

APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ET RESSOURCES POUR LES ENSEIGNANTS

Jacques DOUAIRE

Équipe ERMEL - IFé

LDAR – ESPE Académie de Versailles - UCP

jacques.douaire@u-cergy.fr

Fabien EMPRIN

Équipe ERMEL - IFé

CEREP - Université Reims Champagne Ardennes - ESPE

fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé

Au cycle 2 le recours à la ligne droite, l'appréhension de ses propriétés et des contraintes techniques du tracé, sont rencontrés dans des problèmes d'alignement de points ainsi que dans des problèmes de représentation d'objets du plan ou de l'espace sollicitant des propriétés du trait droit (rectitude) indépendantes de l'alignement de points. Cet apprentissage pose plusieurs questions :

- Quelles sont les éléments problématiques de ces apprentissages, et notamment quelle articulation possible au cycle 2 entre ces deux aspects (alignement de points et rectitude de traits) ?
- Quelles sont les possibilités et les limites de transfert entre les procédures développées dans le méso-espace et dans celui de la feuille de papier ?

Cette communication a aussi pour but d'explicitier certaines questions que nous nous posons sur la production des ressources valorisant les résultats de notre recherche et en particulier sur la rédaction des dispositifs d'enseignement.

I - PRÉSENTATION

L'équipe ERMEL a conduit des recherches sur les apprentissages mathématiques à l'école, d'abord dans le domaine numérique puis géométrique. Le but de la recherche actuelle est d'analyser les compétences spatiales et géométriques que les élèves de l'école primaire, principalement au cycle 2, peuvent construire par l'utilisation conjointe de différents environnements notamment des logiciels de géométrie.

Cette recherche conduit à la production de savoirs sur ces apprentissages et à la production de ressources pour les enseignants et les formateurs. Les étapes de la recherche comportent :

- 1) Une analyse du savoir géométrique (problèmes, propriétés...), ainsi que des connaissances spatiales que les élèves ont pu développer.
- 2) L'organisation de l'étude des différentes notions spatiales et géométriques, sur les trois années du cycle.
- 3) L'élaboration de situations didactiques et leur expérimentation dans plusieurs académies.
Ces trois composantes sont en interaction : l'identification des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées.
- 4) La rédaction d'un ouvrage pour les formateurs et pour les enseignants du premier degré comportant une explicitation des enjeux des apprentissages et des problématiques de l'enseignement dans ce domaine et parmi les dispositifs d'enseignement expérimentés, les progressions et les situations qui ont été retenues.

Ces étapes de la recherche et les résultats seront explicités à partir de l'étude d'un des nombreux thèmes relatifs aux apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2 : celui de l'alignement.

II - L'ÉTUDE D'UN APPRENTISSAGE : CELUI DE L'ALIGNEMENT

L'approche de la droite peut être appréhendée par les élèves du cycle 2 à travers différentes significations liées à la perception ou l'expérience : un objet matériel (fil tendu, bord d'un objet rectiligne, pli d'une feuille...), un objet du monde graphique (trait rectiligne, tracé sur un écran par l'outil « droite » dans un logiciel de géométrie dynamique comme Cabri©...). Ces significations sont associées à des problèmes portant sur l'identification, la production d'alignements ou de traits rectilignes, et sur la reconnaissance ou l'usage d'instruments utilisés dans ces buts.

1 Hypothèse initiale

Compte tenu de ce qui avait été produit lors de la recherche sur le cycle 3, nous pensions que des compétences (ou des connaissances) pouvaient être construites au CE1 à partir du même type de problèmes que ceux que nous avons proposés au CE2.

Nous avons envisagé, au début de la recherche, une appréhension de la notion d'alignement favorisée par le passage d'expériences spatiales centrées sur l'idée de cacher un objet (au moyen de la visée) à partir d'activités vécues dans le méso-espace, reprises ensuite sur la feuille de papier dans le but de mettre en évidence le recours à la ligne droite.

Il s'agissait de poser des problèmes d'alignement dans le méso-espace (situation « Plots ») ou dans un grand micro-espace (situation « Biglotron ») puis de passer à une « modélisation » sur A3/A4 dans les deux cas ; cette modélisation avait pour but de recourir au tracé de droites passant par des points représentant les objets de l'espace.

Le choix était donc au début de la recherche de donner du sens à des situations d'alignement de points dans le méso-espace pour ensuite faire apparaître la ligne droite comme un moyen efficace de résoudre ces problèmes dans le micro-espace, ce qui pourrait s'exprimer de façon un peu lapidaire par « **du méso surgit la droite** ». Dans ce sens la progression était plus dirigée par son but que par notre connaissance des potentialités des élèves du cycle 2.

2 Analyse des difficultés rencontrées dans le passage du méso-espace au micro-espace

Alors que les élèves développaient des procédures spatiales de résolution s'appuyant sur la visée et d'autres gestes dans le méso-espace, la modélisation par une droite de la visée n'était pas effective dans la résolution d'une situation sur papier dans le micro-espace. De plus des difficultés se posaient pour le tracé à la règle de traits droits, beaucoup de productions comportant des lignes brisées.

