

MALLETTE D'OUTILS MATHÉMATIQUES, LE BOULIER ET LA PASCALINE

Gwenaëlle RIOU-AZOU

PRCE, ESPE de Bretagne

Gwenaëlle.Riou-Azou@espe-bretagne.fr

Sophie SOURY-LAVERGNE

Maître de Conférences, Institut Français de l'Education

Laboratoire S2HEP

Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr

Résumé

Les ressources présentées dans cet atelier sont issues du projet « mallette de ressources mathématiques pour l'école » dont l'objet a été la production de ressources pédagogiques, matérielles et digitales, pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle et au début de l'école primaire. La pascaline est une machine de type compteur mécanique, utilisée pour l'enseignement de la numération décimale et du calcul. La e-pascaline est une version numérisée de la pascaline, conçue de façon à renforcer son potentiel sémiotique et l'intérêt de son utilisation en classe (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013). De façon analogue, la mallette propose des bouliers chinois associés à un boulier virtuel (Riou-Azou, 2013). L'atelier permet de prendre connaissance de cet ensemble complexe de ressources composant la mallette.

Les ressources présentées dans cet atelier sont issues du projet « mallette de ressources mathématiques pour l'école »¹, conduit par un consortium national (Figure 1), qui a donné également lieu à des productions pour la maternelle, présentées dans ce même colloque (atelier A14 de S. Besnier, P. Eysseric et T. Le Mehaute et communication C25 de Bueno-Ravel, L., Eysseric, P., Riou-Azou, G. & Soury-Lavergne, S.). La pascaline est une machine de type compteur mécanique (Figure 2 à droite), utilisée pour l'enseignement de la numération décimale et du calcul (Soury-Lavergne & Maschietto, 2013). La e-pascaline est une version numérisée de la pascaline², conçue de façon à renforcer son potentiel sémiotique et l'intérêt de son utilisation en classe (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013). Elle est utilisée dans une collection de petites applications qui engagent les élèves dans la résolution de problèmes. De façon analogue, la mallette propose des bouliers chinois (Figure 2 à gauche) associés à un boulier virtuel³ (Riou-Azou, 2013) (Gueudet, Bueno-Ravel, & Poisard, 2014). L'ensemble de ressources composant la mallette est complexe par la variété des objets réunis, objets matériels, logiciels et documentations pour les enseignants dont des propositions de séquences. Son appropriation par les enseignants est à l'étude dans le cadre d'une expérimentation en collaboration entre Canopé et l'IFÉ.

1 <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/mallette>

2 « e-pascaline » créée avec la technologie Cabri Elem accessible en ligne <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/cabri-lem-ife>

3 Boulier j3p créé par Sésamath et l'IREM de Lille accessible en ligne http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/boulier.swf

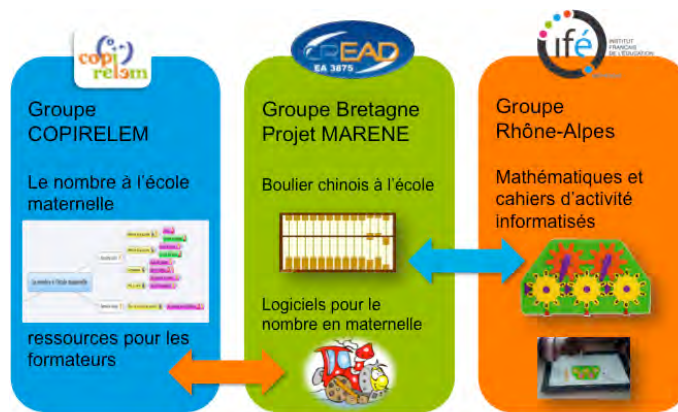


Figure 1. Les trois partenaires du projet « Mallette » sont la COPIRELEM, le CREAD et l'IFÉ. Ils ont produit des ressources matérielles et logicielles pour le nombre à l'école maternelle et élémentaire.

I - DES INSTRUMENTS ET DES MACHINES MATHÉMATIQUES DANS LES MALLETTES POUR L'ÉCOLE

L'intérêt de matériels physiques pour l'apprentissage des mathématiques réside notamment dans la manipulation concrète d'objets et la réalisation d'opérations, au sens de mise en action des mains et sensation physique de l'action, ayant une possible signification mathématique. De nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques et dans d'autres champs scientifiques ont mis en évidence l'importance de la manipulation, des gestes et de la cognition incarnée pour la conceptualisation mathématique (pour une synthèse en français voir (Artigue, Cazes, Haspekian, Khanfour-Armalé, & Lagrange, 2013)).



Figure 2. Le boulier chinois (ou suan-pan) et la pascaline, tous deux initialisés à zéro

Ces objets matériels sont aussi issus de pratiques sociales ou historiques des mathématiques. Différentes versions de boulier existent (boulier japonais, boulier russe...) et sont encore actuellement en usage dans différentes parties du monde. Le boulier chinois présenté ici est très répandu en Chine depuis le 12^e siècle. La pascaline est un héritage historique des travaux de Blaise Pascal. Si la Pascaline a bien été la première machine arithmétique fonctionnelle, malgré les efforts de B. Pascal pour diffuser et faire adopter son invention, son usage ne s'est pas répandu (Descotes, 1988). Elle reste néanmoins un outil exemplaire du travail arithmétique humain, « le premier à lever la grande difficulté des travaux intellectuels par la simplicité de sa manœuvre, il se produit un renversement irréversible entre l'esprit et la machine : avec la petite boîte de la machine arithmétique, l'humanité est entrée dans une nouvelle phase de civilisation » (Nagase, 2013). La pascaline moderne, commercialisée sous le nom de ZERO+1 par la société Quercetti, est une petite machine en plastique qui ne partage avec son illustre modèle que l'idée de rotation des roues pour réaliser la succession des chiffres dans l'écriture décimale des nombres et le recours à un engrenage pour automatiser les retenues. Cela s'avère suffisant pour en questionner l'intérêt pour l'apprentissage des mathématiques.

Les malles contiennent non seulement des artefacts matériels mais également des logiciels qui embarquent des versions digitales des artefacts matériels. C'est la complémentarité entre les artefacts matériels et les environnements informatiques qui est recherchée. Le boulier virtuel existe en deux versions qui ont été conçues indépendamment du projet mais dont les usages pour le cycle 1 ont été développés au sein du projet. La e-pascaline a été conçue dans l'environnement Cabri Elem et est disponible dans une collection de cahiers d'activité informatisés.

Ce compte rendu de l'atelier présente en parallèle l'usage de la pascaline et du boulier, chacun étant décliné en version matérielle et virtuelle, afin de mettre en évidence les différences et complémentarités de ces deux outils pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres, de la numération et du calcul au cycle 2 de l'école primaire.

II - PRISE EN MAIN DU BOULIER ET DE LA PASCALINE

L'atelier a débuté par une prise en main des artefacts boulier et pascaline, en tant qu'objet permettant de faire des mathématiques. En effet, quelque soit le public, un temps d'appropriation personnelle est nécessaire, pour savoir comment utiliser ces outils pour faire quelques calculs mathématiques, avant même de s'interroger sur leur usage pour enseigner. Ce premier temps était guidé par deux types de questions : des questions concernant l'inscription des nombres et des questions concernant des opérations effectuées sur la pascaline⁴ et sur le boulier. L'objectif était d'amener les participants à mettre en évidence les points communs et les différences entre les deux instruments.

1 Inscrire un nombre

Avant de pouvoir procéder à un calcul, l'utilisateur doit savoir comment inscrire un nombre sur la machine et comment lire un nombre inscrit sur la machine. Les deux outils fonctionnent selon les deux principes de la numération décimale (voir la communication C16 de F. Tempier dans ces actes) :

- le principe de position selon lequel la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans l'écriture du nombre. La valeur d'une boule est donnée par la position de la tige dans le boulier, chacune des treize tiges correspond à un ordre d'unités, et la valeur d'une dent de la pascaline est donnée par la position de la roue dans la pascaline, chacune des trois roues correspondant également à un ordre d'unités.
- le principe décimal selon lequel les relations entre les ordres d'unités sont des puissances de 10, d'une tige à l'autre ou d'une roue à l'autre, les valeurs sont multipliées ou divisées par une puissance de 10.

