

COMPARAISON FRANCO-ESPAGNOLE DE RESSOURCES SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA MODÉLISATION

Richard CABASSUT

Enseignant, Université de Strasbourg
LDAR Université Paris 7
richard.cabassut@unistra.fr

Irène FERRANDO

Enseignante, Universidad de Valencia
Departamento de didáctica de las matemáticas
irene.ferrando@uv.es

Résumé

La modélisation est un thème important des programmes de l'enseignement secondaire en France et en Espagne, et on peut également relier ce thème aux programmes de l'enseignement primaire. Dans cette étude, nous considérons différentes ressources de l'école primaire disponibles pour un enseignement de la modélisation. Nous adoptons une approche comparative entre les deux pays, pour mieux mettre en évidence les différences dans les ressources des manuels. Nous proposons une typologie des ressources en s'appuyant sur les fonctions qui vont y être assignées. Pour cela, nous étudions les compétences qui sont mises en jeu dans les tâches de modélisation et qui sont aussi en relation avec les recommandations des textes officiels des programmes d'enseignement de l'école primaire. Nous discutons aussi quelques implications possibles pour une formation à la modélisation des enseignants de l'école primaire.

Maass (2006)¹ étudie les cinq compétences qui interviennent quand les élèves font face à une tâche de modélisation :

- Compétence pour comprendre le problème réel et pour établir un modèle réel (hypothèses, simplifications, reconnaissances des variables et relations entre elles, recherche d'information).
- Compétence pour établir un modèle mathématique à partir du modèle réel (mathématisation de quantités et relations, simplification, choix de notation).
- Compétence pour résoudre des questions mathématiques à propos du modèle (stratégies heuristiques, savoir mathématique).
- Compétence pour interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle (interprétation, généralisation, usage approprié du langage mathématique et communication de la solution).
- Compétence pour valider la solution (analyse critique de la solution, révision du modèle, autres solutions possibles, généralisation).

¹ Les traductions à partir de l'anglais, de l'espagnol ou de l'allemand dans cet article ont été assurées par les auteurs de l'article.

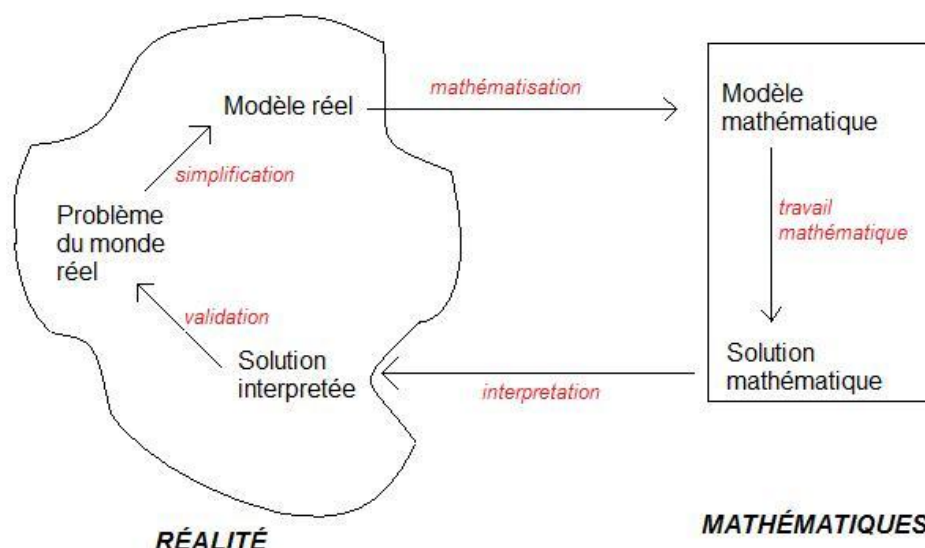


Fig. 1 : Diagramme du cycle de modélisation

Dans cet article nous proposons de comparer, en France et en Espagne, la mise en œuvre de ces compétences dans les programmes et dans des manuels de l'école primaire. Commençons par comparer les programmes.

I - LES COMPÉTENCES EN MODÉLISATION DANS LES PROGRAMMES

1 Les compétences en modélisation dans le programme espagnol de l'école primaire

Le programme espagnol de l'école primaire (BOE, 2007) est construit sur la base de huit compétences basiques que doivent se travailler le long des cycles primaire et secondaire (entre 6 et 16 ans). Les compétences, qui correspondent aux connaissances considérées indispensables d'un point de vue intégrateur et orienté vers l'application des savoirs acquis, sont les suivantes² :

- Compétence en communication (CC)
- Compétence mathématique (CM)
- Compétence sur la connaissance et l'interaction avec le monde physique (CCI)
- Savoir traiter de l'information et compétence digitale (CID)
- Compétence sociale (CS)
- Compétence culturelle et artistique (CCA)
- Compétence pour apprendre à apprendre (CAA)
- Être capable d'autonomie et d'initiative personnelle (AI)

La méthodologie, que nous adoptons dans cet article, consiste à examiner alors les compétences de modélisation de Maass et, pour chacune d'elle, à citer des extraits du programme officiel qui sont en rapport avec cette compétence de modélisation. Nous indiquons également, pour chaque extrait, quelle est sa relation avec les compétences basiques en rappelant au regard de l'extrait du programme le code correspondant de la compétence basique- CC, CM, CCI, CID, CS, CCA, CAA, AI. Ces mises en relations, par les auteurs de l'article, du programme officiel avec les compétences de modélisation d'une part, et les compétences basiques d'autre part se font sur la base de considérations sémantiques : si un extrait du programme officiel paraît rejoindre la signification

² Le programme utilise bien le terme « competencias » que nous traduisons par « compétences »

d'une compétence de modélisation (respectivement d'une compétence basique), la mise en relation est effectuée.

1.1 Compétence pour comprendre le problème réel et pour établir un modèle réel

(CC) liée aux « outils pour représenter mentalement, interpréter et comprendre la réalité ».

(CCI) « rend possible la compréhension des événements », « intègre les aptitudes pour (...) interpréter le monde » et « rend possible l'identification des questions ou des problèmes ». Tout cela « implique la compétence pour mettre en jeu les processus et les attitudes propres de l'analyse systématique et de recherche scientifique : poser des problèmes, ... ».

