L'ENSEIGNEMENT DU CONCEPT DE VOLUME EN CM2

Karine MOLVINGER
Chargée de recherche au CNRS,
LIRDEF (Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation) équipe ERES, EA 3749, UM2, UM3
karine.molvinger@montpellier.iufm.fr

Résumé

L'étude présentée est une partie d'un projet plus vaste s'intéressant à la transition école-collège en sciences et en mathématiques. Elle porte sur les grandeurs à l'école primaire et plus particulièrement sur l'enseignement de la grandeur volume. Nous présentons une étude des programmes dans laquelle nous nous intéressons à la prise en charge de cette notion en sciences et en mathématiques. Puis, nous nous appuyons sur les recherches sur les difficultés des élèves (Ricco *et al*., 1983, Smith, 1985) pour étudier des manuels et des pratiques d'enseignants de cycle 3. Nous y analysons la façon dont la grandeur volume est traitée : prise en charge des aspects géométriques/physiques versus les aspects numériques, prise en compte des conceptions des élèves et des problématiques liées à la mesure des grandeurs. Notre objectif est ainsi d'explorer comment les enseignants peuvent aborder ce concept et gérer les difficultés des élèves.

L'étude présentée est une partie d'un projet plus vaste s'intéressant à la transition école-collège en sciences et en mathématiques[1]. Notre objectif est ainsi d'explorer comment le concept de volume est enseigné (notamment au CM2) et d'apprécier les apprentissages qui peuvent en découler. Le présent article rend compte des premiers résultats d'un travail toujours en cours actuellement. Après avoir explicité le cadre théorique, la méthodologie et le corpus de l'étude, nous regardons dans la bibliographie ce que nous pouvons trouver sur le concept de volume. Puis nous étudions les programmes où nous nous intéressons à la prise en charge de cette notion en sciences et en mathématiques. Nous analysons les manuels scolaires présentant cette notion, notamment la façon dont la grandeur volume est introduite (prise en charge des aspects géométriques/physiques versus les aspects numériques). Pour l'étude des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves, nous nous inscrivons dans le cadre de la théorie de l'activité (Robert, 2008). Pour cela, nous analysons les séances de classe de trois enseignants ayant fait des choix didactiques différents.

I - PROBLÉMATIQUE, CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Notre problématique s'intéresse au concept de volume, à savoir comment il est abordé dans les instructions officielles, dans les manuels (aspects numérique, géométrique, physique) ainsi qu'en classe où nous analysons des séances de trois enseignants ayant fait des choix didactiques différents.

Notre étude s'inscrit dans la théorie de l'activité telle qu'elle a été spécifiée à l'enseignement des mathématiques par Robert et Rogalski (Robert & Rogalski, 2002, 2005 ; Robert, 2008). Dans ce cadre théorique, on considère que les pratiques des enseignants influent sur les apprentissages des élèves *via* les activités qu'elles provoquent, notamment par le choix des tâches proposées aux élèves. De ce cadre découle une méthodologie : ce sont les activités des élèves en classe qui nous permettent d'étudier l'enseignement dispensé. Les pratiques des enseignants sont analysées, d'une part en reconstituant le scénario, c'est-à-dire l'enchaînement des tâches prévu par l'enseignant et l'organisation de la classe ; d'autre part, le déroulement, c'est-à-dire la mise en œuvre du scénario dans la classe.

[1] Ce projet est financé par la Région Languedoc-Roussillon dans le cadre de l'appel à projet "Chercheurs d'avenir 2011"

L'analyse du scénario suppose la « conversion » des énoncés choisis par l'enseignant en tâches pour les élèves, puis l'analyse de ces dernières d'un point de vue didactique pour déterminer les activités qu'elles sont susceptibles de provoquer chez les élèves, à travers la description des procédures de résolutions envisagées, les connaissances mobilisées, les conceptions erronées qui peuvent intervenir. Cette analyse *a priori* des tâches permet de réaliser une première prévision de l'ensemble des activités qu'elles sont susceptibles de provoquer chez les élèves, donnant ainsi accès à l'itinéraire cognitif élaboré par l'enseignant en vue de « mettre ses élèves sur le chemin de la connaissance » (Chesnais, 2009).

L'analyse du déroulement, réalisée ici à partir de vidéos de séances de classe, est guidée par la recherche de ce qui peut influer sur les activités que les élèves développent. Nous procédons tout d'abord à un découpage chronologique des séances en épisodes selon la nature du travail (cours, exercices, rappels de leçon, correction, autre). Puis nous considérons notamment les temps et formes de travail (individuel, en petit groupe, collective en classe entière…) en fonction des contenus (exercice ou cours…), les échanges verbaux, les aides prodiguées par l'enseignant, etc. Nous nous en tenons aux activités possibles, inférées à partir de nos hypothèses et des traces des activités effectives. En effet, les activités effectives elles-mêmes ne sont pas à notre portée, non seulement parce qu'elles sont différentes pour chaque élève et que notre méthodologie de recueil de données ne nous permet pas d'apprécier les activités individuelles, mais aussi parce qu'une partie de ces activités est de toutes façons inobservable, se déroulant dans les têtes (Chesnais, 2009).

Le corpus étudié est constitué des instructions officielles, de manuels scolaires, d'enregistrements vidéo de l'ensemble des séances portant sur les mesures de volume en CM2 dans les classes de trois enseignants, complétés par de nombreux documents : cahiers d'élèves, feuilles d'exercices, traces écrites. Nous disposons également de productions d'élèves lors d'évaluations réalisées en classe (tests conçus par nos soins) en fin d'année. Ces productions nous permettent d'apprécier, même de manière imparfaite, les apprentissages réalisés.

Ne pouvant présenter l'intégralité des séquences, nous n'analyserons que certaines tâches au sein de toutes ces séances.

II - LE CONCEPT DE VOLUME

Rappelons tout d'abord que le volume est l'espace occupé par un objet et que la contenance est ce qui peut être contenu dans les limites d'un contenant. Dans cette étude, nous distinguons les deux notions et nous nous intéressons au volume.

Le concept de volume s'inscrit dans les programmes de mathématiques dans la thématique « grandeurs et mesures ». Cependant, il relève également de la géométrie dans l'espace puisqu'il met en jeu des solides. Dans l'enseignement mathématique, le concept de volume est en général abordé selon deux axes : géométrique et numérique. Le volume est l'espace occupé par un solide, une situation relevant de la géométrie spatiale, mais il peut être traité également d'un point de vue numérique par dénombrement souvent matérialisé par des petits cubes unités ou utilisation de formules. Cette dualité cadre géométrique/cadre numérique peut être toutefois une source de difficulté pour les élèves, comme l'évoque Moreira-Baltar pour la notion d'aire :

« Le fait que les situations-problèmes renvoient simultanément au cadre géométrique et au cadre numérique crée une difficulté importante lors de l'analyse des erreurs commises par les élèves et la recherche des sources de ces erreurs » (Moreira-Baltar, 1994-1995, page 190).

Par ailleurs, est-ce que le concept de volume s'inscrit uniquement dans les cadres géométrique (solide) et numérique (nombre), ne peut-on pas envisager un cadre physique, comme l'a fait Moreira-Baltar (2002) pour les aires où elle parle du « cadre grandeur » ?

Le concept de cadre est défini par Régine Douady (1986) :

« *Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations.* » (Douady, 1986, page 11).

Les cadres sont les domaines mathématiques mobilisés pour décrire les problèmes et les traduire en termes opératoires. Selon la théorie de Douady (1986), le passage d'un cadre à un autre peut permettre la résolution d'un problème et donne du sens aux notions.

Pour nous, dans notre étude sur le volume, outre les cadres numérique et géométrique, le « cadre grandeur », est également mobilisé comme le rappelle Moreira-Baltar (2002) pour l'aire :

« *Les recherches développées par Douady et Perrin-Glorian les ont conduites à construire et expérimenter une ingénierie didactique pour l'enseignement de la notion d'aire, dans laquelle la construction de cette notion est basée sur la dissociation de trois cadres : le géométrique, avec les surfaces ; celui des grandeurs, avec les aires et le numérique, avec les mesures.* » (Moreira-Baltar, 2002, page 2)

Pour la notion de volume, on considère que l'on travaille dans le cadre numérique lorsqu'on manipule des nombres, dans le cadre géométrique lorsqu'il est question de solides et le cadre « grandeur » lorsqu'on travaille le volume physique et sa mesure sans les nombres. Souvent on passe d'un cadre à l'autre (discours de l'enseignant, des élèves et tâches proposées aux élèves), ce qui peut conduire à de nouvelles connaissances.

Plusieurs auteurs ont montré la difficulté des élèves face à la notion de volume. Rogalski (1982) caractérise une des difficultés : le dépassement du modèle linéaire pour arriver à un modèle multidimensionnel. Ricco, Vergnaud et Rouchier (1983) mentionnent que les élèves utilisent les notions de périmètre ou de surface pour calculer le volume :

« *L'analyse des procédures utilisées par les élèves et notamment des erreurs, montre que l'arithmétisation du volume est souvent opérée à l'aide d'une représentation de type « périmètre » ou de type « surface »* » (Ricco, Vergnaud, Rouchier, 1983).