La première tâche à effectuer sur le boulier et sur la pascaline était d'inscrire un nombre (90135 sur le boulier et 132 sur la pascaline). En effectuant cette tâche, les participants ont pu découvrir la nécessité de savoir comment sont placées les boules ou les roues en position initiale (inscription de zéro). Le boulier se tenant horizontalement, les boules sont placées contre le cadre extérieur et avec la pascaline, les dents portant le chiffre 0 sont placées en face des repères triangulaires rouges (Figure 2).

Pour inscrire le nombre 90135 sur le boulier, puisque $90135 = 9 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$, on inscrit cinq sur la tige des unités, trois sur la tige des dizaines, un sur la tige des centaines et neuf sur la tige des dizaines de mille (Figure 3 à gauche). Sur chaque tige, l'inscription se fait en respectant la valeur des boules : les quinaires (boules situées au-dessus de la barre centrale) valent cinq et les unaires (boules situées au-dessous de la barre centrale) valent un.

Pour inscrire 132 sur la pascaline, il suffit d'actionner les roues et de positionner les chiffres voulus en face des triangles rouges (Figure 3 à droite).

⁴ A propos de la pascaline, un atelier de découverte avait été organisé en 2012 lors du 39^e colloque de la COPIRELEM et les actes présentent plus en détail ces premières manipulations (Soury-Lavergne & Maschietto, 2013).

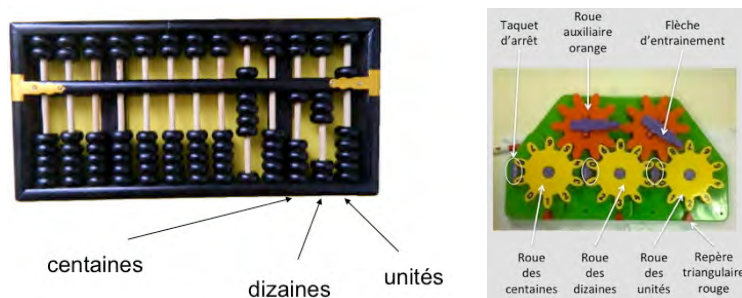


Figure 3. A gauche, inscription de 90 135 sur le boulrier, à droite inscription de 132 sur la pascaline

Les participants ont pu constater une différence importante entre boulrier et pascaline, lors de la recherche de l'inscription du nombre 10 : l'inscription n'est pas unique sur le boulrier chinois tandis qu'elle l'est sur la pascaline.

En effet trois inscriptions sont possibles sur le boulrier chinois. Une première possibilité est d'inscrire dix sur la tige des unités en s'appuyant sur la décomposition additive de dix suivante : $10 = 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (Figure 4 à gauche). Une seconde possibilité (Figure 4 au milieu) s'appuie, quant à elle, sur cette décomposition additive de dix : $10 = 5 + 5$. Enfin une troisième inscription (Figure 4 à droite) est possible sur la tige des dizaines. Cette inscription s'appuie sur la décomposition de dix en une dizaine et zéro unité, elle est donc liée à la numération positionnelle en base dix. Cette dernière inscription qui est celle qui utilise le moins de boules possible se nomme « inscription économique » (Poisard, 2005).

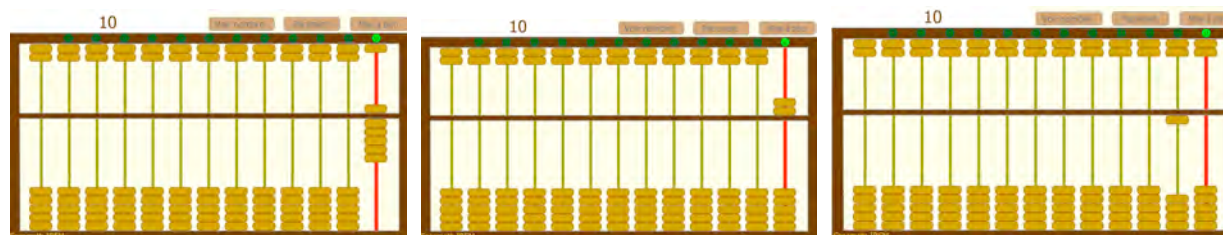


Figure 4⁵. Trois inscriptions différentes du nombre 10 sur le boulrier chinois, celle de droite est la plus économique.

Avec la pascaline, un seul état correspond à l'affichage du nombre 10. En revanche deux procédures sont possibles à partir de l'initialisation de la pascaline à 0 pour aboutir à cet état. La procédure par itération consiste à actionner 10 fois la roue des unités (celle de droite). La procédure par décomposition consiste à actionner 1 seule fois la roue des dizaines (celle du milieu). D'une façon générale, avec la pascaline, on peut distinguer les procédures par itération, qui consiste à itérer la rotation de la roue de l'unité autant de fois que nécessaire et les procédures par décomposition qui utilisent successivement chacune des trois roues. Les procédures par décomposition sont plus économiques et s'appuient sur la décomposition canonique des nombres, comme dans le boulrier.

En conclusion, pour l'inscription d'un nombre, ces deux outils se différencient d'abord par le fait que la pascaline présente des chiffres sur ses roues alors que le boulrier ne montre que des boules sur ses tiges. L'intervalle de nombres qu'il est possible d'inscrire est également différent : $[0 ; 9\,999\,999\,999\,999]$ pour le boulrier et seulement $[0 ; 999]$ pour la pascaline. Enfin, l'inscription est unique sur la pascaline et peut être multiple sur le boulrier.

2 Additionner et soustraire

La consigne donnée était d'effectuer les calculs suivants avec le boulrier et avec la pascaline : $6+8$, $653+271$, $653 - 271$ et de décrire les procédures utilisées.

Avec le boulrier, pour additionner deux nombres il faut inscrire l'un des termes puis inscrire l'autre terme de l'addition « par dessus ». Par exemple, pour effectuer $6+8$, on peut inscrire six sur la tige des unités en

5 Photos réalisées à partir de copies d'écran du logiciel boulrier chinois développé par Sésamath et l'Irem de Lille.

activant une quinaire et une unaire puis activer la seconde quinaire et trois unaires sur cette même tige. Pour effectuer l'addition $653+271$, il faut effectuer un échange : « On peut dire que l'on manipule les retenues à la main sur le boulier chinois » (Poisard, 2009). En effet, lorsqu'on inscrit 271 « par dessus » 653, on se retrouve avec huit dans les centaines, douze dans les dizaines et quatre dans les unités. Il est nécessaire de procéder à un échange de dix dizaines contre une centaine.