(CID) « consiste à disposer des outils pour chercher, obtenir, traiter et communiquer l'information » ; cette compétence est associée avec « la recherche, la sélection, le registre et le traitement l'analyse de l'information ». De plus, « les technologies de l'information (...) s'utiliseront avec une fonction génératrice, en les employant, par exemple, comme outil pour obtenir des modèles de processus mathématiques, physiques, sociaux, ... »

(CCA) cette compétence met en jeu « les aptitudes de pensée divergente et convergente puisqu'elle implique la réélaboration d'idées ».

(AI) cette compétence exige « l'analyse des possibilités et des limitations, de connaître les phases de développement d'un projet, de planifier, de prendre des décisions, ... ».

1.2 Compétence pour établir un modèle mathématique à partir du modèle réel

(CM) correspond à l'aptitude pour « résoudre des problèmes qui sont en relation avec le quotidien et avec le monde du travail ».

Dans la description des mathématiques qui doivent se travailler en primaire on trouve aussi quelques références à cette compétence : « (Les mathématiques) permettent structurer les savoirs qu'on obtient de la réalité, l'analyser et obtenir d'autres informations pour mieux la connaître et l'évaluer, ainsi que prendre des décisions » ; de plus, « elles permettent qu'on se pose des questions, qu'on obtienne des modèles et qu'on identifie des relations pour analyser les phénomènes et les situations qui se présentent dans la réalité ».

1.3 Compétence pour résoudre des questions mathématiques à propos du modèle

(CM) la compétence mathématique exige « la connaissance et la gestion des éléments mathématiques basiques (types de nombres, mesures, symboles, éléments géométriques, ...) ». Dans le programme des mathématiques du primaire, on insiste sur l'idée « de chercher une alphabétisation numérique, entendue comme la capacité d'affronter avec succès les situations où interviennent les nombres, ses relations, pour obtenir l'information utile ».

1.4 Compétence pour interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle

(CM) correspond à « l'aptitude pour interpréter et exprimer clairement et de forme précise des informations ou des données ». À travers la matière de mathématiques, les élèves doivent comprendre que « l'interprétation des résultats est un contenu préalable et prioritaire face à la dextérité de calcul ».

1.5 Compétence pour valider la solution

(CM) les processus liés à cette compétence « permettent d'estimer et de juger la logique et la valeur des arguments et des informations (...) ce qui conduit à identifier la validité des raisonnements ainsi qu'à évaluer le degré de certitude associé aux résultats obtenus. »

(CCI) cette compétence « fournit, aussi, des compétences associées à la planification et gestion des solutions ».

(CID) permet de « communiquer l'information et les connaissances acquises en employant des ressources d'expression avec l'incorporation (...) des possibilités offertes par les technologies de l'information et la communication ».

(CAA) « implique la curiosité pour se poser des questions, d'identifier et de gérer toutes les réponses possibles face à une même situation ou un problème en utilisant diverses stratégies qui permettent d'affronter la prise de décisions critiques, avec toute l'information disponible ».

2 Les compétences en modélisation dans le programme français de l'école primaire

Dans le programme français, on peut distinguer différents textes officiels de référence :

- le programme officiel de 2008 (BOEN 2008),
- le socle commun de 2006 (BOEN 2006),
- les documents ressources sur le nombre au cycle 2 (2010) et au cycle 3 (2012),
- d'autres documents comme les anciens documents d'accompagnement des programmes de 2002, notamment sur les problèmes (2005), ou encore le rapport de l'inspection générale sur l'enseignement des mathématiques en cycle 3 (2010).

Concentrons-nous sur le socle commun et sur le programme de 2008, en adoptant la même catégorisation que pour les compétences basiques espagnoles (CC, CM, CCI, CID, CS, CCA, CAA, AI). Les compétences qui apparaissent dans le socle commun français sont :

- la maîtrise de la langue française et la pratique d'une langue étrangère (CC)
- la connaissance des principaux éléments de mathématiques (CM)
- la maîtrise d'une culture scientifique et technologique (CCI)
- la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication (CID)
- la possession d'une culture humaniste (CCA)
- les compétences sociales et civiques (CS)
- l'accession à l'autonomie et l'acquisition de l'esprit d'initiative (AI)

Déclinons maintenant les compétences de modélisation, dans la catégorisation de Maass, avec des extraits des textes officiels référant au socle commun (SO) ou bien au programme de 2008.

2.1 Compétence pour comprendre le problème réel et pour établir un modèle réel

- pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner (SO)
- manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter (SO)
- estimer l'ordre de grandeur d'un résultat (SO)
- mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions
- exprimer et exploiter les résultats d'une mesure ou d'une recherche en utilisant un vocabulaire scientifique à l'écrit et à l'oral
- maîtriser des connaissances dans divers domaines scientifiques
- mobiliser ses connaissances dans des contextes scientifiques différents et dans des activités de la vie courante (par exemple, apprécier l'équilibre d'un repas) (SO)
- prendre part à un dialogue : prendre la parole devant les autres, écouter autrui, formuler et justifier un point de vue (SO)
- montrer une certaine persévérance dans toutes les activités (SO)
- utiliser l'outil informatique pour s'informer, se documenter, présenter un travail (SO)

2.2 Compétence pour établir un modèle mathématique à partir du modèle réel

- pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner (SO)
- manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter (SO)
- mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions ;
- exprimer et exploiter les résultats d'une mesure ou d'une recherche en utilisant un vocabulaire scientifique à l'écrit et à l'oral ;
- maîtriser des connaissances dans divers domaines scientifiques ;
- mobiliser ses connaissances dans des contextes scientifiques différents et dans des activités de la vie courante (par exemple, apprécier l'équilibre d'un repas) (SO)
- prendre part à un dialogue : prendre la parole devant les autres, écouter autrui, formuler et justifier un point de vue (SO)

2.3 Compétence pour résoudre des questions mathématiques à propos du modèle

- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres (SO)
- savoir organiser des informations numériques ou géométriques, mesures, "règle de trois", figures géométriques, schémas (SO)
- justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat (SO)
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques (SO)

2.4 Compétence pour interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle

- justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat (SO)
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques (SO)

2.5 Compétence pour valider la solution

- estimer l'ordre de grandeur d'un résultat (SO)
- faire preuve d'esprit critique face à l'information et à son traitement (SO)
- prendre part à un dialogue : prendre la parole devant les autres, écouter autrui, formuler et justifier un point de vue (SO)
- commencer à savoir s'auto-évaluer dans des situations simples (SO).

