ANALYSE D'UN DISPOSITIF DE FORMATION EN GÉOMÉTRIE PLANE POUR LES FUTURS PROFESSEURS DES ÉCOLES AUTOUR DE PLIAGES ET DE CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Françoise JORE
Equipe PESSOA, Département de Sciences humaines et sociales
Université Catholique de l'Ouest - Membre du PRES L'UNAM
jore@uco.fr

Résumé
La proposition qui est faite ici consiste à exploiter un travail autour de deux types d'activités : d'une part des pliages, nécessitant la mise en œuvre consciente de propriétés géométriques, d'autre part des constructions à la règle et au compas avec la rédaction et la justification des scénarios de construction correspondants. Ces activités sont l'occasion avec des M1 qui se destinent au professorat des écoles de revoir bon nombre de théorèmes de géométrie en acte, c'est-à-dire en les **utilisant** pour effectuer un pliage ou une construction, d'entrer dans une démarche de démonstration avec des hypothèses non pas imposées par un énoncé mais tirées de la construction, par le passage obligé de l'utilisation d'un vocabulaire géométrique précis et rigoureux. Ce type d'activité permet à tous les étudiants de s'investir dans la tâche proposée, quel que soit leur niveau de compétences, souvent très hétérogène.

Cette communication s'inscrit dans le cadre d'un échange de pratiques. Assurant la formation des PE1, maintenant M1, depuis longtemps, nous avons expérimenté de nombreuses situations permettant de travailler la géométrie plane. Il s'agit ici d'en proposer deux qui nous apparaissent intéressantes dans le cadre de la formation actuelle du master Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation pour des étudiants qui se préparent au concours de professeur des écoles.

I - CADRE THÉORIQUE

Quatre concepts clés de didactique sous-tendent ce travail.

1 Le concept d'outil et d'objet de R. Douady

Rappelons la définition que Régine Douady en donne dans [Douady, 1992, p. 134]

> *« Ainsi, nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un outil est engagé par quelqu'un, dans un contexte problématique, à un moment donné. […]*
>
> *Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. »*

L'objectif des situations présentées aux étudiants est que les propriétés mathématiques soient tout d'abord investies par les étudiants sous leur aspect outil. Il ne s'agit pas de faire réciter les propriétés mais de faire en sorte que les étudiants soient contraints de les **utiliser** pour accomplir les tâches qui leur sont proposées.

2 Connaissances disponibles et mobilisables d'A. Robert

Robert [1995, p. 12] définit ainsi connaissances mobilisables et connaissances disponibles :

> *« Nous distinguons pour les élèves :*

- *le fait d'utiliser des connaissances indiquées ;*
- *le fait de penser à utiliser des connaissances alors que rien n'est indiqué à leur propos.*

Dans le premier cas, nous dirons que les élèves savent mobiliser leurs connaissances (par exemple employer un théorème ou une technique clairement signalés). Nous parlerons de connaissances mobilisables.

Dans le second cas, nous parlerons de connaissances disponibles. Cela ne peut être le cas que si les documents fournis aux élèves ne sont pas extraits d'un chapitre du manuel. »

De nombreux théorèmes de géométrie plane sont effectivement mobilisables par nos étudiants. Ils les ont plus ou moins bien mémorisés mais la plupart d'entre eux sont capables de les utiliser si on le leur demande. Quand il s'agit de les choisir de leur propre initiative pour résoudre un problème, cela est beaucoup plus difficile. Or avoir des compétences en mathématiques, c'est disposer de connaissances et être capable de les utiliser de manière autonome, sans indication particulière. Autrement dit, avoir des compétences en mathématiques, c'est selon nous disposer de connaissances disponibles, stockées dans la mémoire à long terme, et disposer de procédures pour repérer parmi les connaissances disponibles celles qui sont susceptibles d'être pertinentes dans une situation donnée. Nous essayons donc, dans la mesure du possible, de limiter dans les consignes les indices qui donnent aux étudiants une piste sur les propriétés pouvant être utilisées. Souvent, plusieurs procédures peuvent être utilisées, qui mettent en œuvre des propriétés différentes.

3 Stratégies d'homologie de C. Houdement et M.-L. Peltier

« Par les stratégies d'homologie, le formateur cherche à transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, [...] ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes des mises en œuvre proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves. »[Houdement et Peltier, 2002, p. 78]

Dans le cadre du cours de didactique de la géométrie plane à l'école élémentaire, nous développons l'idée des textes officiels de faire travailler les élèves par problèmes[1]. Il s'agit donc, dans les séances de mathématiques, de mettre les étudiants eux-mêmes dans des activités de résolution de problèmes. En parallèle d'une institutionnalisation des connaissances mathématiques exploitées dans la tâche proposée, une explicitation des choix didactiques effectués dans la mise en œuvre de l'activité est également faite. Elle sera peu présentée ici.