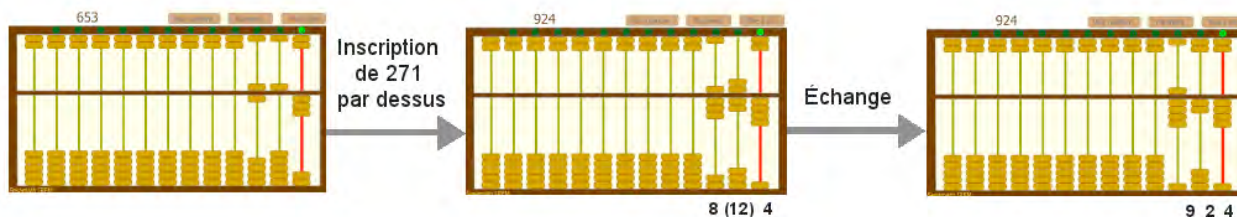
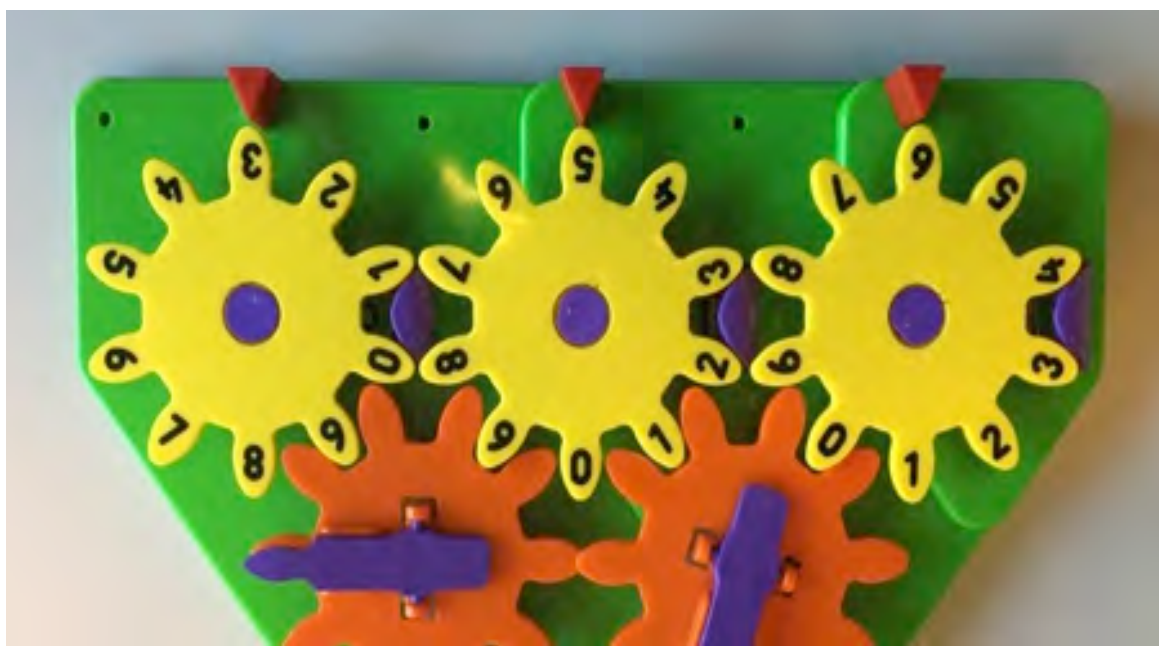


Figure 5. Calcul de $653 + 271$ avec échange de 10 dizaines contre 1 centaine

Les participants ont pu noter que les retenues sont visibles et manipulées directement lors des échanges avec le boulier. Le fait que, de manière transitoire, douze soit inscrit sur la tige des dizaines permet de donner du sens à la retenue : douze dans les dizaines c'est cent-vingt unités et aussi une centaine et deux dizaines. La manipulation du boulier permet ainsi de donner du sens aux retenues qui apparaissent dans l'algorithme posé de l'addition.

De même pour soustraire 271 à 653, il est nécessaire d'échanger une centaine contre dix dizaines. C'est donc la technique de soustraction par emprunt qui est utilisée avec le boulier.

En ce qui concerne la pascaline, l'addition est réalisée en inscrivant le premier terme sur la pascaline, qui est alors lisible puis, le second terme est ajouté en poursuivant la rotation des roues à partir de cette position intermédiaire, d'un nombre de clics égal au second terme. Cela peut se faire soit par « itération de la roue des unités » dans le sens des aiguilles d'une montre, d'un nombre de dents égal au deuxième terme, soit par « décomposition » du second terme en faisant tourner les roues correspondantes d'un nombre de dents égal à chaque chiffre. Le clic sonore émis lors de l'incréméntation de chaque roue facilite le contrôle du nombre de clics, en l'absence d'affichage du second terme. En effet, à aucun moment le second terme n'est affiché sur la pascaline. Etant donné que la pascaline gère automatiquement le passage des retenues, l'utilisateur est libre d'incrémenter les roues dans l'ordre qu'il veut quand il utilise la procédure par décomposition. Suivant la taille des termes, la procédure par itération devient vite très couteuse et favorise le passage à la procédure par décomposition.



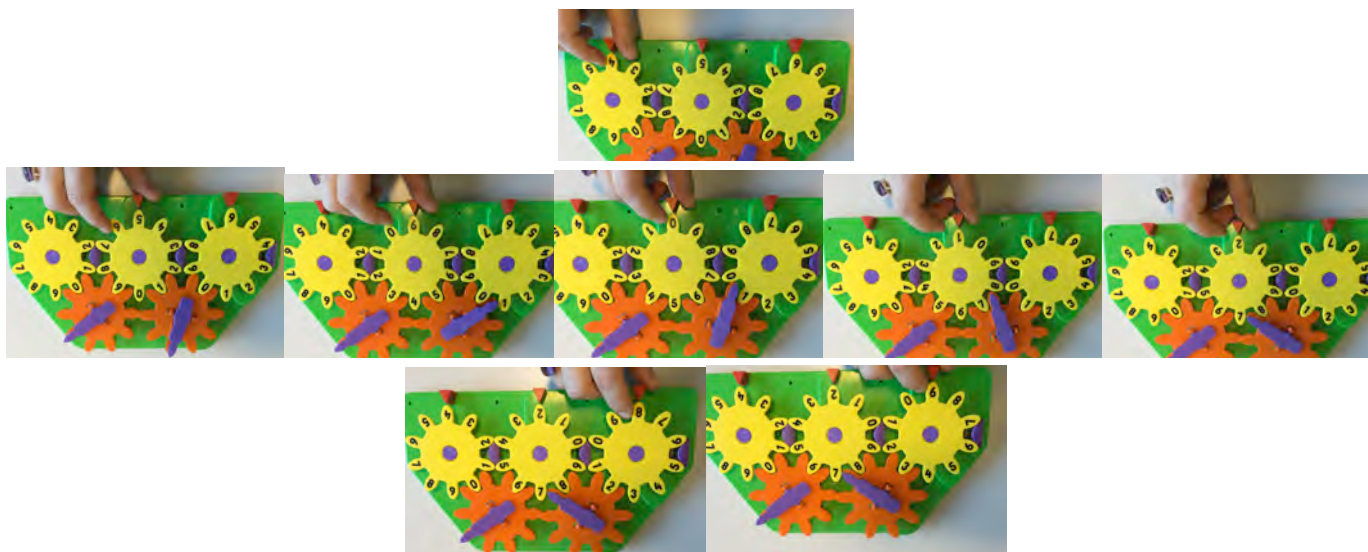


Figure 6. Addition $653+271$ avec une procédure par décomposition sur la pascaline. 653 est inscrit, puis la roue des unités est tournée d'un clic, puis la roue des dizaines est actionnée de 7 clics (lorsqu'elle passe de 9 à 0, la roue des centaines tourne automatiquement d'un clic), finalement la roue des centaines est tournée de deux clics.

Avec la pascaline, la soustraction s'effectue simplement en inversant le sens de rotation des roues, mettant en évidence la réciprocity entre ces deux opérations.

Ainsi, pour les opérations, une différence notable entre le boulier et la pascaline concerne la gestion de la retenue (le passage d'un ordre d'unités à un autre lors des groupements et échanges). Sur le boulier cela doit être fait intentionnellement par l'utilisateur alors qu'elle se produit automatiquement sur la pascaline dès qu'une roue passe de 9 à 0 ou de 0 à 9, sans action spécifique de la part de l'utilisateur.

3 Les points communs et les différences entre le boulier et la pascaline

Cette phase de prise en main a montré que le boulier chinois et la pascaline sont deux instruments pour inscrire les nombres et pour calculer qui s'appuient sur la numération décimale tout en mettant en évidence des aspects différents :

- La représentation des nombres est analogique avec le boulier, sans présence de chiffres mais avec des boules représentant chacune une quantité tandis qu'elle est symbolique avec la pascaline puisque les chiffres de un à dix sont présents sur les roues. Dans les deux cas, le principe de position de la numération est matérialisé : par les tiges du boulier et par les roues et la pascaline.
- L'écriture d'un nombre n'est pas unique sur le boulier. Selon l'inscription effectuée, les connaissances mobilisées sont différentes (décomposition additive en appui sur cinq ou sur dix, numération positionnelle...). Sur la pascaline, l'écriture est unique mais, comme avec le boulier, il existe plusieurs procédures d'inscription ou de calcul qui s'appuient sur différentes connaissances : le nombre généré par itération de l'unité ou le nombre désigné par son écriture décimale dans les procédures par décomposition.
- Les deux instruments permettent d'effectuer des additions et des soustractions, le boulier chinois permettant toutefois de le faire avec des nombres beaucoup plus grands. Le boulier et la pascaline ne fonctionnent pas de la même manière pour les calculs nécessitant des groupements ou dégroupements (retenues) : les retenues sont manipulées à la main avec le boulier tandis que cela se fait de manière automatique avec la pascaline.

