DES PROBLEMES DE REPRODUCTION AUX PROBLEMES DE RESTAURATION DE FIGURES PLANES : QUELLES ADAPTATIONS POUR LA CLASSE ?

Caroline BULF
ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux
E3D – LACES
caroline.bulf@espe-aquitaine.fr

Valentina CELI
ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux
E3D – LACES
valentina.celi@espe-aquitaine.fr

Résumé
Nous présentons ici un travail permettant de prendre en compte les résultats récents de la recherche en didactique de la géométrie afin d'interroger les raisons d'être des problèmes de reproduction de figures planes présents dans différentes ressources pédagogiques. L'objectif de ce travail est pour nous d'outiller efficacement les enseignants pour donner plus de consistance à de « simples » problèmes de reproduction de figures à moindre coût et à partir de l'existant. Nous nous appuyons en particulier sur une analyse croisée des instructions officielles, de certaines ressources pour enseignant et de résultats de la recherche à propos de la reproduction de figures géométriques au cycle 3 de l'école primaire, pour proposer des pistes d'adaptations pour la classe. En outre, ce travail propose des pistes pour la formation des enseignants du premier degré à travers l'étude de ressources existantes.

Ces trente dernières années, la réflexion sur les *problèmes*[1] *de reproduction* de figures[2] a beaucoup évolué du point de vue de la recherche et a permis de faire avancer les réflexions didactiques à propos de l'enseignement de la géométrie (Ducel & Peltier, 1986 ; Duval, 1994 ; Duval, Godin & Perrin-Glorian, 2005 ; Godin & Perrin, 2009 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013).

Nous proposons ici de dégager des pistes d'analyse de différentes ressources pédagogiques existantes telles que les textes officiels et les manuels scolaires[3] dans le but de questionner leur articulation avec les résultats de la recherche en didactique des mathématiques dans le cadre des problèmes de reproduction particuliers, à savoir les *problèmes de restauration* (Godin & Perrin-Glorian 2009), dont nous fournirons plus loin les caractéristiques.

Sans perdre de vue les tensions relatives à l'élaboration d'un manuel scolaire (Peltier & Briand, 2010), nous chercherons en particulier à identifier des leviers permettant une éventuelle transposition à faible « coût » des résultats de la recherche à partir de documents existants.

Ce texte se compose de quatre parties.

Dans la première partie, nous présentons les constats qui nous ont amenées à approfondir notre sujet. Ici, nous cherchons aussi à caractériser les problèmes de reproduction de figures planes. C'est pourquoi nous intégrons les résultats d'un premier travail proposé aux participants à l'atelier.

---

[1] Nous utilisons ici le terme de *problème* au sens de Polya (1967, p. 131) : « Poser un problème signifie donc : rechercher de manière consciente une certaine ligne d'action en vue d'atteindre un but clairement conçu, mais non immédiatement accessible. Résoudre un problème, c'est trouver cette ligne d'action ».

[2] Notre travail portant sur les problèmes de reproduction, nous utilisons le terme *figure* au sens de *figure matérielle* (Celi & Perrin-Glorian, 2014).

[3] Nous considérons ici les manuels comme une ressource pouvant être proche des habitudes et des pratiques des enseignants.

Dans la deuxième partie, nous fournissons les outils théoriques qui nous semblent nécessaires pour pouvoir interroger les raisons d'être de problèmes de reproduction présents dans différentes ressources pédagogiques.

C'est dans la troisième partie que nous présentons les analyses de quelques problèmes extraits de manuels scolaires. À cette occasion, nous prendrons aussi en compte les résultats d'un deuxième travail proposé aux participants.

La dernière partie portera sur quelques conclusions de ce travail ainsi que les perspectives qui s'ouvrent à nous à l'issue de nos analyses.

I - LE POINT DE DEPART : DES CONSTATS

1 Des premiers constats « naïfs » de formateurs

Notre travail sur les problèmes de reproduction de figures planes part du constat que ces problèmes sont très présents dans les manuels sans pour autant que leurs *raisons d'être*[4] (Chevallard, 1998, p. 115) soient explicites (aux yeux des enseignants et *a fortiori* aux yeux des élèves). A titre d'exemple, nous proposons l'extrait reproduit à la figure 1. Celui-ci est donné en l'état dans le livre de l'élève et aucun élément d'analyse n'est fourni dans le livre du maître.

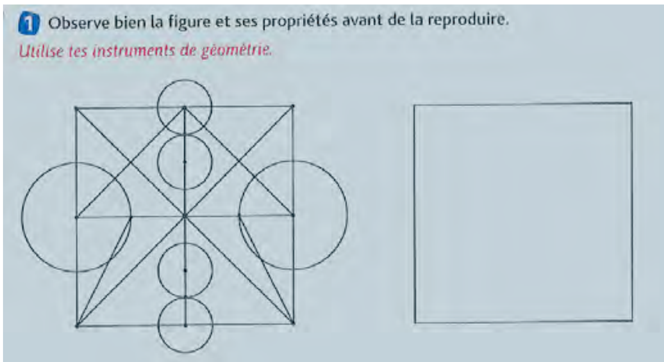


Figure 1. - Extrait[5] de la *Tribu des maths*, CM2, 2010.

Cet extrait[6] nous semble être représentatif du type de problèmes de reproduction proposés dans bon nombre de manuels scolaires : la consigne est très ouverte, peut-être trop pour que l'élève puisse s'engager correctement dans le travail proposé ; on fournit une amorce qui est à la même échelle que le modèle et simplement translatée par rapport à celui-ci. Aussi, comme nous le verrons plus loin, ce problème, ne nous semble pas, en l'état, exploiter au mieux son potentiel didactique, notamment à propos du cercle.

Notre propre expérience de formateurs (formation initiale et continue, visites de classe, etc.), nous permet de faire le constat que les problèmes de reproduction de figures planes sont pourtant très présents en classe. Toutefois, il nous semble que le potentiel d'apprentissage de ces problèmes est souvent sous-estimé par les enseignants car leur finalité se trouve souvent réduite à la reproduction graphique finale obtenue ou aux maniements des instruments de géométrie.

A la lecture des évaluations nationales (2009-2013), ce constat se trouve être renforcé. En effet, à propos des exercices de reproduction, les enseignants sont sollicités à repérer les imprécisions des tracés dues à une dextérité insuffisante ou à des manipulations incorrectes des instruments. Or l'habileté dans le maniement des instruments est-elle une compétence indispensable pour les apprentissages géométriques ?

---

[4] Nous empruntons cette locution à Chevallard (1998) : nous évaluons ici si la présence du type de tâche « reproduire » est motivée ou non, ses *raisons d'être*, dans une organisation mathématique qui pourrait être celle définie implicitement par les textes officiels ou alors celle adoptée par les auteurs d'un manuel scolaire.

[5] Tous les extraits des ressources citées ne sont pas reproduits à l'échelle.

[6] Le même extrait sera repris plus loin pour illustrer ce qu'on entend par *leviers d'adaptation pour la classe à faible coût*.

Forts de ces constats, certes peut-être naïfs, l'objectif de notre travail repose sur la volonté d'outiller efficacement les enseignants pour qu'ils donnent plus de consistance à de « simples » problèmes de reproduction de figures, à moindre coût et à partir de l'existant. En effet, notre objectif premier réside plus dans le fait de chercher à ce que les enseignants s'approprient des outils d'analyse que dans l'idée de leur donner « clés en main » une progression ou séquence (issue de la recherche), nous y reviendrons.

Une fois ces premiers constats et objectifs présentés lors de l'atelier, nous avons soulevé nos premières questions qui portent sur l'origine des problèmes de reproduction et qui sont l'objet du paragraphe suivant :

- Quelles sont leurs raisons d'être ?
- Pourquoi sont-elles apparues dans les Instructions Officielles ? À quelle époque et pourquoi ?
- Quelle légitimité ?

