

GÉOMÉTRIE ET CALCUL NUMÉRIQUE : UN REGARD HISTORICO-ÉPISTÉMOLOGIQUE ET DES RÉFLEXIONS THÉORIQUES POUR L'ANALYSE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES ET DES ENSEIGNANTS

Raquel BARRERA - CURIN

ATER, IUFM de Montpellier
Laboratoire de Didactique André Revuz
quellita@gmail.com

Résumé

À travers cette communication, je voudrais à la fois mettre en valeur les relations entre géométrie et calcul numérique mais aussi mettre en valeur de nouveaux éléments théoriques pour l'analyse du travail mathématique des élèves et des enseignants.

Tout d'abord, je présenterai un aperçu d'une étude de travaux épistémologiques, historiques et didactiques à propos de la relation entre nombres et géométrie rendant compte du rôle médiateur de la géométrie pour la construction du sens de certaines idées mathématiques.

Ensuite, je ferai référence à des réflexions théoriques cherchant des moyens pour l'analyse du travail mathématique des élèves dans le processus de construction du sens d'une idée mathématique. Je présenterai quelques exemples d'un processus visant la construction du sens de la multiplication en géométrie dans un contexte d'apprentissage collaboratif.

Finalement, je partagerai quelques questions se dégageant de ma recherche, autour de la formation et du travail mathématique des futurs enseignants. Ces questions se fondent sur une épistémologie permettant un regard particulier sur le travail mathématique des élèves et les rôles de créateur et de médiateur des enseignants.

Cet article est organisé en trois sections. Dans les deux premières sections, je présente quelques réflexions autour de la relation entre nombres, calcul et géométrie qui résultent de mes recherches sur des travaux historiques, épistémologiques et didactiques. De ces recherches se dégagent des éléments clés qui feront partie des fondements des propositions didactiques présentées brièvement dans la troisième section.

Dans la troisième section, je présente d'abord un aperçu d'une articulation théorique pour l'analyse du travail mathématique des élèves, dans le processus de rencontre d'idées mathématiques autour de nombre, calcul et géométrie. Par la suite, je mets en relation les résultats des réflexions historico-épistémologiques, didactiques et théoriques, dans la présentation de quelques exemples du travail mathématique des élèves rendant compte d'une rencontre géométrique de la multiplication. Dans la dernière partie de cette section, je présente quelques réflexions autour de la formation de futurs enseignants. Ces réflexions portent principalement sur l'importance de favoriser en formation un travail réflexif autour de l'épistémologie et de la didactique des mathématiques. L'idée d'un enseignant créateur et médiateur serait essentielle dans le cadre d'une formation qui lui permet de proposer des espaces de travail mathématiques afin de favoriser chez ses élèves l'émergence et la rencontre des mathématiques.

I - UN REGARD HISTORICO—ÉPISTÉMOLOGIQUE SUR LA RELATION ENTRE GÉOMÉTRIE ET CALCUL

S'intéresser à la notion de multiplication et à ses relations avec la géométrie dans l'histoire ainsi qu'aux études rendant compte d'une analyse épistémologique et didactique, c'est-à-dire d'une

analyse portant sur cette idée mathématique visant la détermination des conditions de sa compréhension (Sierpiska, 1991), est une réflexion qui me semble nécessaire et qui a constitué le premier pas méthodologique pour le démarrage de ma recherche. Je me suis notamment intéressée aux liens entre les significations de la multiplication et la géométrie qui ont été mentionnés ou construits dans l'histoire des mathématiques. Ce sont bien des significations de la multiplication – dont je parle tout d'abord dans un sens plutôt naïf fondé sur leur reconnaissance dans des travaux didactiques précédents (Conne & Lemoyne, 1999 ; Davis & Simmt, 2006 ; Douady, 1986) –, et leur représentation en géométrie, que je cherche à contextualiser d'un point de vue historique et épistémologique. La prise en compte de ce contexte historique et épistémologique enrichit le regard qu'on peut porter sur les contenus mathématiques en question lors de la conception de situations d'apprentissage. Je reviendrai sur cet aspect dans la deuxième section de cette communication.

1 Quelques constats historiques sur les liens entre calcul et géométrie à partir de la représentation de grandeurs

Pour Reyneau, la Géométrie, Science Mathématique Générale, a pour objet la représentation de toutes les grandeurs, et même s'il paraît qu'elle a pour objet particulier les rapports des trois dimensions du corps, des longueurs, des surfaces et des solides, elle peut aussi exprimer toutes les grandeurs particulières et sensibles en les contenant « éminemment » (Reyneau, 1739, p. xviii). En revanche, ce sont l'Arithmétique et l'Algèbre qui constituent la *Science du Calcul des Grandeurs* puisque, permettant de faire des opérations semblables, elles ont une liaison naturelle. La Science du Calcul des Grandeurs contient les Éléments et comprend toutes les mathématiques. Pourrait-on dire que c'est ainsi que commence la divergence entre le calcul et le visuel ? En fait, non. Je dirais que ceci n'est qu'une vision précédente de ce que Bachelard a appelé plus tard la formation de l'esprit scientifique : « sur toutes les questions, pour tous les phénomènes, il faut passer d'abord de l'image à la forme géométrique, puis de la forme géométrique à la forme abstraite, poursuivre la voie psychologique normale de la pensée scientifique » (Bachelard, 1938, p.10). C'est un exemple de l'origine des recherches de la vérité dans les perceptions, là où nous pouvons voir qu'« un nombre entier est celui qui contient exactement l'unité plusieurs fois » (Reyneau, 1739, p. xxvi) et c'est un voyage vers l'acquisition d'un *jugement* (quand c'est l'esprit qui juge un rapport comme vrai) jusqu'au développement du raisonnement.

En suivant l'œuvre de Reyneau, beaucoup de références nous parlent de la richesse du calcul littéral et numérique, sans nécessairement parler d'un lien explicite entre calcul et géométrie. On voit ainsi que ce n'est pas par hasard si, aujourd'hui, le calcul renvoie toujours au numérique. En revanche, je partage son assertion de ne pas permettre un calcul aveugle,

« comme des artisans qui suivent des Règles dont ils ne savent pas les raisons [...] ; [ceux qui veulent apprendre les Mathématiques] doivent connaître en même temps les raisons sur lesquelles est fondé le calcul. [...] [Ils doivent voir clairement] que ces calculs étant appliqués aux figures de la Géométrie, représentent les rapports qui sont entre les lignes contenues dans ces figures, ceux qui sont entre les parties de ces figures comparées entre elles ou avec les figures entières dont elles sont les parties. » (Reyneau, 1739, p. lii)

En outre, les exemples trouvés dans l'histoire et qui mettent en relation calcul et géométrie rendent compte de l'importance des grandeurs géométriques mesurées (Bkouche, 2009b) auxquelles on associe une évolution des connaissances comme les notions de proportionnalité et de linéarité ainsi que la construction d'une « théorie des grandeurs indépendante de la mesure » (Bkouche, 2009, p. ix).

