RESSOURCES EN HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : UN EXEMPLE ET DES PISTES

Renaud CHORLAY
Formateur, ESPE de l'Académie de Paris
LDAR (Paris Diderot) et SPHERE (UMR 7219 – Paris Diderot)
Renaud.chorlay@espe-paris.fr

Résumé
Cet atelier est consacré à l'étude de cinq documents historiques ayant trait à la multiplication. Ces documents permettent de faire rencontrer différentes techniques opératoires, de souligner les propriétés mathématiques sous-jacentes à chacun des algorithmes, d'illustrer la dépendance de la technique envers le système de numération et le dispositif matériel (table à baguettes ou à poussière, papier-crayon). L'ensemble ne constitue pas un cours sur l'histoire de la multiplication, mais un scénario d'atelier de formation, avec une proposition de déroulement et de questionnement. La ressource historique y est un support pour la formation en mathématiques et la réflexion sur les mathématiques, pas directement pour l'enseignement de l'histoire.
Sont également présentées un petit nombre de ressources (sur papier et en ligne), de natures diverses : documents historiques, travaux de recherche en histoire mis en forme pour un public non-spécialiste, matériaux historiques pour la formation des enseignants, activités pour les classes s'appuyant sur l'histoire.

Les ressources en histoire des mathématiques pour la formation des enseignants posent des questions d'accessibilité, de nature des sources et d'usage.

C'est principalement ce dernier point qui est travaillé dans cet atelier, où sont étudiés cinq documents historiques ayant trait à la multiplication[1]. Ces derniers permettent de faire rencontrer différentes techniques opératoires, de souligner les propriétés mathématiques sous-jacentes à chacun des algorithmes, d'illustrer la dépendance de la technique envers le système de numération et envers le dispositif matériel (table à baguettes ou à poussière, papier-crayon[2]). L'ensemble ne constitue nullement un cours sur l'histoire de la multiplication (dont on se demande d'ailleurs à quoi il pourrait ressembler), mais un scénario d'atelier de formation, avec une proposition de déroulement et de questionnement. Pour l'instant, ce dispositif a été rodé en formation de formateurs ou en formation continue d'enseignants du primaire.

Nous finirons par quelques points plus généraux relatifs au développement récent des sources en histoire des mathématiques, en particulier des sources en ligne. Cette (relative) abondance nouvelle pose plus que jamais la double question (1) du travail permettant de faire d'une *source* une *ressource* pour la formation ou l'enseignement, (2) de l'usage et de l'appropriation des sources et ressources par les formateurs et enseignants. Sur ces deux points, notre expérience porte essentiellement sur le niveau secondaire, nous n'indiquerons donc pour l'heure que quelques pistes de lecture pour le primaire.

Le scénario est le suivant : chaque petit groupe se voit confier l'un des cinq documents, avec pour charge de le présenter à l'ensemble du groupe après une demi-heure de travail autonome. Dans leurs présentations, les participants peuvent faire état de simples conjectures ou de questions ouvertes ; cela dépendra du document. Certains documents sont accompagnés de questions (Voir II. *À partir du papyrus*

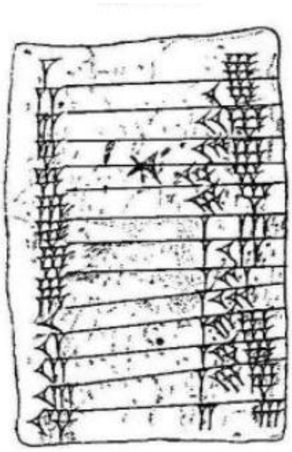
[1] Sur ce même thème, les enseignants et formateurs du primaire connaissent sans doute déjà les articles de Raymond Guinet (Guinet 1978a, 1978b, 1979, 1995) publiés dans la revue Grand N.

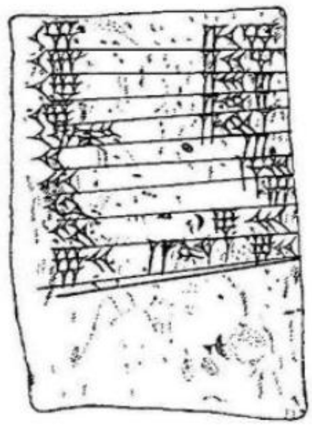
[2] Nous aurions pu inclure des abaques.

de Rhind) ou d'explications historiques (Voir III. *En Chine ancienne, avant le boulier*), alors que d'autres sont bruts et invitent à une démarche d'investigation du type « petit archéologue » (face à un document inconnu, l'examiner progressivement pour formuler des observations, des conjectures, etc.). Dans le moment collectif, des compléments d'information sont apportés par l'animateur, qui explicite aussi les choix de mise en forme des documents. Pour chaque complément, ce dernier indique quelques éléments de bibliographie/sitographie. Ces compléments ont deux fonctions : permettre aux participants de poursuivre le travail de manière autonome s'ils le souhaitent, et montrer que le rôle de l'animateur est un rôle de médiation entre un savoir de type universitaire (de recherche en histoire des sciences) et un public d'enseignants et de formateurs.

I - UNE TABLETTE BABYLONIENNE

Le premier groupe se voit distribuer le document le plus brut :

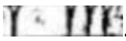




Une consigne du type : « au cours de fouilles dans le désert en Irak, vous mettez au jour ce qui ressemble à une petite brique, dont voici le recto (à gauche) et le verso (à droite) ; pouvez-vous formuler des conjectures sur son contenu ? » est formulée. Dans l'idéal, ne sera pas mentionné le fait que les documents ont un lien avec la multiplication.

Le bilan fait émerger les points suivants. Les marques graphiques sont organisées spatialement de deux manières : une organisation en lignes, matérialisée par des traits horizontaux ; et une organisation en deux colonnes. Il semble que seuls deux signes graphiques soient utilisés. L'animateur peut donner leurs noms : le clou  et le chevron .

Sur le recto (image de gauche), on conjecture rapidement que la colonne de gauche représente la suite des premiers nombres entiers : 1, 2, 3, … ce qui conduit à supposer que le clou représente 1 et le chevron 10. Le système semble être additif, avec des conventions d'usage (remplacement de 10 clous par 1 chevron) et des conventions graphiques (les clous sont regroupés par 3).

Fort de cette première conjecture, on peut chercher à rendre compte des lignes : en face de 1, on lit 9 ; en face de 2, on lit 18 ; en face de 3, on lit 27 ; en face de 4, on lit 36… Il semble que l'on a affaire à une table de 9. Si le système de numération est bien additif avec groupement à 10 (comme le système égyptien du document suivant), on s'attend à trouver un nouveau signe graphique pour 100, et rien de spécial avant. Ce n'est pas le cas : en face de 12 l'écriture de 118 n'utilise pas de nouveau signe ; en face de 7, l'écriture de 63 est . On conjecture que cela représente 60 + 3, soit une soixantaine et trois unités. Le système de numération serait donc mixte : un système additif avec groupement à 10 pour écrire les nombres de 1 à 59 ; un système positionnel avec groupement à 60 au-delà (système sexagésimal).