4 Les paradigmes géométriques de B. Parzysz.

Il serait un peu long ici de détailler les différents types de géométrie que Houdement et Kuzniak [2006], puis Parzysz [2002], ont développés. On pourra lire utilement [Houdement & Kuzniak, 2006], [Parzysz, 2002] ou [Jore, 2008] pour plus de détails. Nous précisons simplement, à la suite de Parzysz [2002], que dans la géométrie spatio-graphique (notée G1), les objets géométriques sur lesquels on travaille sont physiques, les validations utilisées sont perceptives, qu'elles soient ou non instrumentées, le dessin ou le pliage effectué est l'objet d'étude. C'est le paradigme dans lequel l'élève se situe le plus souvent à l'école élémentaire. Dans la géométrie proto-axiomatique (notée G2), les objets sont théoriques, définis par un texte et/ou un codage sur un dessin à main levée, les validations relèvent du raisonnement hypothético-déductif et le dessin ou le pliage effectué n'est qu'un représentant de l'objet mathématique auquel on s'intéresse. C'est le paradigme dans lequel on attend le plus souvent que l'élève se situe au collège, ou l'étudiant dans le cadre de l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles.

Les contraintes des activités proposées en formation doivent permettre petit à petit aux étudiants de prendre conscience de ces deux paradigmes et de les aider à se situer le plus possible dans G2.

[1] « La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages. » BO 19 juin 2008, page 38.

II - LE CONTEXTE DE LA FORMATION

Plusieurs aspects spécifiques du public d'étudiants concernés et de la formation dans laquelle s'inscrivent les séances développées ici méritent d'être explicités.

1 L'épreuve de mathématiques du CRPE et le temps de formation

Le nouveau concours de professeur des écoles[2] remet en place une épreuve qui fait appel à des compétences disciplinaires et didactiques. Dans le problème de la partie 1, notamment, les étudiants peuvent être amenés à effectuer des démonstrations de géométrie plane, telles qu'on peut les faire au collège, comme en témoigne le premier sujet zéro[3] proposé pour la session 2014 par exemple. Cela nécessite entre autres de maîtriser un minimum de théorèmes de géométrie euclidienne. Nous observons que ces théorèmes sont peu mobilisables, voire parfois non disponibles, et souvent non opérationnels pour les M1. Ils peuvent être également amenés à effectuer des constructions à la règle et au compas ou à rédiger des programmes de constructions. Ainsi, l'objet du concours est bien, entre autres, d'évaluer certaines compétences disciplinaires. Par ailleurs, indépendamment de cette épreuve, « rédiger un programme de construction » fait partie des compétences travaillées au cycle 3, et par conséquent doit être maîtrisé par les futurs enseignants.

Or le temps de formation est limité. Il s'agit donc de profiter au mieux du faible temps dont le formateur dispose pour mettre en place toutes ces compétences. La situation que nous proposons sur les constructions à la règle et au compas va permettre de travailler simultanément ces différentes compétences disciplinaires.

Les deuxièmes et troisièmes parties de l'épreuve du concours vont, elles, faire appel aux compétences pédagogiques et didactiques des candidats. Cet aspect est donc à développer pendant la formation de master première année, le concours se situant en fin de cette première année. Nous utilisons pour cela des situations d'homologie, afin de développer simultanément des compétences mathématiques (ici, sur des propriétés de géométrie plane) et des compétences didactiques (ici autour de l'intérêt de travailler avec les élèves par situations problèmes, de l'aspect outil des concepts mathématiques et de l'utilisation en situation du vocabulaire géométrique).

2 La population des étudiants de Master de professorat des écoles

Dans leur grande majorité, les candidats à l'enseignement pour le premier degré n'ont pas fait d'études supérieures en mathématiques et ne possèdent pas de baccalauréat scientifique. Ils sont souvent en difficulté en mathématiques, à la fois sur le plan intellectuel mais aussi sur le plan affectif ou émotionnel. Il s'agit donc de leur proposer des activités différentes de celles qui les ont fait « souffrir » au collège pour les réconcilier avec les mathématiques. Cependant, certains étudiants ont un bagage mathématique sérieux et savent résoudre sans difficultés les problèmes de collège. On peut donc craindre pour eux un certain désintérêt pour les séances de mathématiques. Il s'agit donc de leur proposer des situations nouvelles, qui leur permettent également de réfléchir. La situation sur les pliages que nous proposons a pour objectif de répondre à ces deux contraintes.

III - PLIAGES

Un premier travail autour des pliages est proposé aux M1 en début de formation en géométrie.

