

UN PROBLÈME OUVERT EN GÉOMÉTRIE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS ?

Carine REYDY

FORMATRICE, ESPE D'AQUITAINE
Carine.Reydy@espe-aquitaine.fr

Grégory TRAIN

FORMATEUR, ESPE D'AQUITAINE
Gregory.Train@espe-aquitaine.fr

Patrick URRUTY

FORMATEUR, ESPE D'AQUITAINE
Patrick.Urruty@espe-aquitaine.fr

Résumé

Cet atelier a pour objectif d'amener les participants à interroger les stratégies de formation des enseignants du premier degré concernant l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Il s'agit, à partir d'une activité de résolution de problème en géométrie mise en place dans deux classes de CM, de questionner son exploitation possible en formation initiale ou continue des enseignants :

- quelles sont les potentialités de ce type de situation en formation ?
- comment structurer une séance de formation autour de cette proposition d'activité ?
- quels objectifs peut-on lui assigner, notamment du point de vue de la construction des gestes professionnels liés à la récupération de l'activité de l'élève ?

Ce questionnement permettra d'interroger plus largement les critères qui orientent la construction d'une situation de formation prenant appui sur un problème ouvert en géométrie.

I - POINT DE DÉPART

Dans cet atelier, nous proposons d'entamer un premier questionnement sur les conditions et contraintes pesant sur la mise en place d'une stratégie de formation relevant de l'homologie et engageant des formés dans l'étude d'un problème ouvert de géométrie.

Les problèmes ouverts occupent une place de choix à l'école. En témoigne l'existence d'un vocabulaire institutionnel pluriel : *problème pour chercher, problème ouvert, situation problème, problème de recherche, tâches complexes...*¹ En témoignent également les préconisations formulées dans les programmes scolaires, qui semblent, dans une certaine mesure, entrer en résonance avec ce type de problèmes : « *Les problèmes inédits dont la résolution demande des prises d'initiatives d'un autre ordre [...] prendre des initiatives, formuler des hypothèses, apprendre à les prouver* » (le nombre au cycle 3) « *savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat* » (socle commun).

Pour le formateur, la volonté d'outiller les enseignants pour qu'ils puissent faire vivre de tels problèmes dans leurs pratiques n'est pas déraisonnable. L'orchestration de stratégies d'homologie de formation, dans lesquelles, en première approximation, "le formateur utilise (ou tente d'utiliser) un modèle de transmission identique à celui qu'il souhaite voir utiliser par ses étudiants lorsque ceux-ci

¹ Nous sommes bien conscients que la littérature de recherche s'efforce de tracer des frontières plus nettes entre ces différents objets. Reste que d'un point de vue institutionnel, cela ne semble pas exactement le cas.

enseignent dans des classes élémentaires" (Kuzniak 1994) est une trajectoire qui apparaît *a priori* séduisante.

Dès 1994, Kuzniak, dans ses travaux de thèse, théorise les stratégies d'homologie. Ces stratégies, permettant de transmettre simultanément du savoir mathématique et des connaissances liées à l'enseignement² semblent avoir trouvé depuis un écho favorable dans les pratiques des formateurs.

Différentes possibilités sont exhibées par Kuzniak quant au choix de la situation à l'étude : « *une situation identique pour les élèves et les étudiants - une situation à destination des étudiants plus complexe mais aisément transférable - une situation à destination des étudiants peu susceptible d'un transfert simple en classe.* » Mais au delà de ce choix, les nombreux exemples de situations d'homologie, véhiculés en particulier par la COPIRELEM, semblent également souligner une appétence marquée pour des situations relativement consistantes (voire résistantes aux formés).³ Les problèmes ouverts apparaissent dès lors répondre assez favorablement à ce critère.

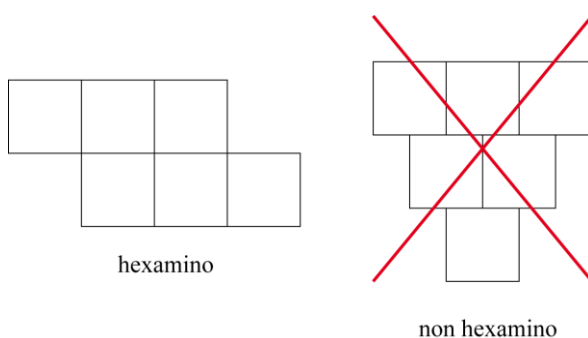
Dans cet atelier, nous questionnons les conditions qui pèsent sur une telle stratégie de formation pour viser son efficience. Dans cette stratégie, dans laquelle un changement de point de vue du formé est nécessaire, à la fois en position d'élève, puis amené à prendre du recul et à penser comme le maître, nous questionnons la manière dont le formateur est susceptible d'accompagner les formés dans ce changement de point de vue. Nous interrogeons également les connaissances mathématiques construites (chez les formés et chez ses élèves) dans cette stratégie d'homologie *directe* de formation (*i.e.* dans laquelle le type de problème étudié est le même que celui étudié à l'école).