L'origine de la relation entre géométrie et calcul est ainsi racontée par l'histoire que j'évoque, ici d'une façon très simplifiée. Je reprends la phrase de Rudolf Bkouche lorsqu'il dit que « le calcul littéral a été inventé pour le calcul des grandeurs » (Bkouche, 2009b, p. xi). Puis en suivant certains faits historiques dont Bkouche rend compte, on voit qu'encore plus tard même Leibniz « a cherché désespérément un calcul géométrique, c'est-à-dire portant directement sur les objets géométriques,

ensuite Poncelet et les géomètres projectifs du XIX^{ème} siècle » (Bkouche, 2009b, p. xii).

Je me suis ainsi dirigée vers une recherche historique encore plus spécifique et je me suis notamment centrée sur les relations entre calcul arithmétique et géométrie jusqu'à ce que le calcul des grandeurs ait effectivement été représenté visuellement, en particulier d'une façon géométrique.

2 Le théorème de Thalès au cœur de la relation entre nombres et géométrie

Un exemple fondamental de la Grèce ancienne qui rend clairement compte d'une relation entre le numérique et le géométrique est le théorème de Thalès. En suivant l'œuvre de Bkouche (1994), on trouve une belle référence à cela :

« Le théorème de Thalès (ou théorème de lignes proportionnelles) énonce des conditions de proportionnalité de segments ; en cela il est au cœur de la relation entre géométrie et numérique, que ce soit à travers la mesure ou que ce soit avec la méthode des coordonnées et la géométrie analytique. » (Bkouche, 1994, p. 1)

Proposition trouvant son origine dans la vie *réelle* via des rapports de mesures, ce théorème possède trois types principaux d'énoncés : les rapports d'abscisses, de projection et d'homothétie (Brousseau, 1995). Ainsi, on est face à un théorème qui a évolué à travers le temps jusqu'à avoir été défini comme un théorème affine et non pas métrique, étant donné que ses hypothèses et sa conclusion sont conservées par des applications affines. Les relations données par ce théorème peuvent se rapporter à des longueurs, des mesures algébriques ou des vecteurs. Finalement, je n'ai qu'à rappeler les deux éléments clés pour chacun des énoncés du théorème de Thalès : le parallélisme de droites et les proportions, c'est-à-dire les proportions et la géométrie. Bkouche (2009b), dans son *Histoire du calcul, de la géométrie à l'algèbre*, rend compte de l'existence de grandeurs et de la proportionnalité avant toute mesure, de même qu'il souligne que la mesure est une proportionnalité. Par la suite, dans cet ouvrage, on trouve, associées au théorème de Thalès, les propriétés mentionnées ci-dessus, où l'extension de la validité de leurs rapports inclut non seulement les fractions positives, les réels positifs et les quantités négatives mais aussi le rapport d'abscisses en lien avec de nouvelles définitions des opérations.

Compte-tenu de ce qui précède, j'ai eu une réponse à la question portant sur une relation entre calcul et géométrie dont la solution me permet de donner un sens à une idée mathématique, la multiplication, en la géométrisant. De fait, le cœur de cette recherche portant sur les relations entre calcul et géométrie au sein de l'épistémologie et l'histoire a acquis une existence puisque, ce que les relations dans le théorème de Thalès représentent, c'est bien la multiplication géométrisée pour différents ensembles de nombres.

Dans la section suivante, je montrerai comment je reprendrai ces idées comme fondement de certaines propositions didactiques qui forment le cœur d'une partie de la phase expérimentale de la recherche.

II - UN REGARD ÉPISTÉMOLOGICO-DIDACTIQUE SUR LA RELATION ENTRE CALCUL ET GÉOMÉTRIE : SIGNIFICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU PRODUIT POUR DIFFÉRENTS ENSEMBLES DE NOMBRES

Mon intérêt pour les travaux historico-épistémologiques et didactiques, portant sur les liens entre représentations géométriques et calcul numérique, enrichit une analyse didactique actuelle des processus mettant en relation la multiplication et certaines de ses significations à travers la géométrie. De ce fait, l'acceptation d'une mise en relation entre ces deux analyses permettrait, d'une part, que les idées mathématiques en jeu se déprennent de leur simplicité (Artigue & Robinet, 1982) et, d'autre part, que la construction de futurs processus d'enseignement favorise la rencontre de significations de ces idées. Dans cette section, je ne présenterai qu'un aperçu de cette analyse.

Cette recherche a été un aller-retour permanent entre nombres et opérations et mon intérêt pour les représentations géométriques d'une opération mathématique s'inscrit bien dans une conception dynamique du nombre (Glaeser, 1981) :

« Il est clair, en effet, que si l'on conçoit toute notion mathématique comme devant être dérivée de la perception, le nombre négatif ne saurait se justifier puisqu'il correspondrait à une absence de perception, ou moins encore, et qu'il n'y a pas de degrés dans les perceptions nulles [...] la nature essentielle du nombre n'est ni statique, ni perceptive, mais bien dynamique et liée à l'action elle-même, intériorisée en opérations. » (Piaget, 1949, p. 110-115).

Alors, comment travailler ce caractère dynamique du nombre et donc des opérations ?

Ce questionnement m'a amenée petit à petit à vouloir mettre en valeur le fait que les opérations mathématiques ne sont pas seulement des outils au service de nos besoins de calcul : elles sont elles-mêmes porteuses de significations qui méritent d'être rencontrées.

Par exemple, en ce qui concerne la multiplication des nombres rationnels, les travaux de Brousseau sont déjà connus: il y parle du sens du produit de deux fractions. Dans le module dix de sa thèse où il décrit la mise au point collective faite par l'enseignante dans la situation concernant la multiplication par une fraction, il explicite dans une remarque que « le sens du produit de deux fractions est assez différent du sens du produit de deux nombres » (Brousseau, 1996, p. 217), lequel peut seulement être validé à travers « l'examen détaillé des propriétés formelles de cette nouvelle opération et la comparaison avec les propriétés déjà connues de la multiplication » (Brousseau, 1996, p. 217). En faisant référence à la définition du produit de deux fractions, notamment à la construction de cette *nouvelle multiplication*, il ajoute le paragraphe suivant qui fait clairement référence au sens de cette opération en termes d'agrandissements et réductions :

« Y-a-t-il une addition qui pourrait remplacer l'opération 3×2 ? Vous vous doutez que c'est dans les agrandissements et les rapetissements (et pas dans l'addition) qu'il faut chercher des exemples pour construire cette nouvelle multiplication. » (Brousseau, 1996, p. 218)

Outre le travail de Brousseau, un travail très intéressant est celui développé par Douady (1986) qui propose des interactions entre les cadres numérique, géométrique et graphique « pour faire progresser les connaissances sur les nombres » (Douady, 1986, p. 1). D'après Douady,

« parmi toutes les grandeurs physiques qu'on est susceptible de mesurer, les longueurs et les aires jouent un rôle privilégié dans l'apprentissage [...] car certaines d'entre elles au moins modélisent des objets matériels que les enfants peuvent manipuler ou construire facilement. » (Douady, 1986, p. 22)

Elle soutient que la correspondance grandeur-nombre est le fait qui va permettre l'extension du produit de deux entiers au calcul du produit de deux fractions. De plus, la mesure d'aire à l'aide d'une représentation géométrique devient un élément *concret* essentiel pour donner du sens à ce produit, car cette représentation rendra possible une perception de la commutativité de la multiplication, laquelle serait moins accessible si l'on ne se situe que dans le cadre numérique. Je présente donc un exemple (Douady, 1986) qui porte sur certaines représentations géométriques d'une multiplication numérique. Ces représentations permettraient d'approcher l'idée d'aire de fractions d'un rectangle, en donnant un accès visuel à la commutativité du produit tel que je viens de le mentionner plus haut et à sa correspondance avec l'idée de réduction de l'aire de l'unité, dans ce cas, par l'opération de $\frac{2}{3}$ sur $\frac{3}{4}$ (fractions des mesures des côtés d'un rectangle).