Jean Piaget a travaillé sur la construction et les conservations des grandeurs physiques ; il a établi différents stades pour la maîtrise de ces notions. Même si depuis ces travaux, il a été montré une variabilité inter et intra individuelle, il nous paraît légitime de les citer ici. En effet, à propos de la construction de ces grandeurs en fonction de l'âge des enfants, Piaget a montré que les premières grandeurs construites sont la quantité de matière vers sept-huit ans, puis la masse vers huit-neuf ans et enfin le volume entre dix et douze ans (Piaget et Inhelder, 1962). Piaget, Inhelder et Szeminska (1973) donnent plusieurs significations au concept de volume : le volume intérieur et le volume occupé. Les auteurs définissent le volume intérieur, comme « intérieur aux surfaces frontières » (p. 433) et comme « la quantité de matière » (p. 445). Le volume occupé est défini comme « la place prise par le volume d'ensemble de l'objet » (p. 433).

Une des difficultés, bien connue des enseignants, est la dissociation masse/volume. La plupart des enfants pensent que lorsqu'on plonge un solide dans l'eau, ce qui explique l'élévation du niveau de l'eau, c'est la masse de l'objet, ne concevant pas que le volume se mesure à la place occupée par cet objet, indépendamment de sa masse. La dissociation du volume physique de la masse est acquise lorsque le sujet considère que la masse n'intervient pas mais que le volume se mesure à la place occupée par l'objet.

Dans une publication sur les concepts de taille, de masse, de matière et de substance chez les enfants de 3 à 9 ans, Carol Smith (Smith, 1985) montre que les concepts de masse et de densité (rapport masse/volume) se différencient chez les enfants au cours de leur développement. Les données montrent que les plus jeunes enfants ont un système théorique incluant des concepts distincts de masse, de taille et de matière et forment des généralisations en relation avec ces concepts (par exemple, la taille est grossièrement corrélée à la masse, les objets d'acier sont lourds *etc.*).

En complément de la bibliographie et dans le cadre de nos recherches, pour avoir une idée de l'évolution des conceptions des élèves sur les notions que nous étudions, nous avons fait passer des tests à des élèves de CM2, 6ème et 5ème. Parmi plusieurs questions, nous nous intéressons à celle concernant le volume et sa conservation dans la mesure où elle nous renseigne sur le degré de conceptualisation de la notion de volume des élèves (Annexe 1).

Environ deux tiers des élèves de ces classes indiquent que le niveau de l'eau augmente lorsqu'on y plonge un objet. Le pourcentage d'élèves de ces mêmes classes qui savent que le volume se conserve lorsqu'on fait subir une déformation à l'objet est plus faible (environ 50 %).

Ces chiffres nous questionnent, surtout pour des élèves de Cinquième qui, d'après Piaget, ont dépassé l'âge auquel cette notion est acquise. D'où l'intérêt de se pencher sur l'enseignement de ces grandeurs, enjeu en mathématiques et en sciences physiques (en chimie par exemple, dissocier quantité de matière, volume, mole…).

Les résultats des tests en 6ème et 5ème confirment que les difficultés persistent au collège, le concept de volume se construit effectivement lentement chez l'enfant, comme l'ont montré les études de Piaget.

III - LES PROGRAMMES

Nous examinons comment l'institution propose l'enseignement du concept de volume. Nous regardons cette notion dans les programmes en vigueur à l'école et au collège (cf. Annexe 2). Même si nous nous intéressons ici à l'enseignement du volume à l'école, nous regardons brièvement les programmes du collège, cette étude étant une partie d'un projet sur la transition école/collège.

À l'école primaire comme au collège, on trouve dans les programmes de mathématiques, dans la partie « grandeurs et mesure », la notion de volume. Le volume est donc considéré comme une grandeur, au même titre que l'aire, la masse…

À l'école, au cycle 2, les contenances sont étudiées puis au cycle 3, seule la formule du volume du pavé droit est exigée. Dans le socle commun sont mentionnées les principales grandeurs dont le volume.

Pour les programmes du collège, il est demandé de savoir déterminer le volume d'un certain nombre de solides (par dénombrement d'unités ou formules), de connaître les unités de volume et de les relier aux unités de contenance.

Force est de constater que c'est l'aspect numérique qui est davantage mis en avant dans les programmes, même si le travail sur les unités de mesure peut être considéré dans le cadre grandeur si, comme nous l'avons précisé précédemment, il ne fait pas intervenir de nombre.

Il est intéressant de remarquer dans le document d'accompagnement du collège « grandeurs et mesures », le seul document d'accompagnement par ailleurs où il est fait mention du volume, la phrase suivante (p 20 et 21) :

« *Pour justifier la formule donnant le volume de la pyramide ou du cône, on peut recourir à du matériel pédagogique permettant de comparer le volume d'une pyramide et du cylindre de même base et de même hauteur en comparant les masses d'un même liquide avec lequel on les remplit.* »

Ici on constate que la masse et le volume/contenance sont mis en relation. Il est possible d'interpréter cet extrait comme supposant de mobiliser le concept de masse volumique.

IV - LES MANUELS SCOLAIRES

Nous avons analysé sept manuels scolaires de CM2 : Cap maths (Hatier), Euro Maths (Hatier), Maths + (SED), Outils pour les maths (Magnard), Au rythme des maths (Bordas), Maths tout terrain (Bordas), À portée de maths (Hachette). Nous avons également regardé les manuels de CE2 et CM1 d'Euro Maths afin de prendre en compte le cycle 3 de manière complète.

Nous considérons les manuels à la fois comme des exemples de savoirs enseignés et des ressources pour les enseignants. Nous regardons quels sont les cadres (numérique, géométrique ou grandeur) qui sont privilégiés dans ces manuels. Une même activité, selon la manière dont elle est menée, peut conduire à privilégier un cadre ou un autre, ou plusieurs cadres.

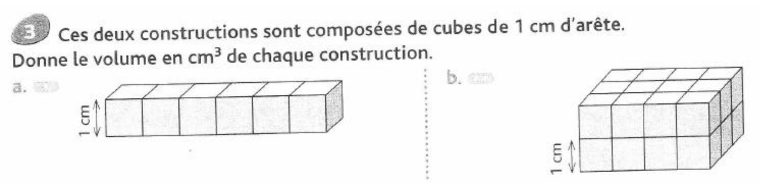
Les tâches proposées se réunissent en trois grands types :

- Trouver le volume de pavés droits par comptage de cubes unités.
- Utiliser la formule du pavé droit (pour calculer le volume d'un pavé droit connaissant ses dimensions ou calculer une dimension du pavé connaissant son volume et les autres dimensions).
- Convertir entre unités du système (relation volume/contenance, m^3/L).

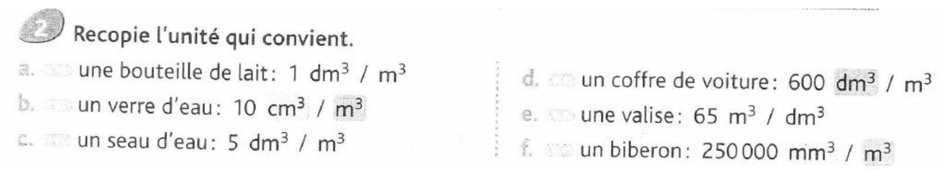
De manière plus précise, nous analysons les tâches associées au concept de volume, comment elles peuvent être résolues par les élèves, en regardant deux manuels, l'un qui paraît présenter une variété d'exercices et l'autre, faisant appel à un seul type d'exercices sauf dans son activité introductive. Nous nous référons dans ces manuels aux exercices et activités ne relevant pas du cadre numérique.

<u>Au rythme des maths</u> (Bordas) (en annexe 3.A)

Nous nous intéressons à ce manuel car, parmi les sept manuels étudiés, c'est celui qui fait intervenir le panel le plus grand d'exercices, impliquant plus de cadres, contrairement aux autres qui privilégient le cadre numérique.



Les élèves doivent donner le volume de deux pavés composés de petits cubes unités, le premier étant composé de six petits cubes alignés (une seule dimension) et le deuxième étant construit sur les trois dimensions. Le premier ne doit pas poser de réelles difficultés puisque d'une part, tous les cubes sont visibles et d'autre part, les élèves ne sont pas confrontés au problème lié à la multi-dimensionnalité. Pour le deuxième, les élèves ne doivent pas oublier les cubes qui ne se voient pas sur la figure. Certains rencontrent des difficultés avec les cubes des "coins" ne voulant pas les compter trois fois dans le calcul du volume ; par exemple pour le pavé ci-dessus, au lieu de calculer 4 x 3 x 2, ils font 4 x 2 x 1, problème lié au passage à la multi-dimensionnalité. Ici aussi nous avons coexistence des deux cadres numérique (pour le dénombrement) et géométrique (pour la représentation spatiale).


2 Recopie l'unité qui convient.

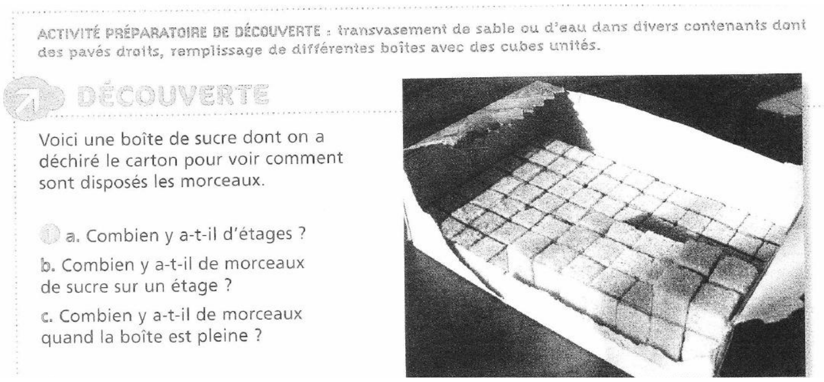
a. une bouteille de lait : 1 dm^3 / m^3
b. un verre d'eau : 10 cm^3 / m^3
c. un seau d'eau : 5 dm^3 / m^3
d. un coffre de voiture : 600 dm^3 / m^3
e. une valise : 65 m^3 / dm^3
f. un biberon : 250 000 mm^3 / m^3

Il faut estimer une mesure en utilisant la bonne unité du système volumétrique. Six objets (bouteille, verre, seau, coffre de voiture, valise, biberon) sont proposés et pour chacun, une des deux unités de volume doit être choisie. Le cadre « grandeur » a été choisi par les auteurs (connaître les unités de mesure). Par le choix des objets, tous des contenants, l'élève est confronté à la notion de contenance qui, elle, en général, s'exprime en litre, du moins dans les manuels scolaires de l'école, et peut par conséquent déstabiliser l'élève. Notons que le choix des nombres est discutable (pour le coffre de voiture et le biberon) car il s'agit de travailler la grandeur, c'est-à-dire que pour les élèves se fassent une idée, il serait plus pertinent de convertir les « grands nombres » pour prendre conscience de l'unité qui sera la plus adaptée.