II - TRAVAIL CONDUIT EN AMONT DE L'ATELIER

Avant de détailler le déroulement de l'atelier, voici le problème ouvert qui a fait l'objet du travail présenté ici et la description du dispositif expérimental que nous avons préalablement mis en place pour en étudier les potentialités.

1 Le problème

Un *hexamino* est une figure plane obtenue en juxtaposant 6 carrés identiques selon la règle suivante : chaque carré doit être collé à au moins un des autres carrés par un côté (entièrement) commun.



Problème : il faut trouver le plus possible d'hexaminos différents.

2 Le scénario de formation préalablement expérimenté

Deux enseignantes aux profils différents se sont prêtées au jeu pour la mise en place du scénario de formation que nous avons conçu. D'une part Agnès, professeur des écoles depuis 5 ans, qui enseigne dans une classe de CM1 en ZEP⁴. Deux élèves de CLIN⁵ sont en inclusion dans sa classe

² Ces connaissances peuvent également relever de l'organisation particulière de la classe (pour favoriser le débat au sein de la classe, etc...)

³ Au profit de situations plus simples qui risquent d'infantiliser les étudiants et provoquer leur rejet.

⁴ ZEP : Zone d'Education Prioritaire

⁵ CLIN : CLasse d'INitiation pour non-francophones

pour les mathématiques. La plupart de ses élèves sont issus de classes sociales modestes (voire défavorisées). Stéphanie, d'autre part, est professeur des écoles depuis 17 ans. Elle est titulaire du CAFIPEMF depuis un an. Elle enseigne dans une classe de CM2 dont la majorité des élèves proviennent d'un milieu socio-culturel relativement aisé.

2.1 Étape 1 : la séance de formation

Dans un premier temps, les deux formées ont participé à une séance de formation d'une demi-journée, que nous qualifions de "en laboratoire" et dont voici une retranscription succincte.

Les formées ont à leur disposition différents matériels (papier uni, papier quadrillé recto, papier quadrillé recto-verso, grilles 6×6, Lokons⁶, ciseaux). Les formateurs exposent le problème qu'elles commencent à résoudre sans connaître au départ le nombre de solutions. Il sera annoncé en cours de recherche. Après quelques minutes de recherche individuelle, elles choisissent rapidement de poursuivre à deux.

Lorsqu'après 40 minutes, les formateurs interrompent la recherche, 30 solutions ont été exhibées par les formées. Sur l'affiche répertoriant les 35 solutions qui leur est proposée, elles identifient les 5 solutions manquantes après avoir superposé celles qu'elles ont trouvées avec les hexaminos de l'affiche.

Les formateurs interrogent alors les formées : « *Utiliseriez-vous ce problème en classe, et si oui, de quelle manière ?* ». Les deux enseignantes s'accordent sur le fait que c'est un « bon problème pour apprendre à organiser une recherche ». Mais les objectifs dégagés, qualifiés de « méthodologiques » ou « transversaux », restent assez flous. Stéphanie s'interroge sur l'existence d'un outil mathématique (une formule ?) qui permettrait de prévoir le nombre de solutions. Agnès, quant à elle, s'inquiète au sujet de l'étayage matériel qu'elle pourra apporter à ses élèves en difficulté.

Les formateurs interrogent à nouveau les formées : « *Quelle place accorderiez-vous à ce problème dans votre programmation en mathématiques ?* ». Stéphanie conçoit l'affiche obtenue en fin de recherche comme un support qui permettrait de travailler la distinction entre aire et périmètre. Les formateurs proposent comme deuxième piste les patrons de cubes. Les formées réalisent alors que l'on peut retrouver tous les patrons de cubes parmi les 35 hexaminos. Les formateurs proposent alors comme troisième piste la symétrie. Stéphanie suggère de faire chercher aux élèves, parmi les 35 hexaminos, ceux qui ont un axe de symétrie et ceux qui n'en ont pas. Les formateurs pointent également le fait que lorsqu'on cherche à repérer les doublons, on est amené à identifier des figures symétriques l'une de l'autre.