2 Et pourtant …

Dans les programmes de mathématiques de l'école primaire, les problèmes de reproduction font leur première apparition à la fin des années 1970[7] (cycle élémentaire), avant cette date ils relevaient du domaine du dessin (Bouleau, 2001). Leurs caractéristiques et leurs raisons d'être se précisent ainsi au fil du temps.

En 1980 (cycle moyen), on indique que l'élève doit savoir reproduire « différents objets géométriques (solides, surfaces ou lignes) ». Un paragraphe est consacré à l'explicitation des objectifs des activités géométriques : ici, on précise entre autres que « les activités géométriques peuvent concerner la **reproduction**, la description, la représentation ou la construction d'un objet » et que « reproduire un objet dont les élèves disposent, c'est en réaliser une copie conforme ». On distingue la reproduction de la construction « car les élèves partent alors d'une représentation ou d'une description et non de l'objet lui-même ». Les problèmes de reproduction étant liés aux techniques et aux instruments de dessin, on souligne que ces derniers ne doivent pas seulement servir pour réaliser correctement les tracés mais « l'élève doit apprendre à choisir l'instrument adéquat à la tâche envisagée et donc à analyser l'instrument et l'objet d'étude ».

Dans les compléments aux programmes et instructions du 15 mai 1985, un intérêt particulier est attribué à l'enseignement de la géométrie. Les activités de reproduction sont davantage caractérisées : on peut reproduire des objets plus ou moins usuels (solides ou de figures planes, simples ou complexes), à l'échelle 1 ou à une autre échelle ; on peut recourir à des matériaux divers, ce qui peut, entre autres, suggérer la reproduction à l'aide de gabarit, ainsi qu'à des outils variés (moulages, calques, instruments géométriques usuels). À travers la reproduction d'une figure, l'élève doit apprendre à se servir des procédés d'analyse et de synthèse qui sont propres aux activités géométriques. L'appel aux outils de géométrie afin de vérifier les propriétés d'une figure demeure toutefois implicite. On les évoque explicitement seulement à propos des compétences de tracé et, dans ce cas, on indique que le choix des outils est une adaptation qui doit être de plus en plus à la charge de l'élève.

En 2002, les textes officiels des programmes scolaires sont rédigés séparément pour le cycle 2 et pour le cycle 3 et comportent chacun un volet sur la géométrie ; les documents qui accompagnent ces programmes consacrent un chapitre à la géométrie au cycle 2.

Dès le cycle 2, la reproduction d'objets réels, de figures simples ou d'assemblages de figures permet de donner du sens aux propriétés géométriques étudiées. Reproduire une figure veut dire la « tracer (sur papier uni, quadrillé ou pointé) à partir de la donnée d'un modèle », l'emploi des instruments peut être précisé ou bien laissé à la charge de l'élève (cycle 3). Des compétences étroitement liées à la reproduction de figures, notamment dans la phase d'analyse du modèle, sont évoquées dans ces textes :
- identifier, de manière perceptive ou en ayant recours aux propriétés et aux instruments, une figure simple dans une configuration plus complexe ;
- décomposer une figure en figures plus simples.

[7] Cf. http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes.htm pour retrouver l'intégralité des textes officiels évoqués dans cet article.

Dans le document accompagnant les programmes de 2002, à propos des problèmes de reproduction de figures sur papier uni, on souligne ainsi qu'ils permettent, certes, d'apprendre à utiliser correctement un instrument de tracé mais surtout à analyser une figure : ces problèmes nécessitent en effet « l'analyse préalable de la figure à reproduire pour en repérer certaines propriétés et, lorsque la reproduction est amorcée[8], pour identifier les éléments communs aux deux figures ».

3 Les représentations des participants à l'atelier

En guise d'introduction au travail de l'atelier, nous avons demandé aux participants de répondre aux questions suivantes, par écrit en cinq minutes : *À l'école primaire, qu'est-ce qu'un problème de reproduction de figures ? Comment le caractériser ? Quelles sont leurs raisons d'être ?*

Ce premier travail a permis de mettre en évidence diverses représentations des participants concernant les enjeux de ce type de problème en classe. Parmi les réponses écrites des participants, base de nos premiers échanges collectifs, une idée semble être partagée, à savoir que l'*on reproduit un modèle, à l'identique ou avec agrandissement*, dans le but de dégager des *relations*, des *propriétés,* via l'utilisation des instruments. Si les éléments essentiels repérés dans les textes officiels apparaissent spontanément dans les réponses des participants, la notion d'*amorce* demeure absente lors de cette première mise en commun ainsi qu'au cours du débat qui s'en est suivi.

Par ailleurs, certains participants ont remarqué que, de manière générale, le contrat didactique oriente les procédures attendues car si l'on adopte un point de vue historique ou si l'on se place dans une *problématique pratique* (au sens de Berthelot & Salin, 1993), la reproduction de figures n'implique pas nécessairement le recours aux propriétés géométriques car les procédures d'essai-erreur (ou d'ajustement) peuvent aussi permettre d'obtenir un résultat, le plus fidèle possible par rapport à la figure d'origine.

Qu'avons-nous appris en orientant nos lectures vers la littérature spécialisée et les recherches développées en didactique des mathématiques ? Dans la partie qui suit nous allons exposer les éléments clé de notre enquête, éléments qui nous serviront à atteindre les objectifs de notre travail.

II - LES APPORTS DE LA RECHERCHE POUR LES PROBLEMES DE REPRODUCTION DE FIGURES PLANES

1 Les travaux de l'Irem de Rouen (Ducel & Peltier, 1986)

Les travaux de recherche portant sur les problèmes de reproduction de figure les plus anciens que nous avons découverts se trouvent être dans une brochure de l'Irem de Rouen remontant aux années 1980 (Ducel & Peltier, 1986). Nous avons présenté aux participants de l'atelier les objectifs généraux annoncés de cette recherche (dont les expérimentations ont eu lieu en classe de CM2 et 6e) et qui sont : « développer des aptitudes d'analyse, de recherche, de validation chez les enfants et pour ce faire mettre les enfants dans des situations telles qu'ils soient actifs face aux problèmes de géométrie, c'est à dire qu'ils aient à analyser des figures, émettre des hypothèses, les tester, les vérifier et communiquer de telle sorte qu'ils se construisent un langage géométrique efficace et fonctionnel » (p.3). La maîtrise des instruments de géométrie et les propriétés géométriques des figures sont au cœur des ambitions de ces problèmes : « savoir utiliser correctement et à bon escient les instruments de dessins géométriques […] savoir construire un certain nombre de figures classiques […] et quelques propriétés géométriques de certaines figures » (p.3). Nous avons détaillé avec les participants l'analyse de plusieurs des problèmes retenus pour répondre à ces desseins et qui sont « des situations dans lesquelles l'élève doit observer et reproduire individuellement un modèle de dessin géométrique à même échelle ou à échelle différente » (op. cité). A titre d'exemple nous reprenons ici le problème dit de la « mosaïque » (figure 2).

[8] La notion d'*amorce* d'une figure à reproduire est cruciale dans les recherches que nous évoquerons et, par conséquent, dans nos analyses : on entend par là le fait que, avec le modèle, on fournit le début de la figure à reproduire.

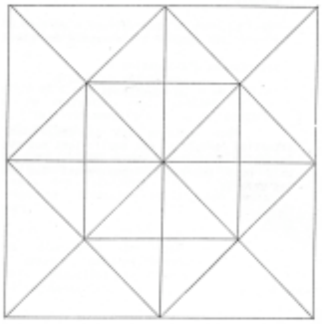


Figure 2. Extrait p.6 de Ducel et Peltier (1986).