<u>Euromaths</u> (Hatier) (en annexe 3.B)

Tout d'abord, nous avons rapidement regardé l'ensemble des manuels du cycle 3. Seules les mesures de contenances sont étudiées en CE2 et CM1 ; en CM2, nous trouvons les contenances ainsi que le volume du pavé droit sur lequel nous nous focalisons.

Dans Euromaths, l'activité introductive est basée sur le remplissage de différentes boîtes avec des cubes unités, la notion de volume est introduite dans un cadre grandeur, les élèves vont faire des expériences pour réaliser ce qui va être « mesuré » lorsque l'on parle de volume. Il est aussi recommandé des activités de transvasement dans différents contenants, on a donc un lien entre contenance et volume. Ensuite tous les exercices s'inscrivent dans un cadre numérique puisqu'il s'agit d'appliquer la formule du pavé droit.


ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE DE DÉCOUVERTE : transvasement de sable ou d'eau dans divers contenants dont des pavés droits, remplissage de différentes boîtes avec des cubes unités.

DÉCOUVERTE

Voici une boîte de sucre dont on a déchiré le carton pour voir comment sont disposés les morceaux.

a. Combien y a-t-il d'étages ?
b. Combien y a-t-il de morceaux de sucre sur un étage ?
c. Combien y a-t-il de morceaux quand la boîte est pleine ?

En conclusion de cette étude de manuels scolaires, à part les exercices et activités dans le cadre grandeur présentés ci-dessus qui sont minoritaires, on constate que le cadre mobilisé est essentiellement le cadre numérique ; même dans le manuel le plus contrasté, puisqu'il s'agit d'appliquer la formule du volume du pavé droit. On a donc une prédominance du cadre numérique en CM2, avec très peu d'exercices relevant du cadre grandeur. On peut se demander si les tâches vont être suffisantes aux élèves pour les initier à la construction de la notion de volume, vu que les exercices abordant cette notion ne font appel qu'à des calculs numériques.

On note également l'absence de prise en compte de la dissociation masse/volume et d'activités de mesure (sans l'intervention des nombres).

Les grandeurs peuvent donner une signification aux nombres et réciproquement les nombres permettent l'étude des grandeurs et de leur mesure. Mais il semble nécessaire que la grandeur soit construite par les élèves en dehors des nombres. La plupart des didacticiens s'accordent sur le fait qu'un travail spécifique sur le sens de la grandeur doit être mené indépendamment de la mesure. La maîtrise des activités dans un cadre numérique ne garantit pas que les élèves aient construit le sens de la grandeur.

Dans son mémoire de Master, Anwandter (2008) parvient aux mêmes conclusions que nous pour les manuels de collège où l'application des formules de la mesure de différents solides prédomine.

V - DIFFÉRENTES PRATIQUES ENSEIGNANTES

Face aux difficultés rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage de la notion de volume, comment les enseignants gèrent-ils les cours sur le volume, quels choix didactiques font-ils ? La construction de ce concept peut-elle se faire séparément d'autres grandeurs comme celle de la masse, cela a-t-il un sens, ou faut-il les enseigner simultanément pour pouvoir les différencier car trop d'enfants ne distinguent pas la masse du volume et ce, même au collège ? Nous allons voir ici l'approche de trois enseignants, le premier (Carole) suivant les instructions de CM2 (formule du pavé droit), le deuxième (David) séparant clairement l'enseignement des deux concepts (masse et volume) et la troisième (Hannah) voulant aborder explicitement la dissociation des deux grandeurs. Nous regardons quel cadre ils vont privilégier. Nous ne connaissons pas les ressources utilisées par ces enseignants pour la préparation de leur séquence, d'autant plus qu'aucun manuel scolaire n'a été utilisé lors des séances.

1 La séance de Carole

Analyse *a priori*

Carole étudie la mesure du volume du pavé droit. La durée consacrée à ce travail est une séance d'environ une heure et quart.

La première tâche est de calculer la mesure du volume d'un pavé droit à l'aide du matériel suivant : une boîte vide et des petits cubes. La deuxième tâche est de construire un pavé droit à l'aide des petits cubes et d'en calculer son volume à l'aide d'une des méthodes proposées dans la première tâche, ce qui constitue un réinvestissement des connaissances mobilisées lors de la première tâche. Nous n'analyserons pas le déroulement de la deuxième tâche ici.

Analyse de la première tâche :

Il s'agit de calculer le volume d'un pavé droit (boîte) en la remplissant de petits cubes. Les procédures possibles sont :

- remplir entièrement la boîte de petits cubes que l'on dénombre ;
- tapisser le fond de la boîte de petits cubes que l'on dénombre soit un par un soit en utilisant la formule de l'aire du rectangle ; puis construire la hauteur et la multiplier par l'aire ;
- construire un "squelette" de pavé droit constitué d'une longueur, d'une largeur et de la hauteur et multiplier ces trois nombres.

Analyse du déroulement

Carole présente le thème de la leçon, à savoir la mesure du volume du pavé droit. Elle va donc d'abord demander aux élèves de lui rappeler la définition du pavé droit, qu'ils ont rencontrée en géométrie plus tôt dans l'année (« *Un pavé droit est un solide dont les faces sont des carrés ou des rectangles.* »). Nous pouvons pointer ici que la définition est incomplète puisque Carole ne précise pas que le pavé possède six faces. Elle leur demande ensuite ce que veut dire le mot volume.

Les élèves proposent :

- la profondeur ;
- l'épaisseur et la taille ;
- les mètres cubes [Ici Carole fait remarquer qu'il s'agit de la mesure et non de la grandeur. Pour l'instant, elle veut que les élèves définissent la grandeur.] ;
- combien de petits carrés on peut mettre à l'intérieur ;
- la surface de l'intérieur. [Carole insiste sur le mot « intérieur », et reformulera avec « la mesure de l'intérieur du solide ».].

Les éléments de réponse de quelques élèves ont une certaine pertinence. Il est intéressant de noter que la majorité des élèves se placent dans un cadre grandeur pour définir le mot volume (surface, profondeur, taille, unité) ; un élève se situe dans le cadre numérique (nombres de petits carrés).

Carole énonce ensuite la première tâche. Les élèves, par groupes de 4, doivent calculer le volume d'une boîte (pavé droit) à l'aide de petits cubes. Carole explique que le petit cube est leur unité de mesure. Elle saisit l'occasion pour faire un rappel sur les unités de mesure : pour un segment, l'unité de mesure est le centimètre ; pour la mesure de l'aire d'une surface, c'est le centimètre carré. Ici pour l'instant, l'unité est « le petit cube ». Après quelques minutes de travail en petits groupes, Carole propose une mise en commun ; un représentant par groupe explique ce que le groupe a fait.

Trois groupes tapissent le fond et multiplient par la hauteur.

Un groupe dénombre le nombre de longueurs (« *donc en fait, vous avez trouvé qu'il fallait chaque fois 6 cubes pour faire une rangée et vous avez calculé le nombre de rangées nécessaires.* »).

Un groupe construit un squelette (la longueur, la largeur et la hauteur) et multiplie les trois nombres entre eux.

La première procédure montre que les élèves réfléchissent à partir de deux dimensions (surface et hauteur). Il est intéressant de noter que les élèves n'ont pas rencontré de problème avec les cubes des "coins", le passage à la tridimensionnalité ne semble pas être un obstacle. Bien sûr ce travail étant un travail de groupe, on ne peut pas étudier chaque élève séparément.

Carole, pour conclure sur cette première tâche, va valider les trois procédures. Elle va cependant montrer que la dernière méthode sera la plus efficace, notamment lorsque les élèves seront devant leur feuille sans les petits cubes. Elle institutionnalise la formule du volume du pavé droit à partir des procédures des élèves.

La séance se termine sur une trace écrite :

« La mesure de volume d'un pavé droit »

« Un pavé droit est un solide dont les faces sont des carrés ou des rectangles. »

« Le volume d'un solide c'est la mesure de son intérieur. Pour calculer le volume d'un pavé droit, on multiplie la longueur (L) par la largeur (l) par la hauteur (h). »

V = L x l x h

« Si toutes les mesures sont en centimètres, alors le volume sera exprimé en cm³. »

Après une introduction du mot « volume » dans un cadre plutôt géométrique, la séance de Carole est conforme au programme (formule du pavé droit) et proche de ce que l'on trouve dans les manuels scolaires, elle se positionne dans un cadre numérique. On peut remarquer qu'elle définit un « volume intérieur » d'après la classification de Piaget et qu'elle définit la grandeur par sa mesure.