Cette conjecture se voit confirmée par la suite du recto de la tablette : en face de 10, on lit bien 90 (écrit : une soixantaine, trois dizaines) ; en face de 11, on lit 99 (une soixantaine, trois dizaines, neuf unités), en face de 14, on lit 126 (deux soixantaines, six unités). Cette conjecture n'est malheureusement pas compatible avec le verso ! En particulier, en face de 20, on devrait lire 180, qu'on penserait codé avec trois clous (pour trois soixantaines) et un marqueur de place vide (pour l'absence d'unités) ; peut-être le point qui semble suivre les trois clous est-il ce marqueur de place vide. L'examen de la ligne « 40… 360 » ne le confirme pas : 360 est représenté par 6 clous (pour six soixantaines), sans que la place vide des unités semble marquée par un vide, un point ou un petit rond. On peut se demander s'il s'agit d'une erreur de celui ou celle qui a écrit la tablette.

Au-delà de ce point, des compléments d'information sont nécessaires. Nous ne donnons ici que quelques grandes lignes, en renvoyant aux sources secondaires d'appui.

Le document présenté est une tablette paléo-babylonienne (- 2000 / - 1700), retrouvée sur le site de Nippur et conservée à l'université d'Iéna (cote HS 0217a). Nous nous sommes appuyés sur le dossier consacré aux mathématiques babyloniennes sur le site *Culturemath*[3]. Sous l'impulsion de l'inspection générale de mathématiques, ce site ressource propose des documents issus de la recherche (en mathématiques ou en histoire des mathématiques) et mis à disposition des enseignants, principalement du secondaire. Pour ce qui est de la très riche partie consacrée à l'histoire des mathématiques, les ressources proposées (articles, cartes, vidéos) sont d'une teneur scientifique contrôlée par les critères universitaires usuels : auteurs spécialistes du domaine, passage par un comité de lecture, présence systématique de bibliographie/sitographie. Le dossier sur les mathématiques babyloniennes est particulièrement riche : il a été préparé par Christine Proust, aujourd'hui directrice de recherche (équipe SPHERE, UMR 7219 CNRS – Paris Diderot) après avoir longtemps été enseignante au collège.

La tablette présentée est bien une table de multiplication par 9, et illustre bien un système de numération mixte : système additif jusqu'à 59 (avec groupement à 10), enchâssé dans un système positionnel en base soixante ; comme tout système positionnel, un marqueur est nécessaire pour indiquer les places vides, ici un espace vide (non utilisé dans cette tablette). La spécificité de ce système positionnel est qu'il est à « virgule flottante » : seule la valuation relative des différents groupes est non-ambigüe ; en revanche, la valuation absolue (par exemple du groupe le plus à droite) n'est pas connue. Ainsi  (que les assyriologues transcrivent par 1 ; 11) peut désigner 1 soixantaine et 11 unités ; ou 1 trois-milles-six-cents-aine et 11 soixantaines ; ou 1 unité et 11 soixantièmes. On voit dans ce dernier exemple que ce système permet de représenter les nombres en deçà de l'unité sans avoir recours à des entités de type fraction.

On peut s'interroger sur l'usage d'un système de notations intrinsèquement ambigües. Dans certains cas, c'est le contexte qui permet de lever l'ambiguïté : dans la table de 9, en face de 7, on s'attend à lire 63 et non 3780 (1 x 3600 + 3 x 60) ou 1,05 (1 x 1 + 3 x 1/60). Mais cette interprétation (possible) ne tient pas sérieusement compte de la virgule flottante ; en effet, les sept clous de la colonne de gauche peuvent aussi bien désigner 7 (c'est-à-dire 7 unités) que 420 (7 x 60) ou 7/60, auquel cas les produits par 9 sont bien 3780 et 1,05 (respectivement) ! Tant que l'on reste au niveau des nombres abstraits et des multiplications, le système est parfaitement cohérent. On retrouvera cet aspect dans la multiplication des décimaux : on peut faire abstraction de la « position de la virgule » (i.e. de la valuation absolue, en base 10), on obtient quand même la bonne suite de chiffres du produit. Cette propriété n'est pas partagée par l'addition : si les unités des deux termes sont décalées, on n'obtient en général pas la bonne suite de chiffres si l'on applique l'algorithme usuel.

Ce système à virgule flottante pose toutefois problème s'il s'agit de compter ou de mesurer : il n'est sans doute pas indifférent d'avoir 1 plutôt que 3 600 moutons dans son pré ; d'avoir 1 kg ou 1/3600 kg d'or dans son bas-de-laine. En fait, *plusieurs* systèmes d'écriture des nombres étaient utilisés dans la période paléo-babylonienne, et c'est un système purement additif qui servait à compter et à mesurer[4]. Le système

[3] http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/chrono/Mesopotamie/index_mesop.htm

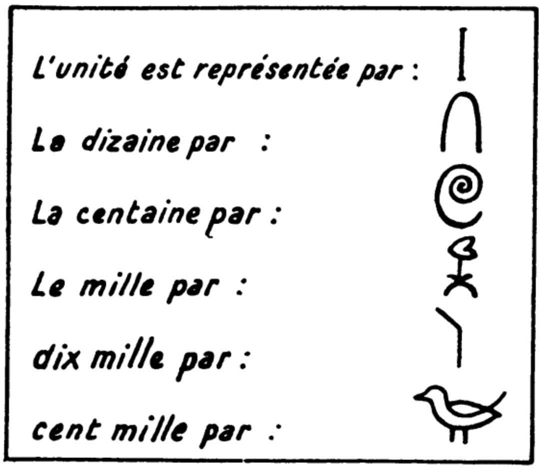
[4] Les systèmes d'unités étant eux-mêmes à pas différents. Ainsi pour les unités de longueurs :

danna ←30~ UŠ ←60~ ninda ←12~ kuš$_3$ ←30~ šu-si

sexagésimal positionnel à virgule flottante était un système savant, adapté aux calculs multiplicatifs (produits, inverses, division par multiplication par les inverses, carrés et racines)[5].