Il s'agit d'un carré de 10 cm de côté, dans lequel sont tracés ses diagonales, ses médianes et deux carrés concentriques. Si certains traits sont gommés ou si certaines zones sont coloriées, la nouvelle figure donne à voir des sortes de « puzzles non découpés » (p.6). Les auteurs proposent 13 modèles différents (figure 3).

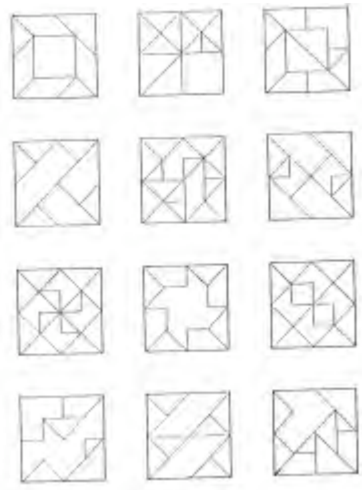


Figure 3. Extrait p.7 de Ducel et Peltier (1986).

Les consignes successives données aux élèves sont :

a) Après avoir reçu un modèle, chaque enfant doit individuellement le reproduire à même échelle sur papier blanc en ayant à sa disposition règle, équerre, compas, puis l'intégrer à la mosaïque collective.

b) Chaque enfant doit reproduire le modèle dans un carré dont la longueur du côté est donnée à l'aide d'une bandelette de papier, puis il devra, là encore, intégrer son dessin à la mosaïque collective (la longueur choisie pour la bande de papier est 13 cm).

Les objectifs d'apprentissage sont les suivants : « Mettre en évidence des régularités dans les dessins permettant de pointer certains concepts et notions : orthogonalité, parallélisme, isométrie des côtés d'un carré, milieu d'un segment. D'aboutir au constat d'un certain nombre de propriétés géométriques de cette configuration qui pourront faire l'objet d'une institutionnalisation. En particulier, dégager des méthodes : de report de longueur au compas [et] de construction d'un carré en connaissant la mesure soit du côté, soit de la diagonale » (p. 9). Parmi les variables didactiques retenues, on notera celles portant sur le choix du type de reproduction demandée (même échelle ou échelle différente) en particulier dans l'idée de « bloquer la procédure de report de longueur » (Op.cité) ; le matériel proposé (feuille blanche, bande de papier) permettant également d'orienter vers les procédures attendues[9].

Les auteurs analysent dans la brochure d'autres problèmes répondant aux mêmes objectifs en jouant sur des propriétés géométriques différentes. Le problème dit de la « rosace » (largement repris par la suite dans différentes ressources publiées par les auteurs de la brochure, nous y reviendrons) exploite plutôt

[9] Voir aussi (Barrier, Hache, Mathé 2014) qui analyse ce problème en classe de CM2.

les relations entre les propriétés du cercle et celles du carré (voir annexe 1) dans l'intérêt de mobiliser les propriétés du carré qui ont pu être travaillées dans le problème précédent (fig.2 et 3 précédentes). Là encore les variables didactiques retenues (nombre de pétales, choix et disposition des couleurs, l'accessibilité du modèle, le choix du support papier, etc.) sont autant de variables qui cherchent à favoriser des procédures d'analyse de la figure (contrairement à celle de la rosace à 6 branches que les élèves vont spontanément d'abord essayer de construire car plus facile à obtenir en reportant directement le rayon du cercle). Le recours aux amorces dans lesquelles les carrés sont apparents (voir annexe 1) a un rôle ici d'aide à l'analyse notamment pour formuler des hypothèses sur la position des centres des demi-cercles (point d'intersection d'un côté d'un carré et d'une diagonale de l'autre).

Outre les variables didactiques qui orientent les actions des élèves et le choix des instruments quant à la résolution du problème, on peut jouer sur une disposition variable de zones colorées : en effet, que ce soit dans le problème de la *mosaïque*, celui de la *rosace* ou celui des *losanges* (cf. annexes 1, 2), ce jeu sur les couleurs amène les élèves à reconnaître différentes formes et surfaces dont les enjeux ont été rappelés aux participants de l'atelier et qui sont l'objet de la partie suivante.

2 Les différents types d'appréhension d'une figure selon Duval

Comme nous l'avons déjà lu dans les textes officiels de différentes époques, les problèmes de reproduction nécessitent un travail d'analyse de la figure à reproduire. C'est pour cela que le travail de Duval (1994) sur les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique nous semble être tout à fait pertinent pour nous aider notamment à mettre en évidence quelques difficultés que les élèves pourraient rencontrer.

Selon Duval (1994, p. 122), dans une démarche géométrique, il y a quatre types d'appréhension possibles d'une figure, pouvant intervenir simultanément ou alternativement : les appréhensions *perceptive, discursive, séquentielle et opératoire*. Un apprentissage véritable de la manière mathématique de regarder une figure doit prendre en compte chacun de ces quatre types d'appréhension.

On parle d'appréhension perceptive en cas d'identification et de reconnaissance immédiate d'une forme et de ses propriétés visuelles. Dans ce cas, on privilégie la forme globale de la figure autrement dit sous formes de surface (dimension 2D). C'est la première manière de regarder une figure pour un enfant, autrement dit celle qui est la plus directe, au premier coup d'œil.

Lorsque l'on regarde un assemblage de figures, l'appréhension perceptive nous conduit à repérer les différentes parties par *juxtaposition* ou bien par *superposition* (Duval & Godin, 2005, p. 9). Il est difficile de changer de regard lorsque le premier regard s'impose : le coloriage et la manipulation vont favoriser l'appréhension *opératoire*. Ces différentes manières de *voir* la figure sont importantes à signaler dans notre propos car elles vont être l'origine de procédures différentes chez les élèves dans une tâche de reproduction. En particulier, un assemblage par superposition nécessite la prise en compte d'éléments 1D (lignes) à travers des prolongements possibles ou des alignements. Nous reviendrons sur ces aspects là plus en avant dans le texte.

On parle d'appréhension discursive lorsque d'autres propriétés mathématiques d'une figure, autres que celles indiquées par les codages ou par les hypothèses, sont explicitées. Pour que les propriétés géométriques l'emportent sur les évidences visuelles, il faut apprendre à réorganiser la perception des formes 2D en la perception d'un ensemble d'unités visuelles 1D, cela suppose une appréhension opératoire. C'est pourquoi Duval & Godin (2005) affirment que l'analyse d'une figure en fonction de la connaissance des propriétés géométriques présuppose la *déconstruction dimensionnelle* des représentations visuelles que l'on veut articuler aux propriétés géométriques.

L'appréhension séquentielle est mise en œuvre lorsque l'on organise les étapes de réalisation d'une figure en tenant compte de ses propriétés et des contraintes techniques des instruments utilisés. C'est le cas, par exemple, dans un problème où l'on analyse le modèle avant de le reproduire.

Analysons la Figure 4 ci-dessous.

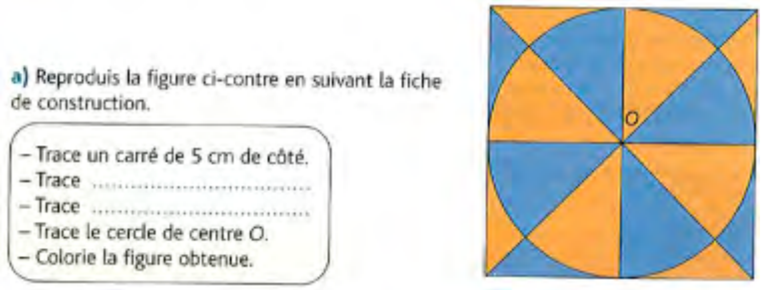


Figure 4. Extrait de Thévenet CM2 (2009).

