieux, notamment au regard du tracé de ce triangle comme une « unité ». En résumé, cette explication se distingue de la précédente en ce qu'elle attribue la priorité du recours aux triangles et au cercle non pas, ou pas essentiellement, à des raisons d'ordre cognitif relevant du rapport des étudiants à la figure mais plutôt à des raisons d'ordre pragmatique et instrumentale. Selon cette analyse, les indices que nous avons relevés en lien avec la reproduction (vidéos et productions) seraient des indices du caractère plus laborieux des procédures mobilisant les parallélogrammes, plutôt que des indices de ce que les étudiants les percevraient moins spontanément. Et les indices liés à la verbalisation seraient également biaisés par cette tâche inaugurale.

Bien qu'il nous soit impossible d'évaluer précisément l'influence de la première tâche sur les comportements des étudiants dans la seconde, il nous semble néanmoins que l'explication de nature cognitive, en termes de « priorité visuelle » et de différenciation entre modes de visualisation, reste pertinente. Si les facilités de tracé peuvent constituer l'élément prépondérant ayant conduit les étudiants à privilégier triangles et cercle, on aurait pu s'attendre à ce que les étudiants contrôlent davantage la présence des parallélogrammes dans leur figure à main levée, une fois le tracé réalisé. A plus forte

[5] Notons que lors de l'écriture des programmes de construction : celui nécessitant l'utilisation des propriétés du parallélogramme (i.e. celui commençant par le « petit » triangle) a posé beaucoup plus de difficultés aux étudiants que les deux autres programmes envisagés (Partie 2, section B, tâche b – annexe 1)

raison, il nous semble qu'il est peu probable qu'un élément perçu, mais non utilisé dans les tracés pour des raisons de commodité, ne fasse l'objet d'aucune verbalisation spontanée dans la phase dédiée à cette tâche. Enfin, la même tâche de description a été proposée aux participants de l'atelier, indépendamment de la tâche de reproduction à main levée. Cela ne semble pas avoir eu d'influence notable puisque les parallélogrammes n'ont pas non plus émergé dans cet autre contexte.

Nous avons ensuite proposé aux participants de repérer des similitudes dans les extraits de transcription correspondant à l'émergence du terme parallélogramme dans les trois mises en œuvre (annexe 2-2). Chacun de ces extraits se situent après des relances des formateurs, les réponses spontanées des étudiants ayant été auparavant épuisées. Dans ces extraits, il semble que ce soient les dialogues avec les formateurs, et dans deux des mises en œuvre des éléments discursifs que l'on peut associer à la démonstration, qui aient été à l'origine de l'émergence des parallélogrammes dans le discours des étudiants. Prenons l'exemple du groupe de F3. Une étudiante ayant repéré une relation de parallélisme en a « déduit » la vision des parallélogrammes (« *du coup* on peut voir des parallélogrammes »). Il semble ici que le passage par le registre langagier, registre privilégié du déductif, ait permis à l'étudiante de s'engager dans un processus de déconstruction dimensionnelle, lequel se produit « pour une (re)construction déductive des objets représentés » (Duval 2005, p. 24).

2 Déconstruction dimensionnelle et discours

Nous poursuivons notre analyse de la mobilisation du processus de déconstruction dimensionnelle par les étudiants. Nous venons de défendre l'idée que ce processus était en jeu lorsqu'il s'agissait pour les étudiants de « détacher » des figures comme les parallélogrammes (ou plus généralement les trapèzes). Nous explorons maintenant la manière dont les interactions sociales et langagières contribuent à favoriser la flexibilité des points de vue, le détachement successif de diverses figures. Pour des contraintes de temps, nous avons proposé aux participants de faire un choix entre deux types d'extraits, chacun d'entre eux provenant de la phase de description de la partie 1 de la séquence. Le premier est constitué de passages dans lesquels la présence de hauteurs et de médiatrices est discutée (annexe 3). Il s'agit alors d'analyser la contribution des interactions entre les différentes voix qui s'expriment autour d'un même objet mathématique au processus de déconstruction dimensionnelle. Le second regroupe des passages dans lesquels on peut repérer des variations dans les modes de validation, perceptif ou déductif (annexe 4). Ici, nous cherchons à mieux comprendre les rapports entre visualisation et déduction. Les participants ayant fait le choix du deuxième type de données, les analyses qui suivent à propos des premières ne sont pas un compte rendu, mais plutôt une présentation de nos intentions.

Considérons la ligne joignant les points O et A. Différentes verbalisations peuvent renvoyer à cette même trace graphique : droite, segment, hauteur, médiatrice, perpendiculaire, diamètre, etc. Chacune d'entre elles porte un arrière-plan figural différent. Par exemple, l'expression « droite » renvoie à la seule ligne rejoignant O et A, hauteur renvoie à un triangle particulier, et diamètre à un cercle particulier. Plusieurs questions peuvent alors se poser : les étudiants repèrent-ils que ces diverses verbalisations renvoient à un même objet mathématique ? La coexistence de verbalisations renvoyant à des visualisations différentes est-elle susceptible de favoriser la flexibilité cognitive associée au processus de déconstruction dimensionnelle ? Ces questions nous semblent d'autant plus importantes que la capacité à considérer un même objet relativement à plusieurs figures « englobantes » nous semblent un élément essentiel dans le travail autour de la démonstration. Prenons l'exercice 3 de la partie 3 (annexe 1) : la démonstration suppose le recours à plusieurs statuts successifs pour la droite (AO) : hauteur issue de A dans le triangle ABC, droite perpendiculaire à (BC), droite perpendiculaire à (DE), droite simultanément perpendiculaire à (BC) et (DE), médiatrice de [DE], diamètre du cercle circonscrit à DEF.

A titre d'illustration, arrêtons-nous sur un court extrait de transcriptions au cours duquel deux étudiants débattent de « la » nature de la droite (AO) (groupe de F1) :

E1 : c'est pas la médiane de D E ? [médiatrice ?]

E2 : Ben non elle est perpendiculaire et elle passe par le sommet

E1 : ben non il passe pas par le sommet

E2 : ben il passe par A

E1 : Ah ouais vous parlez de l'autre triangle

Dans cet extrait, on observe deux arrière-plans figuraux divergents conduisant, dans un premier temps, à un quiproquo entre les étudiants. E1 s'intéresse à la droite (OA) relativement au segment [DE], alors que E2 semble focalisé sur le triangle ABC. Le différent se règle sans difficulté, par un recours au codage des sommets. Les interactions permettent ici la rencontre de deux regards différents sur un même objet, que la pratique géométrique nécessite d'articuler.

Poursuivons par l'étude d'un extrait issu du groupe de F2. On s'intéresse ici aux échanges concernant le fait que DEF soient ou non équilatéral. Ces échanges ont lieu après que les hauteurs du triangle ABC ont été repérées, et qu'une définition du concept de hauteur a été explicitée (annexe 3). Nous reprenons ici les arguments significatifs (colonne de gauche), en lien avec les arrière-plans figuraux que l'on peut y associer (colonne de droite).

E : il est inscrit dans un cercle et que O c'est l'orthocentre / *E : [l'orthocentre] du cercle*	On a ici deux voix dissonantes (chez un même élève) : le triangle DEF (« il ») est rapproché du cercle, mais l'expression « O c'est l'orthocentre du cercle » peut être rapprochée des échanges précédents relatifs au triangle ABC.
E [une autre étudiante] : ouais puis les hauteurs elles passeraient par [inaudible]	On retrouve ici un autre écho des échanges précédents autour des hauteurs dans le triangle ABC.
E : Les hauteurs elles passeraient par les milieux des côtés s'il était équilatéral	Les deux voix dissonantes persistent : il est difficile de saisir la référence du pronom « il », lequel renvoyait jusqu'ici assez clairement au triangle DEF.
F2 : Alors ouais / les hauteurs elles passeraient par O F et G / c'est vrai ça / enfin E F et / et pourquoi ?	F2 utilise ici le triangle EDF comme arrière-plan. Par contre, elle désigne les médiatrices de EDF par « hauteur », reprenant ainsi l'expression introduite par les étudiantes et renvoyant au triangle ABC. L'argument qui semble être une simple reprise de celui avancé par l'étudiant s'en distingue néanmoins : les hauteurs passent par les milieux des côtés vs. les médiatrices passent par les sommets.
E : Parce que dans un triangle équilatéral les médiatrices et les hauteurs elles sont confondues	Cette fois, l'énoncé est décontextualisé (pas de déictique). Il peut venir justifier tout aussi bien l'argument de l'étudiante que celui de la formatrice.
F2 : Mais attention parce que là ce sont les hauteurs de A B C	La formatrice relève la dissonance décrite plus haut ; elle clarifie l'arrière-plan associé au mot hauteur.
E : Ouais mais comme c'est le milieu c'est une médiatrice non ?	Cette fois, l'arrière-plan figural semble mieux installé (« milieu » et « médiatrice » renvoient toutes les deux aux cotés de EDF).

Nous interprétons ces échanges comme signalant un changement progressif de regard concernant la trace graphique reliant les points A et O. Le contexte énonciatif est initialement celui du triangle ABC, la ligne en question est désignée comme une hauteur. Par la suite, il évolue pas à pas. On peut tout d'abord repérer deux voix dissonantes, relevant des deux arrière-plans figuraux superposés et divergents. Cette superposition conduit à un certain flottement : il n'est pas toujours aisé pour l'observateur de saisir de manière univoque quels sont les objets auxquels les interlocuteurs font référence. En fin d'échange, le contexte énonciatif semble stabilisé, le triangle EDF sert de repère pour parler de la droite (AO). Cet échange illustre selon nous la manière dont un processus discursif, par la confrontation de positionnements énonciatifs associés à différentes figures, peut contribuer au processus de déconstruction dimensionnelle.

3 Déduction et visualisation

Nous avons déjà évoqué plus haut les relations entretenues entre la déconstruction dimensionnelle et les processus discursifs et déductifs. Nous poursuivons ici cette étude en nous focalisant sur des échanges, relevant toujours de la phase de recension des figures (séance 1, partie 1B), dans lesquels on peut repérer des variations dans les modes de validation (perceptif et déductif). D'une manière générale, et bien qu'aucune justification n'ait été exigée du travail des étudiants pour cette phase (autre qu'une justification perceptive : il y a tel ou tel objet parce que je le vois), les formateurs se sont appuyés sur plusieurs modes de validation pour contrôler les affirmations des étudiants : perceptif, déductif mais aussi « instrumental » (via un logiciel de géométrie dynamique). Ils se sont appuyés sur ces allers-retours pour évoquer les différentes pratiques de la géométrie scolaire, et leur évolution au cours de la scolarité. Bien sûr, en l'absence de toute définition de la figure projetée, les pratiques déductives sont conditionnées au choix de certaines hypothèses parmi les énoncés à disposition (des définitions implicites)[6]. Ces choix peuvent être consensuels ou non, explicites ou non.