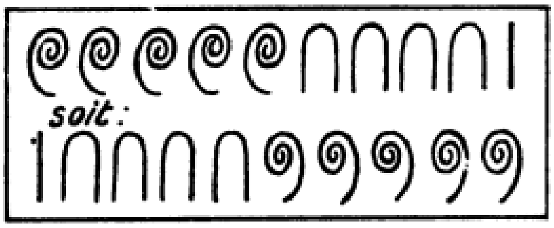
II - À PARTIR DU PAPYRUS DE RHIND

Le second document soumis à la sagacité des participants est de nature bien différente. Loin d'être un document primaire (i.e. un document historique) donné brut, il s'agit d'une source secondaire (un extrait d'un ouvrage d'histoire des mathématiques), accompagné de questions. Nous nous sommes appuyés sur le très classique *Mathématiques et mathématiciens* (Dedron & Itard 1959, 271-272) (texte reproduit en italiques)

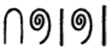


Les unités de chaque ordre sont indiquées par répétition du signe.

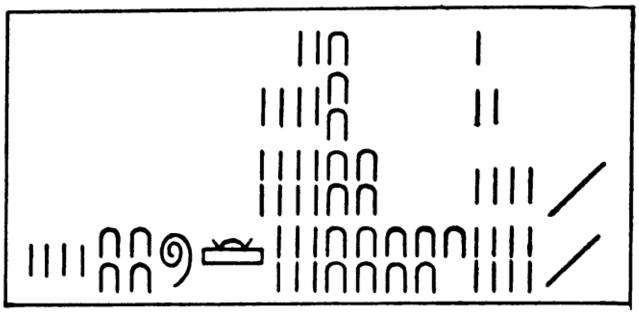
Les nombres peuvent être écrits de gauche à droite ou de droite à gauche. Dans ce cas leurs symboles sont tournés dans l'autre sens. Ainsi 541 pourra s'écrire soit



Question : dans ce système, comment multiplie-t-on par 10 ?

Ce document fournit l'occasion de rencontrer un système additif bien connu, avec groupement à 10. Le groupe est *de jure* facultatif (un groupe de onze bâtons représente 11 de manière non ambigüe) mais *de facto* systématique ; de même qu'est facultatif l'arrangement linéaire selon l'ordre progressif des groupements (ainsi  représenterait sans ambiguïté deux centaines, une dizaine et deux unités). Ici la multiplication par 10 ne passe pas par l'écriture d'un zéro à droite – typique d'une notation positionnelle en base 10, interprétable comme un décalage dans le tableau de numération – mais par la substitution à chaque signe du signe de rang immédiatement supérieur.

La deuxième partie du document est :



C'est ainsi que, dans le papyrus Rhind (²) on trouve pour le carré de douze le calcul ci-contre où il faut lire :

1	**12**	
2	**24**	
/4	**48**	
/8	**96**	**somme 144**

Questions :

[5] Pour une reconstitution des mathématiques du cursus scolaire avancé de formation des scribes : http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/htm/calcul%20sexagesimal/calcul%20sexagesimal.htm.

Pour les mathématiques utilisées par les marchands assyriens : http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/htm/Michel06/Michel_marchands.htm#système

- Ici, la multiplication par 12 passe par une série de duplications (multiplication par 2), puis par des additions ; les termes à additionner sont indiqués par les encoches /. En utilisant le même procédé, calculer le produit de 42 par 23. On pourra utiliser notre écriture chiffrée.
- Peut-on, par ce procédé, multiplier par tout nombre entier ?

Ici, le produit de 12 par 12 est donc obtenu comme la somme de 4 x 12 et de 8 x 12. En s'inspirant du procédé, pour calculer le produit de 42 par 23, on calcule des doubles en partant de 42, et l'on reconstitue 23 comme 16 + 4 + 2 + 1.

42	1	/
84	2	/
168	4	/
336	8	
672	16	/
	23	

Cet algorithme repose donc, comme le nôtre, sur la distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$42 \times 23 = 42 \times (16 + 4 + 2 + 1) = 42 \times 16 + 42 \times 4 + 42 \times 2 + 42 \times 1$$

Si la validité de l'algorithme est ainsi justifiée, la question de sa généralité demeure : est-il toujours possible de recomposer l'un des facteurs en une somme de nombres choisis parmi 1, 2, 4, 8, 16 … ? La question permet de revenir sur l'écriture positionnelle dans une base autre que 10, en l'occurrence la base 2 : tout nombre entier est décomposable en une somme de puissances de 2, chaque puissance étant utilisée au plus une fois (c'est la spécificité du binaire, où seuls deux chiffres sont nécessaires et codent pour « je prends » / « je ne prends pas »).

Pour une utilisation dans l'enseignement secondaire, on peut mettre en œuvre l'algorithme sous un tableur ou dans un langage de programmation. On peut aussi aller du côté de l'algorithme d'exponentiation rapide : par exemple, pour élever 3 à la puissance 23, élever successivement au carré pour obtenir 3^2, 3^4, 3^8, 3^{16} puis calculer $3 \times 3^2 \times 3^4 \times 3^{16}$; le tout ne prend que 7 multiplications, au lieu de 22 si l'on calcule 3 x 3 x 3… (avec 23 facteurs).

Signalons que le document original, le papyrus de Rhind, est disponible en ligne sur le site du *British Museum*[6]. Quelle que soit l'émotion que puisse donner la contemplation du document original, il ne nous a pas semblé exploitable directement. Il est en effet rédigé en hiératique (système d'écriture abrégé utilisé pour l'écriture manuscrite) et non en hiéroglyphique (rapidement réservé aux inscriptions monumentales). Dans leur ouvrage, Dedron et Itard (1959) ont suivi la pratique des égyptologues consistant à retranscrire en hiéroglyphique pour plus de lisibilité[7].

III - EN CHINE ANCIENNE, AVANT LE BOULIER

Le troisième « document » est une ressource en ligne :

http://mathschine.univ-lille1.fr/index.html?%22pages/intro.htm%22

[6] http://www.britishmuseum.org/explore/highlights/highlight_objects/aes/r/rhind_mathematical_papyrus.aspx

[7] Pour aller plus loin : http://culturemath.ens.fr/content/breve-chronologie-de-lhistoire-des-mathematiques-en-egypte-2098. Sur papier : Selin (2000), Katz (2007).

Sur ce site, l'historienne des mathématiques chinoises Andréa Bréard[8] met à disposition un applet JAVA permettant d'apprendre à utiliser un instrument de calcul ancien, la table à baguettes. On demande aux participants de lire la brève introduction historique, et d'apprendre à utiliser la table pour (1) écrire des nombres, (2) poser et effectuer des multiplications (les plus courageux peuvent tenter la division).