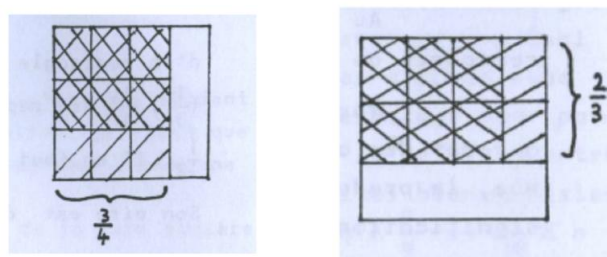


Figure 1. Représentations géométriques du produit de deux fractions (Douady, 1986)

Il me semble important de souligner que la mesure fait bien partie des éléments donnant du sens à la multiplication, de même que l'existence d'un opérateur : le terme *opérateur* définit les nombres naturels et les fractions opérant sur des espaces mesurables. En revanche, bien que la mesure soit valide pour la représentation géométrique des nombres rationnels, ce qui apparemment pourrait faciliter le fait de donner une signification géométrique à la multiplication de ces nombres, elle ne s'applique pas aux *quantités négatives*. Ces idées, qui peuvent être des nouveaux nombres, comme l'a dit Glaeser en parlant des nombres relatifs, « ne sont plus découverts, mais inventés, imaginés » (Glaeser, 1981, p. 337). De ce fait, la recherche du bon modèle géométrique de la multiplication de nombres relatifs est toujours en cours et on sait déjà qu'il n'y a pas un modèle approprié qui prenne en compte l'interprétation géométrique de toutes les propriétés de la multiplication. Néanmoins, l'abstraction de la *quantité négative* n'existe plus dès que son interprétation est liée à l'idée de direction (Flament, 2003, p. 170). De ce fait, en suivant Argand (1874), même une représentation géométrique de la multiplication des entiers négatifs devient possible puisque ces *quantités* sont maintenant traitées en termes de sens et de direction :

« Mais puisqu'on a trouvé[...] que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*. » (Argand, 1874, p. 6)

En revanche, cette représentation ne saurait exister que si l'on décide de « travailler [dans une certaine] ambiguïté » (Bkouche, 1994, p. i). Claude-Paul Bruter, évoquant la multiplication, affirme qu'addition ou multiplication sont des transformations :

« La notion de transformation, qui est associée à celle d'évolution, joue un rôle capital dans tous les règnes de la nature, et, par conséquent dans toutes les sciences. Elle est évidemment présente, en mathématiques, dès qu'il y a opération. » (Bruter, 2000, p. 84)

Ces transformations peuvent être internes ou externes et « peuvent faire éclater le cadre sur lequel elles opèrent, et déboucher sur des extensions des objets anciens, voire sur des structures nouvelles par bifurcation, par métamorphose » (Bruter, 2000, p. 84). De ce fait, l'action ou les opérations sur certaines des idées mathématiques travaillées à un niveau élémentaire de l'enseignement seront nécessairement justifiées dans un niveau supérieur. De fait, c'est la multiplication de nombres complexes qui possèdera tous les outils pour se rendre visuelle et exprimable librement à travers la géométrie dans ce contexte spécifique que nous appelons *transformation*. Cela puisque l'extension de la définition des opérations pour les nombres complexes est liée à la représentation des quantités imaginaires par des vecteurs ou des segments de droite de Wessel (1897) :

« le respect de la structure propre à des nombres arithmétiques dans un premier temps, puis étendue à des 'segments', nous autorise donc à appeler 'somme' ou 'multiplication' des opérations s'effectuant sur des objets. » (Flament, 2003, p. 115-116).

La multiplication de segments de droite de Wessel, comporte les mêmes propriétés de construction que la multiplication de Descartes (1637) (figure 2), qui consiste à multiplier des segments qui ne représentent pas de grandeurs 'positives' ou 'négatives'. Ces propriétés trouvent leur fondement dans ce qu'on connaît aujourd'hui comme le théorème de Thalès dont j'ai parlé dans la section précédente comme étant le cœur des relations entre géométrie et calcul.

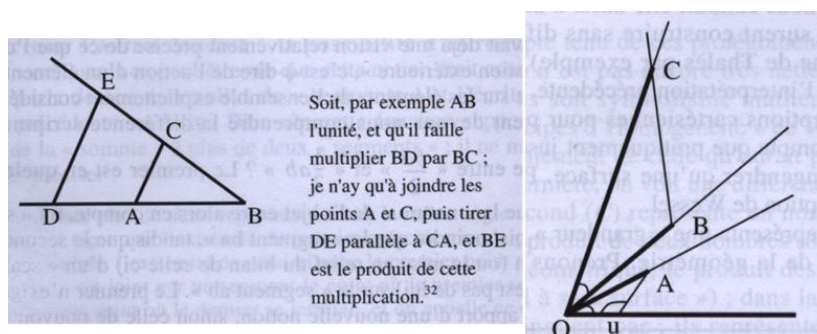


Figure 2. À gauche, multiplication de Descartes ; à droite, multiplication de segments de droites de Wessel

L'analyse des propriétés des représentations géométriques de la multiplication, présentées dans la figure 2, m'a conduit à vouloir mettre en valeur ces représentations qui peuvent représenter le produit pour différents ensembles de nombres (par exemple, entiers naturels, fractions et nombres complexes) et à les faire vivre dans un contexte d'apprentissage où elles pourraient favoriser la visualisation du produit comme une transformation dans le plan. L'idée de *repenser* les représentations classiques du produit donne une force supplémentaire à l'intention didactique d'articuler géométrie et calcul dans la rencontre du sens de la multiplication.

III - UNE ARTICULATION THÉORIQUE POUR L'ANALYSE DE LA MISE EN RELATION ENTRE MULTIPLICATION ET GÉOMÉTRIE : ESPACE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET MÉDIATION SÉMIOTIQUE

1 L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses

Mon intérêt à analyser le processus de mise en relation entre nombres et géométrie au niveau de l'apprentissage des élèves, m'a conduit à vouloir observer ce qui se passe à l'endroit où l'on peut voir en action le travail mathématique associé à l'œuvre de celui qui le fait (Kuzniak, 2010) : dans une sorte d'espace qui permettrait de situer le travail mathématique des élèves. Ainsi, mon approche théorique principale pour étudier les relations établies par les élèves entre le numérique et le géométrique dans le processus d'apprentissage d'un contenu mathématique, concerne les travaux de Kuzniak portant sur l'Espace de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2012).