III - PRESENTATION DE SEQUENCES POUR LA GRANDE SECTION DE MATERNELLE ET LE COURS PREPARATOIRE

Après ce temps d'appropriation personnelle, les participants ont pu questionner l'utilisation de ces instruments en classe et ont découvert les ressources présentes dans les malles en visitant les sites où elles sont rendues disponibles (pour une présentation des ressources se référer à la communication C25 de ces actes (Bueno-Ravel, L., Eysseric, P., Riou-Azou, G. & Soury-Lavergne, S.)) :

- Ressources pour le boulier à l'école (consultée le 9 février 2015) : http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=611
- Ressources pour la pascaline en CP-CE1 (consultée le 23 avril 2015) : <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette/prototype-mallette>

Nous avons fait le choix de travailler seulement certains points des séquences proposées dans les ressources et de mettre l'accent sur l'articulation entre les usages des artefacts matériels et virtuels (Figure 11).

1 Le boulier en grande section de maternelle

Nous présentons ici les objectifs de la séquence, présentée dans la ressource « boulier chinois à l'école », ainsi que l'organisation de la classe, les phases de la séquence, les types de tâches proposés et montrons enfin un extrait de descriptif d'une séance. L'objectif général de la séquence est d'étudier différents codages du nombre et d'amener les élèves à faire des liens entre ces codages pour construire le sens du nombre. Plus précisément, il s'agit en GS de viser les objectifs suivants :

- inscrire et lire des nombres jusqu'à 30 avec le boulier chinois ;
- distinguer valeur et quantité (une unaire n'a pas la même valeur qu'une quinaire pourtant ces deux boules sont physiquement identiques) ;
- décomposer de manière additive des nombres (un même nombre peut se coder de différentes manières sur le boulier).

Nous précisons que pour le dernier objectif, il n'est pas judicieux de privilégier l'inscription économique des nombres. Au contraire, il faut encourager les élèves à connaître différents codages sur le boulier et à passer de l'un à l'autre. Cela leur permet de décomposer les nombres de différentes manières.

La séquence est construite pour permettre un fonctionnement en atelier dirigé en GS car la présence du professeur est importante pour permettre aux élèves de comprendre les règles d'utilisation du boulier et les mémoriser. Cela dit, des temps de travail en autonomie sont possibles et permis notamment avec l'utilisation d'un boulier paramétrable par l'enseignant (voir dans la partie IV figure 13, les possibilités offertes par le boulier paramétrable).

Dans cette séquence deux types de tâches sont proposées aux élèves : des tâches d'inscription et des tâches de lecture des nombres. La séquence est constituée de quatre phases incluant vingt et une séances :

- Phase 1 : découverte du boulier, inscrire et lire les nombres de 0 à 5 (séances 1 à 3)
- Phase 2 : inscrire et lire les nombres de 0 à 10 (séances 4 à 7)
- Phase 3 : inscrire et lire les nombres de 0 à 20 (séances 8 à 14)
- Phase 4 : inscrire et lire les nombres de 0 à 30 (séances 15 à 21)

Pour chacune des séances, les ressources utilisées de manière préférentielle sont indiquées (Figure 8). Selon les séances, les élèves utilisent ainsi le boulier matériel et/ou le boulier virtuel et /ou des fiches du boulier. Le contenu de chaque séance est ensuite détaillé (Figure 9). Des précisions sont apportées concernant la mise en œuvre, l'organisation de la classe, le vocabulaire utilisé. Le but est de faciliter une mise en œuvre de séances en soulignant les points importants.

PHASE 1 : DÉCOUVERTE DU BOULIER. INSCRIRE ET LIRE DES NOMBRES DE 0 À 5.

Numéro séance	Inscrire et lire des nombres. Domaine numérique	Boulier matériel	Boulier virtuel	Travail sur fiche : lire un nombre	Travail sur fiche : inscrire un nombre
S1	0 à 5	X			
S2	0 à 5		X	X	
S3	0 à 5		X		X

Figure 8. Indication des ressources (boulier matériel, boulier virtuel, fiche etc.) à utiliser pour chaque séance dans la ressource en ligne « boulier en classe » ?

S2	Inscrire et lire des nombres de 0 à 5  Pour cette séance, les élèves apprennent à se servir du logiciel sur le boulier et donc à manier un boulier virtuel sur un ordinateur et éventuellement sur le TBI également. Un travail individuel sur fiche est proposé pour « lire des nombres de 0 à 5 » avec le boulier virtuel comme aide. Les élèves ne codent que les boules activées sur la fiche. Une seconde phase collective permet de poursuivre le travail sur les deux manières de coder 5. Le vocabulaire travaillé est : celui de la S1 : tige, boule, ligne de lecture, activer, et également : unaire, quinaire. Remarques Pour le travail sur fiche, les élèves ont besoin de s'aider du boulier virtuel à ce moment de l'année. Organisation de la classe et matériel Organisation de la classe : un groupe de 8 élèves Élève : boulier virtuel sur un ordinateur et sur le TBI pour les phases collectives Fiche élève : lire les nombres de 0 à 5 (avec une aide pour écrire les nombres) Livres du boulier et bande numérique
----	---

Figure 9. Description de la séance 2 de la phase 1 sur la ressource en ligne « boulier chinois à l'école »

2 La pascaline au CP

La ressource « mallette au CP-CE1 » en ligne sur le site EducMath, à propos de la pascaline, propose une séquence d'enseignement en CP, un ensemble de vidéos et tutoriels pour accompagner la prise en main par les enseignants de la pascaline, de la e-pascaline et des cahiers d'activité informatisés qui utilisent la e-pascaline (Figure 10).

La séquence, organisée en quatre unités clefs (Figure 10 à droite), a été conçue en collaboration avec des enseignants du terrain. Elle a pour objectif de travailler les notions suivantes : la numération de position en base 10, la dizaine, les décompositions additives et soustractives des nombres et l'articulation la numération et le calcul. Pour cela, elle propose différents types de tâches :

- afficher et lire un nombre sur la pascaline, à partir de collections d'objets ou de dictées de nombres
- additionner et soustraire,
- chercher diverses décompositions additives et soustractives d'un nombre.

L'unité 1 a pour objectif la découverte et la prise en main autonome de la machine par les élèves autour de questions telles que comment est faite cette machine et à quoi elle sert. Basée sur la production d'un dessin de la machine, qui permet de finaliser son exploration et sa description par les élèves, cette étape se conclue par la mise en place d'un vocabulaire pour désigner les parties de la machine les plus importantes en vu de son usage mathématique : les roues, les dents, les triangles rouges.

L'unité 2 permet de travailler l'inscription d'un nombre et de définir l'usage de chaque roue : unité, dizaine et centaine. Avec le cahier d'activité informatisé « les nombres avec la e-pascaline », l'élève de CP peut soit dénombrer une collection d'objets et inscrire sur la pascaline le nombre obtenu, soit utiliser la pascaline pour produire l'écriture chiffrée du nombre d'objets en associant, terme à terme, un objet avec un clic sur la roue des unités. Il utilise alors la e-pascaline pour générer une écriture chiffrée qu'il ne

saurait pas encore lui-même associer au mot nombre. Le cahier propose également la tâche d'écrire sur la e-pascaline un nombre dicté à l'oral (nombres inférieurs à 100 en particulier dans la partie irrégulière de la centaine).

L'unité 3 concerne l'addition et la soustraction. Comme on l'a vu en I, l'addition avec la pascaline ne traite pas les deux termes de façon symétrique. En revanche, elle respecte la commutativité de l'addition. Le cahier « Additionner avec la e-pascaline » apporte une contrainte supplémentaire qui est de restreindre le nombre de clics possibles sur la roue des unités afin d'amener les élèves à abandonner la procédure par itération de la roue des unités, qui fait appel à une conception du nombre comme quantité d'unités, au profit de la procédure par décomposition, qui fait appel à l'écriture décimale du nombre.

Figure 10 shows the homepage of the 'mallette en CP-CE1' website on the left and four teaching units on the right.