Une reprise de la situation utilisant Cabri© semblait rendre possible ce passage au CE1 : les élèves ayant recours aux tracés de droites pour produire avec Cabri© la solution du problème d'alignement de plots. Toutefois, nous n'avons pas pu en vérifier le réinvestissement à plus long terme sur la feuille de papier.

Nous listons ici les résultats des expérimentations en termes de difficultés pouvant être liées :

- à la compréhension de la modélisation sur une feuille A3 d'une situation vécue dans la cour :
 - au passage 3D méso / 2D micro (vue de dessus...) et à la disparition du sujet (élève) dans le micro-espace du dispositif méso-espace ;
 - à la représentation d'objets physiques (cônes) par des schématisations (cercles, points) ;
 - à ce que le trait droit était sensé représenter : le regard, le tracé sur le sol ...
- aux tracés de traits droits (cf. les difficultés déjà développées) ;
- à l'insuffisance des éléments langagiers dans la situation « Plot » pour évoquer une action et son déroulement pour la situation en micro.

Ces résultats expérimentaux ont donc mis en évidence la nécessité d'un travail qui fait l'objet actuellement d'une expérimentation permettant l'appréhension en acte des significations et de certaines propriétés de la droite dès le cycle 2 indépendamment de la représentation d'alignement de points.

III - UN APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUE DE LA RECTITUDE

1 Significations de la notion de trait droit

Le concept de droite et les notions associées (trait droit, alignement,...) peuvent être appréhendés par l'élève du cycle 2 à travers différentes significations induites par la perception ou l'expérience :

- un objet matériel : un fil tendu, un objet ou un bord d'objet rectiligne, un rayon lumineux, un pli de feuille... voire des objets « composés » (un mètre de menuisier que l'on déplie, des baguettes mises bout à bout...);
- la frontière entre (des objets matériels ?) :
 - deux régions planes de l'espace, comme les arêtes d'un polyèdre ;
 - deux régions du plan, comme les côtés d'un polygone, des demi-plans ;
- objet du monde graphique : un trait rectiligne (qui peut être prolongé au-delà des extrémités) ;
- la trace :
 - trace produite par un tracé avec la règle ;
 - trace écran provoquée par l'outil « droite » dans Cabri© ;
- la trajectoire d'un objet ponctuel animé d'un mouvement rectiligne (bille,...) ;
- un ensemble de points alignés : le lieu de points alignés avec deux points.

Parmi ces significations du trait droit, celles privilégiées dans nos situations pour le CP sont celles de bords de bandes parallèles, de contours d'une figure, de traits comme réunion de segments rectilignes. Les critères de validation sont soit simplement perceptifs (régularité du tracé ou ressemblance avec un modèle) soit en relation avec une référence plus ou moins explicite au parallélisme (direction...), soit constitués par une validation pratique (coïncidence des extrémités, superposition, actions sur les objets...).

2 Présentation de deux situations

- « Papier peint » : Les élèves ont à reproduire un papier peint (au motif formé de traits parallèles) en prolongeant des traits placés sur une feuille amorçant le dessin du motif.
- « Formes empilées » : Les élèves ont à représenter un empilement de formes (rectangles, triangles) et à anticiper le tracé de ces formes suivant la contrainte d'empilement.

3 Objectifs communs

À ces significations peuvent être associés des problèmes concernant soit :

- la production de traits rectilignes ;
- l'identification de traits rectilignes (jugement) ;
- la reconnaissance et l'usage des instruments susceptibles d'être utilisés pour identifier ou produire un alignement ou une ligne droite.

Ce travail sur la notion de « rectitude », bien qu'il puisse être amorcé en GS avec la production de tracés réguliers effectués dans des activités de dessin, ne prend réellement sa dimension géométrique qu'au CP où des propriétés du trait droit peuvent donc être appréhendées. Ces

propriétés ne sont pas encore des objets d'étude pour elles mêmes, mais constituent d'abord des expériences :

- un trait peut représenter quelque chose qui n'a pas laissé de trace matérielle (ex : visée) ;
- un trait peut être associé à des instruments ;
- un trait peut être prolongé, par exemple pour pointer un objet caché.

4 Différents niveaux de maîtrise peuvent être associés à ces significations

- Comprendre qu'il faut tracer un trait droit pour résoudre le problème ; c'est ici le rôle des formulations (validation par le langage, assez consensuelle), rôle des gestes (main levée).
- Savoir comment il faut placer la règle pour tracer un trait plus long que celle-ci ; il s'agit de la connaissance de la technique (report de la règle) et l'aspect technologique : nommer les outils, décrire l'action...
- Maîtrise de la technique de tracé (validation par la production).