Ainsi Maass a proposé une catégorisation des compétences de modélisation en cinq grandes catégories. Nous avons pu analyser les programmes à partir de ces catégories et observer que des relations peuvent être construites entre les compétences basiques et les compétences de modélisation. De notre point de vue, les activités de modélisation où on travaille le cycle complet sont la clef pour travailler les compétences basiques.

II - LES COMPÉTENCES DANS DES MANUELS

Nous allons maintenant illustrer la mise en œuvre des compétences de modélisation dans des manuels. De nombreuses études (Margolinas, Wozniak 2010) ont montré l'importance des manuels scolaires dans l'enseignement. Pour les manuels espagnols, il a été choisi la collection la plus utilisée. Pour la France, il ne s'agit pas de choisir les manuels les plus utilisés ou les plus représentatifs : il est difficile de faire une sélection suivant ces critères en l'absence d'outils incontestables mesurant la représentativité ou l'utilisation. Il s'agit plutôt de construire une clinique de mises en œuvre des compétences de modélisation dans des manuels. On observera la difficulté à trouver, pour certaines compétences, leur mise en œuvre dans des manuels. Nous

livrerons les conclusions de l'observation dans la dernière partie.

1 Comprendre le problème réel et établir un modèle réel

1.1 Distinguer les questions mathématiques des questions extra-mathématiques

L'activité présentée ci-contre correspond à « pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner » ; cet exemple est extrait d'un livre français niveau CP (ERMEL 2000, p. 85). On demande aux élèves de formuler des questions à partir de l'image proposée et de distinguer les questions mathématiques (par exemple mettant en jeu un dénombrement) des questions extra-mathématiques. Cet extrait est intéressant car il concerne la première année de l'école primaire et une collection de manuel emblématique pour la formation des maîtres.



1.2 Faire des hypothèses sur le monde réel

Cet extrait, adressé aux élèves de CM1 (Myx & al. 2003, p.141) montre qu'une connaissance extra-mathématique est institutionnalisée dans le manuel de mathématiques pour permettre aux élèves de la mobiliser dans la phase de construction d'un modèle.

La proportionnalité

*Le prix de la viande est proportionnel à son poids.
Le prix des bouteilles est proportionnel au nombre de bouteilles.
Le prix d'un tissu est proportionnel à sa longueur.*

Dans les situations de la vie quotidienne, les prix sont, en général, **proportionnels** aux quantités.

Dans un barème, les deux grandeurs sont proportionnelles.

Pour trouver le prix de plusieurs objets, je multiplie le nombre d'objets par leur prix unitaire.

La distance sur le terrain est proportionnelle à celle de la carte.

Pour trouver la distance sur le terrain, je multiplie la distance sur la carte par l'échelle.

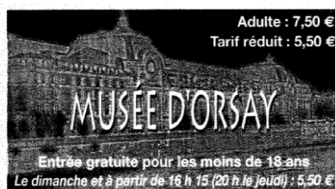
Les trajets sont proportionnels aux durées lorsque la vitesse ne change pas.

Lorsque la durée **double**, triple, quadruple... la **mesure** du trajet double, triple, quadruple.

1.3 Relier données utiles et questions simples

Les deux activités suivantes sont extraites de Caloudis et al. (2008, p.60, 70), et adressées aux élèves de CM2. Elles illustrent le travail sur la distinction entre données utiles et données inutiles par rapport à la question posée. On observe que les questions proposées ou à proposer sont fermées : il n'y a pas plusieurs hypothèses qui pourraient orienter vers des réponses différentes à la même question. Ce sont plutôt des questions intermédiaires simples que l'on trouverait dans le cadre d'un problème à plusieurs étapes.

Aujourd'hui dimanche, un père emmène ses deux enfants âgés de 8 et 10 ans au musée d'Orsay.



Les informations contenues dans un énoncé de problème permettent de trouver la ou les questions auxquelles on peut répondre.

Attention ! Il est très important de bien comprendre la situation proposée avant de débiter la résolution d'un problème.

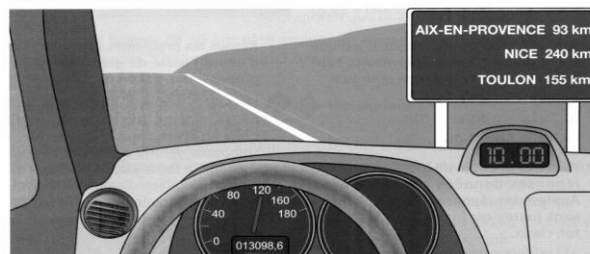
1 Trouve la question qui complète chaque énoncé.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| A Julien s'est couché à 23 h 40 et s'est levé à 10 h 20. | 1 Quel âge a-t-il ? |
| B Au marché, papa achète 5 kg de pommes de terre, 1 kg de bananes et 500 g de cerises. | 2 À quelle heure arrive-t-il ? |
| C Papy achète une douzaine d'œufs à 2,10 €, un fromage à 1,70 € et 1 kg de pêches à 2 €. | 3 Combien de temps a-t-il dormi ? |
| D Le TGV part de Paris à 10 h 10. Il met 3 h 03 pour arriver à Marseille. | 4 Quelle quantité achète-t-il ? |
| E Paul a 6 ans, Damien a trois ans de plus que lui. | 5 Combien a-t-il dépensé ? |

6 Produire des énoncés

Pour rédiger un énoncé, il faut inventer une situation comportant des données numériques et poser une ou plusieurs questions auxquelles on peut répondre en se servant des données fournies.