Au sein de l'atelier, la pertinence de ces recours à des éléments de déduction, dans cette situation, a particulièrement été discutée. Est-il raisonnable de mobiliser un cadre déductif, qui plus est dans une première leçon de géométrie, en l'absence d'un statut univoque pour les énoncés et alors même qu'un enjeu de l'apprentissage de la démonstration réside dans la distinction entre les statuts des différents énoncés ? Sur quoi faire reposer le choix des hypothèses, alors que le recours à l'évidence perceptive est estimé insuffisant pour valider l'énoncé cible (la « conclusion ») ? N'y a-t-il pas des risques de confusion ? A l'inverse, une telle situation pourrait permettre de problématiser l'intérêt de disposer d'hypothèses stables, explicites et consensuelles pour s'engager dans un processus de démonstration, d'en faire émerger la nécessité. La troisième partie de la séquence propose d'ailleurs des exercices de démonstration qui reposent sur diverses définitions de la figure 1. Par ailleurs, la souplesse permise par un travail à partir d'une « figure » non définie pourrait offrir aux étudiants la possibilité, dans ces passages relevant d'une géométrie déductive, de choisir des hypothèses en relation avec leurs connaissances et leur vision particulière de la figure. Notre questionnement étant davantage centré sur le rôle de la visualisation, et de son articulation avec le discours, nous laissons de côté ces discussions autour de l'introduction à la démonstration.

Du point de vue de notre problématique, le fait que chacun des trois formateurs dont les mises en œuvre ont été filmées fasse des passages par la géométrie déductive, dans une phase de la séquence où l'objectif concernait plutôt des enjeux de visualisation et de formulation des relations perçues, nous paraît significatif. Nous interprétons cette régularité comme un indice des liens étroits qu'entretiennent les processus de visualisation et de démonstration. La déconstruction dimensionnelle ne relève pas d'une visualisation statique, ni même d'une succession de détachements isolés de figures à partir d'un réseau de points ou de droites. Ce qui est en jeu relève de la dynamique, de la transition d'un regard à un autre. Dans le registre langagier, ce sont typiquement les processus déductifs qui assurent ces transitions, d'un énoncé à un autre, via des règles de déduction. La pratique géométrique nécessite le même type de compétence en ce qui concerne la visualisation des figures, les deux processus étant intimement articulés. Cette hypothèse théorique d'un lien fort entre déduction et déconstruction dimensionnelle permet d'interpréter le fait que les formateurs aient été tentés de faire des passages par la géométrie déductive alors même que la première de séquence affichait plutôt des objectifs relevant plutôt de la visualisation, de la dénomination et de l'énonciation de relation. Dans les analyses qui suivent, nous cherchons à mettre en évidence la manière dont le recours à des éléments déductifs permet de tisser un lien dynamique entre les figures. Au niveau de l'atelier, nous nous sommes appuyés sur les transcriptions présentées dans l'annexe 4. La tâche des participants a consisté à identifier les

[6] À moins que l'on ne cherche à démontrer des implications (des « théorèmes » cf. groupe de B, annexe 4), mais cela ne change pas le fait qu'il soit nécessaire d'attribuer à certains énoncés un statut particulier.

basculements d'un mode de validation à l'autre, typiquement en repérant les termes qui sollicitent ou constituent des liens entre les énoncés (pourquoi, parce que, donc, mais, etc.), puis à identifier les hypothèses et arrière-plans figuraux qui viennent en soutien de la position énonciative des interlocuteurs. Les participants ont été répartis en trois groupes, chacun d'entre eux étant chargé d'une mise en œuvre. Dans ce compte rendu, nous nous contenterons de présenter les analyses ayant trait aux groupes de F1 et F2. Nous commençons par la mise en œuvre de F2.

Étudiants	F2
	Et oui c'est le cercle qui passe par les trois points du centre / par les trois sommets pardon / par les trois sommets du triangle / ouais ? / ben oui c'est quoi le cercle circonscrit à E D F ben c'est le cercle qui est tracé / bon qu'est-ce que ça veut dire sur le point O par rapport au point D et E par exemple ? ///
Y a égales distances	
	Y a égales distances d'accord / effectivement il est à égales distances / alors pourquoi tu me dis ça ?
C'est une propriété de la médiatrice	
	Ah d'accord / ben d'abord parce que O est le centre du cercle qui passe par D E et F / c'est quoi un cercle ?
[inaudible] ensemble des points [inaudible]	
	Oui c'est l'ensemble des points qui est à une distance donnée du centre O là / qui est ici / ça veut dire que forcément O D et O E sont deux rayons du cercle donc je sais que ces deux segments ils ont même longueur.
[... discussion autour du statut – segment ou longueur – du rayon ...]	
	Ok hum / et oui on avait dit un autre truc toi tu m'as dis moi je sais que O E c'est égal à OD parce que c'est une propriété de la médiatrice / c'est quoi cette histoire / vous savez me l'expliquer ? / de quoi elle parle ? /// non ?

Dans cet extrait, F2 engage une discussion autour de « la » raison pour laquelle les points E, D et F se trouvent à égales distances du point O. On peut alors observer la coexistence de deux arrière-plans figuraux venant soutenir l'énonciation des interlocuteurs. Les étudiants mettent en avant le fait que O est un point des médiatrices des segments [ED], [DF] et [FE]. D'un point de vue dynamique, ces droites viennent s'ajouter à la configuration composée des trois sommets du triangle EDF et du point O. Pour sa part, la formatrice évoque le cercle de centre O (déjà évoqué lors de sa première intervention dans le tableau ci-dessus). Cette fois, c'est le cercle et son centre qui viennent enrichir la figure. Au cours de l'atelier, une participante a fait l'hypothèse que cette divergence puisse être le fruit d'un effet de contrat, plus que de postures divergentes concernant la visualisation de la figure, l'expression « égales distances » se situant plutôt dans le réseau sémantique « contractuel » des médiatrices que dans celui du cercle. Les divergences seraient donc issues d'un défaut d'interprétation de l'intention didactique de la formatrice lié aux habitudes scolaires. Quoi qu'il en soit, nous pouvons bien observer des interprétations différentes de la demande de justification de F2, que l'on peut associer à différentes hypothèses implicites contribuant à définir la figure. Dans un premier cas, l'hypothèse est que les droites sont concourantes en O et qu'elles sont bien des médiatrices des côtés du triangle, dans le second, l'hypothèse est que O est le centre du cercle circonscrit au triangle DEF. La formatrice fera d'ailleurs le lien entre les deux lectures de la figure, soulignant ainsi l'existence de deux dynamiques permettant de mettre en relation les énoncés, et par la même occasion les éléments graphiques de la figure.

L'extrait provenant de la mise en œuvre de F1 offre un complément aux analyses précédentes. Il fait suite au constat collectif du fait que le cercle est circonscrit au triangle EDF.

Etudiants	F1
	[...] Pourquoi le point O est-il le centre de ce cercle ?
tous les points sont à la même distance de / tous les points qui appartiennent au cercle sont à la même distance de O	
	là tu me donnes la définition d'un cercle donc je ne peux pas te dire non / je te rappelle que ce que l'on appelle un cercle circonscrit c'est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle
c'est les trois points qui appartiennent au cercle de centre O	
	alors comment traduire ça par une relation ?
[… la relation recherchée est donnée par les étudiants et notée au tableau...]	
	donc là en fait j'ai pas répondu à la question que je vous ai posée / elle était pas très honnête en fait ma question / je vous demandais pourquoi / là on a trouvé un moyen de traduire autrement l'idée / mais comme je suis un homme terriblement têtu d'après vous pourquoi c'est vrai ça ? /// alors je vous donne un joker : pour vous c'est quoi une médiatrice ?
[… F1 fait ensuite la démonstration attendue...]	

Nous pouvons observer ici de nouvelles dynamiques autour d'une configuration spatiale proche de la précédente. F1 considère tout d'abord le cercle circonscrit à DEF et le point O. Cette fois, les dynamiques sont enclenchées par une demande de justification (implicitement déductive) du fait que le point O est bien le centre de ce cercle. L'enrichissement de la figure consiste du point de vue du formateur à prendre en compte les médiatrices des côtés du triangle. L'hypothèse associée est que ces médiatrices en sont bien, et qu'elles sont concourantes en O. Ce mouvement de position énonciative est assez proche de celui effectué par les étudiants dans l'extrait précédent, même si les deux dynamiques se différencient du point de vue de la prise en compte initiale du cercle. De leur côté, les étudiants se focalisent sur le cercle, l'enrichissement semble consister à appréhender le cercle comme un ensemble de points, plutôt que comme un objet linéaire, ce qui n'est pas neutre sur le plan cognitif (Bulf, Mathé & Mithalal 2014). Ceux-ci se donnent une hypothèse implicite selon laquelle les points du cercle sont bien équidistants par rapport au point O. Comme précédemment, le formateur met en fin de compte en perspective les deux dynamiques. Chacun de ces deux extraits illustre la manière dont le recours à un mode de validation déductif permet de nourrir une dynamique dans la visualisation des figures, de par la recherche de relation entre configurations spatiales qu'une mise en relation entre énoncés suppose.