L'articulation des processus cognitifs définis par Duval (1998) avec les composantes du plan épistémologique d'un ETM (voir figure 3) rend compte d'une relation bilatérale entre les éléments constituant les deux plans de cet espace, grâce à l'action des différentes genèses, dont une sémiotique.

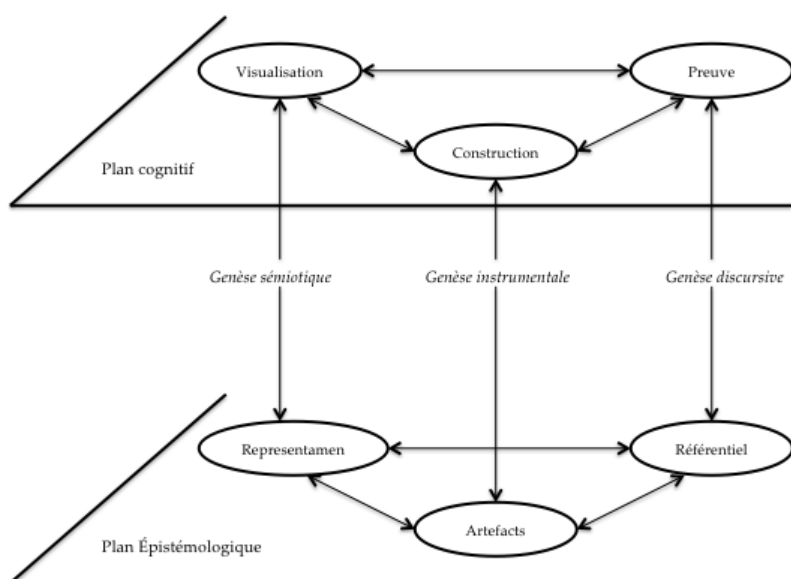


Figure 3.
Espace de Travail
Mathématique et ses genèses
(Kuzniak, 2012)

Par exemple, dans le plan épistémologique, nous pouvons retrouver différentes représentations de la multiplication et les divers savoir-faire concernant le calcul d'un produit. Dans le plan cognitif nous retrouvons la visualisation desdites représentations, visualisation qui donnerait accès, par exemple, à la rencontre d'un sens géométrique du produit. La genèse sémiotique serait ainsi le processus qui favoriserait la mise en relation entre la représentation et la visualisation d'une idée mathématique, dans notre cas, de la multiplication. De ce fait, pour mieux étudier le travail

mathématique des élèves interagissant entre les deux plans de l'ETM, j'ai initié un travail d'articulation théorique me permettant d'approfondir l'étude et l'analyse de ces interactions.

Je présenterai donc dans la subsection suivante quelques éléments qui viennent s'articuler à l'ETM et qui élargissent le regard de ce qui se passe dans l'articulation des plans épistémologique et cognitif dans le processus d'émergence et rencontre de sens au milieu d'un travail collaboratif entre élèves et enseignant en classe de mathématique.

2 L'Espace de Travail Mathématique et la médiation sémiotique

Mon intérêt pour l'aspect social des processus d'apprentissage, ainsi que pour l'étude des processus de médiation sémiotique (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008) favorisant la rencontre collective d'une idée mathématique, m'a conduit à une première élaboration d'un cadre théorique articulant des éléments cognitifs et didactiques (Barrera-Curin, 2012). Cette approche s'intéresse particulièrement à des interprétations métaphoriques des connaissances mathématiques, à des utilisations médiatiques de ces interprétations ainsi qu'à la construction de nouvelles connaissances jusqu'à ce que leur *compréhension* devienne *explicitable* et *interprétable* grâce à sa verbalisation dans une situation de *communication*. Des éléments clé dans cette approche sont la visualisation déclenchée par des représentations géométriques, l'importance de prendre en compte la complexité des situations d'apprentissage qui impliquent des changements de cadres mathématiques et de registres de représentations sémiotiques ainsi que le travail collaboratif. L'Espace de Travail Mathématique a ainsi été situé dans un contexte socioculturel de l'apprentissage, et dans ce contexte, l'action de médiateurs, au niveau de ses genèses, est essentielle. Ces médiateurs peuvent être de natures différentes. D'une part, ils sont des signes, notamment des représentations géométriques, lesquelles sont censées pouvoir *conduire* le travail mathématique des élèves. D'autre part, ils résultent d'un processus de collaboration social entre élèves et enseignant. Ces éléments articulés à l'ETM sont devenus des fondements de mes propositions didactiques et viennent confirmer une nouvelle conception de l'acte d'enseigner les mathématiques : les mathématiques ne se reçoivent pas, ne se recopient pas du tableau ; les mathématiques se font, se font ensemble dans la collaboration entre élèves et enseignants.

De ce fait, des éléments théoriques associés à la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) et à une conception participationniste de l'apprentissage de mathématiques (Radford, 2004 ; Sfard, 2008) ont été intégrés aux composantes d'un espace de travail mathématique (voir figure 4).

Ce faisant, j'ai voulu mettre en valeur les potentialités médiatrices qu'ouvrent les échanges entre différents individus qui intentionnellement collaborent pour accomplir une tâche ou pour arriver au but visé (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008) dans le processus de construction d'un concept mathématique.

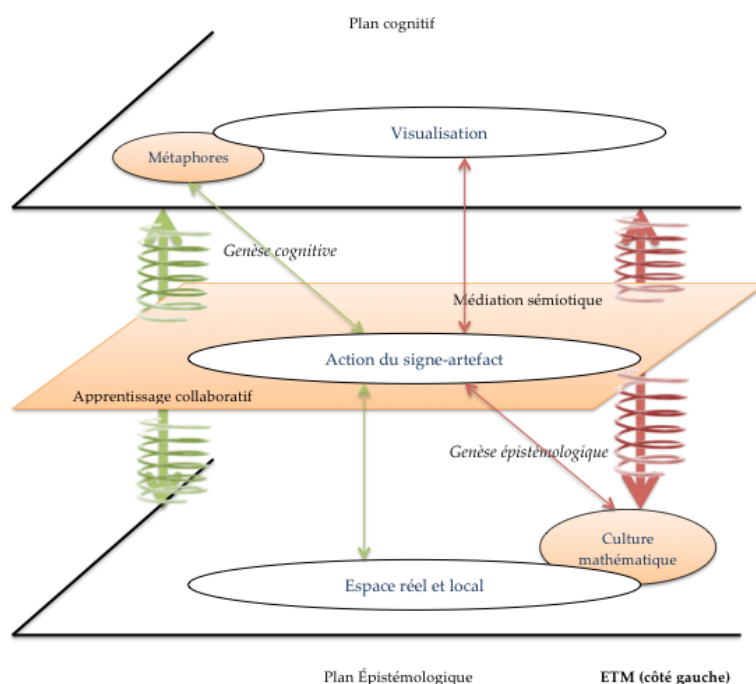


Figure 4. Schéma représentant l'articulation théorique ETM et Médiation Sémiotique. Côté gauche de l'Espace de Travail Mathématique

De plus, en parlant de l'importance accordée aux signes en tant que médiateurs dans le processus complexe visant la formation d'un concept (Vygotsky, 1934/1997), Noss et Hoyles (1996) parlent de « *situated signs to describe how learners construct mathematical ideas by drawing on the webbing of a particular setting, which, in turn, shapes the way the ideas are expressed*¹ » (Noss & Hoyles, 1996, p. 122). Ce dernier point, pourrait être associé à un espace de *visualmediation* où des médiateurs visuels sont définis comme des fournisseurs d'images permettant aux participants d'identifier l'objet en question en coordonnant la communication (Sfard, 2008).