Page d'accueil du site de la « mallette en CP-CE1 »

— Dernière modification 24/09/2014 03:42

Page d'accueil avec accès aux ressources, cahiers Cabri Elem et vidéos

A propos de ce prototype de Mallette pour le CP et le CE1

Cette mallette pour le CP et le CE1 propose des ressources pour enseigner la numération décimale et les opérations d'addition et de soustraction. Les séquences et situations proposées utilisent des pascalines et des logiciels dans lesquels apparaît une version informatisée de la pascaline, appelée e-pascaline.

Ce prototype a été élaboré dans le cadre du projet "Mallette de ressources mathématiques, cycle 1 - cycle 2" mené par un consortium réunissant des enseignants, des formateurs et des chercheurs du CREAD, de l'IFE et de la COPIRELEM. Il s'agit d'un prototype de Mallette dans un état qui en permet l'utilisation et le test mais qui n'est pas destiné à être diffusé tel quel.

[Lire la suite.](#)

La pascaline

La pascaline présente dans cette mallette est une petite machine à engrenages, constituée de roues dentées, qui permet d'écrire des nombres et de faire des calculs. Elle s'appelle pascaline en référence à la fameuse machine à calculer mécanique construite par Blaise Pascal.

[Voir comment utiliser la pascaline pour écrire et calculer.](#)

[Se procurer une ou plusieurs pascalines auprès de l'ARPEME ou en téléchargeant un bon de commande.](#)

Unité 1. Découverte, description et fonctionnement de la Pascaline
 Découvrir comment fonctionne la machine.
 Décrire la machine.
 Représenter la machine.
 Emettre et valider des hypothèses sur son fonctionnement et son utilisation.

Unité 2. Ecriture des nombres sur la Pascaline
 Ecrire un nombre à deux chiffres sur la Pascaline par itération (+1) ou/et par décomposition en dizaines et unités.
 S'approprier les différentes procédures.
 « Ecrire les nombres avec la e-pascaline ».

Unité 3. Additions et soustractions sur la Pascaline
 Découvrir et expliciter les procédures d'utilisation de la Pascaline pour l'addition et la soustraction.
 « Additionner avec la e-pascaline ».

Unité 4. Calcul réfléchi
 Minimiser le nombre de clics sur la e-pascaline pour écrire un nombre inférieur à 20.
 « Compter les clics de la e-pascaline ».

Figure 10. Page d'accueil du site de la « mallette en CP-CE1 » (à droite) et entrée vers les unités d'enseignement (à gauche)

L'unité 4 utilise la pascaline pour créer un nouveau problème qui est celui de l'écriture d'un nombre sur la pascaline en un minimum de clics. C'est-à-dire qu'il s'agit de rechercher une écriture économique des nombres avec la pascaline, le coût d'une écriture étant calculé en nombre de clics sur les roues. Plusieurs solutions sont possibles et suivant les nombres, la solution la plus économique repose soit sur une itération de la roue des unités (5 en 5 clics sur la roue des unités), soit sur la décomposition canonique en unités, dizaines et centaines (31 en 3 clics sur la roue des dizaines et 1 sur la roue des unités) ou encore sur une décomposition soustractive (19 en 20-1, c'est-à-dire 2 clics sur la roue des dizaines et un clic sur celle des unités). La résolution de ce problème fait apparaître différentes propriétés d'un nombre, différentes décompositions additives et soustractives et mobilise du calcul réfléchi. Ce problème a du sens grâce à la machine et engage les élèves (et les adultes) dans une véritable recherche de solutions. L'utilisation de la e-pascaline est cruciale car elle fournit un compteur de clics qui décharge ainsi l'élève du calcul du coût de sa procédure en même temps qu'il l'exécute.

IV - LES DUOS D'ARTEFACTS DANS LES SEQUENCES

Les deux ressources présentées dans la partie III ont en commun le fait d'intégrer dans leur séquence l'utilisation d'un duo d'artefacts (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013), c'est à dire l'utilisation d'une version matérielle et d'une version logicielle de l'instrument considéré. Nous avons proposé aux participants d'évaluer ce choix et d'étudier la valeur ajoutée de la technologie.



Figure 11. Les élèves avec les duos d'artefacts

1 Valeur ajoutée du virtuel dans la représentation des nombres et dans le fonctionnement de l'artefact

Dans les deux cas, l'apparence et le fonctionnement de la version logicielle n'est pas identique à celui de la version matérielle. Ces différences sont exploitées didactiquement pour favoriser chez les élèves un usage de l'instrument qui se rapproche du travail mathématique visé. Dans le duo, chaque composant apporte une dimension qui lui est propre.

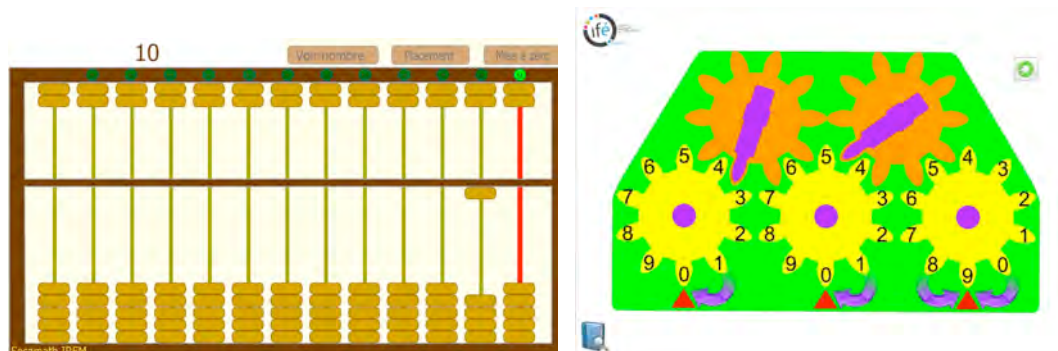


Figure 12. À droite, le boulier virtuel de Sésamath avec la tige des unités en rouge, l'icône « voir nombre » pour afficher le nombre en chiffres, l'icône « placement » pour inscrire économiquement un nombre sur le boulier et « la remise à zéro ». A droite, la e-pascaline de l'IFÉ avec les flèches d'action sur les roues (de part et d'autre des triangles rouges) et l'icône de remise à zéro (à droite).

Le boulier dans la version virtuelle de Sésamath (Figure 12 à gauche), dispose par rapport à la version matérielle, de fonctions et de caractéristiques spécifiques : la tige choisie pour les unités est rouge ; un clic sur l'icône « mise à zéro » désactive toutes les boules ; un clic sur « voir nombre » permet d'afficher l'écriture chiffrée du nombre inscrit sur le boulier et enfin un clic sur « placement » entraîne l'affichage de l'inscription économique du nombre, c'est-à-dire celle qui utilise le moins de boules possible. Le fait que la tige des unités soit rouge facilite la prise en main du boulier virtuel par les élèves. En effet, les élèves de GS se posent souvent la question du choix de cette tige avec le boulier matériel et certains choisissent la tige la plus à gauche. Le professeur peut, en s'appuyant sur le fonctionnement du virtuel, coller une gommette rouge sur le cadre du boulier matériel au-dessus de la tige des unités. L'icône « voir nombre », en permettant l'affichage de l'écriture chiffrée du nombre, est aussi une aide pour découvrir seul les règles d'utilisation du boulier. En effet, les élèves peuvent faire des essais, tâtonner pour apprendre à inscrire les nombres. Pour nous, cela permet de favoriser une démarche d'investigation lors

de la découverte de l'artefact. L'icône « placement » nous semble moins utile dans la mesure où, en GS, il n'est pas souhaitable de favoriser l'inscription économique des nombres par rapport aux autres inscriptions. De plus, comme l'ont souligné certains participants, le passage d'une inscription à l'inscription économique est très rapide lorsqu'on clique sur l'icône « placement ». Pour en tirer un avantage en terme d'apprentissage, il faudrait pouvoir conserver l'affichage de l'inscription initial en parallèle de l'inscription économique. Cela nécessite l'ouverture simultanée de deux fenêtres du logiciel ce qui est possible notamment avec un tableau numérique interactif (Figure 13).

