DÉCRIRE L'ACTIVITÉ GÉOMÉTRIQUE DES ÉLÈVES : INSTRUMENTS – REGARDS – LANGAGE

Thomas BARRIER

IUFM Nord Pas de Calais, Université d'Artois

LML

thomas.barrier@espe-lnf.fr

Christophe HACHE

Université Paris Diderot

IREM de Paris, LDAR

christophe.hache@irem.univ-paris-diderot.fr

Anne-Cécile MATHÉ

IUFM Nord Pas de Calais, Université d'Artois

LML

acecile.mathe@espe-lnf.fr

Stéphanie MONTIGNY

IUFM Nord Pas de Calais, Université d'Artois

stephanie.montigny@lille.iufm.fr

Résumé

Cet atelier est issu d'un travail collectif réunissant des formatrices et formateurs de l'IUFM Nord Pas de Calais, dont une professeure des écoles à temps partagé, et des enseignants-chercheurs en didactique des mathématiques. Il prend appui sur une expérimentation de plusieurs mois dans une classe de CM2, autour de questions liées à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie au cycle 3.

Dans le prolongement de travaux menés par un groupe de recherche lillois, dirigé par Marie-Jeanne Perrin-Glorian depuis plus de dix ans (Duval, Godin & Perrin-Glorian (2005), Duval & Godin (2005)), notre travail vise dans un premier temps à interroger la possibilité d'insertion de problèmes de *restauration de figures* (Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013) au sein de pratiques déjà existantes.

Par ailleurs, notre travail expérimental vise également à mieux comprendre la manière dont il est possible de saisir et faire évoluer l'activité géométrique des élèves. Les situations de restauration de figures, comme beaucoup de situations proposées en classe de géométrie, reposent sur une réflexion sur la façon dont certaines contraintes sur l'action matérielle des élèves sont susceptibles de faire évoluer les manières de voir les figures géométriques (Duval & al. 2005, Perrin-Glorian & al. 2013)). De façon complémentaire, en appui sur l'observation de classes, nous proposons également dans cet atelier d'interroger la dimension langagière de l'activité géométrique des élèves en situation. Quels liens les pratiques langagières autour des actions matérielles entretiennent-elles avec le regard porté sur les figures, avec les techniques instrumentées de restauration ? Quel rôle les interactions verbales qui se développent dans la classe jouent-elles dans l'évolution de l'activité géométrique des élèves ? Notre positionnement théorique inclut ainsi également une attention particulière à la dimension langagière des pratiques géométriques (Barrier, Hache & Mathé, à paraître, Hache, 2013).

Le travail sur lequel s'appuie cet atelier est à la croisée de différentes recherches. Il est d'une part fortement influencé par les travaux du groupe lillois autour de l'enseignement de la géométrie à l'école, dirigé par Marie-Jeanne Perrin-Gloian depuis plus de dix ans[1] (Duval, Godin & Perrin-Glorian (2005), Duval & Godin (2005)), groupe auquel participe Anne-Cécile Mathé depuis six ans maintenant. Une partie des travaux de ce groupe a fait l'objet d'une conférence lors de ce colloque de la COPIRELEM, vous en trouverez le texte dans ces actes. L'expérimentation présentée constitue également un objet de travail du projet LEMME[2], réuni autour de questions liées aux pratiques langagières en classe de mathématiques. Enfin, ce travail est né d'une rencontre entre collègues de l'IUFM Nord Pas de Calais et, en particulier, d'une collaboration menée dans la classe de CM2 de Stéphanie Montigny, formatrice à l'IUFM Nord Pas de Calais et professeure des écoles à temps partagé. De façon relativement succincte, nous proposons dans une introduction d'expliciter les points de départ et ancrages théoriques de notre travail, fruits de l'articulation des positionnements de ces différents groupes de travail. Nous préciserons également les questions que nous avons souhaité explorer à travers cet atelier et les supports proposés. La suite de ce texte est consacrée au compte-rendu des éléments d'analyse dégagés durant l'atelier à propos de deux premières séances d'une progression autour de la notion de droites perpendiculaires, expérimentées en classe.

I. INTRODUCTION

1 Points de départ et questions initiales

1.1 Regards sur les figures et problèmes de restauration

En premier lieu, notre approche de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie au cycle 3 repose sur l'idée selon laquelle, spontanément, les élèves entrent dans les problèmes géométriques en adoptant une vision des figures en termes de surfaces – juxtapositions et / ou superpositions de surfaces – comme nous le faisons en dehors du champ des mathématiques. Or, même si cette vision est importante pour l'appréhension globale des figures (lors de la mise en place d'une preuve par exemple), la plupart des concepts géométriques visés au cycle 3 puis au collège reposent sur des relations entre des lignes et / ou des points (droites perpendiculaires, parallèles, égalités de longueur de segments, milieu d'un segment, etc.). Percevoir ces concepts et les utiliser dans les diverses tâches géométriques nécessitent donc la capacité à faire émerger des relations entre des sous-éléments des figures, de dimensions 2, 1 voire 0 (*déconstruction dimensionnelle*, Duval & Godin (2005)).