3 L'Espace de Travail Mathématique et la médiation sémiotique

Je vais présenter des exemples du travail mathématique des élèves dans un processus d'apprentissage collaboratif visant la construction des significations géométriques de la multiplication. Il s'agit de deux situations² travaillées par des élèves de différents niveaux scolaires (classes de Quatrième et TS) à travers lesquelles je cherchais à étudier leur travail mathématique dans le processus de rencontre du sens géométrique de la multiplication.

3.1 Multiplication de fractions

La première situation porte sur le sens du produit de deux fractions. Le travail collaboratif entre élèves et enseignant constitue un élément fondamental de la situation. Les échanges, les allers-retours questionnant l'énoncé devraient conduire les élèves vers les réponses attendues *a priori* (Barrera-Curin, 2011).

Le travail mathématique des élèves s'est déroulé autour de la proposition suivante :

Comment peut-on visualiser que cette assertion est correcte ?

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \approx \frac{1}{3}$$

¹ « Pour décrire comment les apprenants construisent des idées mathématiques en dessinant sur la toile d'une place en particulier, ce qui détermine comment les idées sont exprimées à leur tour » (Ma traduction. Noss & Hoyles, 1996, p. 122).

² Pour une version détaillée de ces situations d'apprentissage et de leurs analyses respectives voir Barrera-Curin, R.I. 2011 & 2012.

Le rôle puissant qu’Arcavi attribue à la visualisation géométrique a été très inspirateur dans la conception de cette situation puisqu’elle favoriserait la *rencontre* du sens du produit de deux fractions. Or la prise en compte d’une référence faite par Arcavi (2003) à la figure que Mabry (1999) a proposée comme représentation visuelle de la somme d’une série de puissances d’un quart, m’a amenée il y a quatre ans, à commencer la recherche sur le rôle médiateur de la géométrie dans le processus visant la rencontre du sens de la multiplication.

Les idées mathématiques en jeu, la multiplication de fractions et la représentation géométrique d’un produit de fractions, correspondent à des outils explicites pour la résolution du problème posé. Ces outils sont définis d’après Douady « comme les notions qu’un élève met en œuvre, en pouvant les formuler et dont il peut justifier son emploi » (Douady, 1986, p.10). Ainsi, une image mentale (Douady, 1986, p. 11) ou une reconnaissance métaphorique du produit des fractions permettrait l’accès à une de ses représentations géométriques. Cette dernière est ainsi considérée comme une formulation différente d’un même résultat mathématique. De ce fait, les élèves pourraient valider leur réponse à la question « Comment peut-on visualiser que cette assertion est correcte ? » en formulant des justifications. La réponse à valider correspondrait à la représentation géométrique d’une des significations du produit de fractions. D’un point de vue cognitif, les traitements visuels de composition et décomposition à faire sur les figures produites permettraient de les unifier et de les accepter finalement comme une visualisation de l’expression arithmétique-algébrique donnée. Dans ce cas, le traitement correspond à une séquence de figures superposées dont le résultat attendu pourrait correspondre à l’exemple ci-dessous :

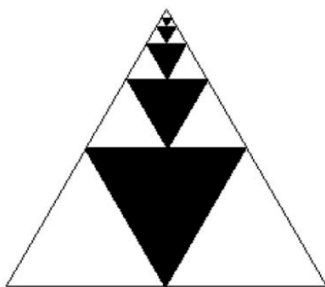


Figure 5. Composition figurale proposée par Richard Mabry comme une représentation visuelle de la série correspondant à la somme de puissances d’un quart

Le travail mathématique des élèves a rendu compte d’une mise en évidence de la signification de la multiplication de fractions comme « une partie d’une autre » et cela a été possible grâce à l’action d’une genèse sémiotique favorisant un processus de changement de registre de représentation suivi d’un traitement dans le registre d’arrivée. Les partages figuraux, permettent donc de visualiser l’expression numérique de départ (figure 6).

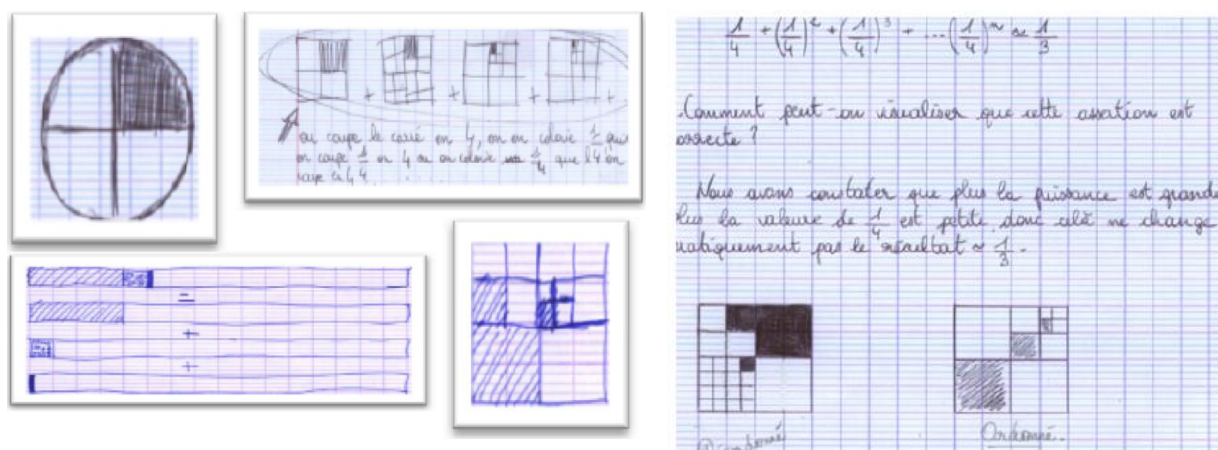


Figure 6. Compositions figurales proposées par des élèves d'une classe de quatrième comme une représentation visuelle de la série correspondant à la somme de puissances d'un quart

Nous pouvons déterminer le travail mathématique des élèves soit par une entrée de type épistémologique, grâce à la mise en œuvre des connaissances mathématiques préalables (connaître ce que multiplier deux fractions signifie), soit par une entrée de type cognitif, résultant d'un processus de recherche émergeant de la question posée et conduisant les élèves, petit à petit, à la visualisation du produit et donc à la découverte d'une de ses significations géométriques.