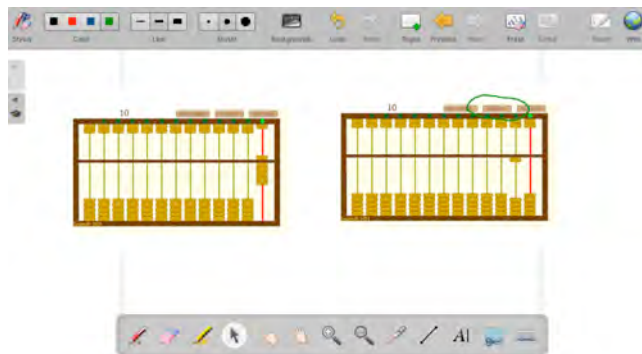


Figure 13. Comparaison de deux inscriptions de 10 au TNI avec Open-Sankoré

La e-pascaline (Figure 12 à droite) est elle aussi assez différente de la pascaline, bien que son apparence graphique, forme et couleur, soit très proche. Les chiffres sont toujours bien orientés pour la lecture quelque soit la position de la roue et plusieurs boutons de réinitialisation sont disponibles (au centre de chaque roue le cercle violet est cliquable et remet les trois roues à zéro). Une autre caractéristique de la e-pascaline, qui la différencie de la pascaline, est que les calculs ne sont rendus possibles que si le résultat peut s'afficher correctement, c'est-à-dire si le résultat de l'opération est compris entre 0 et 999. Ainsi lorsque la e-pascaline est initialisée à 000, aucune soustraction n'est possible. De même, lorsqu'elle affiche 900, il n'est plus possible d'ajouter une centaine. L'utilisateur s'en rend compte car la flèche d'action sur la roue des centaines disparaît (voir partie IV.3. pour la description des flèches d'action). Par exemple, sur la pascaline de la Figure 12 qui affiche 9, il n'est pas possible de soustraire une dizaine ou une centaine, les flèches d'action sont donc masquées. Ainsi l'usage de la e-pascaline est contraint pour rester à l'intérieur de son domaine de validité, alors que la pascaline matérielle permet, elle, de « faire » $000-1$ ou $999+1$ (nous laissons au lecteur le soin d'imaginer quels sont les affichages obtenus). Les cahiers d'activité informatisés de la collection e-pascaline proposent différentes tâches qui, en complément de l'utilisation de la pascaline, contribuent à l'avancée de la séquence. Ces cahiers constituent un environnement d'apprentissage car ils fournissent des rétroactions et s'appuient sur une évolution de valeurs de variables didactiques (Mackrell, Maschietto, & Soury-Lavergne, 2013). Dans les cahiers, l'usage d'une roue est contraint pour favoriser l'évolution des procédures élèves vers la procédure par décomposition ou, autre exemple, des outils annexes sont proposés, tels que le compteur de clics. Les nombres et les calculs soumis aux élèves sont générés aléatoirement (dans un ensemble contraint par un choix de valeurs de variables didactiques ou dans une liste fournie par l'enseignant), les rétroactions sont fines et fréquentes (chaque essai peut être évalué à la demande de l'élève, voir la colonne de smiley pour les additions réussies ou pas dans la Figure 14) et des aides sont fournies. Tous ces éléments font la valeur ajoutée de la e-pascaline et des cahiers informatisés.

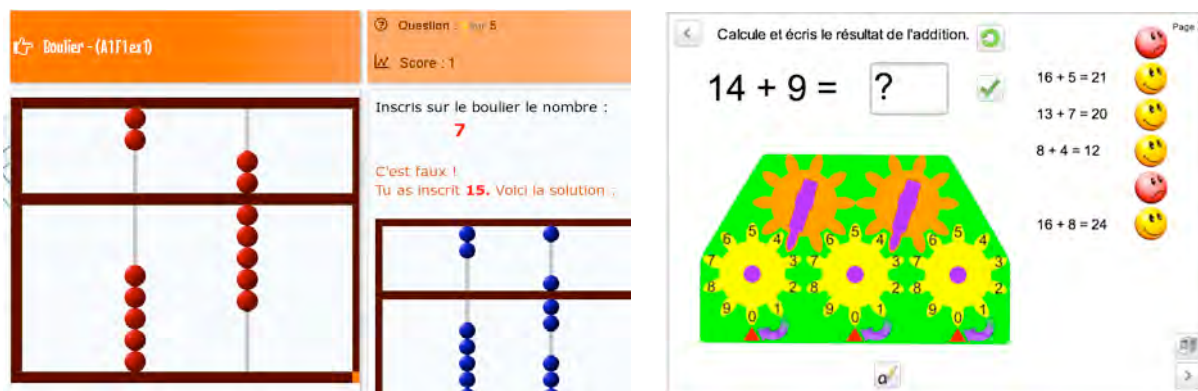


Figure 14. Interface des logiciels avec les rétroactions qui valident ou invalident les essais des élèves. A gauche, l'élève doit inscrire 7 sur le boulier. A droite l'élève doit calculer l'addition $14+9$. Dans les deux cas, la réponse de l'élève est évaluée par le système.

Mais dans le duo d'artefacts, la machine matérielle a elle aussi des apports spécifiques pour l'apprentissage. L'utilisation de la pascaline matérielle garantit la présence et la mobilisation de compétences kinésiques (le retour d'effort différent au passage d'une dent ou d'une dizaine), l'occurrence de la boucle perceptivo-motrice œil-main et l'engagement corporel de l'élève, dont les recherches ont montrés l'importance pour l'apprentissage, en particulier en mathématiques. La pascaline matérialise physiquement le processus d'écriture des nombres avec notre système décimal, elle donne à voir le mécanisme de la numération. Comme le dit une élève de CE1 (2014 en Haute-Loire) : « C'est facile, c'est comme si c'était un fonctionnement dans notre tête, mais qu'on avait reproduit comme ça, devant nous ! ».

2 Des gestes différents

Au-delà des fonctions additionnelles du boulier virtuel ou de la e-pascaline par rapport aux versions matérielles, leur utilisation nécessite des gestes différents de la part des élèves, ce qui peut avoir également une influence sur leurs procédures. Sur le boulier virtuel, comme sur la e-pascaline, certains gestes sont empêchés.

Par exemple, sur le boulier virtuel, il n'est pas possible d'activer simultanément des quinaires et des unaires d'une même tige. Avec un boulier matériel, un geste de pince avec le pouce et l'index le permet. Il n'est pas non plus possible d'activer simultanément des boules sur différentes tiges. Avec un boulier matériel l'utilisation des deux mains rend cette action possible. En effet, avec le boulier virtuel, un clic accompagne chaque activation de boules. Cela peut sembler plus fastidieux, mais l'objectif ici n'est pas d'être le plus rapide possible, il s'agit d'apprendre à inscrire et lire des nombres et d'être capable d'explicitier sa procédure.

De même, pour actionner les roues de la e-pascaline, l'utilisateur clique sur l'une des flèches courbes situées de part et d'autre des triangles rouges. Une action directe sur les roues n'est plus possible, en particulier sur les roues oranges. Il s'agit d'une contrainte sur le geste d'action qui est utile pour l'apprentissage car elle permet d'associer précisément une opération mathématique, addition ou soustraction, avec un seul sens de rotation. C'est un apport de la e-pascaline parce que lorsqu'ils le peuvent, donc avec la pascaline, les élèves apprécient beaucoup de tourner les roues oranges, en particulier en attrapant la tige violette supérieure. Or les roues oranges, directement engrenées sur les roues jaunes à leur droite, tournent dans le sens inverse de ces roues jaunes. La contrainte sur le geste avec la e-pascaline permet de construire un lien stable entre sens de rotation et opération. Un autre geste bloqué est le faire de faire défiler plusieurs dents en un seul clic. Cela favorise également le recours à la roue d'unité supérieure pour rendre une procédure plus économique.

Dans le cas du boulier virtuel comme de la e-pascaline, la contrainte sur l'action de l'utilisateur renforce le lien entre geste et signification mathématique.

3 Travail en autonomie et mise en commun

Deux autres avantages des artefacts virtuels sont également soulignés par les participants à l'atelier. L'usage d'une version virtuelle lors des séquences de classe favorise l'autonomie de l'élève et facilite les mises en commun.