1 Observe ce dessin.



- a) Quelles informations t'apporte ce dessin ?
Peux-tu expliquer les données chiffrées comme : 013098,6 120 155
- b) Recopie et complète cet énoncé par une question.
Bertrand arrive à Aix-en-Provence et souhaite se rendre à Nice.
- c) Trouve une question en te servant du compteur kilométrique et du panneau indicateur.
- d) Trouve une question en te servant de la vitesse de la voiture, de l'heure et de la distance qu'il reste à parcourir pour aller à Nice.

1.4 Relier données utiles et questions complexes

L'activité suivante est extraite d'un livre adressé au CM1 (Brault et al. 2012, p.36). À partir d'une situation donnée (une visite au cinéma) et d'une question complexe, l'élève doit retrouver quelles sont les questions intermédiaires simples qui vont aider à résoudre le problème, puis le résoudre. Par rapport aux activités précédentes, la question à laquelle relier les informations utiles est une question complexe.

Je résous un problème en posant les bonnes questions

Énoncé

Une école organise une sortie pour aller voir au cinéma le film *Le Discours d'un roi*.
275 élèves participent à la sortie.
Ils sont accompagnés par 16 adultes.
La salle de cinéma est constituée de 21 rangées de 14 sièges.

Question

Y aura-t-il assez de sièges pour tout le monde ?



1 Parmi les questions suivantes, laquelle n'est pas utile à la résolution de ce problème ?

Combien y a-t-il de sièges dans la salle de cinéma ?

Quel est le titre du film ?

Combien y a-t-il de participants à la sortie scolaire ?

2 Réponds aux deux questions restantes.

3 Déduis-en alors s'il y aura assez de sièges pour tout le monde.

En un colegio, hay 31 niñas y 24 niños en 3.º de Primaria y 34 niñas y 28 niños en 4.º de Primaria. ¿Cuántos alumnos de 4.º de Primaria hay en total?

¿De qué trata el problema?

Para resolver este problema no necesitamos todos los datos.

- ¿Qué datos encontramos en el enunciado?



- ¿Qué datos necesitamos?

Como queremos calcular cuántos alumnos de 4.º de Primaria hay en total, solo necesitamos saber el número de niñas y de niños que hay en ese curso.

- Hay 34 niñas.
- Hay 28 niños.

Ce problème apparaît dans un livre espagnol adressé aux élèves de CE2 (González et al. 2012, p.32). Il présente un problème et une résolution détaillée. Dans l'énoncé, on retrouve le nombre de filles et de garçons qui étudient en CE2 et CM1, la question posée est : combien d'élèves y a-t-il en CM1 ? Dans la résolution, on retrouve une schématisation graphique des données de l'énoncé et une question explicite : *De quelles données a-t-on besoin ?* L'objectif est que les élèves apprennent à discerner les données utiles des données inutiles par rapport à la question posée.

L'activité suivante (González et al. 2012, p.123) concerne des élèves de CE2 qui doivent la résoudre en groupes. L'énoncé commence avec la description d'une situation : une fille et sa mère veulent aller voir un film au cinéma, elles ont une limitation horaire et économique. La grille illustre les différentes formules et les horaires. Avant les questions, on retrouve une phrase importante : « *sélectionne l'information* »³.

Lorena y su madre decidieron ver otra película. Antes de elegir, su madre le recordó que debían salir antes de las diez y que no podían gastar más de 16 €. ¿Puedes ayudarles a elegir?

película	sesión	duración	oferta
suspense	19:45 h	110 minutos	entrada + merienda → 7 € 90 CENT
aventuras	19:50 h	130 minutos	entrada + bebida → 7 € 50 CENT
comedia	20:10 h	90 minutos	dos entradas → 12 €
animación	20:30 h	85 minutos	entrada + merienda + bebida → 8 € 50 CENT
precios sin oferta			
entrada → 7 €		merienda → 1 € 20 CENT	bebida → 80 CENT

Forma un equipo y selecciona la información

1. Organizaos en grupos de cuatro para trabajar y elegid una película cada uno.
2. Observa la oferta de tu película y calcula lo siguiente.
 - a) la hora de finalización
 - b) el precio de las dos entradas
 - c) el precio de las dos entradas con merienda
 - d) el precio de las dos entradas con bebida
 - e) el precio de las dos entradas con merienda y con bebida

On observe à partir de ces exemples que le tri d'informations utiles/inutiles dans l'énoncé permet de travailler deux compétences : la compétence en communication ainsi que le traitement de l'information et la compétence digitale. En effet, selon le programme officiel espagnol, la

³ C'est nous qui soulignons en rouge dans le texte espagnol les passages qui nous semblent intéressants pour notre observation.

compétence en communication est liée « aux outils pour représenter mentalement, interpréter et comprendre la réalité ». Puis, le traitement de l'information est associé à « la recherche, la sélection, le registre et le traitement ou l'analyse de l'information ».

1.5 Chercher des informations en dehors de l'énoncé

L'activité suivante correspond à un livre espagnol pour élèves de CE2 (González et al. 2012, p.193). L'objectif est d'estimer une quantité d'eau qu'un élève ingère chaque jour. Dans l'énoncé on retrouve une grille pour aider à la résolution mais on suggère aussi de consulter les autres élèves pour des informations complémentaires : « Si tu ne connais pas la quantité de liquide qu'on peut mettre dans un récipient, consulte les camarades de ton équipe ».

La abuela de Raúl le explica que las personas necesitamos beber, al menos, 2 l de agua al día. ¿Quieres comprobar si tú los tomas?

Forma un equipo y piensa qué líquidos tomas

1. En grupos de tres compañeros fijáos en esta tabla.

líquido	cantidad
1 taza de leche	33 cl
2 vasos de agua	50 cl
1 refresco	33 cl

2. Elabora una tabla como la anterior, con los líquidos que sueles beber a lo largo del día. Si dudas de la cantidad de líquido que cabe en algún recipiente, consúltalo con tus compañeros de equipo.