2 La séance de David

Analyse *a priori*

La séance que nous analysons porte sur les contenances et les volumes. La durée prévue pour ce travail est d'une heure environ ; la séance suivante étant consacrée à des exercices de conversions d'unités. Deux tâches sont proposées aux élèves. La première tâche est de mesurer la contenance d'un récipient en utilisant un verre doseur puis une éprouvette pour plus de précision. La seconde tâche consiste à mesurer les volumes d'un petit ballon et d'un morceau de polystyrène. David annonce qu'il va travailler la notion de contenance avant celle de volume. Nous ne nous intéressons ici qu'à la deuxième tâche, celle sur la mesure de volume.

Analyse de la deuxième tâche

Il s'agit ici de mesurer le volume d'objets. Une procédure possible pour réaliser cette tâche est :

a. prendre un récipient gradué (ou le graduer) assez grand pour y introduire l'objet à mesurer ;
b. le remplir d'eau, suffisamment pour que l'objet puisse être immergé mais pas trop pour ne pas faire déborder l'eau lorsqu'on plonge l'objet ;
c. noter le volume d'eau initial ;
d. plonger l'objet dont on veut mesurer le volume ;
e. noter le nouveau volume d'eau ;
f. soustraire à ce dernier volume le volume initial.

On peut également envisager une seconde procédure correcte par débordement. Le récipient où l'objet sera plongé est rempli à ras bord. On plonge l'objet et on recueille l'eau qui a débordé. On mesure dans une éprouvette (ou un autre instrument de mesure de contenance) l'eau qui a débordé et qui correspond au volume de l'objet. Dans les deux cas, l'élève doit savoir que le volume de l'objet correspond au volume d'eau déplacé. L'emploi de cette technique nécessite d'avoir compris que le volume ne dépend pas de la profondeur à laquelle on immerge l'objet et suppose de faire abstraction du volume de l'objet utilisé pour provoquer son immersion si celui-ci ne coule pas.

Les objets choisis sont un petit ballon et un morceau de polystyrène.

Parmi les deux objets proposés, le ballon est creux. En termes de mesure de grandeurs, on pourrait mesurer son volume mais également sa contenance. Même si David envisage la mesure du volume pour cet objet, un élève qui ne distingue pas la contenance du volume, peut envisager de remplir le ballon d'eau et mesurer ainsi la contenance au lieu du volume. Il est vrai que si on néglige l'enveloppe de l'objet, cette procédure est acceptable puisque le volume et la contenance seront équivalents.

Le fait que ces deux objets flottent peut engendrer des problèmes techniques même chez les élèves qui mobilisent la grandeur. Les élèves peuvent se demander comment ils vont les immerger. Cela peut être réalisé avec une tige dont le volume est négligeable, mais également avec la main. Dans ce dernier cas, l'ajout du volume de la main fausse la mesure. L'utilisation d'objets qui flottent, pour un élève qui ne dissocie pas la masse du volume, peut également mobiliser la notion de masse « il flotte car il est léger ».

Analyse du déroulement

La séance se déroule de manière collective. Un élève est au tableau avec David pour l'aider dans la réalisation de ses expériences, les autres élèves sont assis à leur bureau. La partie sur les contenances dure 8 minutes et celle sur les volumes moins de 25 minutes. Le reste de la séance est consacré à des exercices d'application ; la construction du tableau de conversion des capacités comme trace écrite clôt la séance. Rien n'est noté sur la notion de volume.

David explique que la séance va porter sur les mesures de contenance et de volume. On s'intéresse ici à la partie sur le volume.

Tout d'abord, nous verrons tout au long du déroulement que lorsque l'enseignant invalide les propositions des élèves, il le fait d'un point de vue technique.

Nous constatons, dans un premier temps, une confusion entre contenance et volume que ce soit chez l'enseignant ou chez les élèves. Les élèves proposent de mettre de l'eau dans le ballon ou proposent de mesurer l'eau contenue dans le ballon. Ils raisonnent sur la notion contenance au lieu de volume. David explique qu'il ne faut pas remplir le ballon d'eau pour des raisons pratiques. Il invalide cette procédure d'un point de vue technique, le ballon peut se crever. Mais il ne fait pas remarquer aux élèves qu'ils sont en train de parler de contenance au lieu du volume.

Nous constatons, dans un deuxième temps, la confusion volume/masse chez les élèves. « *On met de l'eau dans l'aquarium et si le ballon flotte c'est qu'il est moins lourd* ». Cette confusion avec les masses est favorisée par l'utilisation d'objets qui flottent. Les élèves anticipent cette flottaison. En effet, ce phénomène est souvent expliqué par les élèves par la notion de masse, principale conception erronée de ce phénomène, qui doit mobiliser la masse volumique. Par conséquent les élèves vont se focaliser sur la masse, notion que David veut éviter.

Cet enseignant a fait le choix de bien séparer les grandeurs physiques, et ne pas travailler la masse dans cette séance. À plusieurs reprises, les élèves mobilisent cette notion ; David fait remarquer que ce n'est pas le sujet du jour et qu'il ne va pas s'en occuper :

E : le ballon il est plus léger que

D : alors attention léger ça s'adresse à quoi, aux mesures de

I : masse

D : donc est-ce qu'on va pouvoir utiliser le terme lourd/léger dans les mesures de volume ?

[…]

E : il est plus léger que le ballon, alors le volume d'eau va monter

D : attention. Est-ce qu'on utilise ce terme léger ? Moi ce que je cherche, c'est quoi, c'est le volume du morceau de polystyrène, léger, le poids je m'en moque complètement, on en a déjà parlé, on l'a vu avant, moi c'est quel volume il fait, pourquoi ça peut être important d'avoir le volume de ce morceau de polystyrène. Si on veut envoyer un colis par la poste il faut savoir quelle taille, y a des petits, des grands, des très très grands, il faut savoir le volume pour pouvoir l'envoyer

D : donc on revient ici, y a pas de problème de poids [David immerge le morceau de polystyrène].

Pour la première fois dans la séance, David donne une situation concrète de la mesure de volume. Il propose aux élèves une situation de la vie quotidienne dans laquelle la mesure d'un volume est nécessaire. On peut noter que son exemple de colis n'est peut-être pas très adapté, car là encore, l'envoi d'un colis nécessite aussi de connaître sa masse.

D : attention elle a bien dit le ballon il pèse. Alors attention, est-ce qu'il pèse vraiment, qu'est-ce qu'on cherche nous ?

David veut tellement éviter la masse et centrer son cours sur le volume qu'il finit par dire que le ballon n'a pas de masse.

L'analyse des extraits montre que David veut séparer la masse du volume, mais ceci semble difficile. Il souhaite tout au long de sa séance ignorer la masse, mais on voit bien que cela n'est pas possible par les situations choisies. Le choix des objets a sûrement compliqué la réalisation de la tâche. L'utilisation d'objets qui flottent oriente les élèves sur la masse.

David explicite les problèmes techniques (il a pris un ballon car des boules de pétanque auraient pu casser l'aquarium ou on ne met pas d'eau dans le ballon car il va se crever), mais pas les problèmes de compréhension comme les confusions des grandeurs auxquelles les élèves sont confrontés. Les élèves n'ont pas construit les différentes notions, alors que David est parti du fait que ces notions étaient déjà connues.

Enfin, David choisit de travailler sur le volume d'un point de vue physique (cadre grandeur) et il ne travaille pas sur la formule du volume du pavé droit (cadre numérique). En revanche, il continue ensuite sa séance sur la conversion des unités de capacité. L'institutionnalisation du tableau de conversion des unités de capacité clôt la séance.

3. La séance de Hannah

Analyse *a priori*

Hannah va consacrer cinq séances d'une heure à la notion de masse, à raison d'une par semaine. Contrairement à David, elle choisit, lors de cette séquence, de faire un travail explicite sur la dissociation masse/volume. Lors de la première séance et le début de la deuxième, deux tâches sont proposées aux élèves. Nous analysons la deuxième tâche.

<u>Tâche 2</u> : La tâche principale est de savoir quel est, pour des groupes d'objets, celui qui est le plus lourd. Dans un premier temps, les élèves observent les objets, puis dans un deuxième temps, ils peuvent toucher les objets, et enfin dans un troisième temps, ils peuvent les ouvrir afin de voir ce qu'ils contiennent. À chaque étape, Hannah procède à une mise en commun. Le choix des objets a été réfléchi dans le but d'une dissociation des deux grandeurs masse et volume. Parmi les objets choisis, nous en retenons ici deux :

- Deux cartons, l'un volumineux et léger (A), l'autre moins volumineux et plus lourd (B).

On ne voit pas ce qu'il y a à l'intérieur des cartons. Par ces deux choix, elle veut montrer aux élèves que les objets les plus volumineux ne sont pas forcément les plus lourds. Lors de la première étape, soit les élèves sont conscients qu'on ne peut pas répondre à la question sans soupeser ou savoir ce qu'il y a l'intérieur des cartons ou des sacs, soit la conception erronée que le plus volumineux est le plus lourd va émerger. Lors de la deuxième étape, les enfants peuvent toucher les objets. Ici, aucun doute pour savoir celui qui est le plus lourd lorsqu'on soupèse. Les enfants, qui ne savaient pas répondre, vont pouvoir percevoir la masse des objets et donc répondre correctement. D'autres, non déstabilisés, resteront sur leurs idées. La troisième étape devrait convaincre les plus réticents.

- Deux pots de confiture, l'un rempli de pistaches (A) et l'autre d'amandes (B), les niveaux étant identiques. Hannah a choisi deux objets de même volume qui n'ont pas une masse identique.