Les bouliers virtuels (Figure 12 à gauche ou boulier j3p de la Figure 14) et la e-pascaline permettent aux élèves de travailler en autonomie (une fois que les premières séances de découverte et d'apprentissage ont été menées).

Par exemple, un élève de GS peut travailler en autonomie avec à la fois, un boulier matériel, le logiciel créé par Sésamath installé sur un ordinateur individuel (Figure 11) et une fiche lui indiquant les tâches à effectuer. L'affichage de l'écriture chiffrée du nombre permet à l'élève de vérifier son inscription sur le boulier matériel. Le fait que l'élève écrive sa réponse sur une fiche permet à l'enseignant de suivre ses progrès et de valider ses réponses. Le boulier paramétrable (boulier j3p) favorise encore davantage l'autonomie puisque les tâches sont données par le logiciel et la validation des réponses est également prise en charge. Cependant, il a été remarqué que si le logiciel propose une bonne réponse en cas d'erreur (Figure 14) il n'apporte pas d'aide aux élèves.

De la même manière les cahiers d'activité informatisés favorisent l'engagement et l'autonomie des élèves de CP. Ils peuvent effectuer des calculs avec la pascaline ou la e-pascaline, recevoir des aides (qui ne consistent pas à montrer la solution mais à mettre en évidence une caractéristique de la réponse de l'élève) et demander une évaluation. La succession des pages des permet de décliner une même tâche en modifiant ses caractéristiques (choix de valeurs de variable didactique), de faire évoluer l'enjeu de la tâche et le tirage aléatoire des valeurs numériques fournit à tous les élèves l'occasion d'essayer autant de fois que voulu.

L'utilisation du boulier virtuel ou de la e-pascaline avec un vidéo-projecteur ou un TNI apporte une aide importante lors des mises en commun en permettant aux élèves de partager et d'explicitier leurs procédures.



Figure 15. Exemples de mise en commun au TNI ou vidéo projecteur, avec le boulier virtuel (à gauche) et la e-pascaline (au centre et à droite).

V - CONSTATS AVEC LES ELEVES

1 Avec le boulier

Lors de la découverte de la séquence pour la GS, les participants ont pu envisager des difficultés rencontrées par les élèves lorsqu'ils utilisent un boulier chinois en GS ainsi que des réussites possibles en terme d'apprentissages sur le nombre.

Tout d'abord, la difficulté principale en GS est bien sûr de différencier la valeur d'une boule de la quantité de boules. En effet, lors des premières séances d'utilisation du boulier, les élèves commettent souvent des erreurs comme : ils activent cinq unaires et une quinaire dans les unités pour inscrire six. Pour eux il n'est pas évident d'admettre qu'une boule strictement semblable à une autre n'a pas la même valeur. Il est nécessaire d'utiliser le boulier régulièrement et sur un temps long pour permettre aux élèves de parvenir à surmonter cette difficulté initiale. Cela explique pourquoi la séquence en GS est constituée d'un nombre important de séances. C'est aussi pour cela que les premières séances ne sont consacrées qu'à l'inscription et la lecture des nombres jusqu'à cinq.

Nous soulignons le fait que cet apprentissage est facilité par le lien entre le boulier et les mains en prenant l'exemple d'une élève que nous avons observée lorsqu'elle inscrivait huit sur un boulier matériel. Elle a commencé par lever les cinq doigts de la main gauche (Figure 16) puis a activé une quinaire avec la main droite dans les unités en prononçant le mot cinq. Ensuite, elle a activé une unaire en prononçant « six », une seconde unaire en prononçant « sept » et enfin une unaire en prononçant « huit ». Elle a associé une quinaire à une main et une unaire à un doigt pour inscrire huit.

Cet appui sur les mains constitue une aide importante pour les élèves. Cette association peut se faire aussi pour les nombres sur la tige des unités jusqu'à quinze. L'exemple ci-dessous montre Déborah, enseignante en GS, que nous avons observée en 2012/2013 (Riou-Azou, 2013). Elle demande aux élèves d'utiliser leurs mains pour lire l'inscription réalisée au TNI en disant « dix ce sont les deux mains avec tous les doigts ». Les élèves ajoutent ensuite les cinq unaires à dix.

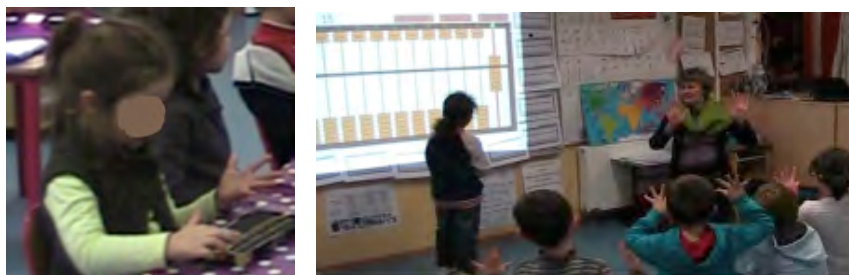


Figure 16. Inscription de huit à l'aide des mains (à gauche) et lecture de quinze en s'aidant des deux mains (à droite).

Enfin, le fait que le matériel envisagé pour mettre en œuvre la séquence ne se limite pas au boulier chinois nous a permis d'insister sur le fait que le boulier s'intègre dans la classe comme d'autres ressources pour construire le nombre mais ne se substitue pas à elles (Riou-Azou, 2015). Les élèves s'appuient par exemple sur la bande numérique pour inscrire un nombre. Cette élève (Figure 17) utilise la bande numérique pour associer le mot-nombre treize prononcé par l'enseignante à l'écriture chiffrée 13. Elle peut ensuite activer une unaire dans les dizaines et trois unaires dans les unités.

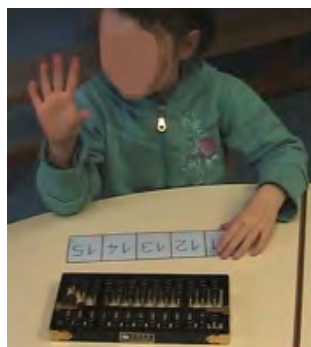


Figure 17. Inscription de treize sur un boulier à l'aide d'une portion de bande numérique.

2 Avec la pascaline

Au cours de la découverte de la pascaline matérielle, les élèves n'orientent pas la machine dans le bon sens et ne lisent pas les chiffres au dessus des repères triangulaires rouges (mais en face des tiges des roues oranges). En revanche, ils identifient bien les bruits et la résistance particulière de la machine au moment du passage de 9 à 0 « qui fait tout bouger ». Ils créent un vocabulaire pour désigner les différentes parties de la machine, comme par exemple tourniquet, fleur ou soleil pour parler des roues. A propos de l'utilité d'une telle machine, si elle ne leur a pas été présentée comme une machine mathématique, ils supposent que c'est pour lire l'heure ou pour jouer. Les dessins de la pascaline, qu'ils réalisent à la demande de l'enseignant, sont révélateurs des conceptions disponibles à propos du nombre et des chiffres : les chiffres peuvent