J'ai conclu, qu'une *manipulation* géométrique de la multiplication de fractions, impossible en restant dans le cadre numérique, a permis aux élèves d'*approcher* une des significations de la multiplication de fractions où les fractions sont des opérateurs produisant la réduction de l'aire de l'unité. L'émergence des représentations géométriques, comme un mode de production non discursive, rendant compte d'une interprétation de ce qu'est multiplier deux fractions de façon consécutive, a mis donc en évidence la *rencontre* de la multiplication de fractions par des élèves.

3.2 Multiplication pour différents ensembles de nombres

Les résultats obtenus (Barrera-Curin, 2011) et l'analyse du travail mathématique des élèves résultant de cette première expérimentation m'ont motivée à approfondir l'étude de cette relation entre nombres et géométrie et je me suis fortement intéressée à continuer l'étude du travail mathématique des élèves dans un contexte de collaboration et de médiation sémiotique.

De ce fait, une deuxième situation (Barrera-Curin, 2012) a été mise en place dans plusieurs collèges ou lycées d'Ile de France. Cette fois, je me suis posée la question suivante : pourrions-nous faire ressortir des justifications intuitives liées aux transformations géométriques en utilisant la construction géométrique de la multiplication de Descartes (cf. Section 2), pour introduire ou réinvestir des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?

Nous avons situé les activités proposées aux élèves à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique où la signification des idées mathématiques devait émerger grâce à l'action d'une genèse cognitive. Nous attendions encore l'émergence d'une visualisation géométrique de significations géométriques de la multiplication. Cette fois et à la différence de la situation antérieure, le processus de visualisation se produirait grâce à une genèse sémiotique où l'action d'un signe médiateur (cf. section 2, une configuration du théorème de Thalès) favoriserait la construction géométrique du sens de l'idée mathématique en jeu. Cette genèse sémiotique à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique, fait bien partie d'une activité qui suppose des enjeux sémiotiques complexes (D'Amore et Faldino, 2008) associés au processus de changement de registre de représentation.

La situation a été mise en place dans quatre classes de Terminale S et dans quatre classes de Quatrième. Dans chaque classe, la situation a été intégrée à la progression des enseignants. Les élèves ont eu à résoudre une suite de quatre ou cinq questions proposant une approche géométrique de la multiplication de nombres de différentes natures.

Dans un premier temps, les élèves devaient effectuer la construction géométrique du produit de deux nombres réels dans le cadre proposé par Descartes dans sa *Géométrie* (1637).

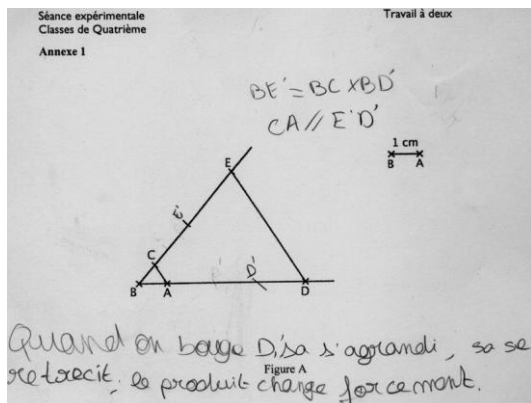
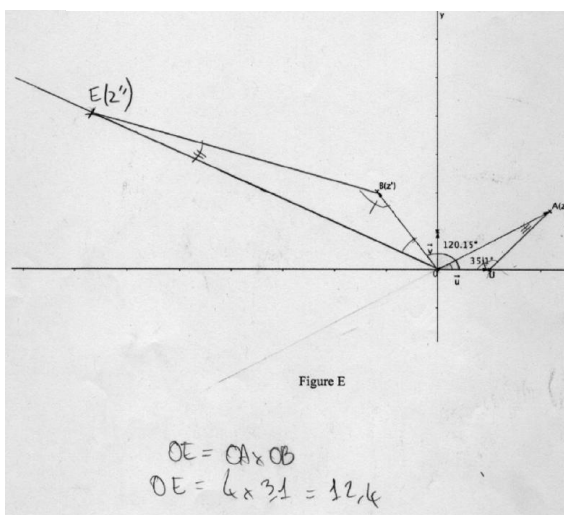
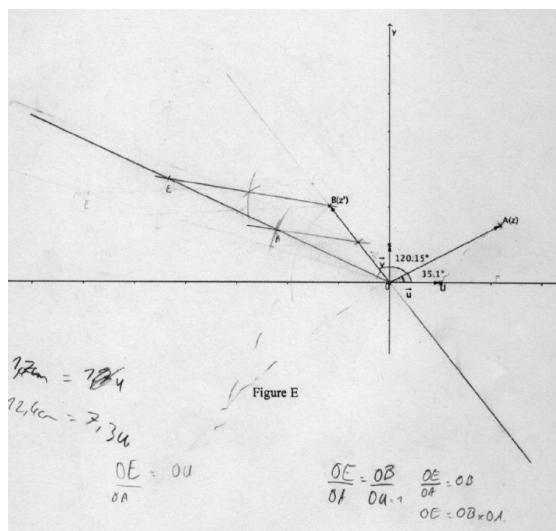


Figure 7. Représentation géométrique de la multiplication d'un nombre naturel par une fraction positive, classe de Quatrième, suite à l'analyse de la multiplication de Descartes



En m'appuyant sur ces activités, mon but était de décrire des possibilités qu'ont des élèves de rencontrer les significations géométriques de la multiplication à partir de l'analyse de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes. Cette représentation géométrique représente aussi une icône du théorème de Thalès dont la place reconnue dans l'enseignement français m'a permis de lui attribuer le rôle d'un signe-médiateur ou signe-artefact (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008), destiné à être interprété et à évoluer jusqu'à être visualisé comme une représentation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres.

Pour décrire le rôle de la géométrisation dans l'approche de la multiplication chez les élèves, j'ai étudié leur manière de résoudre des problèmes de construction géométrique mettant en jeu la multiplication de nombres de différentes natures. Petit à petit j'ai été amenée à répondre à une question qui articule mes recherches dans les contextes épistémologique, théorique et expérimental : « *Y a-t-il des interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM approprié par les élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication ?* »

L'idée que le produit de deux nombres quelconques correspond à une transformation dans le plan a été déterminée et certaines représentations données par les élèves en rendent compte. Les interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'Espace de Travail Mathématique des

élèves sont très diverses mais dans certains cas, il a été possible de percevoir des liens explicites entre les différentes composantes de la situation proposée : multiplication de Descartes, théorème de Thalès, propriétés géométriques de la multiplication de deux nombres (cf. figures 7 et 8). Le travail mathématique des élèves a été observé et analysé sous le regard de mes choix théoriques, ce qui m'a permis de déterminer que mes *a priori* n'étaient pas toujours présents, pas toujours explicites dans le travail des élèves. Néanmoins, dans le cas où l'émergence de *ce sens* géométrique du produit a bien pu être déterminé, cela ne pouvait que résulter d'un processus de médiation sémiotique dans lequel les élèves s'étaient permis de s'immerger au milieu d'un travail collaboratif fort entre eux et quand cela a été possible, des interactions avec l'enseignant³.