1 Les objectifs de l'activité

L'idée d'utiliser les pliages pour développer des capacités et des connaissances en géométrie n'est pas nouvelle. Dans son ouvrage « Questions sur la géométrie et son enseignement » notamment, François Boule [2001] propose des activités autour des pliages à mettre en œuvre à l'école

[2] Le lecteur trouvera tous les textes définissant les nouvelles épreuves sur : http://www.education.gouv.fr/pid97/siac1.html

[3] Disponible sur : http://cache.media.education.gouv.fr/file/sujets_0(2014)/59/7/s0_crpe_math_260597.pdf

élémentaire. Ces idées sont reprises ici et adaptées à la formation des M1. Les objectifs de cette activité sont multiples :

- permettre aux M1 de revoir définitions et propriétés de quelques objets du plan (triangles particuliers, quadrilatères, …).

- Proposer une tâche qui n'est pas routinisée et qui donc oblige les étudiants à réfléchir. La solution du problème ne consiste pas en l'application d'une technique rodée ; ils n'ont en général jamais rencontré cette tâche.

- Faire en sorte que les propriétés des objets soient un outil incontournable pour accomplir la tâche proposée. Il ne s'agit pas seulement d'énoncer des propriétés, mais de les utiliser comme outil pour effectuer la construction demandée.

- Donner l'occasion aux étudiants en difficulté en mathématiques de s'investir dans une activité de démonstration sous une forme nouvelle qui ne les rebuterait pas.

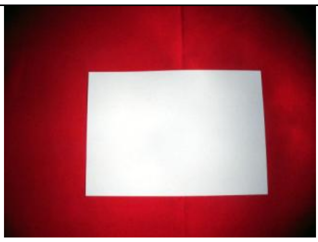
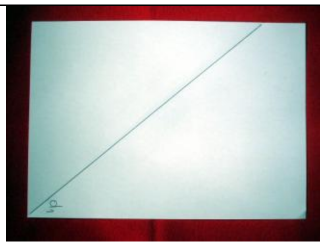
- Mettre les étudiants scientifiques dans une situation qui les déstabilise un peu, qui ne leur permette pas de reproduire trop rapidement un discours par ailleurs bien assimilé, qui les oblige à réfléchir. Il faut qu'eux aussi aient quelque chose à apprendre, une compétence à développer.

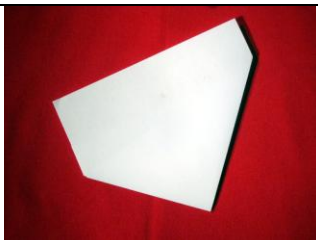
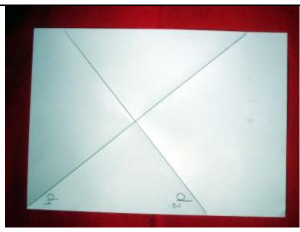
2 Construction de triangles

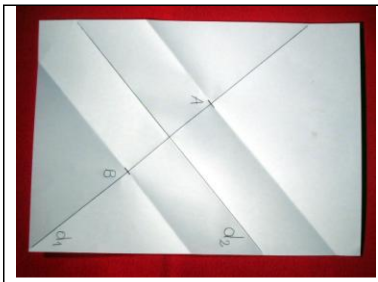
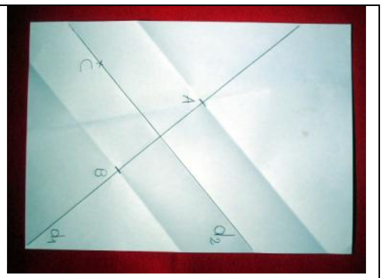
La première consigne proposée est ainsi la suivante : « Prendre une feuille de papier. Par pliage, sans utiliser les habituels instruments de géométrie, obtenir un triangle rectangle, puis un triangle isocèle. »

Ces deux constructions n'ont pour but que de s'approprier la consigne et le fonctionnement de cette activité. Elle est souvent effectuée avec les étudiants. C'est l'occasion de préciser que l'on ne se sert pas des bords de la feuille, que l'on a le droit de repérer un pli avec un crayon, etc. Elle est réalisée sans difficultés par tous les étudiants. Il leur est ensuite demandé de construire de la même manière un triangle équilatéral. Un élément est alors ajouté : « Préciser les définitions ou propriétés utilisées qui permettent de justifier la construction ».

Une démarche possible est la suivante :

		
Prendre une feuille	Plier en deux	On obtient une droite d_1

		
Plier à nouveau en deux afin d'obtenir une perpendiculaire à d_1	La droite d_2 est perpendiculaire à d_1	Replier à nouveau de sorte de déterminer deux points sur d_1 équidistants de d_2

		
A et B sont deux points de d_1 équidistants de d_2	Plier en A de sorte d'amener B sur d_2	On a ainsi déterminé sur d_2 un point C équidistant de A et B

Cette construction diffère légèrement de celle proposée dans [Boule, 2001], en particulier parce qu'elle n'utilise par les bords de la feuille. La propriété sous-jacente à la construction est que la médiatrice (obtenue comme droite perpendiculaire au côté et passant par son milieu) doit être une hauteur, tandis que Boule travaille sur la médiane. L'essentiel est que la définition habituelle seule du triangle équilatéral (triangle avec des côtés isométriques) ne suffit pas pour effectuer la construction par pliage. Dans la construction proposée ci-dessus, la propriété mise en acte est :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \text{C est sur la médiatrice de } [A,B] \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ABC est un triangle équilatéral}$$

Cette propriété est ainsi un **outil** pour accomplir la tâche.