III - VISUALISATION ET INSTITUTIONNALISATION

Dans la partie précédente, nous avons cherché à montrer que la séquence que nous avons conçue et expérimentée permettait de faire émerger certaines pratiques dont les fondements cognitifs sont spécifiques de la géométrie. La familiarité avec ces pratiques, et les savoirs qui leur sont associés, nous semble être un enjeu important de la formation des étudiants. Les processus cognitifs sous-jacents, celui de la déconstruction dimensionnelle particulièrement, sont très souvent en jeu dès lors qu'un apprentissage géométrique se construit. Dans cette partie, nous discutons de la prise en compte des savoirs liés à la visualisation et à la déconstruction dimensionnelle dans nos pratiques de formation, en particulier dans les phases didactiques des situations d'apprentissage relevant du processus d'institutionnalisation. Rappelons que ce questionnement sur l'institutionnalisation était essentiellement absent lors notre réflexion collective ayant conduit à la conception des séances de formation. On ne trouve d'ailleurs pas de trace d'un positionnement commun sur ce qui devrait ou non être institutionnalisé au cours de cette séquence dans le document descriptif. Pour autant, ce document évoque certains objectifs d'apprentissage, et propose parfois des orientations pour les mises en commun et synthèses. Pour ce qui est de la première séance, plusieurs passages signalent des enjeux de visualisation (mise en commun de la partie 1A, fin de la synthèse de la séance). Sur le plan méthodologique, nous nous focalisons dans cette partie sur les moments collectifs impliquant fortement l'enseignant (mise en commun, conclusion, synthèse...) lors de la première séance (partie 1 et 2). Nous chercherons en particulier des contrastes entre les trois mises en œuvre, de manière à mieux identifier les choix didactiques des formateurs.

1 Mise en œuvre de F1

F1 est un formateur expérimenté, intervenant tant dans les aspects disciplinaires, didactiques ou transversaux de la formation professionnelle. Il est par exemple en charge d'un cours sur le « métier » d'élève, un cours qui aborde notamment les aspects des apprentissages des élèves dont les curricula ne rendent pas compte, et plus largement à la thématique de l'implicite dans l'enseignement scolaire. Il nous semble que l'on peut interpréter certains de ses choix pédagogiques et didactiques à l'aune de cette particularité. Au sein de l'atelier, nous nous sommes arrêtés sur le passage au cours duquel ce formateur explicite les consignes de la tâche B de la partie 1 de la première séance (recensement de ce qui a été perçu). La passation de la consigne dure 1min30s, ce qui est assez considérable, notamment au regard des deux autres mises en œuvre. F1 procède à des reformulations, explicite l'organisation pédagogique et matérielle de la tâche, et précise ce que les étudiants vont avoir à faire pour apprendre au-delà de la seule réalisation de la tâche puisqu'il est notamment question de prise de notes (cf. annexe 5 pour une transcription complète). Bien sûr, ces précisions ne portent pas sur ce qu'il va être nécessaire de mettre en œuvre, du point de vue mathématique, pour réaliser la tâche qui est proposée. Comme nous l'avons développé dans la première partie de ce texte, il est nécessaire qu'une part d'implicite soit maintenue en ce qui concerne les enjeux d'apprentissage. Nous cherchons maintenant à décrire la manière dont le formateur va (ou non) se ressaisir des connaissances mathématiques que les étudiants ont mises en jeu dans la tâche qui leur a été proposée pour les identifier comme des savoirs de la culture scolaire, susceptibles d'être utilisés en d'autres occasions. Nous avons mis en évidence dans la partie précédente le fait que certaines de ces connaissances avaient à voir avec des compétences de visualisation (et de verbalisation) liées à la déconstruction dimensionnelle. Ces connaissances sont-elles relevées par le formateur ? Privilégie-t-il d'autres aspects de l'activité mathématique ?

Après avoir recensé les verbalisations proposées spontanément par les étudiants (cf. photo du tableau annexe 2), F1 organise une phase dialoguée au cours de laquelle ces verbalisations sont validées et complétées. Le formateur enchaîne alors directement sur la partie 2 de la première séance, à savoir la partie concernant les programmes de construction. Il ne cherche pas, à ce moment-là tout du moins, à exploiter plus en avant la tâche réalisée, à expliciter et organiser les savoirs mathématiques qui ont été travaillés. Il semble donc que celui-ci interprète cette partie 1 comme un travail préparatoire (analyse de la figure, rappel de vocabulaire) à la partie 2 plutôt que comme une situation d'apprentissage ayant ses propres objectifs en termes de savoirs. Le formateur avait par ailleurs mentionné lors de la passation de consigne le fait qu'un document récapitulant définitions et théorèmes serait distribué en fin d'activité :

F1 : Quand on aura fini l'activité, je vous distribuerai un document dans lequel se trouve toutes les définitions, tous les théorèmes qu'on va utiliser ensemble / donc vous aurez tout par écrit / donc quand on va échanger ensemble on va évoquer bien sûr forcément des définitions des théorèmes / vous n'êtes pas du tout obligés de tout noter / les seules choses que je vous inviterai à noter ce sera les apartés de didactique que je ferai en plus / mais à chaque fois je vous le dirai quand je ferai des remarques didactiques / d'accord ? / mais tout ce qui est mathématiques générales vous aurez un beau dossier à la fin qui résumera tout

Cette diffusion semble donc jouer le rôle d'un processus d'institutionnalisation minimaliste pour la première partie de la séance. Ce qui nous intéresse ici n'est pas tellement d'expliquer ou de discuter ce choix (« rappel » vs. apprentissage, horaires très contraints *etc.*), d'ailleurs partagé par les autres formateurs, mais plutôt de relever que ce document consiste en un recueil de définitions et de théorèmes, éventuellement illustré par des figures (nous reviendrons plus loin sur son organisation). Les savoirs associés au traitement des figures, à la dynamique de la déconstruction dimensionnelle, ne sont usuellement pas représentés dans ce type de document. Comme l'a souligné un participant à l'atelier, les objectifs d'apprentissage concernant la déconstruction dimensionnelle et la visualisation ne sont pas vraiment explicites dans notre document collectif, il n'est donc pas étonnant que ces savoirs ne le soient pas non plus dans les mises en œuvre. Quoi qu'il en soit, ce qui nous intéresse ici est aussi d'identifier et de comparer l'interprétation que les formateurs ont pu faire de ce document lors des trois mises en œuvre. Nous poursuivons en décrivant les moments dans lesquels les étudiants ont été invités à prendre du recul au cours de la tâche de rédaction de programmes de construction (séance 1, partie 2), ces moments étant de susceptibles de contribuer au processus d'institutionnalisation. Après avoir explicité ce qui était attendu de la part des étudiants dans ce type d'activité, de manière à nouveau très détaillée, le formateur a engagé les étudiants dans la rédaction d'un premier programme, sans précision concernant le point d'ancrage. Une phase de recherche a été organisée, suivie d'une mise en commun. Une première montée en généralité a lieu après qu'un premier programme de construction a été écrit au tableau et que les étudiants ont discuté du choix de son ancrage initial (le programme présenté commence par le triangle DEF) :

F1 : Quand j'ai circulé parmi vous au début, vous étiez tous dans le même débat / la difficulté de l'exercice c'est de passer d'une figure statique à un programme qui véhicule une dynamique / c'est à dire qu'il faut trouver un début et un enchaînement / et vous avez beaucoup réfléchi sur le début

L'expression « l'exercice » a dans cette intervention une valeur générique (le formateur utilise ensuite beaucoup d'indéfinis). Le formateur distingue ici deux modes d'appréhension d'une figure : un mode visuel et statique qu'il oppose à un mode discursif et séquentiel. Nous avons abordé plus haut cette opposition entre dynamique et statique, soulignant la nécessité de construire une forme dynamique de la visualisation via le processus cognitif de déconstruction dimensionnelle. Nous avons donc affaire dans ce court extrait à de premiers éléments portant sur la visualisation, son rapport au langage et les difficultés spécifiques que pose la pratique géométrique. Pour autant, le projet didactique de F1 semble piloté par une autre préoccupation. À la suite de ce cours passage, un étudiant propose un nouveau programme de construction, débutant par le tracé du cercle. Le formateur fait alors remarquer que ce deuxième programme ne recourt qu'à peu de concepts mais que, pour autant, il permet aussi d'assurer l'ensemble des observations réalisées précédemment, par un processus de déduction (il ouvre alors une parenthèse à propos de la géométrie déductive, axiomatique, en référence à Hilbert). Cette orientation, privilégiant le travail sur la démonstration et en particulier sur sa dimension discursive, est confirmée par la suite. La séance se termine par la distribution du document dont il a déjà été question lors de la première partie de la séance. Le formateur procède alors à un nouvel aparté didactique visant notamment à expliquer l'organisation du document, dans la perspective de son usage dans le travail déductif. Selon que l'on privilégie une recherche par analogie, par chaînage avant ou arrière, les étudiants sont invités à préférer telle ou telle entrée dans le document. En somme, nous retiendrons de cette mise en œuvre que l'interprétation par ce formateur du document conçu par les collègues du GRAF est prioritairement orientée par les enjeux d'apprentissage en lien avec la démonstration. Il s'agit bien sûr d'un aspect délicat de la formation, et d'un levier de réussite important pour le concours de recrutement. Les explicitations concernant les savoirs associés à la visualisation sont plutôt rares.

2 Mise en œuvre de F3

F3 est également un formateur expérimenté, par ailleurs chercheur en mathématiques. A l'image de ce que nous avons fait pour la mise en œuvre de F1, nous cherchons à identifier les principaux enjeux de savoirs que F3 attribue aux séances conçues. Nous commençons par nous intéresser à la transition entre la première phase (séance 1, partie 1A) et la seconde (partie 1B). La phase de recension faisant suite aux reproductions à main levée commence figure cachée. La liste des observations est ensuite validée et complétée sous forme de dialogue avec le formateur, la figure étant à nouveau projetée. Cette fois-ci, et bien que F3 ait également prévu un document récapitulant les définitions et théorèmes essentiels de la géométrie plane à distribuer aux étudiants, le formateur prend le temps d'un échange assez fourni autour des droites remarquables des triangles. L'originalité de cet échange, au regard des deux autres mises en œuvre, est de se détacher plus fortement de la figure associée à la tâche : il ne s'agit plus de valider des observations (via parfois un rappel des définitions), ni de raisonner en contexte (le triangle DEF peut-il être isocèle ?).

F3 : y a quelque chose sur lequel je voudrais revenir / alors la première 'trois droites passant par le centre du cercle' [il entoure l'expression qui figure au tableau] / et la seconde que j'avais d'ailleurs négligée tout à l'heure qui est 'O est l'orthocentre de ABC' [il entoure également] / je vais m'occuper d'abord des droites sécantes au centre du cercle qui sont en fait les médiatrices / alors je vais faire disparaître progressivement le triangle ABC qui ne m'intéresse pas en l'occurrence [il le fait grâce à un logiciel de géométrie dynamique] [...]