À l'issue de la discussion, Agnès se propose de prolonger l'activité par un travail sur la symétrie dans le repérage des doublons. Stéphanie souhaite compléter la résolution du problème par la recherche des patrons du cube. Elle entrevoit une façon de « rentabiliser » le travail de recherche initial : le support obtenu en classe à l'issue de la résolution du problème pourra servir à plusieurs reprises (distinction entre aires et périmètres, patrons, symétrie).

2.2 Étape 2 : observation des formées en classe

À partir des pistes ouvertes à l'issue de la séance, chacune des deux enseignantes a mis en place une séquence dans sa classe que les formateurs sont venus filmer. Il a été convenu entre les participants que les formateurs n'interviendraient pas pendant le déroulement des séances et qu'aucune discussion sur le contenu des séances n'aurait lieu entre les formateurs et les formés avant la fin de la séquence.

⁶ matériel de construction constitué de trois types de formes géométriques (triangle équilatéral, carré, pentagone régulier) dont l'assemblage permet la réalisation de solides.

2.3 Étape 3 : analyse en deux temps

Une première analyse « à chaud » a été menée avec chacune des deux enseignantes à l'issue de la séquence de classe. Une seconde analyse a été faite entre les formateurs sur l'impact réel de la séance de formation sur la mise en œuvre pratique.

III - DÉROULEMENT DE L'ATELIER

1 Consigne pour les participants

Après avoir exposé le problème aux participants de l'atelier, les formateurs ont donné la consigne suivante : « *Proposez sur une affiche un scénario de formation de 3 heures basé sur l'exploitation de ce problème en précisant les objectifs de formation, le matériel proposé, la trame de la séance, etc...* »

2 Mise en commun

Après 45 minutes de recherche par groupes, les participants ont dans un premier temps décrit leurs propositions. Dans un second temps, les formateurs ont exposé le dispositif qu'ils avaient mis en place auprès des deux enseignantes volontaires et l'analyse qu'ils en ont faite, ce qui a permis aux participants de questionner les propositions issues de leur propre travail de groupe.

Les échanges menés lors de la mise en commun ont permis d'aborder les points suivants.

2.1 Les choix matériels

Lors de la séance de formation conduite avec les deux professeurs des écoles, les formateurs avaient apporté plusieurs types de supports :

- feuilles quadrillées (format A4),
- feuilles quadrillées recto-verso (format A4),
- fiches de petit format comportant un support quadrillé 6x6 (permettant a priori de dessiner un seul hexamino),
- carrés issus du matériel LOKON (permettant d'assembler et de défaire rapidement des hexaminos).

Aux yeux des formateurs, cette richesse matérielle aurait dû inciter les professeurs des écoles à faire ensuite, lors de la conception de leur séance, un choix parmi un éventail de supports, afin de s'adapter à la classe et d'envisager éventuellement des modalités de différenciation.

Dans les faits, les formées ne se sont pas nettement déterminées sur le choix d'un support à proposer aux élèves. Dans la classe d'Agnès en particulier, tout le matériel listé ci-dessus avait été préparé et était disponible lors de la recherche. Cette décision a entraîné plusieurs effets pervers :

- l'utilisation de matériels différents rend plus difficile la collecte des hexaminos trouvés dans chaque groupe ;
- l'attrait pour les pièces du Lokon détourne les élèves du problème initial et les incite à « jouer ».

Finalement, la mise en œuvre en classe de la phase de recherche a été très proche de celle vécue en situation de formation par homologie. Il a sans doute manqué lors de cette formation un temps spécifique pour étudier l'intérêt et les limites de chaque type de matériel, ce qui aurait pu conduire les enseignantes à faire un choix éclairé lors de la mise en œuvre en classe.

2.2 L'annonce du nombre total de solutions

Lors de la situation de formation avec les deux enseignantes, le nombre total de solutions avaient été annoncé en cours de recherche par les formateurs, afin de relancer l'activité.

Lors de la mise en œuvre en classe, l'une des formées n'a pas perçu ce levier pour redynamiser la recherche : elle n'a, à aucun moment, indiqué à ses élèves le nombre total d'hexaminos. Ainsi, dans

chaque groupe, les élèves ont abandonné la recherche lorsqu'ils ont obtenu une collection « suffisamment grande » sans chercher à persévérer davantage.

Ainsi, il aurait fallu lors de la séance de formation expliciter la décision de communiquer le nombre de solutions, pour ne pas la laisser à l'état d'implicite et conduire les professeurs des écoles à prendre conscience de ses effets.

2.3 L'organisation de la collection d'hexaminos

Lors de la situation de formation par homologie, les enseignantes avaient nettement pointé que la mise en œuvre du problème en classe permettrait de cibler des objectifs méthodologiques (elles citaient explicitement l'objectif « apprendre à organiser une recherche »).