Comme ici, contrairement aux cartons, les pots sont transparents, les élèves sont conscients du contenu. Certains élèves raisonnent sur le fait que le volume occupé par les fruits secs est le même dans les deux pots. Par conséquent, s'ils ne dissocient pas la masse du volume, ils proposent des masses identiques. Ils peuvent également raisonner sur le nombre de fruits secs dans chaque pot.

Analyse du déroulement

Ici l'objectif est de regarder une enseignante qui, lors du cours sur les masses, associe cette grandeur à celle de volume.

Regardons les réponses des élèves aux comparaisons de masses des objets lors de la première partie de la deuxième tâche, lorsqu'ils ne font que regarder les différents objets.

Pour les cartons : les cinq groupes pensent que le carton B est le plus lourd avec des arguments liés au volume, « le plus gros étant le plus lourd ».

D'autres élèves mobilisent un autre raisonnement lié au fait qu'un des cartons est en mauvais état. Ces élèves font référence à la vie quotidienne : le contenu du carton est plus lourd que l'autre, ce qui entraine sa déformation, *« il est plus lourd parce que le carton il s'est cassé »*.

Certains élèves relient également dur et lourd, des situations qu'ils ont pu rencontrer dans la vie de tous les jours. Le fait que l'objet soit dur signifie, pour eux, qu'il est lourd.

Pour les pots de confiture, deux groupes pensent que le pot A est plus lourd car *il y en a plus.* Ces élèves raisonnent sur le nombre sans prendre en compte la masse. Trois groupes pensent que le pot B est plus lourd car *les amandes sont plus lourdes que les pistaches*. Ils raisonnent sur la masse d'un objet ou sur la masse volumique. Aucun élève ne raisonne sur le volume total.

Tout au long de son activité, par le choix des objets, Hannah essaie de dissocier la masse du volume. Son objectif était de voir de quoi dépend la masse et pour cela, elle se place, comme David, dans un cadre non numérique, plutôt dans un cadre grandeur.

Lors de la construction de la trace écrite, pour elle, la masse ne dépend pas du volume mais que de la matière c'est-à-dire de la masse volumique. Elle n'envisage que la matière qui constitue l'objet comme variable de la masse. Or, la masse dépend du volume pour un objet constitué de la même matière. Mais Hannah ne précise pas qu'elle isole certaines variables. Par conséquent, les élèves ne peuvent plus suivre son raisonnement. En effet, on est en présence d'une relation fonctionnelle à trois variables. Hannah en fixe une sans le préciser aux élèves. Elle veut montrer que ce n'est pas forcément l'objet le plus volumineux qui est le plus lourd, sauf que, si on est en présence d'objets de même matière, l'objet le plus volumineux sera le plus lourd.

H : alors on peut le peser mais qu'est-ce qu'on peut faire aussi pour savoir s'il est lourd ou s'il est léger

[…]

H : ah super il faut savoir ce qu'il y a dedans

[…]

H : le soupeser, je peux voir s'il est lourd ou s'il est léger, mais je peux aussi regarder ce qu'il y a dedans s'il est rempli de coton ce carton, est-ce qu'il va être lourd ou est-ce qu'il va être léger ?

[…]

H : donc ça dépend de ce qu'il y a dedans, d'accord, et ben pour les objets c'est la même chose ça dépend ce qu'il y a comme matière dedans, d'accord avec quoi c'est fabriqué.

La notion de masse volumique est sous-jacente dans les propos de Hannah puisqu'elle relie la masse d'un objet à la matière qui le constitue mais elle oublie une des variables, le volume.

H : d'accord, chut, en fait la masse elle dépend pas du volume, de la taille, elle dépend de ce qu'il y a dedans, de ce avec quoi c'est fabriqué, de la matière qui compose l'objet, d'accord.

Par conséquent, les élèves considèrent maintenant uniquement la matière et ne tiennent plus compte du volume. Hannah essaie de leur montrer qu'il y a trois variables qui sont reliées entre elles :

H : donc ça ne dépend pas, c'est difficile, il faut savoir si c'est des matières différentes, mais il faut savoir si c'est la même matière s'il y a la même quantité, s'il y a la même quantité de matière.

Malgré cette remarque, elle leur fait écrire : *« La masse ne dépend pas du volume ou de la forme mais du matériau dont il est constitué ».*

Il est peut-être difficile de relier les trois grandeurs ensemble chez des enfants de cet âge mais si cela n'est pas fait, la trace écrite n'est pas complète. On a en effet deux cas, lorsque la matière est la même, masse et volume varieront dans le même sens mais lorsque les matières sont différentes, ce ne sera plus le cas.

Au cours de ces séances, nous avons vu une enseignante voulant aborder la dissociation des différentes grandeurs physiques par le choix des objets qu'elle a pris pour les expériences menées en classe. Elle a relié la masse au volume ainsi qu'à la matière tout au long de la séance mais lors de la trace écrite, elle n'envisage plus que la matière. On note ici beaucoup d'implicites lors de la construction de cette trace écrite. En effet, en négligeant un paramètre, la trace écrite n'est pas assez précise : la masse de deux objets dépend du volume si la matière est la même. Il semble difficile de relier trois grandeurs simultanément comme l'a montré Viennot.

VI - DISCUSSION ET CONCLUSION

Nous avons constaté que les programmes s'inscrivent plutôt dans un cadre numérique (formule).

Les manuels scolaires travaillent pour la plupart le sens de la grandeur dans l'activité introductive puis dans les exercices s'inscrivent pratiquement exclusivement dans un cadre numérique.

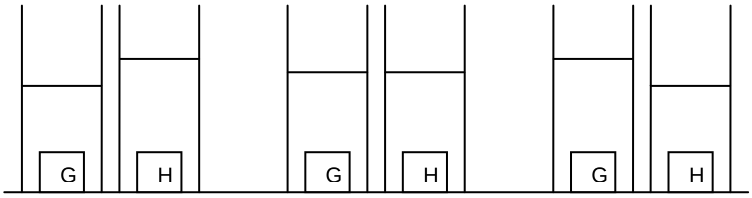
Nous avons vu au travers des séances d'enseignants, des approches différentes avec dans tous les cas un travail sur le sens de la grandeur. Carole commence par un travail sur la grandeur en faisant manipuler des solides. Puis on peut considérer que le cadre numérique est mobilisé à travers des activités de dénombrement de cubes unité pour construire une définition de la grandeur, puis à partir de ce travail elle construit la formule du pavé droit, conformément aux programmes en vigueur. David et Hannah font un cours sur le volume sans aborder la formule du volume du pavé droit comme indiqué dans les instructions officielles. Ils se placent dans un cadre « grandeur ».

David, pour sa séance sur le volume semble avoir fait l'hypothèse qu'il est plus simple d'aborder cette grandeur indépendamment de la masse. Cependant, le choix d'objets qui flottent entraîne les élèves sur les questions difficiles de la flottaison qui, pour eux, induisent forcément la notion de masse, concept que David veut absolument écarter. Son choix de séparer ses leçons sur la masse et sur le volume aurait pu être judicieux s'il avait utilisé d'autres valeurs des variables didactiques ne faisant pas intervenir la notion qu'il veut à tout prix éviter : la masse. Il n'a pas été conscient des enjeux de ses choix. Cet enseignant a fait le choix d'enseigner les différentes grandeurs les unes après les autres sans jamais les relier entre elles. On a vu qu'il était très difficile d'ignorer la masse lors de l'étude du volume. David se heurte également au fait que les élèves n'ont pas du tout construit les notions de contenance et de volume contrairement à ce qu'il pensait. De plus, David refuse les explications ou propositions qui ne font pas intervenir le volume uniquement mais il reste à la charge des élèves de comprendre la raison du rejet de leurs propos.

Hannah a fait le choix de relier la masse et le volume en construisant une séance où les élèves manipulent plusieurs objets pour dépasser leur conception erronée, mais les choses ne sont pas si simples. Comme nous l'avons vu, les élèves ne parviennent pas à faire varier plusieurs paramètres simultanément. Elle va notamment relier la masse au matériau, c'est-à-dire à la matière, ce qui sous entend la masse volumique sauf que les élèves vont se focaliser sur ces deux paramètres en oubliant la notion de volume.

Ces approches très différentes ont généré des activités différentes chez les élèves (il n'est pas toujours facile d'y avoir accès en phase collective), c'est pour cela que nous regardons les résultats des tests que nous avons élaborés. Cependant, il faut être prudent dans l'analyse de ces tests (pas de test préalable, les classes ne sont pas au même niveau). Nous donnons ici les résultats à la question présentée précédemment (Annexe 1) (à savoir 1°) que devient le niveau de l'eau d'un récipient lorsqu'on plonge une boule de pâte à modeler à l'intérieur, 2°) que devient le niveau de l'eau quand on transforme la boule en galette) ainsi qu'à une troisième retranscrite ci-dessous sur la distinction masse/volume.

3. Les objets G et H sont deux cubes de même taille. H est plus lourd que G. Avant l'expérience, l'eau était au même niveau dans les deux récipients. On plonge les cubes G et H dans l'eau. Quel est alors le niveau de l'eau ?



	Question 1 (%)*	Question 2 (%)	Question 3 (%)
Carole	65	40	25
David	84	32	32
Hannah	50	57	43

**Il s'agit ici du pourcentage de réussite.*

On constate que, pour la première question, les élèves de David sont plus nombreux à répondre correctement, ce que l'on peut expliquer par le fait que David a réalisé l'expérience en classe.

Hannah qui travaille la dissociation masse/volume a le taux le meilleur pour la question 3 et ce malgré une classe très faible ; le test comprenait de nombreuses autres questions, les résultats pour la classe de Hannah sont en dessous de la moyenne.