4 Le rôle créateur et médiateur de l'enseignant : proposer un ETM et faire évoluer le travail mathématique des élèves

La diversité et la richesse du travail mathématique des élèves à partir de la proposition d'un seul ETM m'a amené à réfléchir sur le rôle de l'enseignant dans la proposition des espaces de travail mathématiques ainsi qu'à la façon dont il est censé pouvoir les gérer une fois que les élèves se les sont appropriés.

Le travail de l'enseignant ne se réduit pas à vérifier la mise en évidence par des élèves de ce qui était attendu *a priori*. Il s'agit de faire des mathématiques ensemble. Pour cela, je ne peux que souligner l'importance de la médiation de l'enseignant dans tout processus d'apprentissage-enseignement ainsi que de l'importance de sa connaissance de la richesse et du potentiel des idées mathématiques sur lesquels il souhaite travailler avec ses élèves. Ces médiations et connaissances sont donc indispensables pour faire progresser le travail mathématique de la classe. Bien sûr, en plus de penser l'existence de cette médiation, il faudrait réfléchir au moyen de la faire exister de façon réelle dans l'action quotidienne des enseignants. Cette réflexion n'a pas de réponse simple. Une première proposition serait que l'enseignant rentre à l'intérieur des espaces mathématiques que se sont appropriés les élèves ; il doit être là, il doit jouer un rôle dans la construction du sens des idées mathématiques, il est là pour construire avec les élèves, pour faire évoluer le travail mathématique des élèves :

"The object of knowledge is filtered by the technology of the semiotic activity [and] knowledge is culturally mediated"⁴. (Radford, 2004, p. 24)

Dans le cas des situations présentées précédemment, il aurait fallu renforcer le rôle médiateur de l'enseignant dans chacune des classes et ainsi avoir un meilleur accès au travail mathématique des élèves. Mais comment l'enseignant pourrait-il participer de plus près au travail mathématique des élèves ? Quel grand défi pour un enseignant travaillant dans une classe ordinaire !

Compte-tenu de ce qui précède, les réflexions portant sur le rôle créateur et médiateur de l'enseignant m'ont conduit à des questionnements autour de la formation de futurs enseignants : des enseignants qui devront créer des situations d'apprentissage, proposer des espaces de travail mathématiques et gérer la diversité des appropriations de ces espaces.

Forte de ces réflexions, et en tant que formatrice à l'IUFM de Montpellier pendant un an, j'ai décidé de poser deux questions à mes étudiants. Le choix de ces questions trouve sa justification dans mon intérêt de poursuivre mon travail de recherche autour des nombres, opérations et géométrie cette fois à l'école élémentaire. Les questions étaient les suivantes : *Qu'est-ce que la multiplication ? Donnez une représentation géométrique de la multiplication.*

Les réponses des étudiants limitent le sens de la multiplication à une addition répétée. Les représentations géométriques proposées mélangent des figures et des signes. Ceci confirme

³Pour plus de détails concernant l'analyse des situations voir Barrera-Curin, 2012.

⁴ "L'objet de la connaissance est filtré par la technologie de l'activité sémiotique [et] la connaissance est culturellement médiée" (Ma traduction de Radford, 2004, p. 24).

donc le besoin d'un changement dans la façon de travailler les thèmes mathématiques fondamentaux en formation initiale.

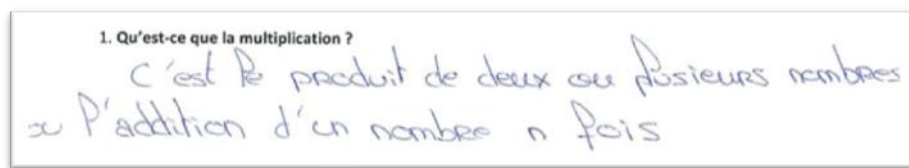


Figure 9. Réponse d'un étudiant en formation (Master 1) à la question : *qu'est-ce que la multiplication ?*

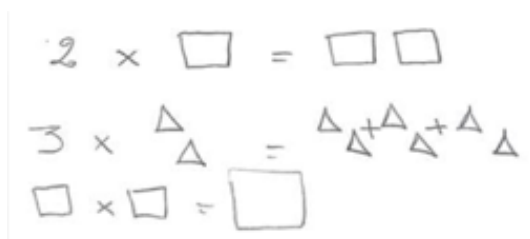


Figure 10. Réponse d'un étudiant en formation (Master 1) à la question :
donnez une représentation géométrique de la multiplication

Il faudrait que les mathématiques redeviennent vivantes, en d'autres mots, il faudrait les faire émerger en les faisant (Maheux & Proulx, sous presse), il faudrait les faire fleurir ou exploser, il faudrait les vivre toujours en mouvement, me semble-il, tel que Châtelet (1993) le disait.

Comment peut-on établir des liens entre l'essence épistémologique des savoirs à enseigner aux futurs enseignants et les connaissances mathématiques nécessaires à leur métier ? Le rôle du formateur-chercheur me semble fondamental. Aurait-il un paradigme à changer ? Probablement. De ce fait, le travail didactique en formation ne pourrait se limiter à l'analyse des progressions pré-faites mais à un travail créateur entre enseignants et formateurs visant non seulement la proposition d'Espaces de Travail Mathématiques mais aussi une formation au métier d'enseignant où son rôle de médiateur à l'intérieur de ces espaces devrait nécessairement se développer.

IV - CONCLUSION

La recherche d'un lien entre géométrie et calcul dans certains travaux historiques, épistémologiques et didactiques, m'a permis de constater la complexité et richesse non seulement de mes intentions didactiques mais aussi des mathématiques faisant l'objet de ma recherche. Un voyage historique qui a commencé dans l'histoire des chiffres et qui a terminé dans la représentation géométrique de la multiplication de nombres complexes a mis en évidence l'existence historique d'une relation aussi étroite que controversée entre représentations géométriques et calcul numérique. Cette recherche est née à partir d'une idée élémentaire : les recherches en histoire et en épistémologie nous permettraient d'accéder à la vie et au mouvement, parfois éclipsé, des mathématiques. Ainsi, la prise en compte des relations historiquement établies entre géométrie et nombres rendant compte des significations transversales de la multiplication pour différents ensembles de nombres a , d'une part, enrichi la proposition d'Espaces de Travail Mathématiques tel que présentée dans cet article et, d'autre part, est devenue le point de départ d'une recherche beaucoup plus large autour de l'importance des relations entre nombres et géométrie dans le processus visant la rencontre des certaines idées mathématiques.