En pratique, Agnès n'a pas suggéré à ses élèves d'organiser leur collection lors de la recherche et cet aspect n'a pas non plus été évoqué lors de la mise en commun. Stéphanie, quant à elle, a pris appui sur une proposition d'élève lors d'un bilan intermédiaire pour orienter les élèves vers une organisation des hexaminos, mais a pris conscience au fil de la séance des difficultés éprouvées par les groupes pour satisfaire cette demande.

La seule méthode réellement envisageable par les élèves pour organiser la collection consiste à classer les hexaminos en fonction de la propriété « l'hexamino comporte N carrés alignés » (en outre cette méthode ne facilite pas réellement la recherche exhaustive pour $N = 3$ en particulier).

Contrairement à ce qu'on pourrait espérer a priori, le problème permet donc difficilement de viser un objectif de type « identifier et comparer des critères pour organiser une collection » (si on considère qu'un tel objectif a une légitimité lors d'une séance de mathématiques).

2.4 Les savoirs mathématiques

La symétrie

Les transformations du plan fonctionnent comme des outils implicites pour repérer, lors des phases de mise en commun en particulier, des hexaminos isométriques. On peut être tenté, lors de ces phases, de rendre explicite la présence de la seule transformation relevant du programme de l'école primaire, la symétrie axiale.

Ce choix, visant à « récupérer » en situation l'activité de l'élève, a été opéré par Agnès. Il a montré certaines limites :

- L'enseignant doit « décrocher » de la mise en commun pour proposer une activité géométrique collective portant sur la symétrie. Il « casse » alors la motivation inhérente à la recherche du maximum de solutions ;
- Le repérage de deux hexaminos symétriques, pour être rigoureux, oblige à placer les figures « face à face », sur un quadrillage, de telle sorte qu'on puisse repérer facilement l'axe de symétrie et qu'on puisse faire fonctionner facilement les techniques de tracé connues des élèves. La manipulation n'est pas aisée, et le temps passé à l'activité géométrique peut s'avérer assez long.

Un choix plus prudent, également expérimenté par Agnès, peut consister, à retravailler sur la notion de symétrie lors d'une séance ultérieure, lorsque le problème aura été résolu.

Les patrons de cubes

Parmi les 35 hexaminos se trouvent les 11 patrons du cube. On peut donc utiliser l'affiche comportant les 35 hexaminos comme un support pour rappeler la notion de patron et faire repérer par ses élèves tous les patrons du cube. Cette potentialité a été souvent évoquée par les participants à l'atelier. C'est aussi le choix fait par l'une des maîtresses, Stéphanie, lors d'une séance ultérieure à la résolution du problème.

La distinction aire / périmètre

Les hexaminos sont des figures de même aire mais de périmètres différents. On peut envisager d'utiliser l'affiche comportant les 35 hexaminos comme un support pour amener les élèves à prendre conscience de l'indépendance entre les grandeurs aire et périmètre. Ces pistes, qui n'ont pas été exploitées par les deux maîtresses, ont été évoquées par les participants à l'atelier.

IV - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES EN FORMATION

1 Des choix pour le problème des hexaminos

L'expérimentation menée à l'aide des deux enseignantes et les échanges ayant eu lieu lors de l'atelier nous conduisent à formuler des pistes pour des exploitations possibles de ce problème en classe et en formation des enseignants.

1.1 En classe

Dans un premier temps, le problème est résolu en une ou deux séances avec une organisation matérielle appropriée. On peut envisager différentes mises en œuvre :

- soit les élèves cherchent individuellement avec un matériel unique (grilles 6×6), puis chaque élève vient compléter une affiche collective au fur et à mesure des productions obtenues ; les hexaminos ne sont découpés qu'en cas de doute dans l'identification d'un doublon,
- soit après une première recherche individuelle, les élèves, par groupes de 3 ou 4, réalisent une affiche ; lors de la mise en commun, on repère d'éventuels doublons et on note les scores ; chaque groupe complète sa collection en référence à l'affiche solution proposée par l'enseignant.

Dans des étapes ultérieures, le support produit (affiche des 35 hexaminos) est utilisé à différents moments de l'année pour réinvestir plusieurs notions : symétrie, patrons de cubes, distinction entre aire et périmètre.

1.2 En formation

À l'issue de cet atelier, trois principes se dégagent pour optimiser une séance de formation prenant appui sur le problème des hexaminos.

Principe 1 : faire vivre la situation aux formés, oui...