On observe beaucoup d'ambiguïté dans le concept de volume (contenance, volume), que ce soit dans les manuels ou dans les pratiques enseignantes. Il semble nécessaire de développer la formation des enseignants dans le domaine des grandeurs et mesures, à la fois pour améliorer leur maîtrise des concepts en jeu, pour qu'ils soient en mesure de mettre en œuvre les prescriptions officielles et d'avoir du recul sur les enjeux de ces prescriptions qui sont parfois pointues sur ces questions. Nous avons encore besoin de mieux comprendre ce qui se joue à l'intérieur de la classe sur ces questions pour pouvoir développer des ingénieries de formation pour les enseignants, car cela nous semble un objectif essentiel pour les recherches en didactique des sciences.

VII - BIBLIOGRAPHIE

ANWANDTER N. (2008) Étude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume, mémoire de master 2, Université Montpellier 2.

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1991-1992) Le poids d'un récipient étude des problèmes de mesurage en CM. *Grand N*, **50**, 65-87.

CHESNAIS, A. (2009) Analyse de pratiques d'enseignants – analyse *a posteriori* de séances. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel, P., Vandebrouck F., & Wozniak F. (Eds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la XV^{ème} Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand, Août 2009.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7(2)**, 5-31.

MOREIRA BALTAR P. (1994-1995) Etude des situations autour du concept d'aire de surface plane. *Didactique et technologies cognitives en mathématiques*, séminaire n°171, 189-218.

MOREIRA BALTAR P., BELLEMAIN P. (2002) Une étude comparative des choix de transposition didactique à propos du concept d'aire en France et au Brésil, *Actes de la XIème école d'Eté de didactique des Mathématiques*, Grenoble, La pensée sauvage.

PIAGET J. & INHELGER B. (1962) Le développement des quantités physiques chez l'enfant : conservation et atomisme, Neuchâtel, Paris : Delachaux et Niestlé.

PIAGET J., INHELGER B. & SZEMINSKA A. (2ème ed. 1973) La géométrie spontanée de l'enfant. Paris P.U.F.

RICCO G., VERGNAUD G. & ROUCHIER A. (1983) Représentation du volume et arithmétisation - entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **4(1)**, 27-69.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **2(4)**, 505-528.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2005) A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade classe. *Educational studies in mathematics*, **59(1)**, 269-298.

ROBERT A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : Une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In F. Vandebrouck (éd.), *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Éd. Octarès, 33-44.

ROGALSKI J. (1982) Acquisition de notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, **3(3)**, 343-396. La pensée sauvage.

SMITH C., CAREY S. & WISER M. (1985) On differentiation: A case study of the development of the concepts of size, weight and density. *Cognition*, **21(3)**, 177-237.

VIENNOT, L. (1992) Raisonnement à plusieurs variables : tendances de la pensée commune. *Aster*, **14**, 127-141.

Bulletin officiel du Ministère de l'éducation nationale, hors série n°3 du 19 juin 2008, *programme de l'école primaire*.

Bulletin officiel du Ministère de l'éducation nationale, n°6 du 28 août 2008, *programmes du collège, Programmes de l'enseignement de mathématiques*.

Document d'accompagnement collège grandeurs et mesures, octobre 2007

Socle commun des connaissances et des compétences, Ministère de l'éducation nationale, décret du 11 juillet 2006.

Euro Maths, M.-L. Peltier, J. Briand, B. Ngono, D. Vergnes, Hatier, CM2, 2009.

Euro Maths, M.-L. Peltier, J. Briand, B. Ngono, D. Vergnes, Hatier, CM1, 2009.

Euro Maths, M.-L. Peltier, J. Briand, B. Ngono, D. Vergnes, Hatier, CE2, 2010.

Cap maths, R. Charnay, G. Combier, M.-P. Dussuc, D. Madier, Hatier, CM2, 2010.

Maths +, A. Dausse, C. Augé, P. Bérat, SED éditions, CM2, 2012.

Outils pour les maths, S. Carle, S. Ginet, I. Petit-Jean, Magnard, CM2, 2011.

Au rythme des maths, J. Hélayel, C. Fournié, Bordas, CM2, 2010.

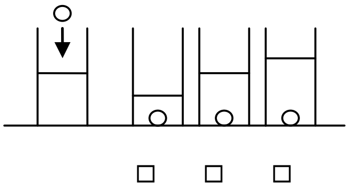
Maths tout terrain, X. Amouyal, J. Brun, A. Errera, Bordas, CM2, 2011.

A portée de maths, A. Caloudis, J. Leclec'h-Lucas, J.-C. Lucas, L. Meunier, Hachette, CM2, 2009.

VIII - ANNEXES

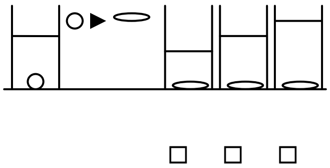
Annexe 1 : Tests (extraits)

1. Quel sera le niveau de l'eau quand on aura plongé une nouvelle boule de pâte à modeler dans le récipient rempli d'eau ? *Coche la case correspondant à ta réponse en-dessous.*



2. On plonge une nouvelle boule de pâte à modeler dans l'eau, on repère le niveau de l'eau. On enlève la boule de pâte à modeler, on la transforme en galette et on la remet dans l'eau. Quel sera le niveau de l'eau ?

Coche la case correspondant à ta réponse en-dessous.



Annexe 1 : Synthèse des réponses obtenues :

Classe	Question 1 Moyenne*	Question 2 Moyenne	Les 2 questions justes Moyenne
14 classes de CM2	62%	53%	28%
6 classes de 6è	70%	48%	26%
4 classes de 5è	64%	56%	33%

*Il s'agit ici de la moyenne de réussite à ces questions sur les classes de CM2 (effectif 289 élèves), de 6è (effectif 68 élèves) et de 5è (effectif 86 élèves).

Pour les « non réussites », voici le détail des réponses des élèves. On n'observe pratiquement aucune « non réponse » (inférieur à 0,5%).

classe	Question 1		Question 2	
	Niveau plus bas	Niveau identique	Niveau plus bas	Niveau plus haut
CM2	9%	28%	14%	33%
6è	2%	28%	12%	40%
5è	6%	30%	21%	24%

Annexe 2 : Extraits des programmes école et collège

Programme CE2, CM1, CM2 :

Mathématiques

3. Grandeurs et mesures

Les longueurs, les masses, les volumes : mesure, estimation, unités légales du système métrique, calcul sur ces mesures exprimées, conversions, périmètre d'un polygone, formule du périmètre du carré et du rectangle, de la longueur du cercle, du volume du pavé droit.

Progressions CE2, CM1, CM2

CM2 : - Formule du volume du pavé droit.

Programme mathématiques du collège

Préambule :

3. Organisation des contenus

Grandeurs et mesures

- se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées)
- connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés

Classe de sixième :

- Déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle en se rapportant à un dénombrement d'unités,* *en utilisant une formule*
- Connaître et utiliser les unités de volume et les relier aux unités de contenance
- Savoir que 1 L = 1 dm^3
- *Effectuer pour les volumes des changements d'unités de mesure*

Classe de cinquième :

- Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle
- *Calculer le volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution*
- Effectuer pour des volumes des changements d'unités de mesure

Classe de quatrième :

- Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = 1/3\ B\ h$

Classe de troisième :

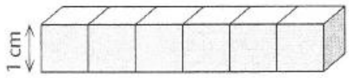
- *Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné*
- Calculer le volume d'une boule de rayon donné
- Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k
  - l'aire d'une surface est multipliée par k^2
  - le volume d'un solide est multiplié par k^3

Annexe 3.A : **Extraits de manuels :**

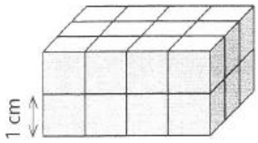
- Au rythme des maths CM2 (Bordas) (volume du pavé droit) (2 pages)

3 Ces deux constructions sont composées de cubes de 1 cm d'arête.
Donne le volume en cm^3 de chaque construction.

a.



b.



Calculer des volumes

4 Calcule le volume de chaque pavé.

a. Dimensions du pavé n° 1 : $3\ m \times 1\ m \times 2\ m$

b. Dimensions du pavé n° 2 : $4\ dm \times 5\ dm \times 6\ dm$

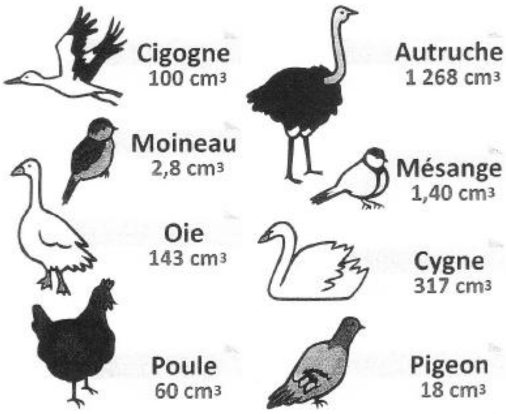
TEST

5 Pour chaque exercice, choisis la réponse A, B ou C qui convient.
Vérifie tes réponses page 140.

	A	B	C
1. Le volume d'un pavé se mesure en...	cm^3	cm^2	cm
2. Pour calculer le volume d'un pavé, je pose...	$L \times \ell$	$(L + \ell) \times 2$	$L \times \ell \times h$

Je résous des problèmes

6 Voici le volume d'un œuf pondu par chacun de ces oiseaux.

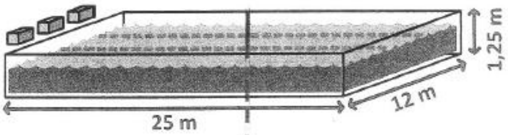


a. Range les œufs du plus petit au plus gros.

b. Recopie et complète : « L'œuf du moineau a un volume double de l'œuf de .... »

7 Erwan a une boîte dont les dimensions sont les suivantes : 12 cm, 4 cm, 90 cm.
Calcule le volume (en cm^3) de la boîte.