Ici, toutes les appréhensions ci-dessus citées sont convoquées simultanément. En effet, la figure proposée est coloriée, ce qui va influencer notre premier regard : juxtaposition ou superposition ? Il s'agit de la reproduire mais, pour se faire, on demande de suivre des indications : pour mener à bien l'activité, l'appréhension discursive devra nécessiter une articulation avec l'appréhension perceptive. L'appréhension opératoire jouera aussi un rôle décisif car, dans la manière d'appréhender la figure selon la séquence imposée (la *fiche de construction* fournie), il faudra être capable de repérer les sous-figures suggérées et ensuite déconstruire la figure en éléments 1D et 0D.

Pour faire passer les élèves d'un regard centré sur les surfaces et leurs contours à un regard qui fait apparaître le réseau de droites et de points sous-jacents aux différentes figures étudiées à l'école, il faut mettre les élèves en condition de développer des capacités d'analyse visuelle des figures. Sans une telle transformation de la manière spontanée et prédominante de voir, toutes les formulations de propriétés géométriques risquent d'être des formulations qui tournent à vide.

Dans la phase de déconstruction dimensionnelle, les instruments dont on dispose jouent un rôle crucial car ils commandent la manière de regarder la figure et réciproquement. Certains instruments permettent de transporter des informations 2D, d'autres seulement des informations 1D. C'est l'utilisation d'instruments différents qui va permettre d'entrer progressivement dans la déconstruction dimensionnelle des formes 2D qui est, à son tour, une condition pour l'explicitation des connaissances géométriques.

C'est le problème du rapport aux figures dans l'enseignement de la géométrie et celui des moyens de le faire évoluer que Duval et al. (2004)[10] ont étudié en introduisant alors des problèmes qu'ils ont nommés *restauration de figures*.

3 Les problèmes de *restauration* de figures planes

Comment analyser une figure pour être capable de voir ce qu'il faut géométriquement y voir ? Quels types de tâche et quelles figures pour ces problèmes pour faire changer la manière de voir des élèves ? Comment organiser des activités centrées sur l'analyse des figures ? Ces questions sont au cœur des recherches menées par le groupe de Lille. Et ces questions les ont conduits à introduire des problèmes de reproduction particuliers, à savoir la restauration de figures planes dont voici ci-dessous les caractéristiques (Perrin-Glorian et Godin, 2008) :

- elle consiste à reproduire une figure modèle à partir d'une amorce à l'aide d'instruments ;
- le modèle est une figure complexe demandant un véritable travail d'exploration pour repérer des éléments qui ne figurent pas explicitement ;
- elle dépend du choix de la figure modèle, de l'amorce et de la différence entre les deux ;
- elle dépend des instruments disponibles et de leur coût ;
- la *règle graduée* n'est pas disponible ou alors elle a un coût très important ;
- aucune mesure n'est donnée.

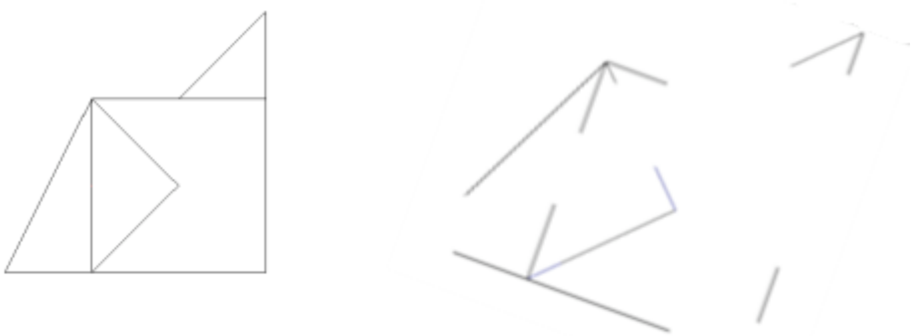
Le travail sur les grandeurs géométriques sans recours à la mesure conduit à conceptualiser les objets géométriques ainsi que les opérations sur les grandeurs.

[10] De par leur appartenance institutionnelle, nous désignerons par la suite ce groupe de chercheurs comme étant le *groupe de Lille*. Rappelons néanmoins les membres qui en ont fait ou en font partie : Frédéric Brechenmacher, Régis Leclercq, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Marc Godin, Bachir Keskessa, Joël Jore, Christine Mangiante, Anne-Cécile Mathé, Bernard Offre, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Odile Verbaere.

Dans la restauration de figure, on vise à travailler l'appréhension opératoire. Les autres appréhensions sont présentes aussi : la perceptive, elle, est toujours là ; il s'agit justement de la contrôler pour la rendre opératoire ; il faut mettre en œuvre l'appréhension séquentielle pour choisir un ordre dans les tracés, ce qui fait intervenir les instruments dont on dispose et sollicite simultanément l'appréhension opératoire. Cette articulation peut faire intervenir le discours (donc l'appréhension discursive) par le passage par des propriétés que mettent en œuvre les instruments[11].

La façon dont les élèves utilisent les instruments pour leurs actions sur les figures est étroitement liée à leur mode d'appréhension en termes de surfaces, de lignes ou de points. En leur donnant accès à des instruments de type 2D, on prend en compte leur perception spontanée de la figure en termes de surfaces (juxtapostion ou superpositon). Les encourager en même temps à utiliser des instruments de type 1D ou permettant d'établir des relations entre des éléments 1D (lignes) ou 0D (points) est nécessaire pour les accompagner vers la déconstruction de la figure en un réseau de lignes et de points (Perrin, Mathé, Leclercq, 2013).

Analysons brièvement l'exemple suivant comportant une figure complexe qui peut être analysée soit comme juxtaposition (comme un assemblage de pièces d'un puzzle par exemple) soit comme superposition de figures simples (un des deux triangles rectangles isocèles pouvant être perçu comme étant superposé au carré)[12] :



La présence de l'amorce encourage à la regarder comme assemblage de figures par superposition et à se centrer sur les éléments 1D (prolongement des traits et alignements de certains éléments) et 0D (intersection de lignes). De plus, l'amorce est agrandie et a subi une rotation par rapport au modèle : cela empêche de faire appel aux mesures ou de compléter l'amorce par simple translation de certains éléments de la figure à reproduire.

4 Conclusion intermédiaire

A travers ces apports théoriques que nous avons partagés avec les participants de l'atelier, nous avons pu mettre en évidence les origines des ambitions des problèmes de restauration telles qu'on peut les connaître dans les dernières publications du groupe de Lille (Duval et Al., 2004) (Duval, Godin 2005) (Perrin et al. 2013). Les travaux de Ducel et Peltier (1986) nous semblent pionniers quant à l'exploitation du potentiel didactique des problèmes de reproduction. En effet, ils décrivent des objectifs ambitieux concernant l'analyse de la figure modèle pour construire des compétences et savoir-faire géométriques à travers notamment un jeu réfléchi de différentes variables didactiques (juxtaposition d'éléments de la figure, changement d'échelles, matériel à disposition, support du papier, etc.). Les travaux de Duval puis plus généralement ceux du groupe de Lille ont permis d'analyser plus finement ce type de problème dans le but de faire *changer le regard géométrique des élèves* en instituant notamment un système de contraintes sur les instruments (nous renvoyons le lecteur aux différentes publications du groupe de Lille pour d'autres exemples de problèmes de restauration) et en jouant sur l'amorce et la figure-

[11] À ce sujet, nous renvoyons le lecteur au texte de Barrier, Hache et Mathé (2014) dans lequel les auteurs traitent de l'articulation entre visualisation, instruments et langage dans des problèmes de restauration de figures planes.