La table à baguettes (*suan*) est un dispositif quadrillé sur lequel on pose et déplace des baguettes : un chiffre par case, un nombre par ligne (on lit de gauche à droite). En voici une représentation tardive[9] :

D'un usage attesté depuis la période des royaumes combattants (481 – 221 av. JC), elle ne sera remplacée par le boulier (*suanpan*) que bien plus tard (dynastie Ming 1368 – 1644), d'abord dans les milieux marchands. Le système est positionnel décimal (avec une case vide plutôt qu'un zéro écrit), mais diffère du système d'écriture chiffrée dans un texte. Ainsi, le codage des chiffres sur la table est donné par :

Série	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
A		𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
B		𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

La série A est utilisée dans les cases de rang impair (unités, centaines …) et la B dans les cases de rang pair (dizaines, milliers …), pour une question de lisibilité. Le nombre 126 se code donc par 𝍠𝍪𝍥 ; on remarquera le groupement à 5, que l'on retrouve dans le boulier. Dans un texte en sinogrammes, le même 126 s'écrirait 一百二十六 (un cent deux dix six).
On pose une multiplication en utilisant trois lignes : celle du haut pour le multiplicande (par exemple 62), celle du bas pour le multiplicateur (par exemple 48) ; la ligne du milieu accueille les étapes de calcul et montre le résultat final.

[8] Equipe SPHERE (Sciences Philosophie Histoire), UMR 7219 CNRS – Paris Diderot.

[9] Source : http://en.wikipedia.org, *Counting Rods*, consulté le 04/01/2014. Planche tirée d'un ouvrage japonais de 1795.

		6	2
	4	8	

On commence par placer le chiffre des unités du multiplicateur sous le chiffre de plus haut poids du multiplicande.

		6	2
2	4		
	4	8	

On procède de la gauche vers la droite. Pour la première étape, les deux cellules actives sont en gras dans la figure ci-contre : 4 x 6 = 24, que l'on dispose sur la ligne centrale, le chiffre des unités du 24 au dessus du chiffre actif du multiplicateur.

		6	2
2	8	8	
	4	**8**	

Les deux cellules actives sont ensuite 6 et 8. On a 6 x 8 = 48, que l'on place dans la ligne centrale avec la même convention de positionnement, en faisant l'addition.

			2
2	8	8	
		4	8

Toutes les opérations portant sur le 6 du multiplicande ayant été réalisées, on l'efface. Le multiplicateur est décalé d'un cran vers la droite.

			2
2	9	7	6
		4	8

On recommence : 4 x 2 = 8, que l'on ajoute au 8 au-dessus du 4 ; la ligne centrale affiche donc 2960. Enfin 8 x 2 = 16, que l'on reporte dans la ligne centrale en effectuant l'addition.

Les ressorts mathématiques de cette procédure sont les mêmes que ceux de la nôtre : utilisation, dans un système positionnel de base 10, d'un registre mémorisé des produits des nombres de 1 à 9 (les tables de multiplication) ; utilisation implicite de la distributivité de la multiplication sur l'addition et des règles de bon positionnement des chiffres dans le tableau de numération (ainsi pour la première étape : 6 dizaines x 4 dizaines donnent 24 centaines).

L'algorithme diffère du nôtre sur quelques points : on procède de la gauche vers la droite, c'est-à-dire des chiffres de plus haut poids vers ceux de moindre poids ; cela à l'avantage de faire apparaître rapidement l'ordre de grandeur du résultat, mais l'inconvénient de faire modifier plusieurs fois de suite une même cellule de la ligne centrale. De plus, contrairement à la technique écrite en papier-crayon, les valeurs intermédiaires sont effacées au fur et à mesure. Ces aspects sont communs à toute la famille des dispositifs de calcul avec effacement et décalage (table à baguettes, table à poussière ou *takht*, calcul sur le sable), courants dans les mondes chinois, indiens et arabo-persans.

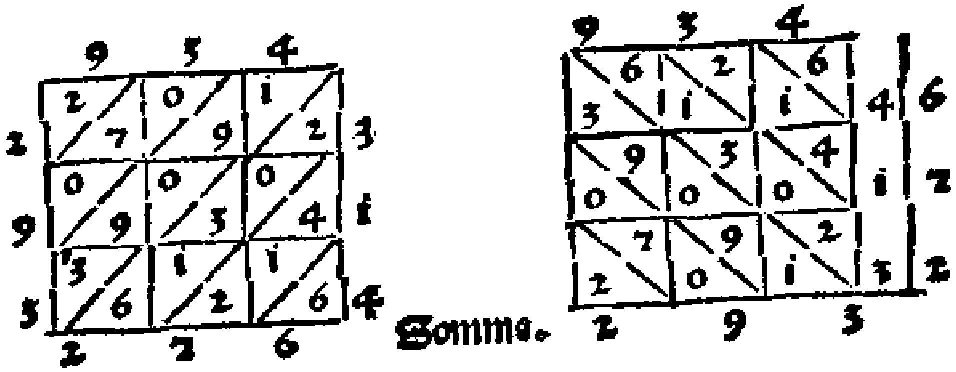
En quittant les contenus de l'école primaire, on peut voir ce dispositif de calcul utilisé dans des contextes plus avancés, par exemple dans les *Neuf chapitres* (Chemla & Shuchun 2004), rédigés sous la dynastie Han (-206 / 220) : extraction chiffre-à-chiffre de racines carrées et cubiques (chapitre 4), résolution de systèmes d'équations linéaires par l'algorithme *fangcheng* (que nous appelons *pivot de Gauss*, chapitre 8). À l'occasion du *fangcheng* on observe les règles de calculs portant sur des coefficients négatifs.

Pour aller plus loin, un très riche dossier sur les mathématiques de la Chine ancienne a été préparé par Karine Chemla sur culturemath à l'occasion de la parution de l'édition critique des *Neuf Chapitres*[10]. Outre les articles et les liens, des vidéos permettent une introduction rigoureuse et accessible aux mathématiques de la Chine ancienne, discutent de leurs liens avec les mathématiques indiennes, comparent les formes de systématisme propres aux *Neuf chapitres* et aux *Eléments* d'Euclide.

[10] http://culturemath.ens.fr/content/breve-chronologie-de-lhistoire-des-sciences-en-chine-2097

IV - PAR JALOUSIE

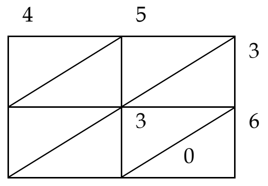
Le quatrième groupe reçoit un groupement de trois documents, dont le plus important est le premier :



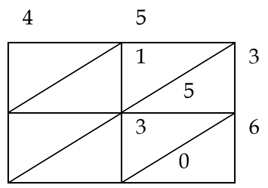
Il est demandé, sans explication, de chercher à comprendre le contenu du document. D'expérience, les participants sont assez désarçonnés, surtout s'ils ne savent pas qu'il s'agit d'une multiplication : les nombres en présence sont difficiles à identifier (est-ce 934 ? ou plutôt 934314 ?), et le seul mot qui apparaît est « somme » … mais c'est une fausse piste !