Ce type d'activités renforce le développement de la compétence sur la connaissance et l'interaction avec le monde physique. En effet cette compétence « rend possible la compréhension des événements » et « l'identification des questions ou des problèmes ». Tout cela « implique la compétence pour mettre en jeu les processus et les attitudes propres de l'analyse systématique et de recherche scientifique » (BOE 2007). En effet, pour résoudre les activités précédentes, les élèves doivent aborder l'analyse de l'énoncé pour trier les informations pertinentes ainsi que pour trouver les questions qui peuvent être utiles à la résolution du problème. Ce travail est semblable à celui qui est réalisé lors d'une recherche scientifique : on doit identifier la question puis déterminer les données, ces données peuvent se trouver dans la situation problématique, mais aussi ailleurs.

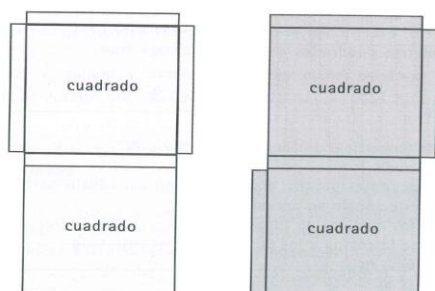
2 Établir un modèle mathématique à partir d'un modèle réel

2.1 Simplification du modèle réel

Dans cet exemple pour élèves de CM2, on demande aux élèves de produire deux patrons différents d'une boîte de pizza (Alfonso et al. p.233).

1 El departamento de diseño de una industria alimentaria está diseñando una caja para transportar pizzas. En la parte superior de la caja tiene que imprimirse un mensaje publicitario.

a) Dibuja dos desarrollos diferentes de la misma caja.



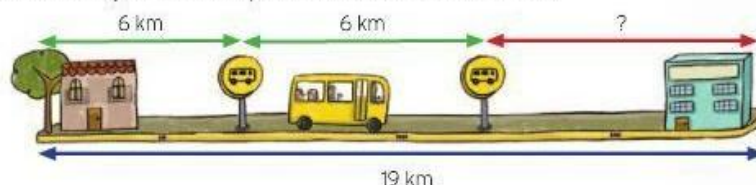
D'après la solution proposée par le livre du professeur (Galera et al., 2009), on voit qu'on simplifie le modèle réel. On ne tient pas compte des languettes adhésives ou à encastrer nécessaires pour que les côtés de la boîte ne tombent pas. On ne retrouve aucun commentaire relatif à cette simplification de la réalité. Si on observe les manuels de classe, la simplification de la réalité n'est jamais questionnée et semble aller de soi.

Le problème suivant est adressé aux élèves de CE2 (González et al. 2012, p.60). Cette tâche apparaît résolue dans le livre de l'élève, on observe que, pour la résolution, on propose une simplification schématique du problème. La représentation schématique simplifiée n'est pas questionnée.

El autobús recorre 19 kilómetros hasta el colegio. En la ruta realiza dos paradas. La primera a 6 kilómetros de la salida y la segunda, 6 kilómetros después. ¿Qué distancia hay desde la segunda parada hasta el colegio?

¿De qué trata el problema?

El problema presenta un recorrido con etapas. Un dibujo nos ayuda a comprender la situación. Dibujamos un croquis con los datos del enunciado.



2.2 Modèle à une opération

Dans l'exemple suivant, on retrouve cinq problèmes réels (pour élèves de CM2) qui peuvent être résolus en faisant une seule opération arithmétique (Caloudis 2008, p.60).

Pour chacun des énoncés suivants, pose uniquement l'opération qui te permettra de répondre à la question posée.

- 1 Éric vend sa moto 1 200 euros et sa voiture 14 500 euros. Quelle somme va lui rapporter la vente des deux véhicules ?
- 2 Madame Areti, qui a 57 ans, a 11 ans de moins que son mari. Quel âge a monsieur Areti ?
- 3 La maman de Yasmine parcourt tous les jours 84 km pour se rendre à son travail (aller et retour). Quelle distance sépare son domicile de son lieu de travail ?
- 4 Le boulanger du village de Sainte-Agrève va déposer de l'argent à la banque. Il donne 56 billets de 20 €. Quelle est la somme totale déposée ?
- 5 Fin 2005, 19,9 millions de consoles ont été vendues au total à travers le monde, dont 13,2 millions en Amérique du Nord. Combien de consoles ont été vendues dans le reste du monde ?

3 Résoudre des questions mathématiques à propos du modèle

Dans les livres français, on a réussi à retrouver quelques exemples de cette compétence, ils correspondent au processus de trouver les étapes intermédiaires de résolution ainsi qu'à établir l'ordre entre les étapes. Elle correspond aux nouveaux programmes de 2008 qui distinguent une progression : problèmes relevant d'une opération, des quatre opérations, à une étape, à plusieurs étapes, complexes. Dans les livres espagnols, nous n'avons pas trouvé ce type d'activités. Pour rechercher ce type d'activités dans les manuels espagnols étudiés, la méthodologie consiste à les parcourir systématiquement jusqu'à rencontrer l'activité cherchée.

3.1 Ordre des étapes (Brault 2012, p.72)

Énoncé

Sur son ordinateur, Manon joue à un jeu d'élevage de chevaux. Pour monter son centre équestre, elle dispose d'un budget de 40 000 fers à cheval. Elle achète :

- 1 écurie à 12 500 fers à cheval ;
- 1 carrière à 6 800 fers à cheval ;
- 1 prairie à 5 900 fers à cheval ;
- 7 juments à 950 fers à cheval chacune ;
- 1 étalon à 1 200 fers à cheval.

Question

Combien reste-t-il de fers à cheval à Manon après ses achats ?



1• Des questions suivantes, laquelle n'est pas utile à la résolution de ce problème ?

Combien Manon a-t-elle dépensé de fers à cheval ?

Combien de chevaux Manon achète-t-elle ?

Combien coûtent les 7 juments ?

2• a) Des deux questions restantes, laquelle dois-tu te poser en premier ?

b) Réponds à cette question.

3• Réponds alors à la question restante.

4• Dédus-en combien il restera de fers à cheval à Manon après ses achats.

3.2 Trouver les étapes intermédiaires (Caloudis 2008, p.64)

Pour chacun des problèmes suivants, écris la ou les questions intermédiaires et résous le problème.

- 1 Mélanie possède 65 €. Elle veut acheter les articles suivants :
une cafetière à 69 € 90
et un lot de 20 dosettes à 2 € 90.
Combien lui manque-t-il pour acheter les deux articles ?