Une autre procédure est souvent proposée par quelques étudiants : « Plier la feuille en deux. On obtient un angle plat. Partager cet angle plat en trois angles superposables. Ces angles de sommet O mesurent alors 60°. Plier à nouveau pour obtenir la bissectrice d'un des angles obtenu et placer deux points A et B équidistants de O sur les côtés de l'angle ». Le triangle AOB est isocèle avec un angle de 60 : il est donc équilatéral. Cette fois, une autre propriété est utilisée : un triangle isocèle avec un angle de 60° est un triangle équilatéral.

3 D'autres pliages

D'autres pliages sont proposés, en fonction du temps qu'il reste dans la séance : obtenir un triangle isocèle et rectangle, des angles de 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90, la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, la hauteur d'un triangle, un carré, un losange, un parallélogramme, un cerf-volant, un hexagone, deux droites parallèles, une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné, etc. Chacune des constructions permet de travailler un aspect particulier des compétences géométriques disciplinaires.

La construction d'un rectangle permet de mettre l'accent sur le fait qu'il suffit d'effectuer successivement trois perpendiculaires. On peut alors conjecturer qu'un quadrilatère avec trois angles droits est un rectangle. La propriété pourra alors être ou non démontrée.

La construction du carré fait souvent apparaître plusieurs constructions, qui reposent sur des propriétés caractéristiques différentes du carré. Il est alors intéressant de les expliciter : quadrilatère avec trois angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur ; quadrilatère avec deux angles droits successifs et trois côtés de même longueurs ; …

Le rectangle a permis d'obtenir des droites parallèles. Le parallélogramme va amener à réinvestir cette construction. Une fois que deux parallèles vont être construites, il va falloir choisir arbitrairement une autre direction pour les autres côtés et appliquer de nouveau la procédure qui permet d'obtenir des parallèles. Cela semble simple mais en réalité, il y a là une difficulté pour bon nombre d'étudiants. En effet, à ce moment-là, il y a de multiples plis sur la feuille et il faut vraiment s'organiser et avoir en tête la propriété que l'on veut utiliser pour réussir à effectuer la construction. On peut la détailler ainsi :

- plier pour obtenir une première droite d1 ;
- plier pour obtenir une droite d2 perpendiculaire à d1 ;
- plier pour obtenir une droite d3 perpendiculaire à d2 et donc parallèle à d1 ;
- déplier le tout et remettre la feuille à plat ;
- plier arbitrairement pour obtenir une autre droite d4 ;
- plier pour obtenir une droite d5 perpendiculaire à d4 ;
- plier pour obtenir une droite d6 perpendiculaire à d5 et donc parallèle à d4 ;
- déplier le tout ;
- repérer les droites d1, d3, d4, d6 qui doivent délimiter un parallélogramme. Il faut pour cela que la figure finale ait été un peu anticipée pour que les intersections soient effectivement présentes dans la feuille de papier.

Les étudiants doivent simultanément réfléchir à la propriété utilisée (plier pour obtenir la perpendiculaire d'une perpendiculaire donne une parallèle), oublier certains plis intermédiaires de perpendiculaires pour ne s'intéresser qu'aux parallèles finalement obtenues, anticiper les pliages pour que la figure apparaisse au bon endroit. Tout cela rend la tâche relativement complexe pour bon nombre d'étudiants. Les compétences travaillées au cours de cette activité s'avèrent indispensables pour affronter les problèmes de géométrie du concours.

C'est l'occasion en outre avec certains étudiants d'insister sur les justifications et de faire prendre conscience des paradigmes G1 et G2. Certains, par exemple, font deux pliages successifs pour obtenir des droites parallèles sans autre justification que « je plie pour obtenir deux droites parallèles ». A partir de la simple question « comment peut-on faire pour être sûr qu'elles soient parallèles ? », l'étudiant peut faire la différence entre les deux procédures et les deux paradigmes sous-jacents. Dans un cas, on a utilisé des propriétés qui permettent d'affirmer que les droites sont parallèles, on travaille donc dans G2, dans l'autre cas, rien de permet de le faire, le parallélisme est obtenu par la seule perception visuelle, on se situe alors dans G1. L'amélioration de la précision n'est pas significative car à « l'œil nu », on obtient des droites tout aussi parallèles qu'après des pliages de perpendiculaires de perpendiculaires. Cela permet de mettre en évidence que ce n'est pas l'objet physique obtenu qui nous intéresse mais l'objet théorique matérialisé par le pliage. La précision de ce pliage importe peu, c'est le fait que ce pliage respecte les propriétés qui définissent l'objet théorique qui en fait un représentant de cet objet théorique. C'est là une condition fondamentale du travail dans G2.