8 Une piscine mesure 25 m de long sur 12 m de large et a une profondeur de 1,25 m.
Calcule le volume d'eau (en m^3) contenu dans la piscine.



9 En travaux manuels, Lisa a fabriqué un assemblage avec 3 blocs de mousse.
Calcule le volume (en cm^3) de cet assemblage.
Dimensions de 1 bloc de mousse :
15 cm, 8 cm, 5 cm

Tout dans la tête

Les dimensions d'une boîte sont 8 cm, 5 cm, 9 cm.
Calcule son volume.

Question Express

Combien de cubes de 1 cm^3 peut-on mettre dans 1 dm^3 : 10, 100 ou 1 000 ?

Annexe 3.B : **Extraits de manuels :**

- Euromaths Hatier CE2 (mesures de contenances) (2 pages)
- Euromaths Hatier CM1 (mesures de contenances) (1 page)
- Euromaths Hatier CM2 (mesures de contenances) (2 pages) et (volume du pavé droit) (2 pages)

72

CALCUL MENTAL. Encadrer un nombre par deux multiples de 6.
Reprendre avec les multiples de 7.

Mesures de contenances

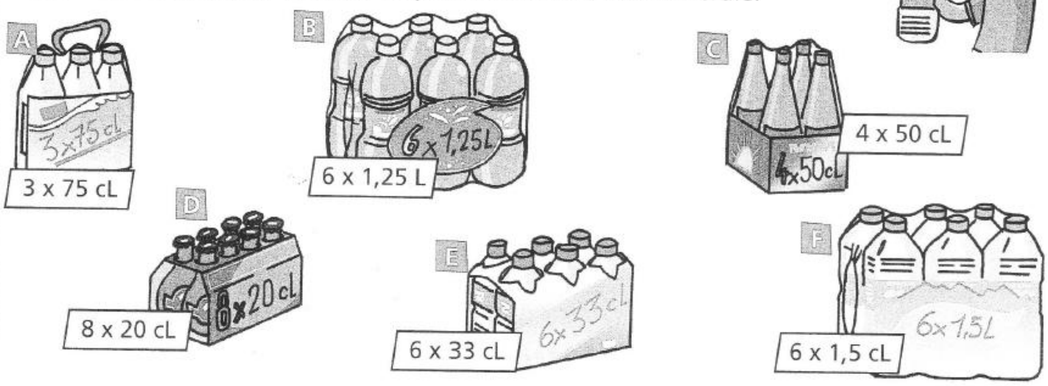
Objectifs : comprendre les relations entre litre (L), centilitre (cL), demi-litre (1/2 L ou 50 cL) et effectuer des opérations simples.

ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE : transvaser de l'eau avec des bouteilles de différentes contenances. Établir les relations entre litre (L) et centilitres (cL), entre 1/2 L et 50 cL, entre 1,5 L et 1 L 50 cL, entre 1,25 L et 1 L 25 cL.

DÉCOUVERTE

1 L c'est 100 cL.
1/2 L c'est 50 cL.

1 Pour chaque pack, calcule la quantité totale d'eau minérale.



2 Range les quantités d'eau contenues dans ces packs de la plus petite à la plus grande.

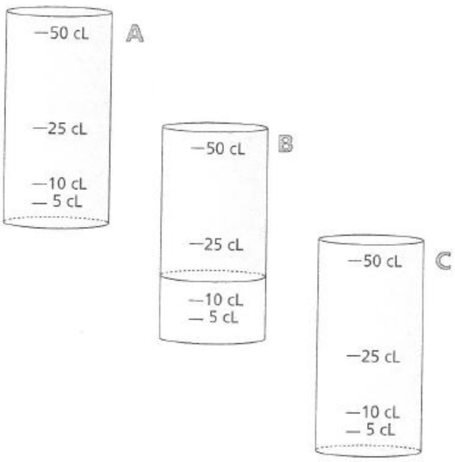
EXERCICES

1 a. Dans le verre doseur A, on verse 25 cL de lait.
Décalque ce verre doseur et trace un trait pour marquer le niveau du lait dans ce verre.

b. Quelle quantité de lait a-t-on versée dans le verre doseur B ?

9 cL   15 cL   20 cL   35 cL

c. Dans le verre doseur C, on verse le contenu des verres A et B.
Décalque le verre doseur C et trace un trait pour marquer approximativement le niveau du lait dans ce verre.



150 • cent cinquante

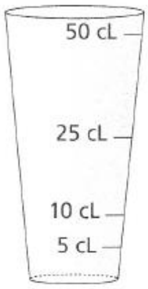
2 Indique comment utiliser ce verre doseur pour mesurer :

a. 75 cL de lait

b. 30 cL de lait

c. 65 cL de lait

d. 1 L 50 cL de lait



3 a. Pour faire cette recette, quelle quantité de jus de citron faut-il verser dans le récipient ?

b. Quelle quantité de jus de pamplemousse faut-il ajouter ?

c. Quelle quantité d'eau faut-il ajouter ?

d. Quelle quantité de boisson chaque personne aura-t-elle ?

e. Anselme veut préparer ce cocktail pour 16 personnes.
Écris les quantités nécessaires de chaque liquide.

Cocktail des îles pour 8 personnes

Dans un récipient, verser :
- 10 cL de sirop de grenadine ;
- le double de jus de citron ;
- 50 cL de jus d'orange ;
- autant de jus de pamplemousse ;

Compléter avec de l'eau pour obtenir 2 L de cocktail.

4 Anne a préparé 3 L de jus de fruit pour une promenade.
Elle a quatre gourdes :
– une contient 50 cL ;
– deux contiennent 75 cL ;
– la dernière contient 1 L.

Pourra-t-elle emporter tout le jus qu'elle a préparé ?

5 Convertis en centilitres les quantités suivantes :

a. 2 L b. 5 L c. 3 L 50 cL d. 1/2 L e. 1 L 75 cL

6 Pour remplir un aquarium de 20 L, Yann utilise un bidon de 3 L.

a. Combien de bidons complets va-t-il pouvoir verser dans l'aquarium ?

b. Quelle quantité d'eau devrait-il ajouter pour que l'aquarium soit plein ?

Remue-méninges

Corentin dispose d'un bidon de 5 L et d'une bouteille de 2 L.

Comment doit-il faire pour avoir exactement **1 L** dans un des deux récipients ?

58

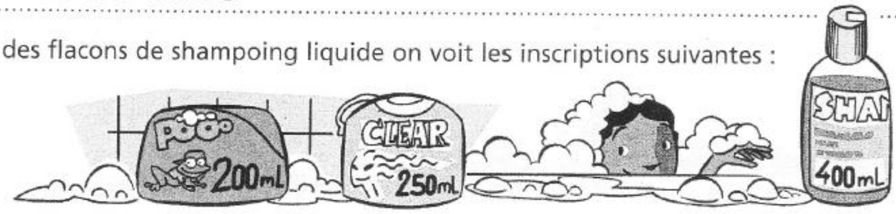
CALCUL MENTAL
Le professeur dit une fraction, les élèves l'écrivent en chiffres.
Le professeur écrit une fraction sur le tableau les élèves la lisent.

Mesure des contenances

Objectif : connaître les unités légales de contenance du système métrique.

DÉCOUVERTE

1. Sur des flacons de shampoing liquide on voit les inscriptions suivantes :



Quelles informations apportent-elles ?

2. Voici différentes contenances de flacons :

Flacons de shampoing	A	B	C	D	E	F	G	H
Contenance	50 mL	100 mL	125 mL	150 mL	175 mL	200 mL	250 mL	500 mL

a. Un coiffeur a vidé, dans la journée, les flacons B, D et H.
Quelle quantité de shampoing a-t-il utilisée ?

b. Le lendemain, il a utilisé 1 litre de shampoing en vidant complètement 4 flacons différents.
Retrouve les flacons qui ont été vidés.

EXERCICES

1 Il existe d'autres unités de contenance que le litre (L), le centilitre (cL) et le millilitre (mL) : il s'agit de l'hectolitre (hL), du décalitre (daL) et du décilitre (dL)

hL	daL	L	dL	cL	mL
1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0

Recopie et complète les égalités suivantes :

a. 4 L = … cL
b. 654 L = 6 ... 54 ….
c. 450 cL = … L … cL
d. 223 L = …. hL … L

2 Trouve, dans chaque cas, la mesure la plus vraisemblable.

a. Une cuillère à soupe :	5 mL	5 cL	5 dL
b. Un verre à moutarde :	12 mL	12 cL	12 L
c. Une bouteille de jus de fruit :	33 cL	33 dL	33 L
d. Un arrosoir :	5 L	50 L	500 L
e. Une casserole :	20 cL	200 cL	2 000 cL
f. Une piscine :	30 L	300 L	30 000 L

59

CALCUL MENTAL
Conversion de mesure d'aires. Ex. : 3 dm^2, c'est combien de cm^2 ?
C'est combien de m^2 ?