Le formateur s'exprime ici à la première personne à propos de concepts mathématiques. Il se positionne comme enseignant, marquant ainsi le caractère fortement didactique du passage. Par ailleurs, la fonction du logiciel de géométrie dynamique permettant de cacher certains éléments de la figure est mise à contribution pour faciliter la visualisation des objets dont il est question. Les droites concourantes ne peuvent plus être vues comme des hauteurs si le triangle ABC est caché (par la suite, ce sera le triangle EDF puis le cercle qui seront à leur tour cachés, les droites qu'il s'agit de réinterpréter restant affichées). Ceci procure un gain de généralité puisque seuls les composants directement concernés par les énoncés en jeu sont présents. En d'autres termes, les observations réalisées sur la figure 1 sont recontextualisées dans une configuration graphique plus générale (des déplacements opérés sur les sommets du triangle contribuent par ailleurs à renforcer cette généralité). F3 en profite pour énoncer et écrire au tableau certains théorèmes classiques sur les droites remarquables du triangle. Le travail sur les savoirs « conceptuels » de la géométrie plane est donc plus conséquent dans cette mise en œuvre que dans la précédente, qui privilégie pour sa part les enjeux d'apprentissage de la démonstration. Quant au travail sur la visualisation des figures, il ne fait pas non plus l'objet d'une prise en charge explicite. Bien que le fait de cacher ou de réafficher certains éléments graphiques puisse être interprété comme une forme de modélisation de la dynamique visuelle de la déconstruction dimensionnelle (au sens d'un processus cognitif de détachements dynamiques de figures) ce sont bien les configurations statiques qui sont thématisées, de manière relativement isolées. La transition vers l'écriture de programmes de construction est ensuite abordée par F3 à partir de ce que le logiciel permet ou non de déplacer (plusieurs constructions avaient été préparées). A la manière de F1, il utilise alors les écarts entre les contenus des programmes de construction et les observations sur la figure 1 pour aborder la dimension déductive de la géométrie. Pour ce qui est de notre questionnement sur l'interprétation des enjeux de savoirs de cette séance par chaque formateur, nous retenons donc que les mises en œuvre de F3 et de F1 se distinguent par leur orientation principale (démonstration ou définitions et théorèmes). Dans les deux cas, les savoirs liés à la visualisation sont peu explicités.

3 Mise en œuvre de F2

F2 est une formatrice confirmée. Elle est par ailleurs chercheure en didactique des mathématiques, elle connaît bien les travaux de Duval sur la visualisation. Dans cette mise en œuvre, on trouve, plus que dans les deux autres, un certain nombre de références aux compétences de visualisation que suppose la pratique géométrique scolaire. En voici un exemple :

F2 : vous voyez qu'on en voit des choses sur cette figure / on a vu qu'on arrivait d'abord à décomposer cette figure en surfaces, en sous éléments de surface / deux triangles et puis un cercle / et puis après là depuis tout à l'heure on est en train de décortiquer les postions relatives des sommets de A B C par rapport à D E F et puis ce que sont ces droites-là / ce que représente le point O pour A B C / ce que représente le point O pour D E F / est-ce que vous voyez d'autres choses ?

E : est-ce qu'on pourrait pas faire trois triangles à l'intérieur de D E F ?

Cette intervention intervient lors de la phase de recension des objets et relations perçus dans la figure. Sa fonction didactique est de relancer la dynamique des observations du côté des étudiants, ce qui semble se produire puisqu'une étudiante émet une nouvelle proposition (ce seront ensuite les parallélogrammes qui seront identifiés, cf. annexe 2-2). Elle rend compte de la nature des compétences mathématiques qu'il a été nécessaire de mobiliser afin d'identifier les éléments déjà repérés dans la figure. Bien qu'assez fortement contextualisée, cette intervention invite à adopter une posture réflexive, à prendre de la distance par rapport au processus spontané de visualisation. Elle nous semble susceptible, de ce point de vue, de contribuer au processus d'institutionnalisation. La recension des observations se poursuit, suite à quoi F2 revient, cette fois-ci de manière plus générale sur le travail venant d'être fait :

F2 : bon / donc d'accord vous voyez que cette première activité c'était pour vous montrer que ces activités de reproduction à main levée c'est des trucs qu'on retrouve dans les classes / ben c'est important parce qu'est-ce qu'on a fait en fait / on a essayé de matérialiser des relations que l'on voyait entre les objets / vous voyez que les contraintes de précision ici moi je m'en fiche / ça n'a pas d'importance / ce qui était intéressant c'était de déconstruire la figure de regarder les sous-éléments de la figure d'essayer de les mettre en relation / C'est ça que je voulais faire apparaître avec vous / ça nous a permis aussi un peu de rappeler les propriétés géométriques de se remettre un peu là-dedans / bon ben maintenant on va passer à une autre activité […]

Elle dévoile très explicitement dans ce passage ses intentions didactiques (« c'est ça que je voulais faire apparaître avec vous »). Il s'agissait d'apprendre aux étudiants à « déconstruire », « regarder », « mettre en relation ». Les savoirs visées par la formatrice lors de cette première partie de la séance 1 relève de la construction d'un regard géométrique. Les rappels concernant les propriétés géométriques, assez centraux dans la mise en œuvre de F3, semblent ici plus secondaires (« ça nous a permis *aussi*... »). Ces savoirs font néanmoins l'objet d'apartés occasionnels, parfois à partir de figures plus générales construites pour l'occasion et s'écartant du contexte initial (un polycopié sera également distribué). Suite à cette explication, F2 engage les étudiants dans la réalisation des programmes de construction, laissant libre le choix de leur commencement. À la manière des autres mises en œuvre, elle s'appuie sur ces programmes pour légitimer la nécessité d'un discours déductif.

Dans cette partie, nous avons cherché à identifier quels étaient les enjeux d'apprentissage que les formateurs attribuaient en priorité à ces séances, et plus particulièrement à la première. Notre analyse comparée du processus d'institutionnalisation révèle des divergences dans leurs interprétations. F1 semble mettre au cœur de ses préoccupations la thématique de la preuve, F3 les définitions et propriétés des objets élémentaires de la géométrie plane. Dans ces deux mises en œuvre, les savoirs liés à la visualisation restent au second plan, à la différence de celle de F2 qui les met davantage en avant. Nous ne chercherons pas ici à expliquer tel ou tel choix. Notre propos était plutôt de souligner ces divergences, lesquelles sont susceptibles d'avoir une influence sur les apprentissages des étudiants.

IV - CONCLUSION

Dans cet atelier, nous avons abordé la question d'un enseignement des savoirs géométriques concernant la visualisation des figures. Nous avons montré que ces savoirs étaient concernés dans plusieurs tâches de notre séquence. Le processus cognitif de déconstruction dimensionnelle est en jeu dès lors qu'il s'agit de reproduire une figure, d'en construire aux instruments, mais aussi dès lors qu'il s'agit d'en produire des descriptions ou de s'engager dans des processus déductifs. En appui sur les concepts de savoir caché et d'institutionnalisation, nous avons émis l'hypothèse que l'absence d'identification de ces savoirs, à destination des étudiants, était susceptible de contribuer à la différenciation des apprentissages au détriment de celles et ceux qui n'auraient pas construit les conditions cognitives de ces apprentissages. L'originalité de notre démarche est d'avoir cherché à articuler des cadres théoriques d'orientation cognitive d'une part et sociologique de l'autre. Nous avons alors montré, à partir d'une analyse comparée de trois mises en œuvre, que l'interprétation des enjeux d'apprentissage d'une même séquence, conçue collectivement (mais sans que ces enjeux de savoir n'aient fait l'objet d'une trace écrite univoque), pouvait varier selon les formateurs. On peut penser que ces variations sont corrélées à l'idée que chacun se fait de la nature du travail géométrique, aux différentes expériences professionnelles passées. Il n'est pas étonnant que la formatrice par ailleurs sensibilisée aux enjeux d'une éducation du regard géométrique ait davantage mis en avant ces savoirs. Les données à notre disposition ne permettent néanmoins pas d'étudier les effets de ces variations sur les apprentissages géométriques des étudiants et plus généralement, sur leur formation professionnelle. La question de la nécessité d'un enseignement de la visualisation géométrique, de concepts comme celui de déconstruction dimensionnelle, reste pour nous largement ouverte. Le principal apport de notre recherche nous semble être d'en préciser les enjeux. Signalons à ce propos une discussion impulsée par une participante lors l'atelier. Les notions de visualisation iconique, non iconique, de déconstruction dimensionnelle, etc., sont des notions relevant de la cognition mathématique, et non des mathématiques elles-mêmes. Elles se distinguent par ailleurs des analyses métamathématiques des pratiques discursives ou déductives en mathématiques. Ces dernières, dont certaines revendiquent une proximité avec les pratiques effectives, disposent de théories formalisées de formes textuelles stables et consensuelles. En somme le statut de savoir des notions rendant compte de la visualisation géométrique ne va pas de soi, ce qui n'est pas sans poser de difficultés si l'on envisage d'en faire des objets d'enseignement ou de formation. Nous terminons en évoquant les spécificités de la formation des professeurs des écoles. La question prend en effet une autre coloration dans ce contexte, si on le compare par exemple à un enseignement de géométrie à destination de collégiens, par exemple. En formation des enseignants, il s'agit aussi de travailler, dès le premier semestre du Master, la construction de compétences professionnelles. Au-delà des apprentissages géométriques disciplinaires, un enseignement de savoirs liés à la visualisation est susceptible de contribuer à la formation professionnelle en outillant les étudiants pour l'analyse des pratiques géométriques scolaires.

V - BIBLIOGRAPHIE

BARRIER T., CHESNAIS A. & HACHE C. (2014) Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 175-193.

BARRIER T., HACHE C., MATHE A.C. (2014) Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N*, **93**, 13-37.

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(1)**, 41-76.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7(2)**, 33-115.

BULF C., MATHE A.-C. & MITHALAL J. (2014) Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 29-48.

CELI V. & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014) Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 151-174.

COULANGE L. (2012) *L'ordinaire de l'enseignement des mathématiques, Pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves*, Habilitation à Diriger des Recherches (note de synthèse), Université Paris Diderot.

COULANGE L. (2014) Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation des savoirs mathématiques, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 9-27.

DUVAL R. (1992) Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?, *Petit x*, **31**, 37-61.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Bern : Peter Lang.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53.