- 2 Alicia possède une encyclopédie en trois volumes de 820 pages chacun. Celle de Juliette comporte deux volumes de 1 340 pages chacun. Quelle encyclopédie comporte le plus de pages ?

3.3 Problèmes à plusieurs étapes (Brault & al. 2012, p.108)

Énoncé

Le camping « Les Estivales » organise un concours de saut en longueur par équipes de quatre. L'arbitre calcule la somme des longueurs réalisées par les quatre membres d'une même équipe. Pour qu'une équipe soit qualifiée pour la finale, son score total doit être supérieur à 10 mètres. Léo, Maria, Kamel et Polly sont dans la même équipe. Léo a sauté à 2,47 m. Maria a sauté à 2,7 m. Kamel a sauté à 1,99 m. Polly n'a pas encore sauté.



Question

Quelle longueur Polly doit-elle sauter au minimum pour qualifier son équipe ?

4 Interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle

Même si cette compétence se travaille dans presque la totalité des problèmes arithmétiques, elle n'apparaît pas souvent explicitement. On a retrouvé l'exemple ci-contre dans un livre espagnol adressé aux élèves de CE2 (González et al. 2012, p.193). Dans la dernière question, l'élève doit expliquer quelle quantité de liquide il ingère chaque jour et quelle est la proportion d'eau. Pour cela il doit interpréter les résultats numériques obtenus dans les questions précédentes. De plus, on remarque que l'auteur du livre insiste sur le fait que l'élève doit «analyser les résultats».

La abuela de Raúl le explica que las personas necesitamos beber, al menos, 2 l de agua al día. ¿Quieres comprobar si tú los tomas?

Calcula cuánta agua tomas

3. Suma la cantidad total de líquido que bebes a lo largo del día.
4. Señala en tu lista las ocasiones en las que bebes agua y suma el total. ¿Bebes más o menos de 2 l?

Analiza los resultados

5. Explica a tus compañeros cuánto líquido bebes en total y cuánto de ese líquido es agua.

5 Valider la solution

5.1 Validation mathématique

On retrouve différents types de validations, notamment la

En un colegio, hay 31 niñas y 24 niños en 3.º de Primaria y 34 niñas y 28 niños en 4.º de Primaria. ¿Cuántos alumnos de 4.º de Primaria hay en total?

validation mathématique : elle correspond uniquement à une validation numérique. Dans l'exemple suivant (González et al. 2012, p.32), on trouve une tâche résolue, la dernière partie correspond à la validation. C'est un exemple curieux parce que la validation n'est pas totalement fiable, même s'il s'agit d'une validation numérique. En effet, la validité de la solution est basée

¿Cómo se resuelve?

Para saber cuántos alumnos hay en total, sumamos los datos seleccionados.

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 28 \\ \hline 62 \end{array}$$

- Hay 62 alumnos de 4.º de Primaria en total.

¿Lo hemos hecho bien?

En una suma, el resultado debe ser mayor que cada uno de los sumandos.

$$62 > 34 \quad 62 > 28 \quad \checkmark$$

sur le fait que « le résultat de l'addition doit être plus grand que chacun des termes sommés ». Cette affirmation, même si elle est vraie, n'est pas totalement utile pour valider la solution, puisque le résultat peut être incorrect tout en étant supérieur chacun des termes sommés.

Dans l'exemple suivant (Thévenet 2009, p.138), on demande à l'élève qu'il justifie, probablement à travers une opération, la réponse qu'il a donnée.

- 2** Un automobiliste qui roule à la vitesse moyenne de 60 km par heure met 3 h 30 min pour parcourir 350 km.
Est-ce exact ? Explique pourquoi.

L'exemple suivant (González et al., 2012, p.60) correspond à un autre cas de validation numérique : la différence par rapport au premier exemple, c'est que la validation proposée est correcte.

El autobús recorre 19 kilómetros hasta el colegio. En la ruta realiza dos paradas. La primera a 6 kilómetros de la salida y la segunda, 6 kilómetros después. ¿Qué distancia hay desde la segunda parada hasta el colegio?

¿Cómo se resuelve?

Como nos piden que calculemos cuánto mide la línea roja, tenemos que realizar dos operaciones.

1. Averiguamos los kilómetros que miden las dos líneas verdes.

$$6 \times 2 = 12$$

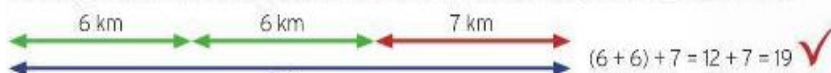
2. Calculamos los kilómetros que mide la línea roja.

$$\begin{array}{r} 19 \text{ distancia total de la ruta} \\ - 12 \text{ distancia desde la salida hasta la segunda parada} \\ \hline 7 \end{array}$$

► Hay 7 km desde la segunda parada hasta el colegio.

¿Lo hemos hecho bien?

Comprobamos que al sumar las tres distancias obtenemos la longitud total del recorrido.



On observe que, par rapport au programme espagnol, la validation numérique est clairement liée à la compétence mathématique. En effet, selon le programme espagnol, les processus liés à la compétence mathématique «permettent d'estimer et de juger la logique et la valeur des arguments et des informations [...] ce qui conduit à identifier la validité des raisonnements ainsi qu'à évaluer le degré de certitude associé aux résultats obtenus. ».

5.2 Justifier le choix des hypothèses

Dans la phase de validation, il faudrait aussi justifier les hypothèses. Dans la tâche précédente du cinéma (González et al. 2012, p.123), les élèves doivent choisir, à partir d'une grille de données et en respectant deux restrictions, le film que Lorena et sa mère vont aller voir. Dans la dernière question les élèves doivent justifier leur choix, et justifier les hypothèses qui ont aidé à ce choix. Il semblerait que cette justification ne s'appuie que sur des critères mathématiques (la vérification des contraintes mathématiques).

Lorena y su madre decidieron ver otra película. Antes de elegir, su madre le recordó que debían salir antes de las diez y que no podían gastar más de 16 €. ¿Puedes ayudarles a elegir?