[12] Cf. http://www.lille.iufm.fr/IMG/pdf/Geometrie_au_cycle_2.pdf

différence. Pour autant, malgré ces trente années de réflexions et avancées dans la recherche concernant ces problèmes – qui ont pourtant perduré dans les ressources (par exemple, le problème de la rosace, voir annexes 1 et 3) –, nous avons déjà constaté plus haut que, dans la réalité de la classe ou dans les ressources pédagogiques, on est encore loin de considérer ces problèmes comme cruciaux dans les apprentissages géométriques. C'est pourquoi nous cherchons à communiquer auprès des enseignants un outillage (c'est à dire un ensemble de leviers, dont des modalités de travail et des variables didactiques sur lesquelles l'enseignant peut facilement jouer) facilitant l'exploitation du potentiel de ces problèmes d'apprentissage.

III - ANALYSE D'EXTRAITS DE MANUELS SCOLAIRES: QUELLES ADAPTATIONS POUR LA CLASSE ?

1 Analyse d'extraits choisis de manuels scolaires

Le travail des participants de l'atelier a consisté en l'analyse, par groupe, de différents extraits de ressources pédagogiques (constituant ce que nous avons appelé un *album de problèmes de reproduction*) en deux temps donnés. Dans un premier temps, au début de l'atelier, les participants devaient choisir quels problèmes de reproduction de figure ils retiendraient pour la classe et comment ils l'exploiteraient, en explicitant les modifications éventuelles qu'ils apporteraient. Dans un deuxième temps qui se situait après les apports théoriques de la partie précédente, les participants devaient à nouveau analyser les extraits de l'album en revoyant éventuellement leurs précédents choix à la lumière des apports théoriques présentés. Nous ne développerons pas ici l'analyse de tous les problèmes de l'album (qui comportaient dix extraits) ; nous avons choisi de commenter trois extraits en lien avec certains points évoqués précédemment.

1.1 Un extrait tiré d'un ouvrage publié à une époque où les problèmes de reproduction étaient rares

Une étude de quelques manuels scolaires édités entre la fin des années 1970 et le début des années 1990 montre que, malgré les prescriptions officielles, les problèmes de reproduction sont rarissimes. L'extrait de la figure 5 est tiré d'un manuel de 1980, le seul où deux problèmes de ce type sont proposés.

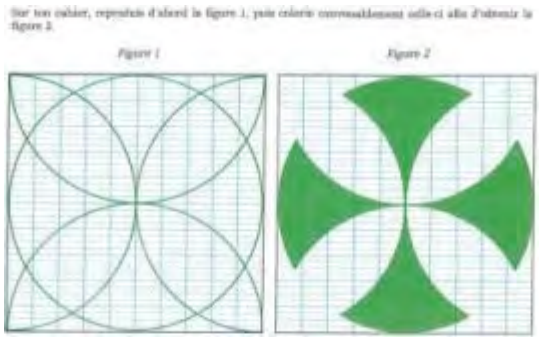


Figure 5. Extrait de Eiller CM2, 1980.

La discussion a principalement porté sur le rôle du support en fonction des objectifs visés. Si l'on conserve le quadrillage, l'enjeu ne réside pas dans la construction du carré car les angles droits sont supportés par le quadrillage. En outre, un tel support permet de reproduire la figure sans convoquer des propriétés autres que le dénombrement de carreaux pour repérer les différents centres du cercle et demi-cercles. Si l'on reproduit la figure à la même échelle, une opération de visée peut d'ailleurs suffire pour repérer les centres en question sans nécessairement considérer qu'ils sont les milieux des côtés du carré. Les participants ont beaucoup échangé sur les différents objectifs potentiels de ce problème. L'un des groupes a notamment proposé qu'on ne donne que la figure 2 afin de rendre moins explicites les tracés. Un autre groupe proposait de présenter cet extrait en guise de préparation à l'étude du problème de la rosace à huit branches (cf. Annexes 1 et 3) permettant de mettre en évidence les milieux des côtés du carré comme centres des demi-cercles. Les participants se sont donc mis d'accord sur certaines variables didactiques à exploiter en fonction des objectifs visés : le support papier (quadrillé ou blanc), l'échelle, les instruments mis à disposition, la relation entre les objets géométriques qui composent la figure modèle (relations d'alignements, de milieux, de perpendicularité, etc.).

1.2 Un exemple extrait d'un ouvrage récent comportant une progression basée sur des fondements théoriques didactiques partagés (Euromaths 2009)

Notre album de problèmes de reproduction comportait, selon nous, des problèmes très contrastés. En effet, nous proposons ici (figure 6) un autre exemple d'analyse à partir d'un extrait de *Euromaths* CM1 (2009). Cet exemple nous paraît intéressant dans la mesure où les choix opérés par les auteurs de ces manuels pour les progressions sur l'enseignement de la géométrie sont basés sur des fondements théoriques proches de ceux développés précédemment. Et pour cause, l'un des auteurs d'*Euromaths* n'est autre qu'un des auteurs de la brochure de l'Irem de Rouen. Et si l'on procède à un examen large des problèmes de reproduction présents dans les manuels de la collection *Euromaths* (ce que nous ne pouvons développer ici), on constate que les objectifs visés du CP au CM2 sont en effet proches de ceux présentés précédemment. A titre d'illustration, on peut citer les objectifs annoncés dans le livre du maître relativement à l'extrait de la figure 6 : « Pour reproduire une figure en plus grand, ou en plus petit, il faut l'analyser, c'est-à-dire repérer des alignements, des milieux, etc. Pour cela, il faut souvent intervenir sur la figure : joindre des points, prolonger des segments […] faire des hypothèses sur les positions de certains points, sur les éventuelles égalités de longueur, […] noter les résultats de cette observation fine non instrumentée – ce qui permet d'utiliser le vocabulaire adapté – puis […] vérifier leurs hypothèses avec les instruments. […] Une fois l'analyse bien menée, il est possible de *restaurer* la figure agrandie, c'est-à-dire la compléter avec les éléments manquants » (p.62 du Livre du maître).

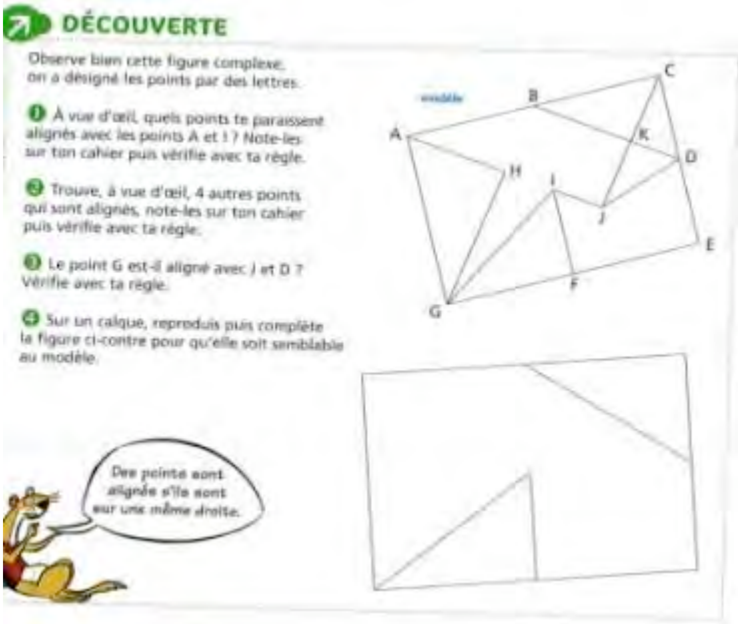


Figure 6. Extrait de *Euromaths* CM1, 2009.