JOIGNEAUX C., LAPARRA M. & MARGOLINAS C. (2012) Une dimension cachée du curriculum réel de l'école maternelle: la littératie émergente ? C*olloque Sociologie et didactiques*, 2012, Lausanne, Switzerland.

MANGIANTE-ORSOLA C. & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014) Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres, in *Actes du XL colloque Copirelem* (pp. 57-80), 2013, Nantes, France.

MARGOLINAS C. (2012) Des savoirs à la maternelle. Oui, mais lesquels ? in *Actes du XXXIXe colloque Copirelem*, 2012, Quimper, France.

MARGOLINAS C. & LAPARRA M. (2008) Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. Des effets de la transparence des objets de savoir, *Colloque Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*, 2008, Bordeaux, France.

MARGOLINAS C. & LAPARRA (2011) Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire, 19-32, in Rochex J.Y. et Crinon J. (éds.) *La construction des inégalités scolaires*, Rennes : PUR.

PERRENOUD P. (1993) Curriculum : le formel, le réel, le caché, 61-76, in Houssaye J. (éd.) *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui*, Paris : ESF.

PERRENOUD P. (1995) *Métier d'élève et sens du travail scolaire*. Paris : ESF.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C. & LECLERCQ R. (2013) Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments, *Repères-IREM*, **90**, 7-41.

ROCHEX J-Y. & CRINON J. (2011) *La construction des inégalités scolaires, au cœur des pratiques et dispositifs d'enseignements*. Rennes : PUR.

SENSEVY G. (2008) Le travail du professeur pour la théorie de l'action conjointe en didactique : une activité située ?, *Recherche & Formation*, **57**, 39-50.

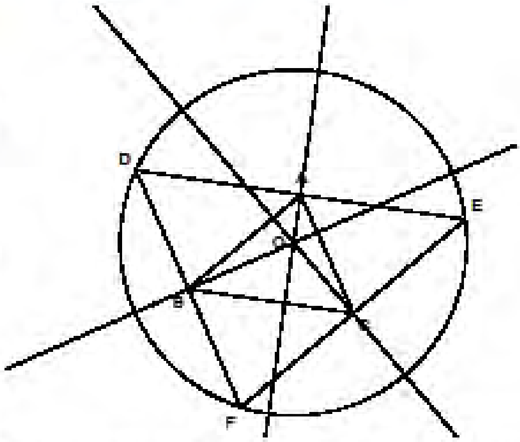
ANNEXE 1

Les séances élaborées et expérimentées
(dans le cadre du GRAF « géométrie » ESPE Lille Nord de France)

Séance 1

Partie 1 : Reproduction à main levée, identification perceptive de propriétés géométriques d'une figure donnée

A. Reproduction à main levée d'une figure projetée



Objectifs : identifier des sous-éléments (2D, 1D, 0D) d'une figure donnée, reproduire à main levée les relations perçues entre ces sous-éléments

Choix de commencer par une reproduction à main levée : permettre à la plus grande partie des étudiants de produire quelque chose, pas d'obstacle lié au vocabulaire, à la formulation, montrer aussi la pertinence (didactique) d'un travail sur le tracé à main levée. Aide à la formulation des propriétés et relations entre ces sous-éléments de la figure (être capable de voir avant d'être capable de dire).

Pas d'instrument pour se débarrasser des difficultés de manipulation et d'usage des instruments. Se libérer d'un contrat de précision en géométrie qui mette en échec les étudiants, pas d'attente concernant le soin pour privilégier réflexion sur propriétés et relations.

Déroulement prévu :

La figure ci-contre est projetée quelques minutes au tableau puis cachée.

Consigne : Reproduire la figure à main levée (individuelle, sur feuille isolée)

Mise en commun :
Qu'avez-vous représenté ?
Première expression de difficultés des étudiants.
→ Vers l'identification de sous-éléments :

- on peut regarder les triangles DEF et ABC, DAB, BCF, AEF...,
- voir le cercle comme défini en premier ou cercle circonscrit à DEF,
- voir les parallélogrammes, etc...

À l'oral : de premières relations perçues entre ces sous-éléments (de premières formulations, rappels de vocabulaire)

Éventuellement à débattre : distinction dessin figure : quelles sont les propriétés que nous ne prenons pas en compte en géométrie ?
Différents dessins représentent une même figure.
Quels types de propriétés prend-on en compte en géométrie ? (position relative de A par rapport à [DE] mais pas position de E, D, F sur le cercle par exemple...pas si simple). En fait, en ne regardant que ce dessin, on ne peut que faire des hypothèses sur les propriétés géométriques caractérisant la figure sous-jacente.

Document de travail élaboré par le GRAF « géométrie » ESPE de Lille

B. Formuler les propriétés perçues

En individuel, figure projetée au tableau. Formulation écrite individuelle

Consigne : «Objectifs : formuler les propriétés / relations que vous voyez dans cette figure. »

Mise en commun : formulation des propriétés géométriques, des relations perçues entre les sous-éléments de la figure, rappels sur le vocabulaire, les formulations des propriétés en géométrie.

Rappels sur les conventions de notation.

Partie 2 : Programme(s) de construction

Trois entrées différentes sont possibles pour rédiger un programme de construction de cette figure : en partant du cercle, en partant du triangle EDF, en partant du triangle ABC.

A. En collectif, construction de la figure sur logiciel de géométrie dynamique en partant du cercle, élaboration d'un premier programme de construction (simple), règles pour élaborer un programme de construction

Qu'est-ce qu'un programme de construction ?
Objet scolaire
But : communiquer une suite d'étapes permettant de construire sans ambiguïté une figure géométrique, caractérisée par des propriétés géométriques.
(→ Les énoncés, le grain, dépend du public visé, des connaissances et outils à disposition tant de celui qui l'émet que de celui auquel il est destiné)
Une suite d'étapes de construction d'une figure géométrique qui ne donne lieu à aucune ambiguïté.
Pas d'évocation des instruments.
Rq. : pour nous : on dira qu'on construit plutôt des points, des segments, des droites, des cercles que des carrés, des parallélogrammes.

Proposition alternative : Rédaction en utilisant des « étiquettes d'instruction ».

B. Individuellement, rédaction d'autres programmes de construction

a) En partant de EDF
b) En partant de ABC

Mise en commun : des étudiants décrivent leur programme de construction (ou affiche). On teste sur logiciel de géométrie dynamique la validité des programmes.

Des programmes de construction possibles

Question bonus

Soient A, B, C trois points. Comment construire, à règle et au compas, un triangle EDF tel que A, B, C soient les milieux respectifs de [ED], [DF], [EF].

Synthèse possible

Document de travail élaboré par le GRAF « géométrie » ESPE de Lille

Mise en regard des programmes de construction produits : des propriétés différentes, des instruments à utiliser différentes, retour sur le vocabulaire, sur les « règles d'un programme de construction », sur les écarts entre description et programme de construction

Peut-être retour sur des questions liées à la distinction dessin/figure : on reproduit la figure, pas le dessin donc pas de prise en compte des mesures (notamment des mesures des côtés du triangle DEF), on peut par exemple placer les points E,F et D n'importe où sur le cercle.

Retour sur les objets, propriétés, définitions
On peut construire différents regards sur la figure, isoler différents sous éléments, voir de différentes manières ces sous-éléments.
Exemple : Qu'est-ce que le point O ?
O est le centre du cercle.
O est le centre du cercle circonscrit.
O est le point d'intersection des médiatrices du triangle EDF.
O point de concours des hauteurs de ABC.

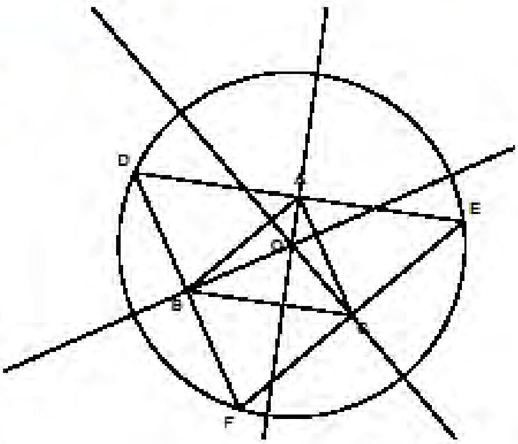
On formule les différentes figures englobantes, manières de voir…

Fin de la séance : travail sur tracés à la règle et au compas ; éventuellement : rappels sur des objets géométriques de base, des propriétés, exercices

Séance 2

Partie 3 : exploitation pour le travail dans la démonstration

A. Démonstration, construction de preuves



On choisit un programme de construction, donc une définition de la figure. Comment peut-on en déduire des propriétés identifiées en séance 1, convoquées dans un autre programme de construction ?
Autrement dit :
On a des propriétés en vrac (partie 1)
Certaines sont suffisantes pour construire, pour définir la figure.
À partir de celles-ci, comment montrer que les autres sont vraies ?

En maths, pour montrer qu'une propriété est vraie, le système de validation repose sur raisonnement hypothético-déductif.

Appui sur banques de propriétés et théorèmes.

Quelques premiers exemples de démonstration. Discussion sur ce qu'est une démo.

Exemple : on part de DEF et A, B, C milieux respectifs. Montrer que ADCB est un parallélogramme.

Exemples :
(On part du triangle ABC)
Soit *ABC* un triangle quelconque, soit *O* son orthocentre.
Soient Δ1 la droite perpendiculaire à (OB) passant par B
Δ2 la droite perpendiculaire à (AO) passant par A
Δ3 la droite perpendiculaire à (OC) passant par C.
Δ1 et Δ2 se coupent en D, Δ1 et Δ3 se coupent en F, Δ2 et Δ3 se coupent en E.

Montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle EDF.

(On part du triangle ABC)

Soit *ABC* un triangle quelconque, soit *O* son orthocentre.

Document de travail élaboré par le GRAF « géométrie » ESPE de Lille

Soit F le point tel que ABFC soit un parallélogramme

Soit E le point tel que ABCE soit un parallélogramme.

Les droites (AE) et (BF) se coupent en D.

Montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle EDF.