Principe 2 : ... mais expliciter les choix opérés et leur transposition en classe :

- le rôle du matériel ;
- l'annonce du nombre de solutions ;
- les modalités pour faciliter la mise en commun (numéroter les 35 hexaminos de l'affiche pour faciliter les comparaisons, avoir des supports à la même échelle, etc.).

Principe 3 : distribuer en fin de séance un document écrit décrivant précisément les propositions d'exploitation du problème en classe. Nous en faisons une proposition en annexe 2.

En terme d'objectif de formation, ces principes devraient permettre de susciter une certaine vigilance chez les formés : le fait d'engager les élèves dans une recherche ne se suffit pas à lui-même, l'orchestration de cette recherche par l'enseignant doit permettre de dégager des connaissances mathématiques.

2 Quels critères pour une « bonne » situation dans le cadre d'une stratégie d'homologie ?

Le problème des hexaminos a donné lieu à des activités de classe suffisamment appréciées des deux enseignantes pour qu'elles prévoient de le réutiliser. Ceci semble jouer en la faveur de séances de formation basées sur une stratégie d'homologie et prenant appui sur un problème

ouvert. Toutefois, des précautions s'imposent dans la conduite d'un scénario de formation de ce type.

2.1 Du côté de la mise en œuvre de la situation

Il ressort en premier lieu de cette expérimentation que dans une séance de formation basée sur une stratégie d'homologie, il ne suffit pas de « bien jouer » la situation. Il faut également expliciter les choix dans la gestion du jeu (dans le problème des hexaminos par exemple, l'annonce du nombre de solutions, la multiplicité du matériel, etc.).

En effet, il y a de nombreux implicites dans les actions, les choix et le discours du formateur qui « joue » une situation d'homologie. Leur décodage est d'autant plus complexe que la situation d'homologie nécessite, de la part du formé, des changements de rôles : il doit tour à tour endosser celui de l'élève, de l'étudiant ou de l'enseignant sans que ce ne soit, le plus souvent, explicitement signifié par le formateur. Par exemple, lors de la séance de formation prenant appui sur le problème des hexaminos, les formateurs mettent à la disposition des formées différents supports matériels pour la recherche. Ils supposent que les formées endosseront simultanément le rôle d'élève (en choisissant le matériel qui leur semble le plus approprié pour qu'elles effectuent elles-mêmes la recherche et en éprouvent les limites éventuelles) et celui d'enseignante (en interprétant l'intention tacite des formateurs de pointer une variable de la situation qui permettrait de s'adapter à l'hétérogénéité des élèves). Les résultats de l'expérimentation laissent à penser que l'une des deux formées revêt alors uniquement son rôle d'élève puisqu'elle reproduit à l'identique les propositions matérielles des formateurs lors de la séquence de classe.

Les changements de rôles attendus à certains moments d'une séance de formation basée sur une stratégie d'homologie devraient donc être signalés par le formateur. Or c'est là qu'est le paradoxe : si le formateur se contente de « bien jouer » la situation, il expose les formés à une mauvaise compréhension des éléments implicites de son discours. Si au contraire il les avertit de chaque changement de posture nécessaire de leur part, il risque fort de « tuer » le jeu, perdant ainsi les bénéfices de la situation d'homologie.

2.2 Du côté des connaissances mathématiques

La difficulté que nous pointons ici est liée aux problèmes pour chercher : quelles sont les connaissances mathématiques en jeu dans ces problèmes ? D'un point de vue méthodologique, quelles sont les démarches mathématiques convoquées et sont-elles transférables à d'autres problèmes ? Ces points ont déjà été soulignés par le groupe Math'aqui au colloque COPIRELEM 2010 : « *Si ces questions ne sont pas posées, le risque de voir ce problème comme un problème isolé est grand.* » (Math'aqui, 2010).

En effet, dans notre expérimentation, la résolution du problème des hexaminos mobilise des compétences d'ordre méthodologique liées à l'organisation de la collection (« *Pour résoudre un problème au rang n , je me ramène au cas $n-1$* » dont nous avons vu qu'elles étaient difficilement transférables à d'autres situations pour des élèves de CM). D'autre part, peu de connaissances mathématiques sont en jeu dans cette phase de l'activité (figures planes usuelles, transformations du plan pour identifier les doublons) et elles ne font pas l'objet d'une institutionnalisation. C'est en proposant des prolongements réutilisant l'affiche des 35 hexaminos produite à l'issue de la recherche que le problème retrouve un intérêt : il devient alors un support permettant d'aborder différentes notions mathématiques (symétrie, patrons du cube, distinction entre aire et périmètre) dans un contexte porteur de sens pour les élèves.

Plus généralement, dans le cadre d'une séance de formation basée sur une stratégie d'homologie, on pourrait surmonter les écueils liés à l'utilisation de problèmes ouverts à travers de nouvelles vies de la situation.