Nous pourrions même aller jusqu'à dire que tout se passe comme si les auteurs cherchaient à instaurer un *contrat* spécifique de ce type de problème. En effet, si l'on mène une brève analyse *a priori* du problème de la figure 6, on relève un découpage en sous-tâches très guidées qui prennent en charge l'analyse de la figure. Les consignes sont fermées pendant la phase d'analyse mais ouvertes pendant la phase de construction. De la même façon, les instruments sont suggérés pendant la phase d'analyse mais non suggérés pour la phase de reproduction. Nous pourrions également remarquer que le codage de la figure n'est pas non plus à la charge de l'élève et nous pourrions faire l'hypothèse que cela est sans doute fait pour faciliter l'intervention de l'enseignant.

Tout se passe comme si les auteurs visaient une décomposition stratégique de tous les « passages obligés » pour mettre en œuvre une déconstruction/reconstruction dimensionnelle afin de, au fil des étapes du manuel (et des années) *éduquer* le regard géométrique des élèves. Les variables didactiques exploitées pour y parvenir sont principalement les mêmes que celles décrites dans la partie théorique précédente (l'agrandissement des figures à reproduire pour évacuer le recours à la mesure, l'orientation non prototypique pour éviter les stratégies de visée, un jeu sur la juxtaposition/superposition de figures, etc.). Aussi, dans le cadre de cet extrait, nous pourrions discuter de la pertinence de certaines de ces variables. Par exemple, nous pourrions discuter du choix de l'amorce afin d'exploiter les différentes caractéristiques de la figure-modèle (ici en fonction du choix de l'amorce, on peut choisir de porter l'attention des élèves sur les propriétés du rectangle ou celles des autres figures juxtaposées, ou encore sur les propriétés d'égalités de longueurs ou celles de milieux, de perpendicularité, d'alignements, etc.).

1.3 Un extrait d'un ouvrage récent : un problème de restauration modifié à moindre coût

Nous revenons ici sur l'extrait présenté plus haut en figure 1 (reproposée ci-après dans une version codée, figure 7), extrait qui n'a pas été sélectionné par les participants à l'atelier mais qui nous semble toutefois pertinent afin de montrer que l'on peut effectivement, à moindre coût, le modifier pour le rendre porteur d'apprentissages potentiels.

Contrairement à l'extrait précédent, la consigne accompagnant cette figure est ouverte : on suggère juste de bien l'observer avant de la reproduire en utilisant des instruments dont le choix est laissé à la charge de l'élève ; à la même échelle que le modèle, on propose une amorce (un carré) simplement translatée par rapport à celui-ci (voir figure 1).

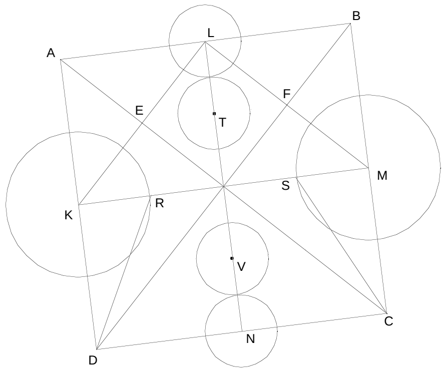


Figure 7. Extrait de *La tribu des Maths*, CM2, 2010 (figure codée).

Le compas serait utile pour comparer et puis reporter des longueurs afin de tracer les six cercles par la donnée de leurs centres et leurs rayons. La règle non graduée pourrait alors servir pour tracer les diagonales du carré et puis, après avoir placé les milieux de ses côtés (qui sont aussi les centres respectifs de quatre des six cercles présents dans la figure), pour tracer ses médianes et puis les segments [KL], [ML], [DR] et [CS].

Le compas pourrait toutefois n'être utilisé que pour tracer les cercles, la règle graduée permettant de repérer tous les autres éléments de la figure qui sont nécessaires pour compéter l'amorce donnée. L'élève se limiterait ainsi à *copier* la figure modèle en prenant des mesures sans vraiment étudier la relation qui existe entre les diverses parties de celle-ci.

Dans cette figure, nous avons toutefois apprécié le fait que R pourrait être tracé comme point d'intersection de (KM) et de (DL), S comme point d'intersection de (KM) et (CL) et T comme point d'intersection de (NL) et (EF). Ce qui conduit à introduire des tracés supplémentaires ou à prolonger des segments déjà présents dans le modèle.

Pour obliger l'élève à recourir à de telles stratégies, on pourra alors modifier l'amorce ainsi que sa position et sa taille par rapport au modèle. La figure attendue tracée sur papier calque permettra de valider ou invalider le travail de l'élève. Nous proposons par exemple l'amorce suivante :

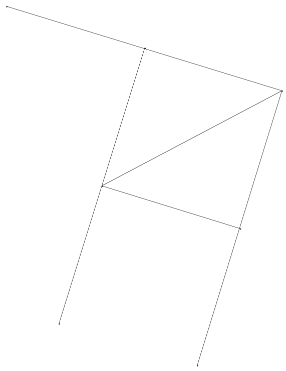
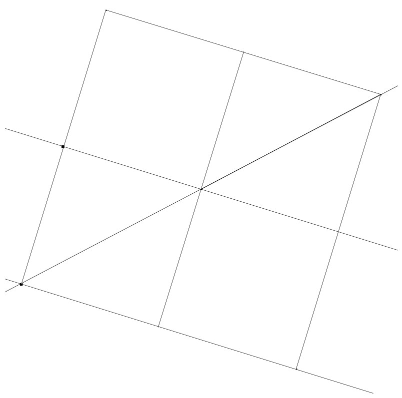
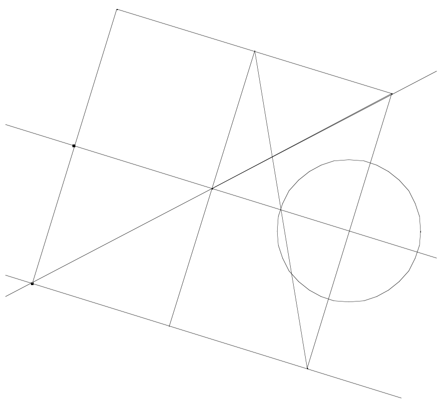
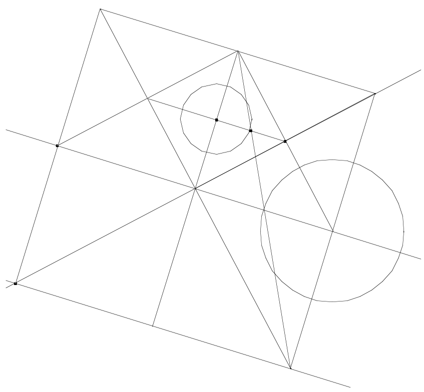


Figure 8. Un exemple d'amorce pour reproduire la figure 7.

On imposera de se servir de la règle non graduée et du compas ou bien on donnera une liste incluant aussi d'autres instruments dont les coûts encourageront l'élève à se servir plutôt de ces deux-là. Ces modifications conduisent ainsi à déterminer le quatrième sommet du carré et les centres des cercles comme intersections de droites et à prendre conscience que, pour tracer un cercle, outre son centre, il suffit d'identifier un point lui appartenant ou bien d'avoir la longueur de son rayon. Après avoir complété le carré, nous montrons ci-dessous une procédure possible pour tracer les cercles de centres M et T, les autres cercles pouvant alors être tracés à partir du centre et du rayon.

		
En prolongeant convenablement des segments déjà tracés, on trace le sommet manquant du carré ABCD	En traçant le segment [LC], on repère un point du cercle de centre M	Après avoir tracé les segments [AC], [LK], [LM], on joint les points E et F ainsi obtenus : le point d'intersection de (LC) et (EF) est un point du cercle de centre T, ce dernier étant le point d'intersection de (LN) et (EF).

Le problème ainsi modifié demeure encore ouvert mais évite le recours à la mesure, encourage l'élève à analyser les différents éléments de la figure-modèle, à ajouter des éléments supplémentaires et l'aide à prendre conscience de la nécessité de disposer de certains savoirs géométriques pour pouvoir aboutir.