En autorisant la calculatrice et en conseillant de n'étudier que la grille de gauche, on finit quand même par repérer que 934 x 314 = 293 226, ce qui permet d'identifier la nature de l'opération, la position des deux facteurs et du produit. On repère assez vite que les cellules du quadrillage (abstraction faite des diagonales) représentent des produits : ainsi en bas à droite on lit 4 x 4 = 16. Le produit de deux nombres à un chiffre a au plus deux chiffres, la position par rapport à la diagonale de chaque cellule distingue ces deux positions, faisant régulièrement apparaître des zéros (ainsi dans 3 x 3 = 09). Si l'on a bien affaire à une multiplication, on sait qu'après avoir calculé les produits partiels, il faut encore les disposer convenablement et procéder à des additions. C'est ici que les diagonales interviennent : la diagonale en bas à droite ne contient que 6, qui est reporté en bas de la diagonale, à l'extérieur de la grille ; la diagonale suivante contient 2, 1 et 4, la somme est 7, reportée en bas de cette diagonale, à l'extérieur de la grille ; la diagonale suivante contient 6, 1, 3, 0 et 2, de somme 12, on pose le deux et on retient le 1 pour la somme de la diagonale suivante, etc.

Après avoir compris « comment on fait », on peut se demander « pourquoi ça marche ». Illustrons-le sur un cas plus simple, en multipliant 45 par 36.



5 unités x 6 unités donnent 30 unités, c'est-à-dire 3 dizaines et 0 unités : dans la cellule correspondante, le 3 est placé au-dessus de la diagonale et le 0 en dessous.



5 u x 3 d = 15 d = 1 c + 5 d, on voit pourquoi la troisième diagonale (en partant du bas) contient des nombres de centaines.

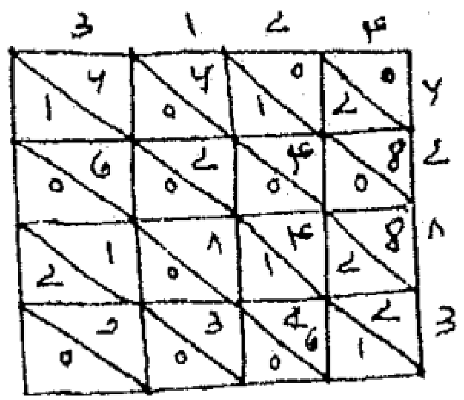
Etc.

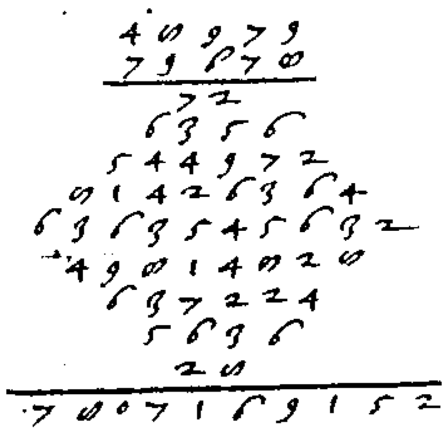
La technique est très proche de la technique posée enseignée usuellement dans nos écoles primaires, elle y est parfois utilisée comme technique intermédiaire. Elle est plus simple en ceci que les phases multiplicatives et additives sont complètement séparées : en particulier, aucune retenue n'intervient dans la première phase.

Dans le document, la grille de droite présente la même opération 934 x 314 = 293 226, avec une variante de disposition. On remarque que les diagonales y sont tracées dans l'autre sens ; en fait, le second facteur « 314 » doit être écrit du bas vers le haut pour que tout soit cohérent !

Cette technique de calcul papier-crayon (ou sur le sable, mais sans effacements) est courante dans le monde arabo-persan médiéval, et se répand en Europe sous le nom italien de multiplication *per gelosia*, faisant allusion au quadrillage du moucharabié ; on l'appelle aussi multiplication par tableau. Le document est tiré de la plus ancienne arithmétique imprimée en Europe, l'arithmétique de Trévise (1478, l'introduction par Gutenberg de l'imprimerie à caractères mobiles datant des années 1450) ; nous le reproduisons depuis l'indispensable *Histoire d'algorithmes* (Chabert, 1994), dont le premier chapitre est consacré aux opérations arithmétiques.

À titre d'énigmes, pour les plus rapides, on peut donner en complément les deux documents suivants :





Le document de gauche présente la multiplication par jalousie de 3124 par 3725 dans un traité d'arithmétique $Al-Qalas\bar{a}d\bar{\imath}$ (1426-1486)[11], utilisant les chiffres arabes d'occident (Maghreb et Andalousie). Le document de droite présente la variante « en diamant », dans laquelle la grille subit un huitième de tour pour passer de l'orientation « carré » à l'orientation « losange » ; les additions finales ont donc lieu en colonne et non en diagonale. Dans les deux cas, c'est la variante avec renversement de l'écriture d'un des facteurs qui est présentée : ainsi le document de droite présente-t-il le produit 97 984 x 79 678. Ce document manuscrit provient d'un cahier intitulé *Opérations et problèmes d'arithmétique*, d'un certain J. Nicolay et rédigé en 1602. Nous l'empruntons à *Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques, du cours moyen au collège* (Cerquetti-Aberkane & Rodriguez 2002, chapitre IV). Soulignons l'intérêt de cet ouvrage, ainsi que de *Les maths ont une histoire, activités pour le cycle 3* (Cerquetti-Aberkane, Rodriguez & Johan 1997), qui proposent des activités s'appuyant sur des sources historiques primaires ayant été réellement pensées et mises en œuvre dans des classes de cycle 3.

Du point de vue historique, on doit souligner que la sélection de documents de cet atelier fait complètement l'impasse sur le rôle des mathématiques indiennes dans la diffusion de la numération de position et d'un certain nombre de techniques opératoires écrites ou sur table à poussière. Signalons l'achèvement prochain de la thèse de Catherine Singh sur ce thème, dont il faudra surveiller les publications.

[11] Fac-simile du $Sharh\ al-talkh\bar{\imath}s$ d'$Al-Qalas\bar{a}d\bar{\imath}$ (folio 29r du manuscrit n°1477 Orient, Bibliothèque de Gotha, Allemagne). Reproduit dans Abdeljaouad (2005, p.61).

V - AU-DELÀ DES ENTIERS, MAIS COMME AVEC LES ENTIERS !

Le cinquième groupe reçoit un document formé de deux extraits de *La Disme* (Stevin 1634[12]). Une fois passée la petite étrangeté due au français du 16ème siècle (*cyffres* pour *chiffres*) et à la typographie (avec ses *s* qui ressemblent aux *f*, sans toutefois se confondre avec eux), la lecture ne pose pas de problèmes de compréhension majeurs.

Le premier extrait présente le système d'écriture :

DEFINITION I.

DISME eſt une eſpece d'Arithmetique, inventée par la Diſieſme progreſſion, conſiſtente es characteres des ciffres, par leſquels ſe deſcript quelque nombre, & par laquelle l'on depeſche par nombres entiers ſans rompuz, tous comptes ſe rencontrans aux affaires des hommes.