Activités de prolongement

Exercice 1

Soit (C) un cercle de centre O
On considère trois points D, E et F appartenant à (C)
Soient, respectivement A le milieu de [DE], B milieu de [DF] et C milieu de [EF]
Démontrer que O est l'orthocentre du triangle ABC

Exercice 2

Soit DEF un triangle quelconque et O le centre de son cercle circonscrit.
Soient A, B et C milieux respectifs des segments [DE], [DF] et [EF]
Démontrer que O est l'orthocentre du triangle ABC

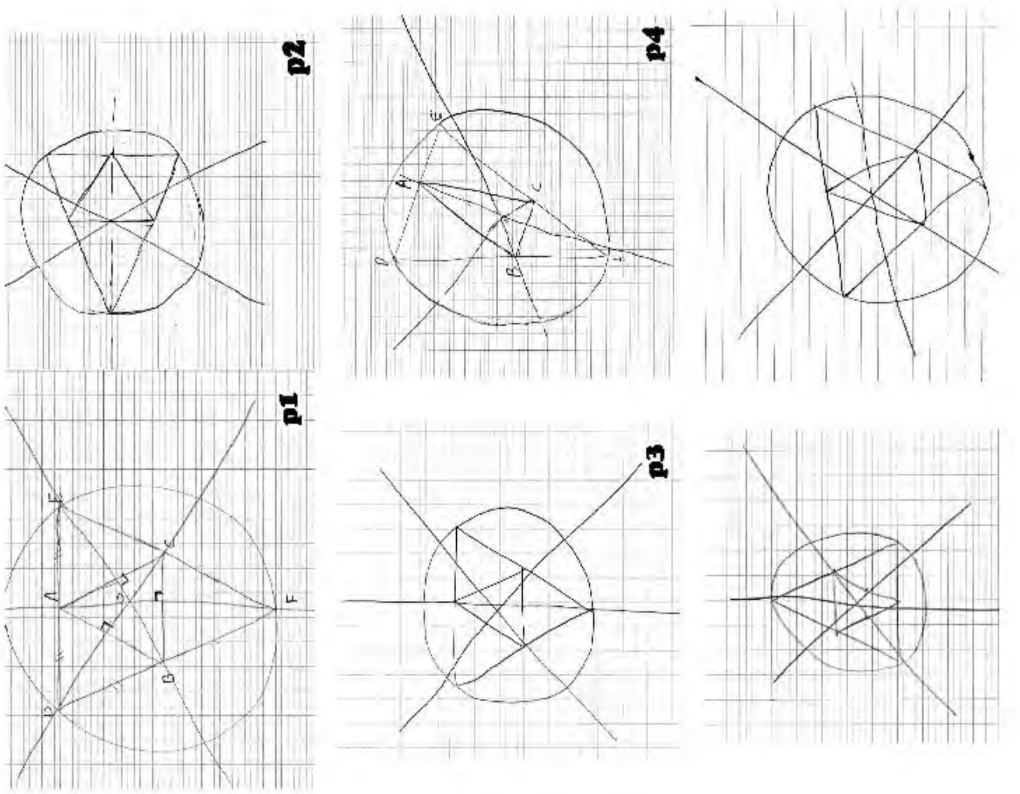
Exercice 3

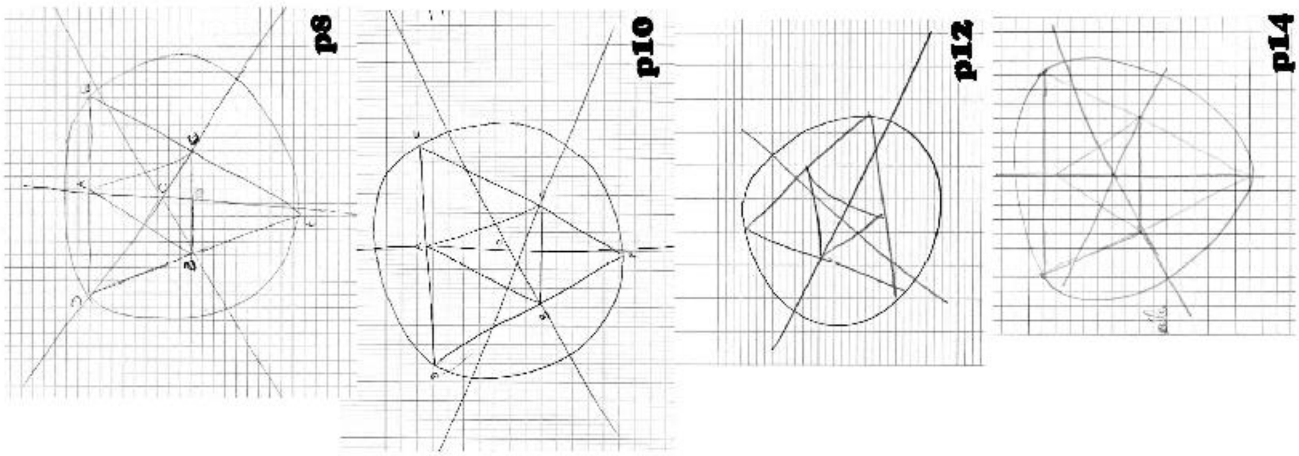
Soit ABC un triangle d'orthocentre O.
Soit D1 la droite perpendiculaire à (OB) passant par B, D2 la droite perpendiculaire à (AO) passant par A et D3 la droite perpendiculaire à (OC) passant par C.
On appelle D le point d'intersection de D1 et de D2, E celui de D2 et de D3 et F celui de D1 et de D3.
Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit à DEF

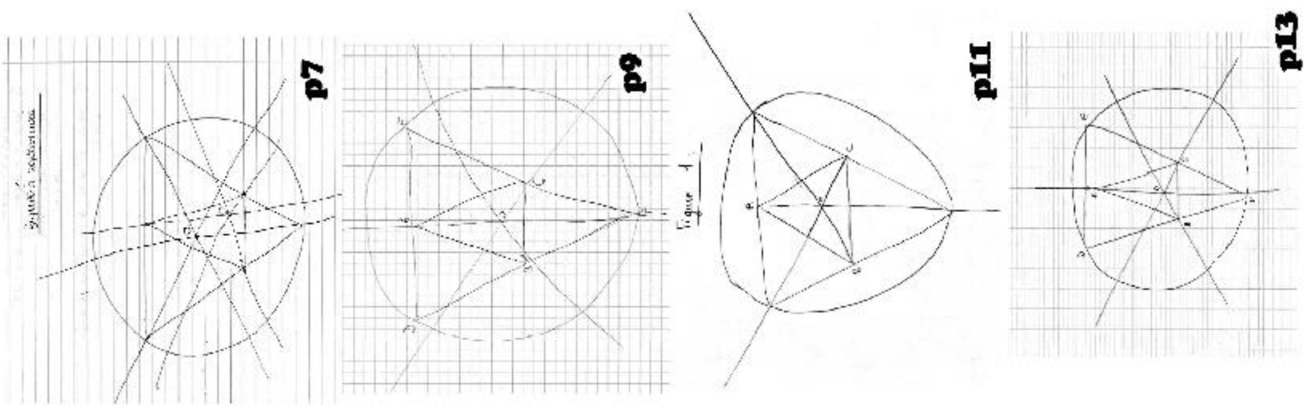
Exercice 4
Soit ABC un triangle d'orthocentre O.
Soit le point F tel que ABFC est un parallélogramme
Soit le point E tel que ABCE est un parallélogramme.
Les droites (AE) et (BF) se coupent en D
Démontrer que O est le cercle du centre circonscrit à DEF

Document de travail élaboré par le GRAF « géométrie » ESPE de Lille

ANNEXE 2-1







ANNEXE 2-2

Photo d'un tableau

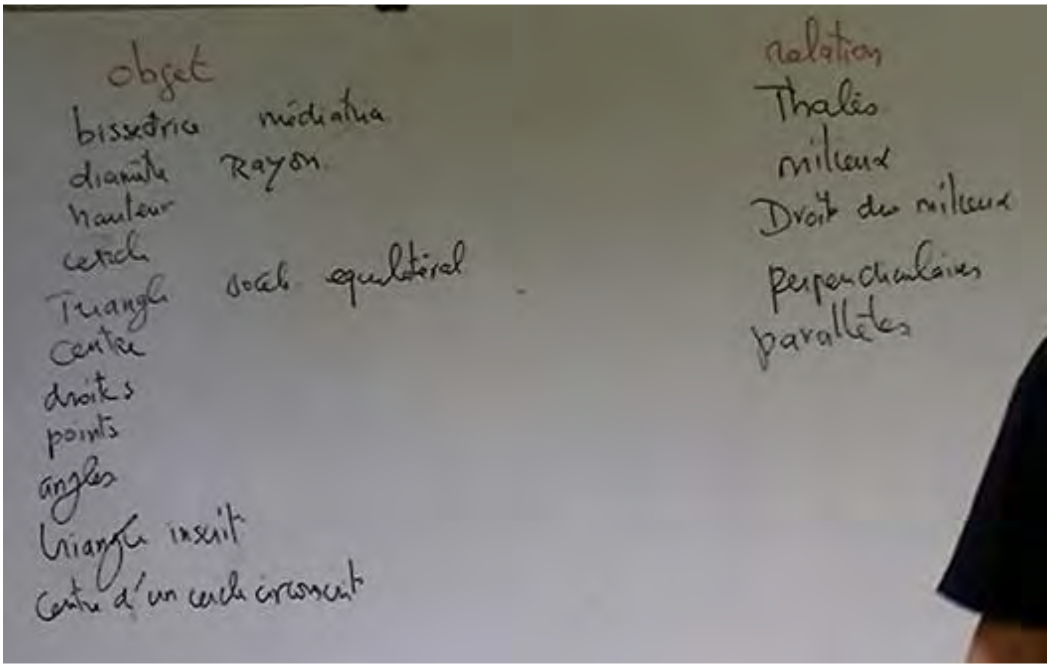


Photo de l'état du tableau à l'issue de la verbalisation associée à la phase de reproduction à main levée (figure cachée, groupe de F1).

Consigne de F1 : « Alors avant de valider vos productions et avant que je vous re-projette la figure de départ je vous propose qu'on fasse un petit échange et qu'on fasse une petite collecte / Je serais très curieux de recenser les éléments de géométrie que vous avez recenser dans la figure / et je vous propose de les classer d'ailleurs / de mettre d'un côté tout ce qui est objet et d'un autre côté tout ce qui est relation / pour redire les choses en termes le plus simple possible j'aimerais que vous me disiez ce que vous avez vu dans le dessin et qu'on en prenne note au tableau / qu'on fasse un recensement complet après on remettra la figure et on validera […] »

Emergence des parallélogrammes : extraits de transcription

Séance de F2

La séance a commencé par la phase de reproduction à main levée. F2 formule la consigne, puis la figure est projetée pendant 2 minutes d'observation silencieuse (possibilité de prendre des notes). Les étudiants-es font ensuite leur reproduction à main levée (2 min 30). Puis, F2 organise une recension de ce qu'ils ont vu (ou voient, puisque la figure reste projetée au tableau) : "on va faire le point là / on va faire la liste de ce que vous avez vu / alors, je vous écoute"

L'extrait qui suit est issu de la fin de cette phase, après que les étudiants ont déjà identifié de nombreux éléments, mais ni les parallélogrammes, ni les relations de parallélisme.