Elegid la opción más adecuada

- 4.** Decidid qué película elegirán Lorena y su madre y anotad por qué.

5.3 Validation extra-mathématique

(Caloudis 2008, p.68) propose un contrôle extra-mathématique basé essentiellement sur des connaissances sociales du monde réel et probablement avec des arguments de logique (par élimination).

5 Contrôler la vraisemblance d'une solution

Quand tu as trouvé une solution à un problème, demande-toi toujours si ce que tu as trouvé est vraisemblable.

Pour cela, tu peux :

- faire appel à tes connaissances personnelles ;
- comparer ton résultat avec l'ordre de grandeur que tu as déterminé au préalable.

Exemples : un homme de 30 ans pèse environ 70 kg et non pas 7 kg ou 700 kg ; la tour Eiffel mesure 320 m et non pas 320 km ou 3,20 m.

1 Retrouve la bonne réponse.

a) La masse d'un pot de yaourt est :

125 g – 125 mg – 1,250 kg – 1 250 g

b) Le réservoir d'essence d'une voiture peut contenir :

6,5 L – 65 L – 650 cL – 6,5 hL

c) Un immeuble de 4 étages mesure environ :

15 m – 300 m – 50 m – 5 m

d) Le poids d'un bébé à la naissance est :

30,5 kg – 3 050 g – 305 dg – 30,50 cg

e) La hauteur d'un filet de tennis en son milieu est :

91 mm – 91 dm – 0,91 m – 9,1 m

Vrai ou faux ?

a) Un plein d'essence coûte 600 €.

b) Une baguette de pain coûte 4 €.

c) Un éléphant mange 3 kg de fourrage par jour.

d) La Tour de Pise mesure 54,50 m.

e) La longueur d'un terrain de football est de 0,120 km maximum.

f) Les cheveux poussent de 3 mm tous les mois.

5.4 Validation par essai-ajustement

Dans l'exemple suivant (González et al., 2012, p.132), on présente une tâche où la validation se fait par essai-ajustement : l'élève doit calculer la distance parcourue pour aller de la maison au parc en passant par la pharmacie ; pour cela, selon la validation proposée par les auteurs du livre, on doit chercher tous les chemins possibles et examiner s'ils vérifient les conditions de l'énoncé. On observe d'autres solutions (qui correspondent à des chemins plus longs), mais elles ne sont pas commentées dans la validation proposée par les auteurs du livre. La validation proposée est donc incomplète. La question n'est pas bien posée : on veut savoir la longueur du chemin plus court.

Manuel ha hecho un croquis de los lugares que visita con más frecuencia. Hoy ha ido desde su casa hasta el parque infantil pasando por la farmacia. ¿Qué distancia ha recorrido?



¿Cómo se resuelve?

- Localizamos en el croquis los datos que necesitamos.
 - Distancia desde su casa hasta la farmacia: 495 m
 - Distancia desde la farmacia hasta el parque infantil: 207 m
- Para calcular la distancia total, sumamos estas dos cantidades.

$$495 + 207 = 702$$
- Manuel ha recorrido 702 m.

**¿Lo hemos hecho bien?**

Buscamos sobre el dibujo otros caminos para ir al parque y comprobamos que no son posibles según lo que pide el enunciado.

Ces processus peuvent être mis en relation avec la compétence apprendre à apprendre car celle-ci « implique la curiosité pour se poser des questions, identifier et gérer toutes les réponses possibles face à un problème » (BOE 2007).

III - DISCUSSION ET CONCLUSION

Les ressources sur la modélisation proposent des activités pour la classe qui font travailler différentes compétences. Deux questions sont posées.

Quelle articulation entre compétence globale de modélisation et compétences partielles de modélisation ?

On appelle compétence globale de modélisation la capacité à mettre en œuvre toutes les étapes du cycle de modélisation en résolvant un problème de modélisation complet, et compétence partielle la capacité à mettre en œuvre une des étapes d'un cycle de modélisation (éventuellement en ne résolvant qu'une partie d'un problème de modélisation). La maîtrise isolée de chaque compétence partielle assure-t-elle la maîtrise de la compétence globale de modélisation ? Le seul moyen de maîtriser les compétences partielles est-il de les intégrer à une maîtrise de la compétence globale de modélisation, c'est-à-dire de les mettre en œuvre dans une situation de résolution d'un problème de modélisation complet ? Ce débat n'est pas sans rappeler, sur la résolution de problèmes dont les problèmes de modélisation sont une partie, le débat entre compétences mathématiques et compétences méthodologiques, évoqué dans (Balmès, Coppé 1999, p. 50) : « il nous semble qu'il faut traiter l'activité de résolution de problèmes en confrontant les élèves à de véritables problèmes pour lesquels ils doivent mobiliser des connaissances mathématiques, chercher, tâtonner, revenir en arrière..., plutôt que des compétences méthodologiques ». Les programmes français de 2002 précisait : « ces compétences n'ont pas à être travaillées pour elles-mêmes, l'objectif essentiel étant toujours de résoudre le problème proposé » (Ministère 2002, p. 13). On peut donc remarquer qu'en France, tout comme en Espagne, des manuels continuent à proposer des ressources travaillant ces compétences partielles. Nous n'avons pas trouvé de résultats de recherches tranchant la question. Les auteurs de la communication sont intéressés par toute référence de recherches sur cette question.

Quand est travaillée la spécificité de la modélisation par rapport à la résolution de problème ?

La modélisation mathématique de problèmes en relation avec le monde réel fait que la modélisation met en jeu des compétences communes à la résolution de problèmes, qui englobe la résolution de problème intra-mathématique. La spécificité de la modélisation tient à l'intervention de connaissances et de validations extra-mathématiques qui en général n'interviennent pas dans la résolution de problèmes intra-mathématiques. L'observation des manuels français et espagnols montre que cette spécificité est peu traitée. Il y a une quasi-absence de questionnement en lien avec le monde réel sur la simplification du problème réel en modèle réel, les hypothèses faites sur le monde réel, les critères de choix adoptés dans les situations de prise de décision. Beaucoup d'activités relèvent de la méthodologie déjà analysée dans (Coppé, Houdement 2009), sans tenir

compte de la spécificité de la relation au mode réel. Certes, on observe quelques rares activités impliquant des connaissances extra-mathématiques : trier des questions mathématiques et extra-mathématiques, valider la vraisemblance d'une solution sur des connaissances extra-mathématiques. Mais ces activités relèvent plus souvent, pour reprendre la distinction rappelée dans (Maass 2006, p. 114) de problèmes énoncés par un texte, de tâches mathématiques contextualisées avec le langage quotidien ou d'applications d'algorithmes mathématiques routiniers à un problème relié à la réalité au lieu d'être des problèmes de modélisation, c'est-à-dire des problèmes complexes, ouverts et reliés à la réalité. (Cabassut, 2008) propose de tels exemples utiles pour la formation et pour l'évaluation.