V - BIBLIOGRAPHIE

DOUAIRE J., EMPRIN F., (2012) chapitre « Résolution de problèmes », *Le nombre au cycle 3 : apprentissages numériques*, SCEREN.

KUZNIAK A. (1994) Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques *Actes du colloque COPIRELEM de Chantilly*

MATH'AQUI : BULF C., CELI V., COULANGE L., REYDY C., TRAIN G., URRUTY P. (2010) La résolution de problèmes en questions : quels savoirs ou savoir-faire ? Quelle institutionnalisation ? *Actes du colloque COPIRELEM de La Grande Motte (IUFM Montpellier)*.

VI - ANNEXE 1 : LES 35 HEXAMINOS

1. 	2. 	3. 	4. 	5.
6. 	7. 	8. 	9. 	10.
11. 	12. 	13. 	14. 	15.
16. 	17. 	18. 	19. 	20.
21. 	22. 	23. 	24. 	25.
26. 	27. 	28. 	29. 	30.
31. 	32. 	33. 	34. 	35.

VII - ANNEXE 2 : PROPOSITION DE SÉQUENCE DE CLASSE

On propose une séquence pour une classe de CM en deux étapes :

- **étape 1** : en **début d'année**, les élèves cherchent à produire l'ensemble de tous les hexaminos, dans le cadre de la résolution d'un problème ouvert.
- **étape 2** : la collection d'hexaminos sert de support au réinvestissement de notions rencontrées **au fil de l'année** dans **plusieurs chapitres de géométrie** : les patrons du cube (géométrie dans l'espace), la construction de figures symétriques (géométrie plane), la distinction entre aires et périmètres (grandeurs et mesures).

ETAPE 1 : TROUVER TOUS LES HEXAMINOS (en début d'année)

Objectifs :

- résoudre un problème de recherche ;
- (socle commun) savoir organiser des informations numériques ou géométriques ;
- (socle commun) justifier et apprécier la vraisemblance des résultats.

Programmes 2008 : « *La pratique des mathématiques développe le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision* ».

On propose une gestion du problème organisée sur deux séances de 1 heure environ.

SEANCE 1 : DEBUT DE LA RECHERCHE

Phase 1 : présentation de la situation (10 minutes)

Matériel : 6 carrés fixés au tableau par des aimants ou 6 carrés déplaçables dessinés au TBI.

L'enseignant introduit le terme « hexamino » et fait deviner sa signification par analogie avec « dominos » et « hexagones ». On peut alors donner la définition suivante : *un hexamino est une figure plane obtenue en juxtaposant 6 carrés identiques selon la règle suivante : chaque carré doit être collé à au moins un autre carré par un côté (entièrement) commun.*

Le problème : il faut trouver le plus possible d'hexaminos différents.

Quelques exemples et contre-exemples sont produits collectivement, pour s'assurer de la compréhension de la définition.

Phase 2 : recherche des hexaminos (45 minutes)

Matériel par groupe :

- feuilles de couleur quadrillées ;
- une affiche ;
- ciseaux, colle ou patafix.

Recherche individuelle (10 à 15 minutes) : les élèves dessinent sur les feuilles quadrillées le plus possible d'hexaminos différents.

Recherche par groupe (30 minutes) : les élèves doivent **s'organiser** pour récolter sur leur affiche le plus possible d'hexaminos différents, en faisant attention à **ne laisser aucun double**.

Au bout de quelques minutes, afin de dynamiser la recherche, l'enseignant annonce que le problème posé comporte **35 solutions**.

Aide apportée par l'enseignant :

- on peut inciter les élèves à **s'organiser dans le groupe** : par exemple deux élèves peuvent produire les hexaminos et les deux autres vérifier qu'ils ne sont pas déjà trouvés avant de les coller sur l'affiche.
- on peut inciter les élèves à **regrouper les hexaminos par familles** sur l'affiche, afin de faciliter le repérage des doubles au fur et à mesure de leur réalisation. La méthode

généralement retenue par les élèves consiste à classer les hexaminos, au moins partiellement, en fonction de la propriété « l'hexamino comporte N carrés alignés ». On peut obtenir ainsi au total :

- 1 hexamino comportant 6 carrés alignés,
 - 3 hexaminos comportant 5 carrés alignés,
 - 13 hexaminos comportant 4 carrés alignés,
 - 17 hexaminos comportant 3 carrés alignés,
 - 1 hexamino ne comportant pas plus de 2 carrés côte à côte.
- on peut si nécessaire faire une **mise au point collective** en cours de recherche si les élèves ne repèrent pas correctement les doubles. En particulier, une **figure et son symétrique** sont dans le problème considérées comme **identiques puisque superposables**. Cette mise au point est importante car la propriété ne va pas de soi, en particulier lorsque le quadrillage est imprimé seulement sur le recto. Ainsi pour reconnaître deux figures identiques, on peut les « tourner » (les transformer par rotation et translation) dans le plan, mais aussi les « retourner » (les transformer par symétrie).