IV - CONSTRUCTIONS A LA RÈGLE ET AU COMPAS

Après cette première activité, une autre consigne, plus habituelle, est proposée aux étudiants : effectuer des constructions à la règle et au compas. Cette fois, non seulement les étudiants doivent faire, mais ils doivent également être capables de décrire ce qu'ils ont fait. Un scénario de leur construction leur est en effet demandé. Par ailleurs, comme dans l'activité précédente, après avoir effectué la construction, les étudiants doivent la justifier. Il s'agit donc de repérer les éléments construits, les hypothèses liées à la construction choisie, puis d'appliquer définitions, propriétés, théorèmes pour démontrer que l'objet construit a bien les propriétés annoncées. Les connaissances utilisées précédemment vont ainsi être réinvesties.

1 Première étape : construction, rédaction du scénario puis justification

La première construction proposée aux étudiants est celle d'un triangle rectangle. La mise en commun des procédures utilisées est alors effectuée avec le dispositif suivant :

a1. Un étudiant dicte au formateur un scénario de construction.

a2. Le formateur effectue au fur et à mesure la construction avec un logiciel de géométrie dynamique[4], en faisant dans certains cas reformuler la consigne.

a3. L'étudiant, éventuellement aidé du groupe, explicite les propriétés qui justifient la construction effectuée.

Les objectifs de formation, explicites ou implicites, sont multiples.

Les éléments a1 et a2 permettent explicitement de travailler la rédaction d'un scénario de construction. Celui-ci doit avoir plusieurs caractéristiques :

- Les informations doivent être fournies dans l'ordre. Si cet aspect pose parfois problème aux élèves, il ne pose en général pas de difficultés aux étudiants.

- Le scénario ne doit pas être trop synthétique. Des expressions comme « tracer la médiatrice du segment [AB] » sont dans un premier temps refusées, et remplacées par la liste des objets élémentaires qui doivent être construits. Lorsqu'une procédure pour tracer une médiatrice à la règle et au compas par exemple est bien détaillée et justifiée, elle peut dans un second temps être utilisée comme une macro-construction. Au fur et à mesure que de nouvelles constructions sont explicitées et justifiées, elles viennent allonger la liste des objets constructibles directement.

- Il faut surtout que ce scénario soit complet, sans ambiguïté et sans redondance, ce qui est beaucoup plus difficile pour les étudiants. Nous mettons alors en évidence que la plupart du temps ils ne disent pas tout parce qu'ils anticipent implicitement sur le tracé qu'ils veulent obtenir. Par exemple, le plus souvent, des arcs de cercle sont effectués. Mais il est difficile de décrire correctement un arc de cercle si on veut que son intersection par exemple avec un autre arc de cercle soit non vide ! Si les arcs de cercles sont correctement tracés, ce n'est pas grâce à la précision du scénario de construction, mais parce que les étudiants savent ce qu'ils doivent obtenir et anticipent grâce à l'image mentale qu'ils ont de la construction avant même que celle-ci ne soit effectuée. Il est dans ce cas proposé de tracer systématiquement le cercle complet, même si concrètement seul un arc « bien placé » suffit.

- Par ailleurs, le langage utilisé dans le scénario doit être un langage qui décrit les objets géométriques créés, et non les actions et instruments utilisés pour les construire. On cherche par exemple à remplacer : « Je trace un segment [DC]. Avec mon compas, je pose ma pointe sur D et je fais un écartement plus grand que la moitié de mon segment. Je trace mon arc. » par « Tracer un segment [DC]. Tracer un cercle de centre D et de rayon supérieur à la moitié de la longueur DC. ». Cette contrainte permet de simplifier les formulations. Elle permet surtout à l'étudiant de **prendre conscience de l'objet géométrique construit** (par exemple un cercle). Par la suite, ces propriétés (par exemple : tout point du cercle est à égale distance du centre) pourront alors être explicitées et être utilisées comme hypothèse dans la justification du scénario, comme une hypothèse l'est dans une démonstration. Le vocabulaire géométrique est utilisé en situation.

Ce travail est explicitement mis en place pour faire évoluer la compétence de rédaction d'un scénario de construction. Les étudiants se rendent compte qu'ils sont capables d'effectuer une construction mais qu'ils ont de réelles difficultés pour la décrire. L'accent est mis sur le fait qu'ils doivent maîtriser cette compétence dans le cadre de l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles, mais également que cette compétence peut (-doit-) être travaillée au cycle 3,

[4] A défaut de disposer de suffisamment de temps pour que les étudiants s'approprient un logiciel de géométrie dynamique en en manipulant un eux-mêmes, ils peuvent au moins découvrir une partie des possibilités d'un tel logiciel afin d'envisager comment ils pourraient le faire exploiter en classe par des élèves.