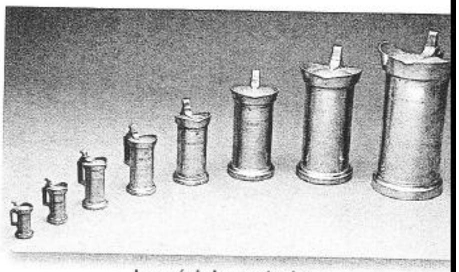
Nombres décimaux et mesure de contenances

Objectifs : connaître les unités légales de contenance du système métrique, faire le lien avec les unités légales de masse

DÉCOUVERTE

Dans les manuels scolaires d'autrefois, on trouvait les unités de capacité suivantes :

- l'hectolitre, le demi-hectolitre ;
- le double-décalitre, le décalitre, le demi-décalitre ;
- le double-litre, le litre, le demi-litre ;
- le double-décilitre, le décilitre, le demi-décilitre ;
- le double-centilitre, le centilitre.



Les récipients étalons du centilitre au double-litre

Voici le tableau de conversion des unités de contenance :

hectolitre	décalitre	litre	décilitre	centilitre	millilitre
hL	daL	L	dL	cL	mL
0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0

Par exemple : 1 L = 100 cL   1 hL = 100 L

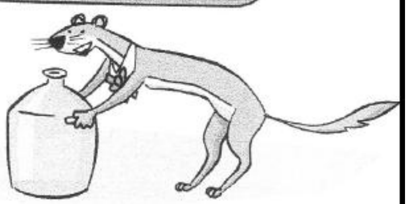
1 a. Combien de litres contient un demi-hectolitre ? un double décalitre ? un double-litre ?
b. Combien de centilitres contient un double-décilitre ? un demi-litre ? 10 millilitres ?

2 La contenance standard des bouteilles de vin est de 75 cL.
Qwang affirme :
« 4 bouteilles, cela fait trois litres. »
A-t-il raison ?

3 Le « souverain » est le nom donné à une bouteille de 26,25 litres.
Trouve avec quels récipients étalons on peut remplir d'eau le souverain en faisant le minimum de transvasements.

4 Un litre d'eau pèse un kilogramme.
Une carafe vide pèse 600 g.
Pleine d'eau, elle pèse 1,35 kg.
Quelle quantité d'eau contient-elle ?

Pour exprimer la quantité contenue dans un récipient, on utilise les expressions contenance, capacité, parfois aussi volume. L'unité de contenance est le litre.



EXERCICES

1 Combien y a-t-il de centilitres dans un quart de litre ? dans trois quarts de litre ?

2 Transforme

a. en litres :	235 cL	450 mL	7 hL	65,4 hL
b. en centilitres :	2 L	0,2 L	3,6 L	235 mL
c. en décilitres :	45 L	3 L	42 cL	750 mL

3 Quelle unité choisirais-tu pour donner une estimation de la contenance

a. d'un pot de yaourt ?
b. d'une bouteille d'eau minérale ?
c. d'une baignoire ?
d. d'une cuillère à café ?
e. d'une piscine ?
f. d'une casserole ?

4 Combien de centilitres manque-t-il à 65 cL pour faire un litre ?

Quelle quantité faut-il retirer à 65 cL pour avoir un demi-litre ?

5 Il faut 22 litres de lait pour fabriquer 1 kg de beurre.

Combien de litres de lait faut-il pour fabriquer une plaque de 250 g de beurre ?

6 2,2 L de lait sont nécessaires pour fabriquer un camembert de 250 g.
Sophie a découpé un camembert en huit portions.

Combien de millilitres de lait a-t-il fallu pour fabriquer une portion ?

7

Théo demande : « Qu'est-ce que c'est un baril de pétrole ?
– C'est une unité de mesure de capacité, lui répond Alice.
– Oui, mais cela fait combien en litres ? demande encore Théo.
– J'ai entendu hier qu'un baril, ça faisait 159 litres. » dit Qwang.

a. En 2005, l'Algérie a produit environ 850 000 barils de pétrole par jour.
Avec le renseignement donné par Qwang, trouve combien de litres de pétrole cela représente.

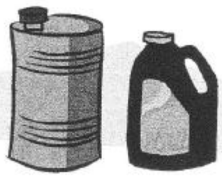
b. On sait que cette quantité de pétrole représentait environ un centième de la production mondiale journalière.

À ton avis, en 2005 la production mondiale journalière de pétrole était de l'ordre de :
8 500 000 barils ? 85 000 000 barils ? 850 000 000 barils ?

Remue-méninges

Thomas est près d'une source. Il dispose d'un bidon de 4 litres et d'un bidon de 3 litres qui ne sont ni transparents, ni gradués.

Comment peut-il obtenir exactement deux litres d'eau dans l'un d'eux en utilisant seulement ces bidons ?



71

CALCUL MENTAL
Jeu de portait sur les nombres entiers ou décimaux.

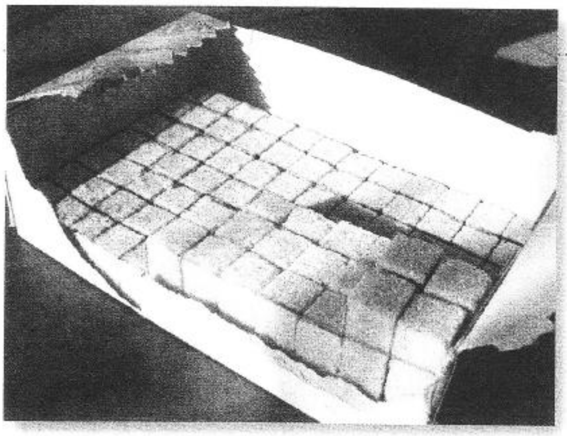
Volume du pavé

Objectifs : comprendre le lien entre les notions de volume et de contenance. Se familiariser avec la formule de calcul du volume dans le cas particulier du parallélépipède rectangle, appelé parfois pavé droit.

ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE DE DÉCOUVERTE : transvasement de sable ou d'eau dans divers contenants dont des pavés droits, remplissage de différentes boîtes avec des cubes unités.

DÉCOUVERTE

Voici une boîte de sucre dont on a déchiré le carton pour voir comment sont disposés les morceaux.



1 a. Combien y a-t-il d'étages ?

b. Combien y a-t-il de morceaux de sucre sur un étage ?

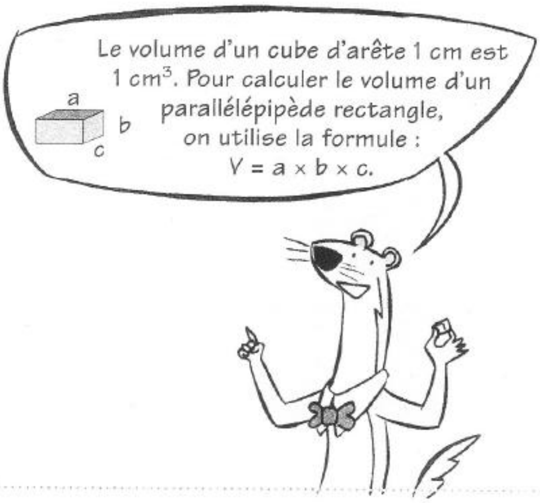
c. Combien y a-t-il de morceaux quand la boîte est pleine ?

2 Ont-ils raison ?

3 a. Avec la formule donnée par le furet, calcule le volume en cm³ de la boîte de sucre.

Compare ce nombre avec le nombre de morceaux de sucre que tu as trouvé à la question 1 c.

b. Calcule le volume des boîtes de Théo et d'Alice.



4 a. Combien de morceaux de sucre (cubes d'arête 1 cm) sont nécessaires pour remplir un cube d'arête 1 dm ?

b. Quel est le volume de ce cube ?

c. Complète l'égalité : 1 dm³ = … cm³.

EXERCICES

1 Une malle parallélépipédique a pour dimensions 90 cm, 60 cm et 50 cm.
Quel est son volume ?

2 Le volume d'une boîte parallélépipédique est 1 260 cm^3 ; le fond est un rectangle de 12 cm sur 15 cm.
Quelle est la hauteur de la boîte ?

3 a. Combien de cubes d'arête 1 cm sont nécessaires pour remplir un cube d'arête 1 m ?
b. Le volume d'un cube d'arête 1 m est 1 m^3. Complète l'égalité : 1 m^3 = … cm^3.

4 Complète. Tu peux t'aider du tableau de conversion.
a. 1 dm^3 = … cm^3 1 cm^3 = … dm^3
b. 1 m^3 = … dm^3 1 dm^3 = … m^3
c. 1 cm^3 = … mm^3 1 mm^3 = … cm^3

m^3	dm^3	cm^3	mm^3
000	001	000	000
000	000	001	000

5 Quel est le volume d'un récipient qui contient $\frac{1}{2}$ L ?

6 a. Combien de litres sont contenus dans un récipient qui a un volume de 1 m^3 ?
b. Complète le tableau.

Volume	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3	1 mm^3
Contenance	… L	… L	… cL	… mL

7 Quelle est la contenance en litres d'une boîte parallélépipédique de dimensions 30 cm, 5 cm, 10 cm ?

8 Un flacon contient 25 cL de liquide.
Quel est son volume en cm^3 ?

9 Une piscine municipale mesure 25 mètres de long, 10 de large et a une profondeur constante de 1,5 mètres. Un m^3 d'eau pèse une tonne (1 000 kg).
Quel est la masse d'eau totale, en tonnes ?

10 Un semi-remorque pèse 3,75 tonnes.
À combien de semi-remorques la masse d'eau de la piscine de l'exercice 9 correspond-elle ?

Remue-méninges

On a placé deux aquariums cubiques dans un jardin. L'arête du premier mesure 30 cm, l'arête du second mesure 20 cm.
Après une forte averse, la hauteur d'eau dans le premier aquarium est 4 cm.
Quelle est la hauteur d'eau dans le second ?