EXPLICATION.

Soit quelque nombre de mille cent & onze, deſcript par characteres des cyffres en ceſte ſorte 1111, auſquels appert que chaſque 1 eſt la dixieſme part de ſon prochain charactere precedent. Semblablement en 2378, chaſque unité du 8, eſt la dixieſme de chaſque unité du 7. Et ainſi de tous les autres. Mais parce qu'il eſt convenable que les choſes deſquelles on veut traicter, ayent des noms, & que ceſte maniere de computation eſt trouvée par conſideration de telle dixieſme ou diſme progreſſion, voire qu'elle conſiſte entierement en icelle, comme apparoiſtra cy apres, nous nommons ce traicté proprement & convenablement la DISME, par la meſme on peut operer avec nombres entiers ſans rompuz en tous les comptes ſe rencontrans en nos affaires, comme ſera demonſtré au ſuyvant.

DEFINITION II.

Tout nombre entier propoſé ſe dict COMMENCEMENT, *ſon ſigne eſt tel* ⓪.

EXPLICATION.

Par exemple quelque nombre propoſé de trois cens ſoixantequatre, nous le nommons trois cens ſoixantequatre COMMENCEMENS, les deſcrivant en ceſte ſorte 364⓪. Et ainſi de tous autres ſemblables.

DEFINITION III.

Et chaſque dixieſme partie de l'unité de commencement nous la nommons PRIME, *ſon ſigne eſt tel* ①; *& chaſque dixieſme partie de l'unité de prime nous la nommons* SECONDE, *ſon ſigne eſt tel* ②. *Et ainſi des autres chaſque dixieſme partie, de l'unité de ſon ſigne precedent, touſiours en l'ordre un d'avantage.*

EXPLICATION.

Comme 3①7②5③9④, c'eſt à dire 3 *Primes* 7 *Secondes* 5 *Tierces* 9 *Quartes*; & ainſi ſe pourroit proceder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il eſt notoire, que ſelon ceſte definition, leſdicts nombres ſont $\frac{3}{10}\ \frac{7}{100}\ \frac{5}{1000}\ \frac{9}{10000}$, enſemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8⓪9①3②7③ vallent 8 $\frac{9}{10}\ \frac{3}{100}\ \frac{7}{1000}$, enſemble 8 $\frac{937}{1000}$. Et ainſi d'autres ſemblables. Il faut auſſi ſçavoir que nous n'uſons en la DISME d'aucuns nombres rompuz, auſſi que le nombre de multitude des ſignes, excepté ⓪, n'excede jamais le 9. Par exemple nous n'eſcrivons pas 7①12②, mais en leur lieu 8①2②, car ils vallent autant.

DEFINITION IV.

Les nombres de la precedente ſeconde & troiſieſme Definition ſe diſent en general NOMBRES DE DISME.

Fin des Definitions.

Les participants sont invités à réfléchir aux points suivants : quel est l'avantage du nouveau système selon son auteur ? Il est de permettre de calculer sur des nombres « se rencontrant aux affaires des hommes » sans devoir apprendre à calculer sur les fractions (ou nombres « rompus ») ; les règles de calculs sur les entiers sont les seules à connaître. Quelles connaissances Stevin suppose-t-il familières de son lecteur ? Il suppose connues les règles de calcul sur les fractions, du moins sur les fractions décimales (représentées sans symbole d'addition, comme il a toujours été d'usage pour les nombres mixtes[13]). Stevin affirme-t-il pouvoir représenter dans son système tous les nombres rationnels ? Stevin se contente d'évoquer « tous les comptes se rencontrant en nos affaires », sans se lancer dans des considérations plus théoriques sur les liens entre décimaux et rationnels. Commenter l'affirmation : « Par exemple nous n'écrivons pas 7①12② en leur lieu 8①2③ car ils valent autant » ; Stevin a raison de dire

[12] Disponible en ligne : http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Images/B250566101_11463Index.asp

[13] En reprenant le terme anglais (*mixed numbers*), nous appelons nombres mixtes les nombres rationnels (positifs) décomposés en partie entière + fraction inférieure à l'unité. Le symbole d'addition peut être considéré comme facultatif, selon les conventions d'usage : on écrira 2 2/3 plutôt que 2 + 2/3.

qu'ils valent autant, comme le montre un petit calcul avec des fractions décimales. On voit là une différence entre son système et le nôtre pour noter les décimaux. Dans notre un système, il ne peut y avoir qu'un chiffre par place, et l'indication de la valeur d'un des chiffres cale tous les autres ; alors que dans le système de Stevin l'écriture 7 (1) 12 (3) est possible et non ambigüe, quoiqu'à éviter si l'on veut éviter qu'un même nombre ait plusieurs écritures, ou pour étendre aux décimaux les techniques opératoires des entiers.

Puisque l'atelier est centré sur le thème de la multiplication, nous ne donnons pas les passages sur l'addition et la soustraction. Le document 2 est donc :

PROPOSITION III, DE LA MVLTIPLICATION.

Estant donné nombre de Diſme à multiplier, & multiplicateur : Trouver leur produict.

Explication du donné. Soit le nombre à multiplier 32 (0) 5 (1) 7 (2), & multiplicateur 89 (0) 4 (1) 6 (2). *Explication du requis.* Il faut trouver leur produict. *Conſtruction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme cy joignant, multipliant ſelon la vulgaire maniere de multiplication par nombres entiers, en ceſte ſorte :

```
       (0)(1)(2)
        3 2 5 7
        8 9 4 6
    -----------
      1 9 5 4 2
    1 3 0 2 8
  2 9 3 1 3
2 6 0 5 6
---------------
2 9 1 3 7 1 2 2
      (0)(1)(2)(3)(4)
```

Donne produict (par le 3 probleme de l'Arithmetique) 29137122. Or pour ſçavoir que ce ſont, on ajouſtera les deux derniers ſignes donnez, l'un (2), & l'autre auſſi

(…)

NOTA.