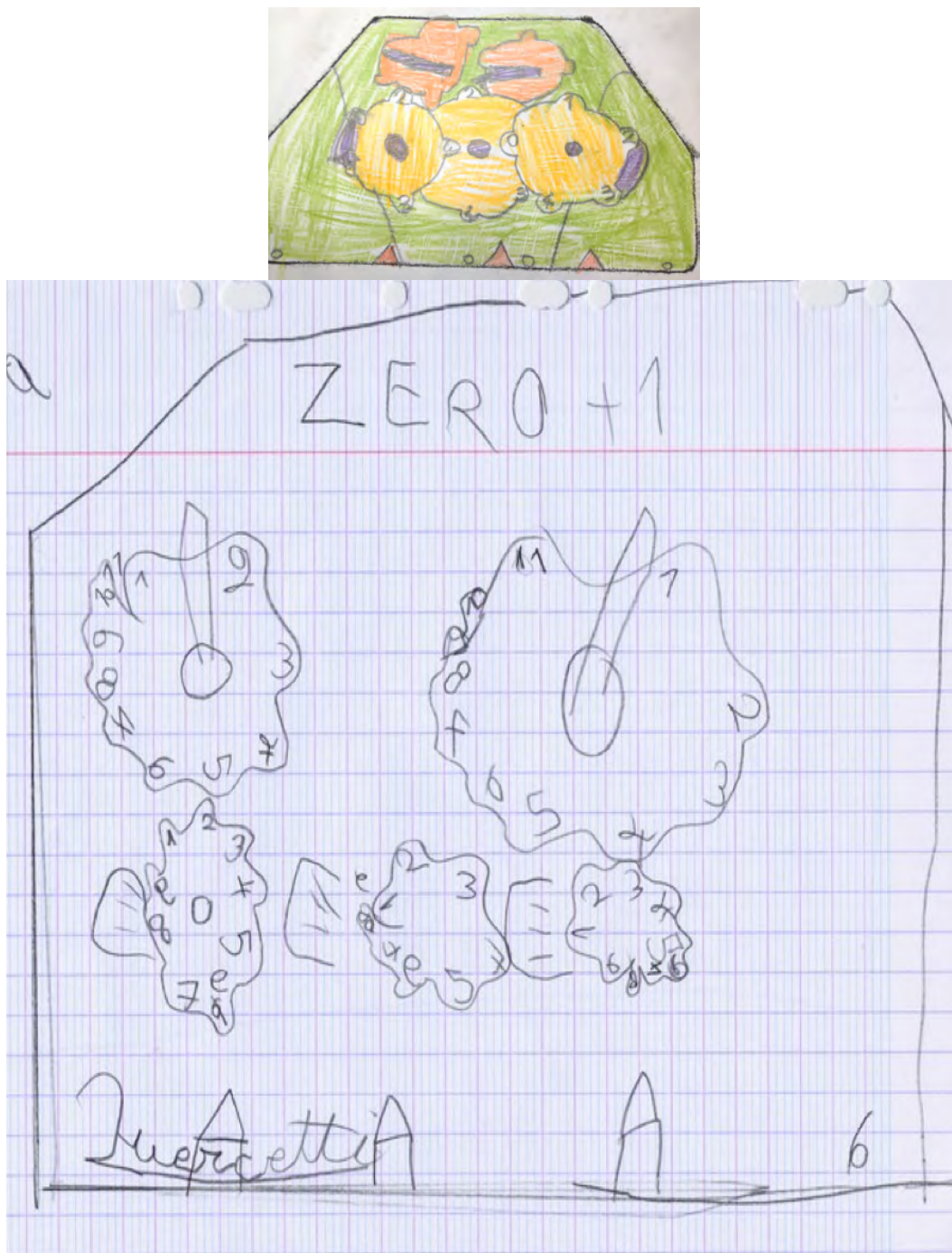


Figure 18. Dessins d'élèves montrant que les chiffres de 0 à 9 ne sont pas la caractéristique principale de la pascaline.

Les roues ne correspondent pas initialement aux unités, unité, dizaine et centaine. Ainsi, lorsqu'ils écrivent le nombre 13, les élèves utilisent toutes les roues et ne placent pas zéro sur la roue non utilisée. Ils obtiennent des affichages tels que 130, 137, 913 etc... qui permettent de discuter de l'usage de la machine, d'introduire une convention d'usage pour l'écriture et de nommer les roues.

Le passage à l'addition n'est pas aisé. Les élèves ont du mal à comprendre la répartition du travail entre l'utilisateur et la machine (ils écrivent les deux termes de l'addition sur la machine et attendent un effet ou alors calculent de tête et inscrivent le résultat sur la machine). Mais la difficulté vient du fait que le second terme de l'addition n'est à aucun moment affiché par la machine. Le contrôle du second terme est alors fait par le nombre de clics et, pour les élèves de CP, renvoie uniquement à une quantité d'unités : « 17 c'est 17 unités, donc pour additionner 17, je clique 17 fois sur la roue des unités ». Le rôle

du cahier e-pascaline, qui limite l'usage de la roue des unités et rend impossible de faire 17 clics est alors déterminant pour rendre nécessaire l'évolution vers la procédure par décomposition.

L'usage de la machine nécessite de faire le lien entre parcourir la suite des nombres entiers (affichage du nombre suivant en faisant un clic sur la roue des unités) et l'opération +1. Ce lien entre bande numérique, numération et calcul est nécessaire pour résoudre le problème de l'unité 4 qui demande d'écrire un nombre en un minimum de clics. Les élèves ne mobilisent pas spontanément des procédures qu'ils considèrent relever du calcul pour résoudre un problème d'écriture de nombre qui consiste à positionner le bon chiffre à la bonne place. Pour écrire 19, on voit les élèves faire 1 clic sur la roue des dizaines, -1 clic sur la roue des unités puis ajuster à nouveau la roue des dizaines en faisant +1. Cette procédure qui peut se résumer par $+10-1+10$ n'équivaut pas à faire $+20-1$. D'ailleurs, ces mêmes élèves ne sont pas capables d'écrire 9 en un minimum de clics. Ces élèves sont dans le positionnement des chiffres au bon endroit et en ajustant si nécessaire, donc dans la numération. Mais ils ne mobilisent pas leurs connaissances sur le calcul et le fait que 19 est proche de 20. Comme l'engagement des élèves dans la résolution du problème est très forte et que l'écriture des nombres 9 ou 99 résiste, l'intervention de l'enseignant et le passage par des traces écrites permet de faire émerger d'autres procédures et diverses décompositions additives et soustractives des nombres.

VI - CONCLUSION, UN ACCOMPAGNEMENT DES ENSEIGNANTS NECESSAIRE

Les participants présents ont pu se rendre compte de la nécessité de disposer d'un temps suffisamment long pour prendre en main les artefacts ainsi que pour s'approprier des ressources produites dans les mallettes. C'est dans cet objectif que des parcours de formation continue ont été ou sont actuellement en construction sur la plateforme M@gistère.

Le parcours M@gistère « IFE - La numération décimale avec une machine mathématique au cycle 2 » est disponible en échange inter-académique (il n'est pas inscrit sur le catalogue national mais utilisé dans les académies de Dijon, Lyon et Clermont-Ferrand).

Le parcours M@gistère « Matériels et logiciels pour la construction du nombre : le boulier chinois, nombres et calcul » est disponible sur la plateforme nationale⁶ (à partir de septembre 2015).

VII - REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Artigue, M., Cazes, C., Haspekian, M., Khanfour-Armalé, R., & Lagrange, J.-B. (2013). *Geste, cognition incarnée et artefacts : une analyse bibliographique pour une nouvelle dimension dans les travaux didactiques au LDAR* (No. 8). Paris, France: IREM Paris 7. Retrieved from <http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/PS/IPS13006/IPS13006.pdf>

Descotes, D. (1988). Pascal et le marketing. In *Mélanges offerts au Professeur Maurice Descotes* (pp. 141–162). Univ. de Pau et de l'Adour.

Gueudet, G., Bueno-Ravel, L., & Poisard, C. (2014). Teaching Mathematics with Technologies at Kindergarten: Resources and Orchestrations. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, pp. 213–240). Springer.

Mackrell, K., Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). The interaction between task design and technology design in creating tasks with Cabri Elem. In C. Margolinas (Ed.), *ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education* (pp. 81–90). Oxford, Royaume-Uni.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(7), 959–971. <http://doi.org/10.1007/s11858-013-0533-3>

Nagase, H. (2013). La machine arithmétique et les « ordres » pascaliens. *Dix-Septième Siècle*, 4(261),

⁶ <https://magistere.education.fr/dgesco/>

677–694. <http://doi.org/10.3917/dss.134.0677>.

Poisard, C. (2005). Les objets mathématiques matériels, l'exemple du boulier chinois. *Petit X*, 68, 39–67.

Poisard, C. (2009). Boulier chinois et algorithmes de calcul. *Plot*, 27, 22–27.

Riou-Azou, G. (2013). *La construction du nombre en grande section de maternelle avec un boulier chinois virtuel. Mémoire de Master 2 RASPL, Quimper, non publié.* (Master 2 RASPL). Université de Bretagne Occidentale.

Riou-Azou, G. (2015). Apports du boulier chinois en grande section de maternelle. *Repères IREM*, 98.

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2013). A la découverte de la « pascaline » pour l'apprentissage de la numération décimale. In C. Ouvrier-Buffet (Ed.), *XXXIXe colloque de la COPIRELEM Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève*. Quimper, France.