F2 : vous voyez qu'on en voit des choses sur cette figure / on a vu qu'on arrivait d'abord à décomposer cette figure en surface, en sous éléments de surface / deux triangles et puis un cercle / et puis après là depuis tout à l'heure on est en train de décortiquer les postions relatives des sommets de A B C par rapport à D E F et puis ce que sont ces droites là / ce que représente le point O pour A B C / ce que représente le point O pour D E F / est-ce que vous voyez d'autres choses ?

E : est-ce qu'on pourrait pas faire trois triangles à l'intérieur de D E F

F2 : alors je sais pas dis moi

E : en fait à l'intérieur du triangle D E F alors est-ce qu'on aurait pas trois triangles de même mesure que A B C

F2 : alors ça veut dire quoi de même mesure ?

E : ben que A C serait égal à D A

F2 : A C il est égal à D A / c'est vrai cette histoire-là ?

E : ben j'sais pas / c'est vrai que j'ai dit ça

F2 : pourquoi il serait égal à D A ?

E : y a pas du Thalès là ?

F2 : alors y a du Thalès pourquoi ? Thalès ça sert à démontrer des trucs

E : c'est un parallélogramme / y a A C qui est parallèle à D E

<u>Séance de F3</u>

La séance commence comme celle d'F2 : consigne puis projection de la figure et reproduction à main levée. Par contre, cette fois la figure reste cachée lors de la phase de verbalisation, tout du moins dans un premier temps. Cette phase est enclenchée par F3 de la manière suivante : "j'aimerais bien que vous me disiez ce que vous y avez trouvé / les éléments que vous avez vus dans cette figure et que vous avez tenté de reproduire / donnez des éléments qu'il y avait dans la figure". Comme pour l'extrait précédent, celui-ci provient de la fin de la phase : les étudiants ont déjà identifié de nombreux éléments ; la figure est de nouveau projetée depuis plusieurs minutes. F3 relance une nouvelle fois son groupe.

F3 : alors est-ce qu'on peut observer d'autres choses sur cette figure d'autres relations d'autres euh / d'autres égalités de ceci ou de cela

E : y a B C qui est parallèle à B E

F3 : ah y a des parallèles

E : on peut voir du coup des parallélogrammes

F3 : et on peut voir du coup des parallélogrammes

<u>Séance de F1</u>

Comme pour les deux précédents, l'extrait auquel on s'intéresse provient de la fin de la phase de verbalisation. La consigne avait été formulée de la manière suivante : « alors avant de valider vos productions et avant que je vous re-projette la figure de départ je vous propose qu'on fasse un petit échange et qu'on fasse une petite collecte […] ». La figure est maintenant projetée et tout ce qui avait été repéré par les étudiants a déjà été (in)validé. C'est notamment le cas du théorème de « Thalès ». La validation de ce repérage conduit F1 à un rappel autour du théorème des milieux : ce théorème permet « pour peu qu'on soit d'accord avec le fait que A soit le milieu de D E et que B est le milieu de D F » de « penser que la droite B A est parallèle à la droite F E ». Le passage qui suit vient après cette remarque :

F1 [liste les relations repérées pour validation] : donc Thalès oui /// vaguement / des milieux / oui / tout plein / droite des milieux c'est fait / perpendiculaire c'est vu / des parallèles / des égalités de longueur / en fait vous avez vu pas mal de choses qui étaient vraies / mais moi j'en vois d'autres

Es : points alignés

F1 : des points alignés oui oui c'est vrai / des objets plutôt ?

Es : des triangles / des triangles dans les triangles non ? / un losange / un parallélogramme

F1 : ah ça y est

ANNEXE 3

Les extraits qui suivent proviennent tous de la phase de recension des observations sur la figure. On peut néanmoins relever quelques variations dans les déroulements. Dans la séance de F2, la figure est projetée dès le début de la phase (la validation a lieu au fur et à mesure), alors qu'elle ne l'est qu'une fois les propositions des étudiants épuisées dans les séances de F1 et F3, à des fins de validation.

Séance de F1

Etudiant-e-s	Formateur
	bon alors dans les triangles vous avez vu des droites particulières / vous avez vu des bissectrices des médiatrices et des hauteurs // alors là j'aimerais bien que vous précisiez les choses /
[quelques bruits de fond dans la salle]	
	par exemple si vous me disiez j'ai vu une hauteur j'aimerais que vous me disiez quel triangle et quelles propriétés / sinon je pose la question qu'est-ce qu'une hauteur
[on parvient à attendre sommet côté opposé angle droit mais ce n'est pas très distinct]	
	une hauteur c'est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au sommet opposé / alors où est-ce que vous voyez des hauteurs ?
[Es] A O / A F / ben non	
[E1] ben non / ben non / elle va pas être perpendiculaire	
	mettez-vous d'accord
[E2] ben A O il est quand même perpendiculaire [E1] A F y va être euh	
	alors A O pour quel triangle ?
Ben A B C	
	alors dans le triangle A B C/
[E1] c'est pas la médiane de D E ? [médiatrice?]	
[E2] Ben non elle est perpendiculaire et elle passe par le sommet [E1] ben non il passe pas par le sommet [E2] ben il passe par A [E1] Ah ouais vous parlez de l'autre triangle	
	la droite A O serait une hauteur
[...Apparté de nature didactique (différentes géométries, logiciels, dessin/figure)...]	
	donc des hauteurs /// effectivement A O c'est une hauteur du triangle A B C / pendant qu'on y est le

	triangle A B C a combien de hauteurs alors ?
[inaudible]	
	trois A O / B O et C O / tout à l'heure vous me parliez de droites perpendiculaires / est-ce que vous voyez que quand j'évoque les hauteurs j'évoque les droites perpendiculaires / Quand je vous dis que A O est une hauteur je vous dis que la droite A O est perpendiculaire à... /// aidez-moi s'il vous plaît
B C	
	B C etc / avez-vous une remarque à faire sur ces trois hauteurs ?
[...La discussion se poursuit autour de l'orthocentre puis de l'absence de bissectrice...]	
	des médiatrices ? /// alors ?
[quelques échanges inaudibles puis on entend] : par ce que A il bouge / A il est pas fixe en fait / [de manière publique] : on croyait que A c'était le milieu en fait	
	alors est-ce que vous voyez des médiatrices sur ce dessin ? Et si vous avez un doute on changera après
sais pas si la droite A O est perpendiculaire à D E / [un autre étudiant] A O	
	la droite A O est plus ou moins perpendiculaire à D E c'est ça que tu penses ?
[…on passe la discussion autour du fait que A soit ou non effectivement le milieu de [DE]...]	
	alors je vais tricher parce que je voudrais pas qu'on passe l'heure à dialoguer sur un truc qui reste de l'observation et donc du subjectif / moi malgré mon grand âge j'ai l'impression que le point A est au milieu du segment D E
D E	
	et j'ai l'impression que la droite A O est perpendiculaire à la droite D E / Donc pour résumer ma pensée j'ai l'impression que la droite A O
Médiatrice	
	est une médiatrice du segment D E
est une médiatrice du segment D E	
[…F1 revient sur la thématique de la subjectivité de la perception...]	
	donc vous avez la droite A O qui est médiatrice du segment D E [F1 le note au tableau] / est-ce que vous voyez d'autres médiatrices ?
B O avec D F	

	donc B O avec D F c'est ça ?
Ouais	
	et C O avec euh... E F
ouais / c'est tout	
	alors est-ce que vous repérez le grand triangle, le triangle D E F et est-ce que vous voyez que vous venez de décrire les médiatrices des trois côtés de ce grand triangle

Séance de F3

Etudiant-e-s	Formateur
	alors on peut déjà préciser un petit peu / le cercle circonscrit au triangle D E F c'est bon / est-ce qu'il y a des médiatrices ?
c'est quoi ?	
	c'est peut-être l'occasion de le rappeler
du coup les médiatrices elles coupent le sommet opposé en son milieu perpendiculairement	
	elle coupe leur/
dans un triangle	
	dans un triangle
Voilà	
	voilà / une médiatrice
une médiatrice euh/// coupe un côté en son milieu perpendiculairement	
	oui voilà donc c'est une définition possible de la médiatrice [note au tableau la définition de l'étudiante de "droite coupant perpendiculairement un côté en son milieu"]
[... on en vient à la validation de "deux droites sécantes passant par le centre du cercle", élément avancé par les étudiants en début de séance et repris par F3 au tableau...]	
	alors deux droites sécantes passant par le centre du cercle... [met sa phrase en suspens]
trois droites	
	y en avait trois / qui sont les / qui seraient les / les médiatrices en question
[… sous l'impulsion de F3, le groupe vérifie ensuite que O est bien le centre du cercle circonscrit, passe à l'orthocentre ; F3 remet ça à plus tard, puis le groupe cherche à vérifier la présence de hauteurs...]	
	il y a des hauteurs [F3 lit la formulation du tableau] /

	où est-ce qu'on trouverait des hauteurs
triangle A B C	
	dans le triangle ABC / alors qu'est-ce que c'est qu'une hauteur dans un triangle ? [une étudiante donne une définition, que F3 reprend]