5 Des questions posées

- Quelle robustesse des situations ? Les dispositifs (progressions, situations) que nous avons élaborés privilégient une construction de connaissances s'appuyant sur la résolution de problèmes. Ils présentent une certaine « robustesse » liée notamment à ce que les résultats et procédures qui seront produits par les élèves dans une classe sont exposés dans le descriptif des situations, ce qui permet au maître, en général non spécialiste des mathématiques, de pouvoir anticiper ses décisions en fonction des productions propres à sa classe. Cette fiabilité nous semble due d'une part à la cohérence entre les conceptions de l'apprentissage et les situations proposées et, d'autre part, à leur expérimentation dans de nombreuses classes durant plusieurs années.
- Sur les apprentissages spatiaux : les apprentissages spatiaux ou géométriques ne sont pas perçus par l'environnement familial de l'élève et parfois par les enseignants comme présentant un caractère de nécessité tant scolaire que social. De plus leur contribution aux apprentissages ultérieurs se réduit parfois dans les classes à un apprentissage précoce, voir inefficace, d'un vocabulaire. Il nous paraît donc nécessaire de développer des apprentissages spatiaux portant notamment sur l'analyse des représentations d'objets lors de changement d'espaces.
- Par la production de ces ressources pour la maternelle. Dans les classes de maternelle où nous expérimentons, les situations didactiques côtoient des « jeux » ou des projets pluridisciplinaires. Des enseignants transforment, modifient les situations de façon à les adapter à leur projet en cours ou au matériel usuel... Il nous semble donc important de réfléchir à la place qu'il est possible de laisser à ces adaptations dans la conception de nos situations et en particulier dans l'articulation entre les situations didactiques et les situations de construction d'expériences. Il est aussi crucial, compte tenu de la diversité de ces appropriations de mettre en évidence quels sont les apprentissages indispensables parmi l'ensemble des possibles.

IV - DES INTERROGATIONS RÉCURRENTES SUR L'APPROPRIATION DES DISPOSITIFS D'ENSEIGNEMENT PAR LES ENSEIGNANTS

Un des enjeux de notre méthodologie est de permettre l'appropriation par les enseignants des dispositifs d'enseignement produits. Si notre recherche actuelle ne comporte pas spécifiquement

de volet portant sur cette question¹ nous émettons des hypothèses basées sur le travail des enseignants associées avec lesquels nous travaillons et sur nos échanges notamment lors des colloques tels que ceux de la COPIRELEM.

Les conditions que nous considérons comme nécessaires pour que l'appropriation de nos dispositifs soit possible sont que les enseignants :

- perçoivent mieux les relations entre les connaissances spatiales que peuvent développer les élèves et les connaissances géométriques ;
- prennent conscience de l'ensemble des significations d'une notion et des situations associées ;
- identifient les caractéristiques essentielles des situations didactiques.

Pour cela nous mettons en évidence ces éléments dans nos publications tant dans leur structure que dans les parties « théoriques ».

Les enseignants débutants sont également une de nos préoccupations et nous avons essayé d'identifier, dans nos expériences de formateurs, des difficultés spécifiques telles que celles liées au processus de dévolution, à la gestion des mises en commun qui sont souvent accentuées par des difficultés d'analyse à chaud des productions des élèves et ou à l'institutionnalisation.

Pour aider ces enseignants débutants et les enseignants en général il nous faudrait pouvoir identifier dans un premier temps si la source des difficultés est essentiellement didactique ou pédagogique. Dans le premier cas, une analyse didactique des enjeux des situations, des difficultés des élèves et de leurs potentialités permettrait d'anticiper les procédures des élèves pour mettre en place une mise en commun, de savoir ce qui est visé et doit être institutionnalisé... dans le second cas des narrations de situations détaillant les gestes pédagogiques attendus, l'organisation matérielle et temporelle de la séance permettrait de construire, dans un premier temps, les conditions d'une mise en œuvre de la séance puis à l'enseignant d'acquérir l'expérience nécessaire.

En tant que chercheurs en didactique nous privilégions la première piste en essayant de trouver des modalités qui permettent de ne pas négliger la seconde.

V - CONCLUSION

Pour notre équipe, les exigences liées à la production de ressources qui présentent à la fois les enjeux des apprentissages, le savoir mathématique, l'analyse de l'état de savoir des élèves, les problématiques d'enseignement et des dispositifs d'enseignement que peuvent s'approprier les maîtres, notamment dans le cadre de la formation, sont présentes à toutes les étapes de notre recherche.

La production de ce type de ressources nous paraît une exigence pour la communauté didactique.

¹ Nous avons, dans une recherche précédente, analysé des choix d'enseignants dans la conduite des situations, cf. Douaire J., Argaud H.-C., Dussuc M.-P., Hubert C, (2003) « Gestion des mises en commun par des maîtres débutants » in « Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes, (coordination Colomb J., Douaire J., Noirfalise R. ADIREM/INRP).

VI - BIBLIOGRAPHIE

DOUAIRE J., EMPRIN F., RAJAIN C., (2009) L'apprentissage du 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants, *Repères IREM*, **77**, 23-52.

ÉQUIPE ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*, Hatier.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, **10**, 5-55.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C., LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?, *Repères IREM*, **90**, 5-41.