Clôture de la séance : les élèves indiquent le nombre de solutions trouvées et écrivent le nom de chaque famille, s'ils ont réussi à organiser, au moins partiellement la collection.

SEANCE 2 : FINALISATION DE LA RECHERCHE

Phase 1 : relance collective de l'activité (15 minutes)

L'enseignant a écrit le nombre de solutions trouvées par chaque équipe et accroché au tableau une ou deux affiches qui lui paraissent intéressantes (en particulier celles contenant des doubles). La mise en commun s'articule autour des questions suivantes : *toutes les solutions ont-elles été trouvées ? Les élèves ont-ils collé des doubles sur l'affiche ? Les élèves ont-ils organisé la collection ?* En prenant appui sur les affiches on pourra faire émerger les éléments suivants :

- les groupes qui ont laissé des doubles sont ceux qui n'ont pas organisé la collection. La **réalisation de familles facilite le repérage des doubles** car lorsqu'on produit un nouvel hexamino, il suffit de le comparer à ceux de sa famille, sans avoir à passer en revue l'ensemble de la collection déjà produite.
- pour repérer des doubles sur l'affiche, il faut « déplacer mentalement » des figures et éventuellement « retourner » les figures (par symétrie) pour s'assurer qu'elles sont superposables.

Remarque : l'enseignant pourra faire repérer explicitement par les élèves la notion de symétrie lors du repérage de certains doublons. Toutefois, ce n'est pas indispensable au bon déroulement de cette première étape.

Phase 2 : finalisation du travail de groupe (20 minutes)

L'enseignant montre alors (vidéo-projecteur ou TBI) l'ensemble des 35 solutions **numérotées**.

Fin de la recherche : chaque groupe récupère son affiche et doit :

- numéroté les hexaminos trouvés, en référence à l'affichage collectif ;
- barrer les doubles oubliés sur l'affiche ;
- dessiner à main levée les hexaminos manquants ;

Aide et différenciation : si certains groupes rencontrent des difficultés, on pourra leur donner la feuille comportant le dessin des 35 hexaminos numérotés, ce qui facilitera les comparaisons entre figures.

Clôture du problème : après la phase de vérification, on rectifie au tableau les scores obtenus par chaque groupe, et on désigne le groupe vainqueur.

Phase 3 : réinvestissement individuel (20 minutes)

On décrit ci-après plusieurs propositions possibles.

- **Proposition 1 :**

Matériel : la planche des 35 figures numérotées est présente au tableau.

Travail sur ardoise : l'enseignant accroche au tableau un hexamino (récupéré sur l'une des affiches produites par les élèves par exemple), les élèves doivent écrire son numéro après avoir repéré la figure semblable sur la planche à figure.

Travail sur fiche : on peut proposer éventuellement la même activité sur une fiche comportant le dessin de plusieurs hexaminos qu'il s'agit d'identifier en référence à la planche à figure collective.

Bien entendu, dans ces activités, on choisira les supports de telle sorte que le repérage de la figure semblable sur la planche collective conduise les élèves à réaliser mentalement des rotations et des symétries.

- **Proposition 2 :**

Cette proposition sera exploitée si les recherches des élèves ont permis de mettre en évidence l'organisation de la collection selon les familles décrites plus haut.

Matériel : une feuille quadrillée pour chaque élève.

Recherche : les élèves doivent dessiner sur la feuille les 13 hexaminos qui comportent un alignement d'exactly 4 carrés.

AUTRE PROPOSITION DE GESTION DE L'ETAPE 1

En général, l'intérêt d'un problème de **recherche exhaustive** (trouver toutes les solutions vérifiant une contrainte donnée) est dans la mise en évidence et la comparaison de méthodes qui permettent efficacement de trouver toutes les solutions. Or, avec le problème posé ici, le seul moyen qui s'impose pour organiser la collection est de se baser sur la propriété « les hexaminos contiennent N carrés alignés » et ce critère laisse encore une grande place aux essais-erreurs, en particulier lorsque $N=3$ ou $N=2$. Cette observation minimise l'intérêt du travail de groupe et de sa mise en commun ultérieure. On peut donc imaginer une résolution de problème collective, sur une seule séance de 1h15.