Dans le guide du maître de la collection de manuels où l'on trouve la figure analysée, on peut saisir que des problèmes de reproduction sont proposés ici pour que l'élève apprenne à analyser une figure complexe en repérant les éléments essentiels, à choisir et à bien utiliser les instruments qui conviennent. Dans le manuel de CM2, la reproduction de figures est notamment proposée afin de *problématiser les tâches confiées aux élèves* (guide du maître CM2, p. 245) ; en tant que problème de recherche, elle permet aussi de réactiver et mettre en œuvre des connaissances et compétences géométriques abordées les années précédentes.

Moyennant quelques modifications à moindre coût, les activités proposées peuvent ainsi devenir des véritables problèmes de recherche pour l'élève : demander de reproduire à une autre échelle en fournissant une amorce avec une autre orientation que le modèle ; imposer des instruments de dessin (et non pas de mesure) ou bien leur attribuer des coûts permettant à l'élève de bien réfléchir sur le choix à effectuer. En outre, si des adaptations (au sens de Robert, 2004) sont utiles pour que l'élève s'engage dans la tâche à accomplir, il faut aussi fournir à l'enseignant des pistes d'analyse pour qu'il puisse effectivement saisir l'intérêt de ce type de problèmes pour les apprentissages géométriques, à court et à long terme.

2 Synthèse des adaptations pour la classe

Suite à ces différents apports et analyses qui ont rythmé le déroulement de l'atelier, il convient maintenant de proposer une synthèse des différents leviers pour la classe. Rappelons que notre objectif réside dans le fait que l'on cherche à outiller les enseignants pour les aider à adapter, à moindre coût, certains problèmes de reproduction de figures. Autrement dit, nous ne cherchons pas à leur donner des problèmes « clés en main » ou « des progressions prédéterminées » mais nous cherchons plutôt à ce qu'ils adaptent leur propre progression ou séquence à travers un jeu de variables didactiques éprouvées par la recherche (à Lille ou à Rouen) et qui renvoient à des ambitions plus générales sur la façon de penser (voir) et d'agir sur les objets de la géométrie euclidienne. Nous pouvons répertorier les leviers (ici principalement des variables didactiques) qui ont été évoqués durant l'atelier :

- la nature des figures et leur complexité (juxtaposition, superposition, etc.),
- les adaptations ou intermédiaires à la charge de l'élève (au sens de Robert (2004), comme par exemple l'ajout de points intermédiaires),
- l'agrandissement-réduction,
- le choix de l'amorce (et sa complexité),
- le support (feuille blanche, quadrillée, pointée, etc.),
- les contraintes sur les instruments mis à disposition,
- le recours à la mesure,
- les positions relatives de la figure-modèle et de la figure-amorce,
- etc.

IV - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Créer les conditions favorables pour provoquer la nécessité d'analyser la figure modèle en termes de déconstruction dimensionnelle et de propriétés de la figure (perpendicularité, alignement, milieux, parallèles, propriété d'incidence, etc.) nous semble être la clé de voûte des travaux de recherche menés depuis 1986 sur les problèmes de reproduction de figures planes. Durant l'atelier nous avons retenu un certain nombre de leviers (dont ici surtout des variables didactiques) avec lesquels l'enseignant peut jouer pour accompagner les élèves dans le changement de regard des élèves sur les figures : système de malus-bonus évolutif pour pénaliser le recours à la règle graduée, changement d'échelle, complexité des figures-modèles, etc. Nous retiendrons en particulier l'idée fondamentale que « ce n'est tant pas la tâche de reproduction qui est importante que le type d'instrument choisi pour la reproduction » (Duval, Godin, 2005, p.13) car selon l'instrument choisi, on sollicite telle ou telle vision (et réciproquement).

Notre objectif, à terme, est d'améliorer et de faire vivre cet atelier dans le cadre de la formation continue des enseignants. Proposer des adaptations à partir de ressources existantes nous paraît un moyen de familiariser les enseignants avec les ambitions développées par la recherche sur l'enseignement de la géométrie depuis presque trente ans en limitant des adaptations galvaudées (Mangiante, 2013). Sans ignorer certaines tensions liées à la diffusion de résultats de recherche dans les manuels scolaires (Peltier et Briand, 2010) et la variabilité des pratiques (Arditi 2011 ; Arditi et Briand, dans ce volume), nous proposons d'essayer d'injecter des outils didactiques d'analyse permettant d'être ambitieux quant aux objets d'apprentissage des problèmes de reproduction, de façon plus diffuse car à partir de l'existant. Ainsi, selon nous, ce que nous avons proposé durant l'atelier et que nous souhaitons maintenant faire vivre dans la formation continue est une sorte de transposition « à faible coût » des outils de la recherche en didactique car ces derniers permettent d'analyser des problèmes géométriques déjà existants, ce qui constitue selon nous un premier pas pour s'emparer des travaux issus de la recherche.

BIBLIOGRAPHIE

ARDITI S. (2011) *Variabilité des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

ARDITI S., BRIAND J. (dans ce volume) Regards croisés de chercheurs, auteurs de manuels et formateurs. Utilisation effective d'un manuel scolaire par des professeurs des écoles. Pistes pour la formation, *Actes du 41e colloque de la Copirelem*, Mont de Marsan 2014.

BARRIER T., HACHE C., MATHE A.-C. (2014) Décrire l'activité géométrique des élèves : instrument, regard, langage, *Actes du 40e colloque de la Copirelem*, Nantes 2013.

BERTHELOT R., SALIN M.-H. (1993), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, 53, IREM de Grenoble, 39-56.

BOULEAU N. (2001), Reproduction et géométrie en cycle 1 et 2, *Grand N*, 67, 15-32

BRIAND J., PELTIER M.L. (2010) Le manuel scolaire : carrefour de tensions mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactique des mathématiques, *Actes du 36ème colloque de la Copirelem, Auch 2009*

CELI V., PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014), Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie, *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, 54, 151-174

CHEVALLARD Y. (1998), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, *Actes de l'Université d'été, La Rochelle – Charente-Maritime*, pp.91-118

DUCEL Y., PELTIER M.-L. (1986) Géométrie. Une approche par le dessin géométrique au CM2, *Brochure IREM de Rouen* (Université de Rouen).

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, 17, 121-138.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.

DUVAL R., GODIN M., PERRIN GLORIAN M.-J. (2004) Reproduction de figures à l'école élémentaire, *Actes du séminaire national de Didactique des Mathématiques de l'ARDM*, Ed. Irem de Paris 7 http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/actes_seminaire_national_de_didactique/Actes%20du%20S%C3%A9minaire%20National%20de%20Didactique%202004.pdf

DUVAL R., GODIN M. (2005), Les changements de regards nécessaires sur les figures, *Grand N*, 76, 7-27.

GODIN M., PERRIN M.-J. (2009) De la restauration de figure à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. *Actes du 35ème colloque la Copirelem*, Bordeaux –Bombannes, 2008.

KESKESSA B. ET ALII (2007), Géométrie plane et figures au cycle 3. Démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, 79, 33-60.

MANGIANTE C. (2013) Une étude du processus d'appropriation par des enseignants de situations produites par la recherche pour l'enseignement de la géométrie, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM*, Irem Paris 7. En ligne : http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/97/26/56/PDF/actes_sem_2013.pdf

PERRIN GLORIAN M.-J., MATHE A.C, LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?, *Repères IREM*, 90, 5-41.

POLYA G. (1967), *La découverte des mathématiques*, Tome 2, DUNOD, Paris.