La multiplication et le Nombre, comme Piaget l'a précisé, *symbolise une action* (Piaget, 1949). Cette interprétation dynamique du nombre a produit tout au long de l'histoire ce besoin d'une représentation, ce besoin, dirais-je, de voir *en action* les nombres et les opérations sur les nombres. Que la géométrie soit en train de disparaître progressivement des programmes officiels ne veut

pas du tout dire qu'elle ne doit plus exister dans l'acte d'enseigner ou dans les représentations pour les chercheurs, les formateurs ou les enseignants. Il y a plusieurs raisons pour mettre en valeur la relation entre nombres et géométrie : la dé-géométrisation du nombre, puis sa re-géométrisation (Glaeser, 1981) ; le passage de l'image à la géométrie puis à la forme abstraite (Bachelard, 1938) ; la création d'une nouvelle géométrie comme réponse au besoin d'avoir toujours une représentation des idées arithmétiques (Bkouche, 2009b) ; le théorème de Thalès ou l'objet mathématique qui représente la multiplication géométrisée pour différents ensembles de nombres ; les transformations géométriques ou le contexte d'existence de la relation entre multiplication et géométrie (Barrera-Curin, 2012). Et j'ajoute :

« Si les points d'une droite sont des nombres, on doit pouvoir comprendre géométriquement la signification des opérations élémentaires entre nombres : l'addition et la multiplication. La clé de cette compréhension est dans l'idée de transformation. » (Leys, Ghys, & Alvarez, s. d.).

Ainsi je suis passée du plan historico-épistémologique au plan expérimental et didactique. Je me suis intéressée aux possibilités qu'ont les élèves de chercher et d'établir un lien entre multiplication et géométrie et à la recherche d'une articulation théorique favorisant l'analyse du travail mathématique des élèves. Plus tard, ces réflexions se sont élargies vers la formation de futurs enseignants.

Une précision me semble importante. Il faut bien comprendre que mes intentions didactiques ne visent pas la *recherche d'un bon modèle* pour la représentation de la multiplication pour différents ensembles de nombres. J'ai parlé de géométrisation, d'articulation de cadres mathématiques pour l'apprentissage ou le réinvestissement du calcul numérique mais le *comment faire* reste toujours une responsabilité des futurs enseignants et des formateurs, une part de leur rôle créateur. Ici, je n'ai donné que des exemples qui rendent compte de la richesse des mathématiques et encore plus des possibilités de les faire émerger à partir de la seule proposition d'un Espace de Travail Mathématique.

Je voudrais terminer en insistant sur l'importance d'une formation initiale et continue enrichie par des réflexions épistémologiques autour des mathématiques. Une formation *mettant en valeur* le rôle créateur et médiateur de l'enseignant, participant au travail mathématique de ses élèves dans les processus d'émergence et de rencontre des mathématiques.

V - BIBLIOGRAPHIE

- ARCAVI, A. (2004) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 214-241.
- ARGAND, J.-R. (1874) *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Paris : Gauthier- Villars.
- ARTIGUE, M. & ROBINET, J. (1982) Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *RDM*, **3**(1), 5-64.
- BACHELARD, G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.
- BARRERA-CURIN, R. I. (2011) Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique. *Petit x*, n°85, 5-26.
- BARRERA-CURIN, R. I. (2012) *Etude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat non publiée.
- BARTOLINI-BUSSI, M. G. & MARIOTTI, M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artifacts and signs after a vygotskian perspective. In L. E. et al. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2^{ème} éd.). New York and London : Routledge.
- BKOUCHE, R. (1994) *Autour du théorème de Thalès*. Lille : IREM de Lille.
- BKOUCHE, R. (1997) Epistémologie, histoire et enseignement de mathématiques. *For the learning of mathematics*, **17**(1), 34-42.
- BKOUCHE, R. (2009) *Grandeurs et nombres*. Lille : IREM de Lille.
- BKOUCHE, R. (2009b) *Histoire du calcul : de la géométrie à l'algèbre*. Rouen : Vuibert.
- BROUSSEAU, G. (1995) Autour de Thalès : promenade avec Thalès entre la maternelle et l'université. *Brochure de la commission Inter-IREM Premier cycle*, 87-124.
- BROUSSEAU, G. (1996) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat non publiée.
- BRUTER, C. P. (2000) *La construction des nombres : histoire et épistémologie*. Ellipses.
- CHÂTELET, G. (1993) *L'enchantement du virtuel. Mathématique, physique, philosophie*. Paris : Le Seuil.
- CONNE, F. & LEMOYNE, G. (1999) *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.
- D'AMORE, B. & FALDINO, M. I. (2008, March) Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. In *The first century of the international commission on mathematical instruction (1998-2008) : reflecting and shaping the world of mathematics education*. Rome :Istituto della Enciclopedia Italiana.
- DAVIS, B. & SIMMT, E. (2006) Mathematics-for-teaching : an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 293-319.
- DESCARTES, R. (1637) *La géométrie* (Par Vincent Jullien éd.). Paris : Presses Universitaires de France.
- DOUADY, R. (1986). *Liaison école- collège : Nombres décimaux (Rapport technique)*. Paris.
- DUVAL, R. (1998, March) Why to teach geometry ? In *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st. century*. Catania : Springer.
- FLAMENT, D. (2003) *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*. CNRS Editions.
- GLAESER, G. (1981) Épistémologie de nombres relatifs. *RDM*, **2**(3), 303-346.

- KUZNIAK, A. (2004) *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches.
- KUZNIAK, A. (2010) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, **15**, 73-93.
- KUZNIAK, A. (2011) L'espace de travail mathématique et ses genèses. In *Actes du symposium franco-chipriote de didactique espace de travail mathématique*. Paris.
- KUZNIAK, A. (2012) Understanding geometric work through its development and its transformations. In S. Rezat & M. Hattermann (Eds.), Berlin : Springer. À paraître.
- LEYS, J., GHYS, E., & ALVAREZ, A. (s. d.). *Dimensions*.
- MABRY, R. (1999) Proof without words : *Mathematics magazine*, **72**(1), 63.
- MAHEUX, J.-F. & PROULX, J. (sous presse) Vers le faire mathématique: essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*.
- NOSS, R. & HOYLES, C. (1996) *Windows on mathematical meanings : Learning cultures and computers*. Dordrecht : Kluwer.
- PIAGET, J. (1949) *Introduction à l'épistémologie génétique : la pensée mathématique, tome 1*. Paris : Presses Universitaires de France.
- RADFORD, L. (2004) La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In A. G. (ed.) (Ed.), *Atti del convegno di didattica della matematica* (p. 11-27). Locarno : Alta Scuola Pedagogica.
- REYNEAU, C. R. (1739) *Science du calcul des grandeurs en général*. Venise : Chez F. Pitteri.
- SFARD, A. (2008) *Thinking as communicating : Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge : Cambridge University Press.
- SIERPINSKA, A. (1991) *Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique* (Rapport technique). Thessalonique : Institut Français de Thessalonique.
- VYGOTSKY, L.S. (1934/1997) *Pensée et langage* (3^{ème} éd.). Paris : La Dispute.