Phase 1 : présentation du problème (10 minutes)

Modalité identique à la première proposition.

Phase 2 : résolution collective du problème.

Matériel par élève : feuilles de couleur quadrillées, ciseaux.

Phase de recherche (30 minutes) : les élèves cherchent à produire le plus possible d'hexaminos différents. Ils les dessinent et les découpent sur les feuilles quadrillées. À tour de rôle, ils viennent placer au tableau un hexamino qui n'a pas été déjà trouvé. La collection s'agrandit ainsi progressivement, en tirant profit des contributions individuelles de tous les élèves de la classe. L'enseignant peut trouver avec les élèves un mode d'organisation de la collection en plusieurs familles, afin de leur permettre de vérifier plus facilement si une figure qu'ils viennent de réaliser est déjà trouvée.

Phase de vérification (15 minutes) : lorsque le temps de recherche est écoulé, on compte le nombre d'hexaminos obtenus. L'enseignant affiche sur vidéo-projecteur la planche à figure comportant les 35 solutions numérotées. À tour de rôle les élèves annoncent un numéro d'hexamino qu'ils ont repéré dans la collection produite par la classe, viennent le montrer pour que son identification soit validée par tous. On repérera ainsi dans la planche à figures les hexaminos manquants.

Phase 3 : réinvestissement individuel (20 minutes)

Même modalité que pour les exercices de la séance 2 dans la proposition 1.

ETAPE 2 : EXPLOITER LA COLLECTION D'HEXAMINOS

Les propositions suivantes ne sont pas à prendre en compte dans l'ordre chronologique, mais au fil des notions rencontrées dans les chapitres de géométrie.

VOLET 1 : HEXAMINOS ET SYMETRIE

Objectifs :

- reconnaître deux figures symétriques,
- identifier les axes de symétrie d'une figure,
- tracer, sur papier quadrillé, le symétrique d'une figure par rapport à un axe.

Activité 1 : identifier les axes de symétrie des hexaminos

Travail de groupe : les élèves disposent des 35 hexaminos, ils doivent repérer la présence d'axes de symétries et les tracer. Ils collent les productions obtenues sur une affiche, en les regroupant en fonction du nombre d'axes de symétries trouvés. Une mise en commun rapide permettra de corriger les erreurs éventuelles.

Exercice individuel : un exercice similaire est proposé à partir d'une fiche individuelle sur laquelle sont dessinés plusieurs hexaminos.

Remarque : les deux modalités peuvent être proposées

- soit sur papier uni, dans ce cas la validation peut se faire par pliage.
- soit sur papier quadrillé, dans ce cas la validation prendra appui sur le quadrillage.

Activité 2 : construction de symétriques par rapport à un axe.

Matériel : une feuille quadrillée par élève.

Exercice individuel : l'enseignant choisit un hexamino, les élèves le reproduisent au centre de leur feuille. Ils doivent ensuite tracer un axe puis le symétrique de l'hexamino par rapport à cet axe. L'opération sera répétée plusieurs fois. Pour faire le lien avec la recherche de début d'année, on fait remarquer aux élèves que toutes les figures produites sont des « doublons ».

VOLET 2 : HEXAMINOS ET PATRONS DU CUBE

Objectif : identifier les 11 patrons du cube

Matériel :

- l'affiche comportant les 35 hexaminos,
- une feuille quadrillée pour chaque binôme.

Activité : retrouver les 11 patrons du cube

Par binômes, les élèves doivent identifier les hexaminos qui constituent des patrons du cube et les reproduire sur leur feuille en les numérotant conformément à l'affiche. Lors de la mise en commun, on répertorie les 11 solutions.

Remarque : on peut, avec les élèves les plus en difficulté, utiliser le matériel Lokon ou Polydron pour produire et valider facilement les assemblages, puisque la modalité adoptée pour la recherche ne permet pas de réaliser concrètement un pliage.

VOLET 3 : HEXAMINOS, AIRE ET PERIMETRE

Objectif : distinguer aire et périmètre

Activité : chaque élève doit repérer sur l'affiche :

- la (ou les) figure de périmètre maximal et celle de périmètre minimal,
- la (ou les) figure d'aire maximale et celle d'aire minimale.

Lors de la mise en commun, on constate que :

- toutes les figures ont la même aire ;
- la figure de périmètre minimal ($P=10$ côtés du quadrillage) est l'hexamino n°9 ;
- la figure de périmètre maximal ($P=14$ côtés du quadrillage) est l'hexamino n°15.

On aboutit à la conclusion que « Deux figures de même aire peuvent avoir des périmètres différents ».