Séance de F2

Étudiant-e-s	Formatrice
je suis partie de A B C et j'ai construit les trois hauteurs	
	alors toi tu me parles d'un triangle donc effectivement y avait un triangle A B C [F2 le note au tableau "triangle ABC"] / et alors tu nous dis les hauteurs / qu'est-ce que c'était les hauteurs ici / t'as vu des hauteurs toi / elles sont où les hauteurs
ben la droite qui part de B	
	alors la droite qui part de B ça veut dire quoi / y en a plein des droites qui partent de B / y a celle-ci, y a celle-là / puis y a celle-ci, y a celle-là
[pointe quelque chose du doigt sur la figure projetée au tableau depuis sa place mais semble embarrassée pour verbaliser] celle-là	
	alors comment on peut faire pour la nommer ?
B O	
	oui alors toi tu me parles de la droite O B / une hauteur c'est une droite ?
ben qui est perpendiculaire [inaudible]	
	alors c'est quoi une hauteur dans un triangle [F2 commence à écrire au tableau "Hauteur..."]
c'est une droite qui passe / qui est perpendiculaire au côté	
	c'est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé / on parle de hauteur dans un triangle hein parce que à chaque fois effectivement / une hauteur dans un triangle / [F2 donne une définition, tout en réalisant un petit schéma, puis s'apprête à écrire dans la liste des objets identifiés] / donc une hauteur c'est un droite donc comment je la note ?
parenthèses	
	avec des parenthèses [F2 complète "Hauteur <u>(OB)</u>"]
[…F2 introduit la notion d'orthocentre en rapport avec ABC ; Elle vient de noter triangle EDF au tableau...]	

	on en était au triangle EDF / qu'est-ce que vous avez vu d'autre ?
il est équilatéral déjà	
	il est équilatéral ? Moi je suis sûre qu'il est pas équilatéral / on le verra peut-être / vous savez pourquoi je suis sûre qu'il n'est pas équilatéral ?
parce qu'il est inscrit dans un cercle et que O c'est l'orthocentre /	
	mouais [dubitative]
du cercle	
[une autre étudiante] ouais puis les hauteurs elles passeraient par [inaudible]	
	ben ça l'empêcherait pas forcément d'être équilatéral ce truc-là / en fait /
les hauteurs elles passeraient par les milieux des côtés s'il était équilatéral	
	alors ouais / les hauteurs elles passeraient par O F et G / c'est vrai ça / enfin E F et / et pourquoi ?
parce que dans un triangle équilatéral les médiatrices et les hauteurs elles sont confondues	
	mais attention parce que là ce sont les hauteurs de A B C
ouais c'est pour ça	
	bon alors on laisse tomber / on y reviendra après
ouais mais comme c'est le milieu c'est une médiatrice non ?	
	ah ouais c'est ça qui m'intéresse / Ces droites là O B / O A et O C qu'est-ce que c'est pour le triangle EDF ?
les médiatrices	
	les médiatrices / alors c'est quoi une médiatrice ?
c'est une droite qui est perpendiculaire euh	
	c'est une droite qui est perpendiculaire à quoi
à un côté	
	à un segment
et qui passe par son milieu	
	et qui passe par son milieu / du coup on parle de médiatrice de quoi / est-ce qu'on a forcément besoin d'un segment / on a pas forcément besoin d'un triangle pour que ce soit des médiatrices [F2 fait un dessin et rappelle une définition pour la

	médiatrice d'un segment] donc du coup comment est-ce qu'on pourrait formuler ça / est-ce que vous voyez des médiatrices et comment est-ce qu'on peut le dire ? /// alors une médiatrice ?
I médiatrice de F E [à peine audible]	
	I ? j'ai pas entendu
I médiatrice de F E / du segment F E	
	où est-ce que tu vois I toi ?
[d'autres étudiant-e-s] c'est un C / c'est un C	
	où est-ce que tu vois ? c'est ça [pointe la lettre C, sur laquelle passe un trait qui le fait "ressembler » à un I] ?
hum	
	c'est un C / alors C est la médiatrice de F E [F2 prend un air dubitatif] / C c'est quoi ? C c'est un point
O C / O C	
	bon alors c'est O C / O C la médiatrice c'est une droite donc on peut dire que O C est médiatrice de [elle note en même temps (OC) est médiatrice de...] E F / je note comment E F ?
crochets	
	oui / si je note sans rien ça veut dire quoi ? [note EF]] /// vous vous souvenez ?
longueur	
	une longueur hein c'est une longueur [F2 complète l'écrit en [EF]].

ANNEXE 4

Les extraits qui suivent proviennent tous de la même phase de recension des observations sur la figure. Au cours de cette phase, divers modes de validations coexistent : perception, logiciel (instrument) mais aussi démonstration (en l'absence de définition de la figure). On se concentre ici sur les relations entre validation perceptive et démonstration, avec en arrière-plan l'idée de déconstruction dimensionnelle. Pour F3 et F1, les validations en question viennent au moment où la figure est à nouveau projetée au tableau, et les éléments repérés sont validés un par un. Pour F2, la validation se fait au fur et à mesure (la figure reste projetée).

<u>Séance de F2</u>

Etudiant-e-s	Formateur/trice
	qu'est-ce qu'on peut dire sur les points D E et F ?
des points du cercle circonscrit un truc comme ça non ?	
	oui centre du cercle circonscrit / alors pourquoi est-ce que ça s'appelle centre du cercle circonscrit
parce qu'il passe par les trois points	
	O est le centre du cercle circonscrit [note ce qu'elle dit au tableau en même temps] / c'est quoi le cercle circonscrit au triangle ?
[inaudible]	
	et oui c'est le cercle qui passe par les trois points du centre / par les trois sommets pardon / par les trois sommets du triangle / ouais ? / ben oui c'est quoi le cercle circonscrit à E D F ben c'est le cercle qui est tracé / bon qu'est-ce que ça veut dire sur le point O par rapport au point D et E par exemple ? ///
y a égales distances	
	y a égales distances d'accord / effectivement il est à égales distances / alors pourquoi tu me dis ça ?
c'est une propriété de la médiatrice	
	ah d'accord / ben d'abord parce que O est le centre du cercle qui passe par D E et F / c'est quoi un cercle ?
[inaudible] ensemble des points [inaudible]	
	oui c'est l'ensemble des points qui est à une distance donnée du centre O là / qui est ici / ça veut dire que forcément O D et O E sont deux rayons du cercle donc je sais que ces deux segments ils ont même longueur.
[... discussion autour du statut – segment ou longueur – du rayon ...]	
	ok hum / et oui on avait dit un autre truc toi tu m'as dis moi je sais que O E c'est égal à OD parce que c'est

	une propriété de la médiatrice / c'est quoi cette histoire / vous savez me l'expliquer ? / de quoi elle parle ? /// non ?

Séance de F3

[…le passage qui suit fait suite à l'identification par les étudiant-e-s des parallélogrammes...]	
on peut dire aussi que B A est égale à la moitié de E F / que A C est égale à la moitié de D F	
	alors B A est égale à la moitié de E F / donc ceci est égal à la moitié de E F / oui d'accord [F3 note l'égalité au tableau]
E1 : monsieur pourquoi B A est égale à la moitié de E F ?	
	ah pourquoi B A est égale à la moitié de E F ?
E2 : t'as des parallélogrammes donc t'as B A qui est égale à C E / t'as aussi l'autre parallélogramme donc t'as B A qui est aussi égale à F C donc du coup t'as B A qui est égale à la moitié / E1 : ah c'est parce que c'est un demi d'accord E2 : tu vois les parallélogrammes ? E1 : oui mais comment tu sais que B A est égale à C E ? E2 : ben c'est un parallélogramme, c'est les propriétés d'un parallélogramme/	
	voilà on va
E1 : ah oui [inaudible]	
	si on veut on peut éventuellement / enfin sortir de l'affichage des éléments perturbants qui permettront de mieux voir les choses /
c'est tout de suite plus visible comme ça	
	ah / voilà on a nos parallélogrammes ici et effectivement ceci égale ceci parce que ceci est un parallélogramme / et d'autre part celui-ci est égal à cela parce que c'est un parallélogramme donc euh celui-ci celui-ci celui-ci sont égaux donc A B est bien la moitié de E F ///
[... F3 affirme ensuite que ce que l'on vient de faire est une preuve d'un cas particulier de Thalès...]	
	en fait je triche un peu en disant qu'on l'a démontré parce qu'on est en train de se baser sur des choses qu'on observe sur la figure et d'autres choses qui sont de l'ordre du raisonnement / hein ici par exemple / bon y a pas mal de choses qu'on a perçues de manière visuelle / qu'on avait des angles de 90 degrés qu'on avait des parallèles *etc.* / et puis là ce qu'on vient de faire c'est un raisonnement / on ne s'est pas basé que quelque chose qu'on a observé mais on a vraiment raisonner pour dire que ceci c'était la moitié de ce triangle-là / donc ben on

	est passé à la géométrie du collège là mine de rien / sans en avoir l'air

Séance de F1

	tout à l'heure quelqu'un m'avait dit que le triangle était inscrit
hum hum	
	c'est toi hein ? / est-ce que vous voyez que le langage était un peu personnel mais que l'idée y est ? hein on est d'accord / en somme effectivement les trois points D E F sont inscrits sur le cercle ça va / et pourquoi ? Pourquoi le point O est-il le centre de ce cercle ?
tous les points sont à la même distance de / tous les points qui appartiennent au cercle sont à la même distance de O	
	là tu me donnes la définition d'un cercle donc je ne peux pas te dire non / je te rappelle que ce que l'on appelle un cercle circonscrit c'est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle
c'est les trois points qui appartiennent au cercle de centre O	
	alors comment traduire ça par une relation ?
O E égal O F égal O D	
	donc dans les relations je vous propose des égalités de longueurs
ouais O D égal O E égal OF	
	[tout en notant au tableau] donc O D égal O E égal O F / Est-ce que tout le monde identifie que ces trois / enfin ces deux égalités pardon traduisent le fait que les points D E et F sont sur un cercle de centre O / ils sont tous les trois à la même distance / ça va ?
hum hum	
	donc là en fait j'ai pas répondu à la question que je vous ai posée / elle était pas très honnête en fait ma question / je vous demandais pourquoi / là on a trouvé un moyen de traduire autrement l'idée / mais comme je suis un homme terriblement têtu d'après vous pourquoi c'est vrai ça ? /// alors je vous donne un joker : pour vous c'est quoi une médiatrice ?
[… F1 fait ensuite la preuve attendue...]	
	ça s'appelle comment ce que je viens de vous faire là ?
Démonstration	
	une démonstration / pour justifier les propriétés qu'on observe / ça va donc là j'ai triché par rapport à ce que je

	disais en début de séance mais voyez que je suis aussi capable de faire des démonstrations / l'enjeu est assez modeste / ici je l'ai fait parce que y avait un vrai débat un vrai doute sur ce que l'on percevait / ça va ? On en reparlera dans 15 jours [...]