et qu'ils doivent donc la développer pour eux-mêmes en formation pour aider les élèves à la développer lorsqu'ils seront en classe. Il faut qu'ils puissent également rédiger eux-mêmes des scénarios pour leurs élèves, afin que ceux-ci puissent « *Tracer une figure simple à partir d'un programme de construction ou en suivant des consignes*[5] » par exemple. Du point de vue des élèves de cycle 3, les étudiants qui ont effectué des suppléances ont l'impression que les élèves connaissent bien les objets du plan qui sont explicitement au programme : carré, rectangle, cercle par exemple. Ils considèrent que les élèves savent les nommer et les tracer, ce qui est pour eux l'essentiel. Ils prennent soudain conscience que si eux-mêmes n'utilisent pas spontanément les mots cercle, centre, rayon dans une telle activité, il en va probablement de même pour les élèves. Ils constatent alors tout l'intérêt de l'activité de rédaction d'un scénario de construction afin d' « *Utiliser en situation le vocabulaire géométrique*[6] », et s'aperçoivent que bien souvent ils n'en ont jamais fait faire à leurs élèves. Le fonctionnement par homologie leur permet de développer cette compétence pour eux-mêmes. Le détour, par des commentaires du formateur, sur les choix didactiques effectués pour cette situation leur permet de donner du sens à cette expression, en envisageant des dispositifs permettant de la mener en classe.

Implicitement, ce travail permet également de préparer les étudiants à se situer dans le cadre de la géométrie déductive. En effet, tant que le langage n'est pas géométrique, que les objets géométriques créés et utilisés ne sont pas clairement identifiés, il est difficile de s'intéresser à leurs propriétés pour effectuer une démonstration par exemple.

Dans un second temps, en a3, les justifications sont détaillées, dans le but implicite de travailler la démonstration. Elles sont souvent incomplètes au départ : « on a tracé une médiatrice, donc le triangle est rectangle ». Mais si on demande aux étudiants pourquoi il s'agit bien d'une médiatrice, les habituels arguments sont : « parce qu'elle est perpendiculaire au segment et qu'elle passe par son milieu ». Petit à petit, il s'agit de mettre en place une méthodologie :

Méthodologie	Mise en œuvre dans la construction de la médiatrice à la règle non graduée et au compas
Repérage des caractéristiques de la construction	Le compas permet de tracer des points à une distance constante du centre du cercle .
	Les intersections de deux cercles de même rayon donnent des points équidistants des centres de ces cercles.
Repérage de l'objet géométrique construit, à partir de sa définition ou d'une propriété caractéristique	Deux points équidistants des extrémités d'un segment définissent la médiatrice de ce segment.
Repérage du théorème utilisé pour conclure	Une propriété de la médiatrice est qu'elle est perpendiculaire au segment, ce qui permet de conclure que le triangle est rectangle.

Les propriétés des objets ne sont pas lues sur le dessin, mais obtenues par un raisonnement hypothético-déductif basé sur :

- la traduction de l'utilisation des instruments en propriétés des objets géométriques construits : le compas permet d'obtenir des points vérifiant une relation de distance avec le centre, la règle non graduée d'obtenir tous les points alignés avec deux points donnés ;
- les définitions et théorèmes de la géométrie euclidienne.

[5] Extrait du tableau donnant des repères aux équipes pédagogiques pour organiser la progressivité des apprentissages. Repère pour le CM1, Bulletin Officiel n° 3 du 19 juin 2008, page 39.

[6] Ibid.

La seule différence avec le travail habituel de démonstration est la manière d'obtenir les hypothèses permettant d'initier le raisonnement : elles ne sont pas données dans un texte ou codées sur un dessin mais obtenues par traduction de l'utilisation des instruments. Il s'agit donc d'une première étape dans l'apprentissage de la démonstration. Dans le travail ultérieur sur la démonstration, les données initiales de l'énoncé remplaceront le repérage des caractéristiques de la construction.

Le repérage des caractéristiques de la construction, des définitions et théorèmes utilisés, est parfois difficile pour les étudiants, et souvent des informations sont seulement lues sur le dessin. Il s'agit alors à chaque fois d'expliciter que la caractéristique donnée n'est pas issue de la construction, mais de la lecture du dessin. Chaque prise d'information sur le dessin est ainsi repérée. Il s'agit notamment de montrer que, même dans une démarche que l'on veut déductive, il est facile de se faire « piéger » par le dessin et d'y lire des informations. C'est ce que Parzysz nomme la « contamination du su par le perçu » [Parzysz, 2002]. Il est indispensable que le formateur soit très vigilant pour que le travail se situe bien toujours dans le cadre de la géométrie déductive, et non dans celui de la géométrie perceptive à un moment ou à un autre.