Si le dernier ſigne du nombre à multiplier fuſt inegal au dernier ſigne du multiplicateur ; par exemple l'un 3 (4) 7 (5) 8 (6), l'autre 5 (1) 4 (2), l'on fera comme deſſus, & la diſpoſition des characteres de l'operation ſera telle :

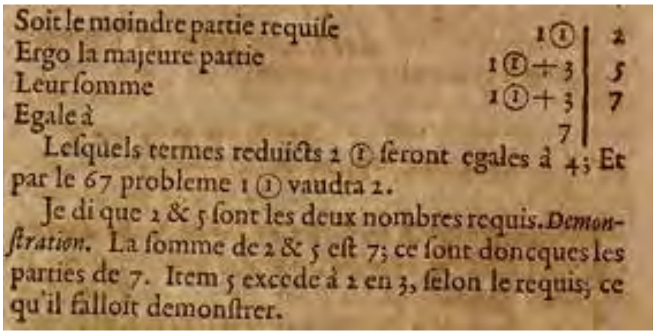
```
  (4)(5)(6)
   3  7  8
      5  4 (2)
  ----------
  1 5 1 2
1 8 9 0
----------
2 0 4 1 2
(4)(5)(6)(7)(8)
```

Stevin propose ici deux dispositions, l'une dans le cas particulier où le chiffre de plus faible valuation est de même valuation dans les deux nombres (7 centièmes et 6 centièmes, dans le premier exemple), l'autre lorsqu'ils diffèrent. Dans les deux cas, on effectue la multiplication « comme si l'on travaillait avec des entiers » ; on détermine ensuite le poids du chiffre de droite du résultat en additionnant les valuations des chiffres de droite des facteurs, indiquées dans les petits ronds : ici le produit de 8 millionièmes (10^{-6}) par 4 centièmes (10^{-2}) donne 32 cent millionièmes (10^{-8}). On retrouve le phénomène remarqué à propos de la notation sexagésimale à virgule flottante des scribes paléo-babyloniens : dans un système positionnel, on n'a pas besoin de connaître les valuations absolues pour obtenir la suite correcte des chiffres du produit. Pour la détermination absolue du résultat, Stevin propose une alternative à notre « règle des signes », en préférant déterminer la valuation du chiffre de plus faible poids. Sa méthode ne semble pas moins pratique ; elle traduit en outre plus directement la propriété mathématique sous-jacente d'addition des exposants lors du produit de puissances d'un même nombre, ici le nombre « un dixième ».

Si l'on souhaite aller au-delà de ce document, au moins trois possibilités sont ouvertes.

Premièrement, on peut faire remarquer que Stevin n'est pas le premier à proposer de faire jouer un rôle particulier aux décimaux pour éviter les calculs sur les fractions et représenter (éventuellement de manière approchée) tous les rationnels, voire toutes les mesures. Al-Kashi l'avait déjà proposé au XVe siècle ; au XIVe siècle, Jean de Murs approchait des racines carrées en passant des unités aux dixièmes, puis aux centièmes, etc. (mais dans un contexte astronomique, il préférait convertir ensuite la partie non-entière en sexagésimal). Cet opuscule, qu'est *La Disme*, s'accompagne d'un appendice dans lequel Stevin entreprend de montrer son usage et utilité dans les « affaires des hommes » : dans l'arpentage, dans les « comptes des mesures de tapisseries », dans les « comptes servans à la gavierie et aux mesures de tous tonneaux », dans les « comptes de la stéréométrie[14] en général », dans les « computations astronomiques », enfin dans les « comptes des maistres des monnoies, marchans & de tous estats en général ». L'utilité du calcul sur les décimaux, qu'il soit posé ou « à gettons »[15] (Stevin 1634, p. 212), est toutefois limitée dans la pratique tant que les systèmes métrologies en usage ne sont pas à pas régulier de 10 ; *La Disme* se conclut d'ailleurs sur un appel à la mise en place de tels systèmes.

Deuxième prolongement possible : en feuilletant les *Œuvres mathématiques* de Stevin (Stevin 1634), on peut remarquer que la notation en petits ronds n'est pas réservée à la *Disme*. Ainsi, dans son adaptation (très personnelle) des premiers livres des *Arithmétiques* de Diophante, Stevin utilise les symboles ①, ②, … pour désigner les puissances de l'inconnue[16]. Ainsi pour traiter le premier problème : « partons[17] 7 en deux parties telles, que la majeure excède la moindre en 3 », il dispose la résolution comme suit[18] :



Soit le moindre partie requise	1①	2
Ergo la majeure partie	1①+3	5
Leur somme	1①+3	7
Egale à	7	

Lesquels termes reduicts 2 ① seront egales à 4; Et par le 67 probleme 1 ① vaudra 2.

Je di que 2 & 5 sont les deux nombres requis. *Demonstration.* La somme de 2 & 5 est 7; ce sont doncques les parties de 7. Item 5 excede à 2 en 3, selon le requis; ce qu'il falloit demonstrer.

On notera la « mise en équation » progressive, et erronée (la somme devant faire $2x + 3$ et non $1x + 3$). La résolution est ensuite purement rhétorique (« lesquels termes (…) »). On remarquera aussi que Stevin ne procède pas par équivalence : il distingue au contraire une première partie d'*analyse*, et une seconde partie qu'il nomme « démonstration », qu'on peut qualifier de *synthèse* ou de vérification.

Cette désignation des puissances de l'inconnue est à la même époque aussi utilisée par Bombelli dans son *Algebra* (Bombelli 1579[19]).

Un troisième prolongement serait plus historique, et demanderait une recherche documentaire sur la figure de Stevin, érudit et figure publique, engagé dans la lutte d'indépendance des flamands contre l'empire des Habsbourg.

---

[14] L'étude des solides, ici de leurs volumes.

[15] Lire « à jetons », c'est-à-dire sur abaque à jetons.

[16] On voit qu'ici, ce sont des innovations notationnelles dans le domaine de l'algèbre qui se répercutent dans un second temps dans le domaine numérique. Ainsi, la règle de multiplication utilisée dans la Disme (du type : un dixième fois un centième donne un millième car 1 + 2 = 3) n'est bien qu'un cas particulier de la règle générale sur les produits de puissances d'un même nombre, connu ou inconnu.

[17] C'est-à-dire « partageons ».

[18] Source : Stevin (1634, p.103).

[19] Disponible en ligne : http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1230877

VI - PISTES

Pour aborder la question des sources en histoire des mathématiques, on ne peut que commencer par souligner le changement fondamental représenté par la multiplication des ressources en ligne. Commençons par ce que les historiens appellent les sources primaires (i.e. les documents historiques), par opposition aux sources secondaires (travaux d'histoire). Il y a une dizaine d'années encore, pour consulter un ouvrage mathématique ancien, il fallait se rendre dans une bibliothèque. Pour peu que l'ouvrage soit un peu ancien ou rare, il n'était disponible que dans quelques bibliothèques dans le monde, éventuellement en accès réservé aux chercheurs. Depuis une quinzaine d'années, bibliothèques nationales ou autres organismes ont mis en œuvre des programmes massifs de rétrodigitalisation, rendant accessibles immédiatement, gratuitement, et souvent sous forme téléchargeable (pdf) ce qui demandait avant un voyage et des consultations de catalogues savants.