On observe de plus dans le cas français, l'influence du programme officiel de 2008 dans la progression proposée dans la construction de modèles et dans leurs traitements mathématiques : modèle à une opération, à plusieurs opérations, à plusieurs étapes, complexe. On remarque, là encore, que cette progression est une progression sur la résolution de problème et qui, a priori, n'intègre pas la relation avec le monde réel.

La formation des maîtres

Pour la formation des maîtres, on voit donc l'importance de l'appropriation par le maître de ressources proposées par exemple par les manuels. Le maître devrait être capable en amont de se fixer les objectifs en termes de compétences travaillées, ce qui suppose qu'il a bien été formé à la reconnaissance de ces compétences. Un modèle de la modélisation peut être utilisé pour permettre d'analyser le processus de modélisation, de désigner les différentes étapes de ce processus et les compétences qui y sont associées. Le modèle utilisé par Maass, et rappelé en début d'article, est intéressant. Nous avons proposé dans (Cabassut 2009) un modèle plus simple qui contracte les deux étapes, du monde réel au modèle réel, et du modèle réel au modèle mathématiques, en une seule étape. Dans le cadre de sa liberté pédagogique, l'enseignant devrait se positionner dans le débat entre compétences mathématiques et compétences pédagogiques, entre compétences spécifiques à la modélisation et compétences génériques de la résolution de problème : la formation devrait lui permettre d'éclairer ce débat pour assumer ses choix. Dans la conception de son enseignement, il devrait pouvoir modifier ses ressources ou en créer de nouvelles pour atteindre les objectifs qu'il s'est fixés, tout en respectant les contraintes institutionnelles du programme officiel. Ces contraintes peuvent varier d'un programme à l'autre, comme le montre l'étude curriculaire de (Coppé, Houdement 2009) au niveau de la France, ou d'un pays à l'autre (Cabassut, Wagner 2011 ; Cabassut, Ferrando 2012). La réflexion sur la programmation intégrée de l'enseignement des connaissances mathématiques et des connaissances extra-mathématiques est encore débutante. En France, la collection « Les maths à la découverte des sciences » chez Hachette en est une tentative. Pour répondre à tous ces besoins, à côté de la mise à disposition de ressources adéquates (manuels, sites internet ...), la formation des maîtres est une réponse indispensable. Le projet LEMA en constitue un exemple (Cabassut 2009) qui propose des ressources de formations, pour lesquelles il est important de conserver un regard critique.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BALMÈS R.-M., COPPÉ S. (1999) Les activités d'aide à la résolution de problèmes dans les manuels de cycle III. *Grand N*, 63. pp. 39 à 57, 1998-1999

BOLETIN OFICIAL DEL ESTADO [BOE] (2007) ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE*, 173, 31487-31566.

BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE [BOEN] (2006) Socle commun de connaissances et de compétences. *BOEN*, 29.

BOEN (2008) Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire. *BOEN hors série* 3.

CABASSUT R. (2008) Articulation entre réel mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation. *Acte du colloque Didirem « Approches plurielles en didactique des mathématiques Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ? »*. Université Paris 7.

CABASSUT R. (2009). Un exemple de formation continue à la modélisation dans le cadre du projet LEMA : description et problèmes rencontrés, in *Actes du XXXV^e colloque COPIRELEM*, Bombannes.

CABASSUT R. & WAGNER A. (2011). *Modeling at primary school through a French-German Comparison of Curricula and Textbooks*, Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Kaiser, Blum, Ferri, Stillman Editors. Springer, 559-568.

CABASSUT R. & FERRANDO I. (2012) Modelling in French and Spanish syllabus of secondary education, in *8th Congress of European society for research in mathematics education*, Antalya, Turkey.

COPPÉ S., HOUEMENT C. (2009) Résolution de problèmes à l'école primaire française : perspectives curriculaire et didactique. *Actes du 36^e colloque de la Copirelem*. Auch. p. 48-70.

MAASS K. (2006) *What are modeling competencies?*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38 (2)

MARGOLINAS, C. & WOZNIAK, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In Gueudet, G. & Trouche, L. (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.233-249). Presses Universitaires de Rennes & INRP

MINISTÈRE (2002) Document d'application mathématiques cycle 3. Ministère de l'Éducation Nationale. DESCO.

V - MANUELS SCOLAIRES

BRAULT R., RIBANIER C., ROQUES N. (2012) CM1 Petit phare. Hachette. p.36, 72, 108

CALOUDIS A., LECLEC'H-LUCAS J., LUCAS J.-C., MEUNIER L., MEUNIER R. (2008) CM2 A portée des maths. Hachette. p.60, 64, 68, 70, 108.

ERMEL (2000). Apprentissages numériques et résolution de problèmes CP (p.85). Institut National de Recherche Pédagogique. Paris. Hatier.

GALERA J., RUIZ J. ET SOLÀ M. (2009) Propuesta didáctica Matemáticas 5º Educación Primaria. Grupo editorial Bruño.

GONZÁLEZ Y., ABELLÓ N., LLINARES X., SANTAOLALLA (2012). Matemáticas 3ºEP. P. Conecta 2.0 LIR. Ediciones SM.

MYX A., DOSSAT L., BREGEON J.-P., VICENS P.-Y., POLI, B. (2003). Mathématiques. CM1, p.141. Collection Diagonale. Paris. Nathan.

THÉVENET S. (2009) Maths CM2, p.138. Collection Thévenet. Bordas.