L'accent est mis auprès des étudiants sur le fait que :

- Les procédures qu'ils utilisent de manière plus ou moins automatisée pour effectuer des constructions ont une justification mathématique.
- Les propriétés utilisées sont mobilisables pour tous mais le plus souvent non disponibles spontanément pour bon nombre d'étudiants.
- Le travail essentiel à effectuer n'est pas d'emmagasiner des connaissances nouvelles (ils sont généralement capables de citer, voire même d'énoncer, pratiquement tous les théorèmes classiques de géométrie plane), mais de développer leur raisonnement géométrique en créant des liens entre les constructions qu'ils savent effectuer et les propriétés sous-jacentes.

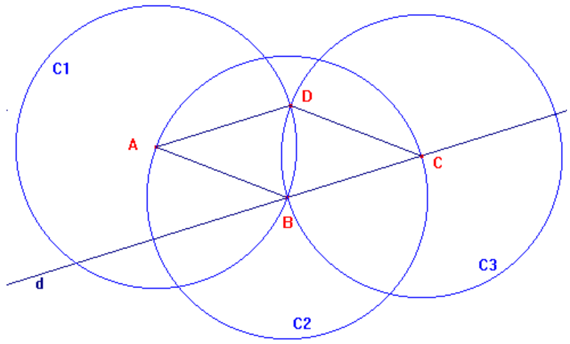
La même démarche est reprise pour les autres procédures proposées par les étudiants, puis d'autres constructions sont traitées suivant le même dispositif : tracer une hauteur dans un triangle quelconque, tracer une bissectrice, tracer un carré, tracer un hexagone, un octogone, etc.

2 Deuxième étape : choix de la propriété avant d'effectuer la construction

Une nouvelle contrainte est alors apportée dans la consigne. Il ne s'agit plus d'effectuer une construction, mais autant de constructions différentes que possible pour un même objet. Considérons par exemple la consigne : « soit une droite d et un point A n'appartenant pas à d. Tracer la droite parallèle à d passant par A. Trouver le plus de constructions différentes possibles ». Cette fois, les constructions possibles sont très nombreuses[7]. Comme lors des activités précédentes, l'accent est mis sur la formulation des scénarios de construction, puis sur la justification. Les hypothèses liées à la construction sont mises en évidence, puis les définitions et propriétés utilisées sont explicitées.

Considérons par exemple la construction suivante.

[7] Le lecteur trouvera de nombreuses constructions détaillées dans [Jore, 2006, pp. 389-397], disponible sur le net : http://www.ima.uco.fr/jore/



Scénario	Justification
Tracer un cercle C_1 de centre A, coupant la droite d. Soit B un des deux points d'intersection de C_1 et d.	
Tracer un cercle C_2 de centre B passant par A. Soit C un des deux points d'intersection de C_2 et de d.	On a donc : $BC = AB$
Tracer un cercle C_3 de centre C passant par B. Soit D le second point d'intersection de C_1 et C_3.	Et : $CD = BC = AD$
	ABCD a quatre côtés de même longueur AB. C'est donc un losange. Ses côtés opposés sont donc parallèles. Or B et C sont sur d. Donc la droite (AD) est parallèle à d et passe par A.

Pour cette procédure, on met en évidence que :

- la construction est basée sur la définition du losange comme quadrilatère avec quatre côtés isométriques ;
- une propriété du losange permet ensuite de conclure que les côtés sont parallèles.

D'autres constructions sont proposées par les étudiants et à chaque fois, le contrat pour le groupe est d'établir la justification.

En analysant les constructions proposées, on s'aperçoit que certaines ont été obtenues un peu par hasard, et le défi consiste alors à justifier pour s'assurer que « ça marche toujours ». D'autres procédures au contraire ont manifestement été mises en place en cherchant à appliquer une propriété ou un théorème particuliers. La règle du jeu change alors pour devenir :

> « Au lieu d'effectuer d'abord une construction puis de chercher à la justifier, choisissez **d'abord** une propriété ou un théorème dont la conclusion est que deux droites sont parallèles, **puis** mettez en œuvre une construction utilisant cette propriété ou ce théorème. Vous avez ainsi à l'avance la justification. »

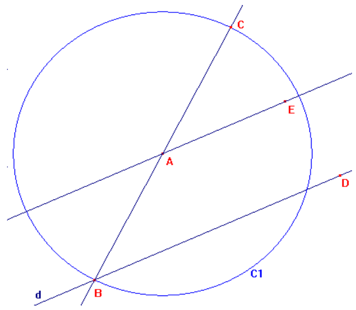
Le fait de demander des constructions différentes nombreuses a pour effet que cette nouvelle démarche se met en place quasiment d'elle-même.

A ce stade du dispositif, l'entrée par les figures, notamment les quadrilatères particuliers[8], a déjà été abondamment utilisée et c'est souvent plutôt l'entrée par les théorèmes qui est alors exploitée.

[8] Si on trace un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme, on sait que l'on a des droites parallèles.

Autrement dit, il s'agit de choisir un théorème qui permette une justification, puis de mettre en scène ce théorème pour élaborer une construction.