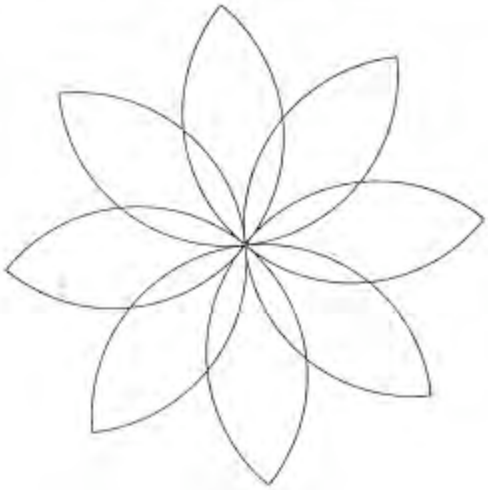
ROBERT A. (2004) Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une vidéo filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants. Perspectives en formation d'enseignants. *Petit x*, 65, 52-79.

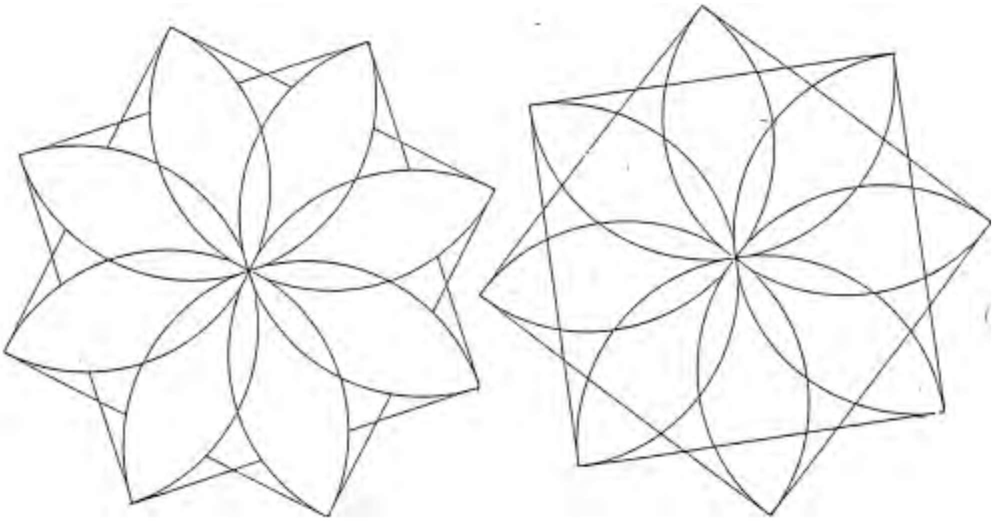
ANNEXE 1. LE PROBLEME DE LA ROSACE (DUCEL, PELTIER 1986)

Les contenus mathématiques visés, dans cette situation sont :

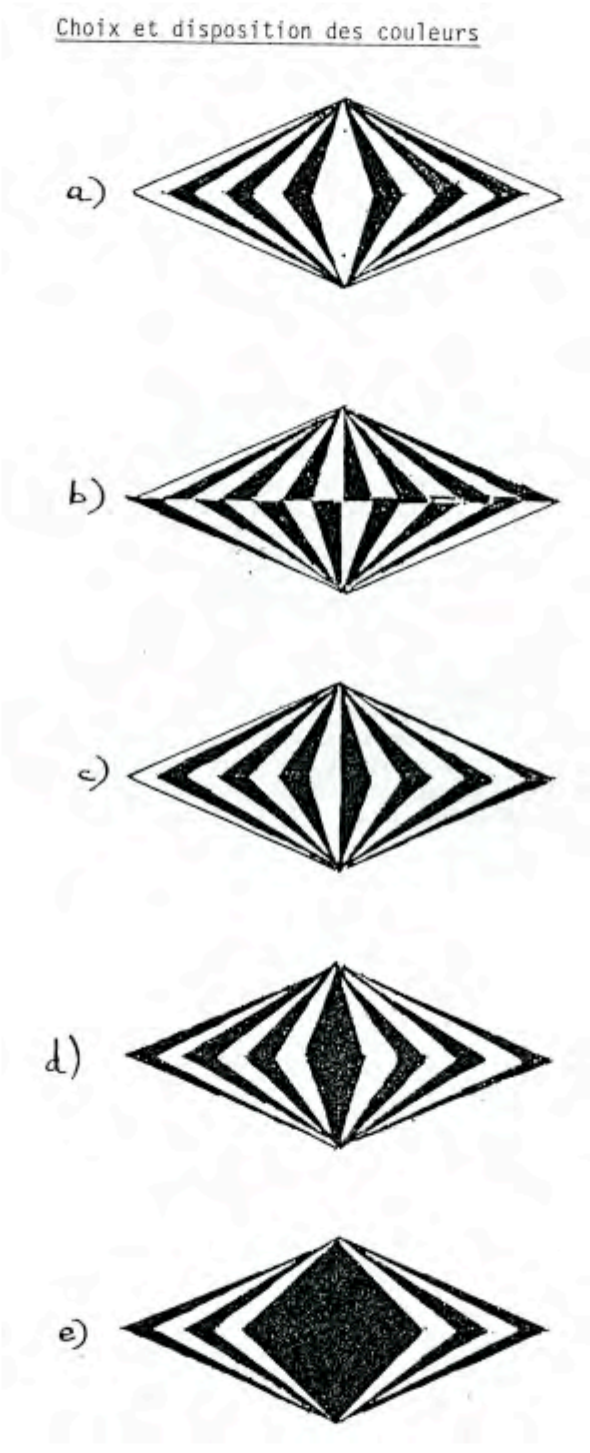
- le cercle
- la division d'un cercle en huit arcs isométriques
- les symétries axiales et les rotations.

La démarche choisie consiste en une observation et une analyse collective d'un grand dessin affiché au tableau et reproduit ci-dessous.

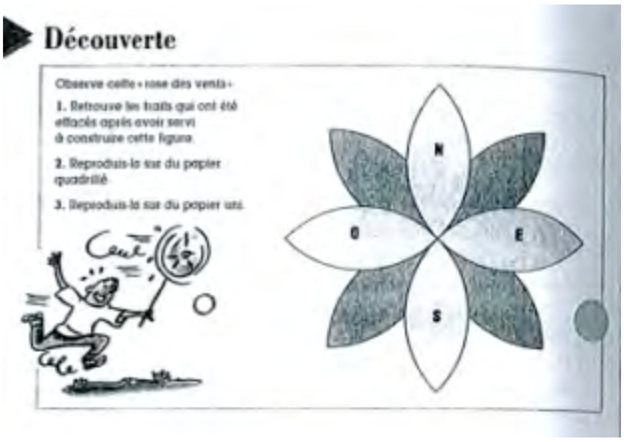




ANNEXE 2. LE PROBLEME DES LOSANGES (DUCEL, PELTIER 1986)



ANNEXE 3. LE PROBLEME DES ROSACES DANS DIFFERENTES RESSOURCES, A DIFFERENTES EPOQUES.



Découverte

Observe cette « rose des vents »

1. Retrouve les traits qui ont été effacés après avoir servi à construire cette figure.
2. Reproduis-la sur du papier quadrillé.
3. Reproduis-la sur du papier uni.

Nouvel objectif Calcul, CM2, 1995-96.

2 SÉANCES • SÉANCE 1 DÉCOUVERTE • SÉANCE 2 EXERCICE

MATÉRIEL • Par élève :

- des photocopies de la rose des vents ainsi que les photocopies des dessins suivants (voir fiche photocopiable page 312) ;

- des feuilles de papier quadrillé et de papier uni ;
- le matériel personnel de géométrie.

• Pour la classe :

- un modèle agrandi de la rose des vents pour affichage au tableau ;
- des transparents avec les figures (découverte et exercice) pour la vérification des constructions.

Euromaths, CM2, 2009.