Signalons quelques points d'entrée utiles :

- La *Digital Mathematics Library* est un méta-catalogue de textes mathématiques anciens digitalisés. http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rehmann/DML/dml_links.html Toujours utile, il n'est en revanche pas à jour, et ne pourra jamais l'être tant les vagues de digitalisation sont importantes.
- *Internet archive* (http://archive.org/advancedsearch.php) est un serveur généraliste mais qui répertorie aussi des fonds mathématiques. Pour se lancer, n'hésitez pas à consulter l'édition « pictoriale » des six premiers livres des *Eléments* d'Euclide par Oliver Byrne (taper « *Title : Euclid* » « *Creator : Byrne* »). Je recommande aussi le classique (déjà ancien) *History of Mathematical Notations* de Florian Cajori.
- *Googlebooks* contient aussi un bon nombre de textes mathématiques anciens, souvent consultables en ligne seulement : http://books.google.com/advanced_book_search?hl=fr. Ne pas se priver de Google images, en particulier pour les instruments anciens.
- Le site de la Bibiothèque nationale de France contient, outre la digitalisation de ses propres fonds, des liens vers d'autres ressources dans des bibliothèques nationales ou universitaires : http://gallica.bnf.fr/advancedsearch?lang=FR.

Pour ce qui est de la littérature secondaire, l'offre est vaste mais non centralisée. Je ne peux ici que souligner l'intérêt du site *Culturemath*, qui joue – entre autres – un rôle d'interface entre la communauté des chercheurs en histoire des mathématiques et un public (visé) d'enseignants. Il a entre autres avantages de satisfaire aux critères de scientificité en vigueur dans le monde universitaire (rédacteurs spécialistes, comité de lecture, bibliographies récentes) tout en assumant une ligne éditoriale de diffusion de résultats de recherche à un public non-spécialiste quoique formé aux mathématiques. Avec des sites comme *Culturemath*, on n'est plus dans la mise à disposition de *sources* mais déjà dans des *ressources*. Il s'agit cependant de ressources pour la formation ou l'auto-formation des enseignants ; le site n'est pas pensé pour un usage direct par des élèves, et ne propose globalement pas de pistes pédagogiques ou didactiques.

Un rôle d'interface entre chercheurs, formateurs et enseignants est aussi assuré par les IREM. Signalons, à titre d'exemple, deux publications qui nous semblent importantes :

- *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce* (Chabert, 1994) présente des sélections de textes historiques commentés, sur des thèmes algorithmiques au sens large : opérations arithmétiques, résolution de problèmes numériques, utilisations de la division euclidienne, approximations (de racines carrées, de π), résolutions approchées d'équations numériques ou différentielles.
- Deux ouvrages récents issus de la commission inter-IREM *Histoire et Epistémologie des mathématiques* offrent une autre perspective Barbin (2010) (2012). Ici l'objectif pédagogique est premier, puisqu'il s'agit de recueils d'activités pour la classe s'appuyant sur l'histoire des mathématiques. Par delà la variété des thèmes (de la proportionnalité à la loi de Gauss), un choix

de forme commun aux différents chapitres vise à illustrer de *bonnes pratiques* : des comptes rendus d'expériences (avec leurs motivations, leur travail préliminaire de documentation, leurs choix pédagogiques, leurs erreurs, …) plutôt que des fiches à photocopier ; un travail sur des sources historiques dans lequel l'histoire est un *moyen* au service de l'enseignement des mathématiques et non une *fin*[20] ; des bibliographies/sitographies commentées, permettant à la fois de faire entendre le rôle d'interface joué par l'auteur du chapitre et invitant le lecteur intéressé à poursuivre sa formation personnelle. On reconnaît, je l'espère, *mutatis mutandis*, les éléments structurant du scénario d'atelier présenté ici.

Dans les productions de la commission inter-IREM *Epistémologie et Histoire des mathématiques*, c'est d'enseignement secondaire qu'il est très majoritairement question[21]. Pour leur rareté comme pour leur qualité, on doit signaler les recueils d'activités pour le cycle 3 de l'école primaire préparés par les collègues de l'académie de Créteil (Cerquetti-Aberkane, Rodriguez & Johan, 1997) et (Cerquetti-Aberkane & Rodriguez, 2002), sous l'impulsion d'Evelyne Barbin. Dans un esprit proche de celui de la commission inter-IREM *Epistémologie et Histoire des mathématiques* – quoique reflétant une culture professionnelle différente – les auteurs y proposent des activités proprement mathématiques s'appuyant sur des sources primaires.

[20] Cette remarque ne constitue en rien une condamnation de l'idée d'un *objectif* d'enseignement de l'histoire des mathématiques, nous soulignons simplement que ce n'est pas de cela dont il est question ici.

[21] C'est aussi largement le cas pour l'ensemble des membres du réseau HPM (*History and Pedagogy of Mathematics*). Voir (Fauvel & Van Maanen 2000), ainsi que le site http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/

BIBLIOGRAPHIE

ABDELJAOUAD, M. (2005). *Les arithmétiques arabes (9e-15e siècles)*. Tunis : Ibn Zeidoun.

BARBIN, E. (dir.) (2010). *De grands défis mathématiques, d'Euclide à Condorcet*. Paris : Vuibert-Adapt.

BARBIN, E. (dir.) (2012). *Les mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*. Paris : Vuibert-Adapt.

BOMBELLI, R. (1579). *L'algebra* (2ème édition). Bologne : Giovanni Rossi.

CERQUETTI-ABERKANE, F., RODRIGUEZ, A. & JOHAN, P. (1997). *Les maths ont une histoire. Activités pour le cycle 3*. Paris : Hachette Education.

CERQUETTI-ABERKANE, F. & RODRIGUEZ, A. (2002). *Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques du cours moyen au collège*. Champigny-sur-Marne : CRDP de l'académie de Créteil.

CHABERT, J.-L. (dir.) (1994) *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*. Paris : Belin.

CHEMLA, K. & SHUCHUN, G. (2004). *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris : Dunod.

DEDRON, P. & ITARD, J. (1959). *Mathématiques et mathématiciens*. Paris : Magnard.

FAUVEL, J., & VAN MAANEN, J. (DIR.) (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic.

GUINET, R. (1978a). Histoire des techniques opératoires. *Grand N*, *14*, 53-68.

GUINET, R. (1978b). Histoire des techniques opératoires : la multiplication. *Grand N*, *15*, 27-41.

GUINET, R. (1979). Histoire des techniques opératoires : la division. *Grand N*, *17*, 21-36.

GUINET, R. (1995). Une petite histoire de la division : de ses origines jusqu'à la méthode « Galley ». *Grand N*, *57*, 33-54.

KATZ, V. (Ed.) (2007). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*. Princeton: Princeton University Press.

SELIN, E. (Ed.) (2000). *Mathematics across Cultures: The History of Non-Western Mathematics*. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic.

STEVIN, S. (1634). *Les Œuvres de mathématiques de Simon Stevin, augmentées par Albert Girard*. Leyde : Bonaventure & Elsevier.