L'exemple est pris avec le théorème de la « droite des milieux ». Les étudiants sont invités à expliciter ce théorème - la « récitation » fonctionne en général très bien - puis à l'**utiliser** pour construire deux droites parallèles, puis une droite parallèle à d passant par A. On obtient par exemple la procédure suivante :



Scénario	Justification
Tracer un cercle de centre A qui coupe d en deux points. Soit B un de ces points.	$B \in d$
Tracer la droite (AB).	
Placer le point C à l'autre intersection de (AB) et du cercle.	A est donc le milieu de [BC].
Placer un point D sur d.	$D \in d$
Placer le milieu E de [DC] (on peut utiliser une construction de la médiatrice à la règle et au compas).	E est le milieu de [DC].
Tracer la droite (AE).	(AE) est la droite qui joint les milieux des côtés [BC] et [CD] du triangle BCD. Elle est donc parallèle au côté [BD]. C'est donc une droite parallèle à d passant par A.

Cette mise en situation permet aux étudiants de s'approprier ainsi les propriétés et théorèmes énoncés. De nombreux théorèmes sont ainsi revus et utilisés pour inventer et justifier des constructions. Petit à petit, les étudiants effectuent des démonstrations. L'accent est mis sur le fait que pour être valable, la justification ne doit pas prendre des arguments sur le dessin, mais dans le scénario, qui est ici une manière de formuler les hypothèses.

Cette étape permet donc de développer plusieurs compétences :

- rédiger un scénario de construction ;
- repérer des hypothèses et établir une démonstration ;
- **utiliser** un théorème pour mettre en place une construction.

Ces activités sont ainsi l'occasion de se réapproprier des connaissances et des compétences immédiatement utiles pour le concours. Les définitions et propriétés sont des outils pour résoudre les problèmes de géométrie qui leur sont présentés. Notons en outre qu'il s'agit ici de travailler les théorèmes sous un aspect fort utile dans les exercices de démonstration. La question posée : « quels sont les théorèmes dont la conclusion est « les droites (..) et (..) sont parallèles » ? » permet en effet aux étudiants de construire un répertoire de propriétés ou de théorèmes permettant de démontrer par exemple ici que deux droites sont parallèles, c'est-à-dire avec en entrée la conclusion plutôt que les hypothèses. Cette réorganisation des connaissances participe du passage des connaissances mobilisables aux connaissances disponibles.

V - CONCLUSION

Nous avons présenté des activités qui permettent simultanément de raviver des connaissances et des compétences géométriques variées immédiatement utiles pour le concours de recrutement de professeurs des écoles (définitions, propriétés, théorèmes, procédures de construction à la règle et au compas) mais aussi en situation de responsabilité auprès d'élèves du primaire (rédaction de scénarios de construction).

Plusieurs caractéristiques de ce travail peuvent être repérées :

- les définitions, propriétés, théorèmes sont des **outils** pour résoudre les problèmes posés.
- Le vocabulaire géométrique est utilisé en situation fonctionnelle.
- Une attention particulière est portée sur le passage des connaissances géométriques mobilisables à disponibles, au sens de Robert [1995], notamment par la conscientisation des connaissances en acte, c'est-à-dire des objets et propriétés utilisés, ainsi que par la réorganisation des connaissances qui est proposée.
- Il y a une articulation entre activité de manipulation et activité intellectuelle, avec développement de l'activité intellectuelle dans l'activité de manipulation par une contrainte d'anticipation des résultats produits par la manipulation.

Ces différents éléments doivent favoriser une meilleure appropriation des objets et propriétés de la géométrie plane de la part des étudiants, à la fois en termes de compétences disciplinaires, mais également didactiques.

Une autre suggestion a été faite lors du débat avec les participants pour travailler sur ce même objectif : exploiter les constructions avec la règle à bords parallèles. D'autres pistes sont par ailleurs à explorer pour améliorer la rédaction des scénarios de construction, en particulier l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique fournissant des scénarios de construction.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BOULE F. (1979). *Espace et géométrie : pour les enfants de 3 à 11 ans*. Cédic.

BOULE F. (2001). *Questions sur la géométrie et son enseignement*. Nathan.

DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères Irem* n°6. Janvier 1992. Ed. Topiques.

HOUDEMENT C., PELTIER M.-L. (2002). Présentation d'une situation de formation par homologie. La somme de plus grand produit. *Les cahiers du formateur de la Copirelem*. Tome 6. P. 78. Séminaire de Pau. 2002.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol 11. 175-194.

JORE F. (2006). *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

JORE F. (2008). Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier crayon et informatique, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* 2008, pp. 195-225.

PARZYSZ B. (2002). *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1*, Actes du 28ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres. Tours. Mai 2001. pp. 99-110. Ed. Presses Universitaires d'Orléans.

ROBERT A. (1995). *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques.* Tome I. Géométrie. Ed. Ellipses.

Programmes de l'école primaire. BO n°3 19 juin 2008.