Depuis plus de dix ans, les travaux du groupe de Lille[3] se sont centrés sur l'élaboration de situations pour la classe visant à accompagner les élèves dans cette mobilité du regard sur les figures et la construction d'un regard géométrique mobilisant des propriétés et relations diverses, enjeux d'apprentissage à l'école (perpendicularité, alignement, symétrie axiale, etc.). La reproduction de figures est un type de tâches central dans les propositions du groupe de Lille. Le travail de ce groupe repose aussi sur l'idée qu'il existe un lien direct entre les instruments utilisés pour reproduire une figure et le regard que l'on porte sur cette figure. On peut par exemple utiliser

---

[1] Participent ou ont participé à ce groupe Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Marc Godin, Raymond Duval, Jean-Robert Delplace, Claire Gaudeul, Bachir Keskessa, Régis Leclercq, Christine Mangiante, Anne-Cécile Mathé, Odile Verbaere.

[2] Langage dans l'Enseignement et l'apprentissage des MathéMatiquEs. Participent à ce groupe Thomas Barrier, Caroline Bulf, Aurélie Chesnais, Christophe Hache, Anne-Cécile Mathé et Joris Mithalal

[3] Pour plus de détails concernant ces travaux, nous vous renvoyons à Duval, Godin & Perrin-Glorian (2005), Duval et Godin (2006), Offre, Perrin-Glorian & Verbaere (2007), Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq (2013) ou encore au texte de Perrin-Glorian et Mangiante figurant dans ces actes.

des instruments 2D permettant de tracer ou reproduire des surfaces (gabarits de polygones divers, gabarits d'angles, etc.) ou des instruments 1D permettant de tracer des lignes (la règle par exemple). Il existe aussi bien évidemment un lien direct entre les instruments utilisés et les propriétés géométriques identifiées sur la figure et mobilisées pour la tâche de reproduction. L'idée consiste ainsi à faire de l'usage des instruments une variable-clé permettant de favoriser l'enrichissement du regard des élèves sur les figures et la mobilisation de propriétés géométriques visées. Par ailleurs, ce groupe fait l'hypothèse que l'approche des figures en utilisant des grandeurs sans mesure facilite l'entrée des élèves dans une problématique géométrique. Les travaux du groupe privilégient ainsi l'utilisation de règle dite « informable », bandes de papier sur lesquelles on peut inscrire des marques pour reporter des longueurs.

Cette réflexion a donné lieu à la conception de problèmes de reproduction de figures (ou de restauration de figures, c'est-à-dire de reproduction d'une figure modèle à partir d'une amorce de la figure, à la même échelle ou non) en laissant aux élèves un large choix d'instruments, mais en intégrant un système de coûts à l'usage de ces instruments. Pour chaque problème de restauration, ce système de coûts est choisi au regard des objectifs d'apprentissage, en fonction des relations entre sous-éléments de la figure que l'on souhaite que les élèves utilisent comme outils pour la restauration.

Dans le prolongement de ces travaux, l'objectif initial de l'expérimentation, support de cet atelier, consistait à explorer les possibilités d'insertion de tels problèmes dans des progressions aux objectifs divers dans une classe de CM2.

1.2 Et les pratiques langagières en classe de géométrie ?

Les recherches évoquées ci-dessus s'appuient sur une réflexion concernant les liens qu'entretiennent les actions matérielles (problèmes de restauration, usage des instruments…) et la manière de voir et de penser les figures géométriques. Elles permettent la prise de conscience de la mobilité du regard sur les figures comme condition nécessaire à l'entrée des élèves dans la géométrie et ouvrent de nouvelles perspectives pour penser l'enseignement de la géométrie dans une continuité, du cycle 1 au collège. Cependant, la question de la description de l'activité géométrique des élèves et des conditions susceptibles de la faire évoluer est encore loin d'être résolue. Amener les élèves à modifier leurs manières d'agir suffit-il à la construction des connaissances géométriques ? Comment appréhender la complexité de l'activité géométrique des élèves ? Quels sont les moteurs de la construction de connaissances géométriques lors de la mise en œuvre de situations de reproduction ou de restauration de figures ?

Nos diverses expérimentations en classe, les diverses recherches dans lesquelles nous nous sommes impliqués (Barrier, Hache & Mathé, à paraître ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2011; Mathé, 2012 ; Hache, 2013) nous ont amenés à porter une attention particulière au fait qu'il se passe des choses fondamentales, d'un point de vue cognitif, au sein des interactions langagières orales qui se développent autour de la résolution matérielle des problèmes proposés en classe de géométrie. Toutefois, nous ne disposons que de peu d'outils pour comprendre finement ce qui se joue au sein de ces échanges verbaux. La dimension langagière de l'activité géométrique n'est encore qu'insuffisamment prise en compte lors de l'analyse de ces situations, rarement anticipée dans des analyses *a priori* et le plus souvent ignorée en formation.

Initié depuis trois ans maintenant, le projet LEMME tente d'avancer dans l'exploration de la prise en compte de l'activité et des pratiques langagières en classe de mathématiques. Notre approche consiste à penser l'activité géométrique des élèves, à l'instar de toute activité humaine, comme relevant, de façon indissociable, d'une dimension matérielle (*l'agir*) et d'une dimension langagière (*le parler*), inscrites dans une certaine façon de *penser* le monde, un *agir-penser-parler* au sens de Jaubert, Rebière, Bernié (2003). Le langage verbal est donc pour nous partie prenante de l'activité géométrique des élèves, au même titre que leurs actions matérielles, plus classiquement analysées en didactique des mathématiques. De manière complémentaire aux travaux engagés dans le groupe lillois, nous appréhendons le processus d'apprentissage en classe de géométrie comme une *acculturation* vers une pratique géométrique spécifique, admettant une dimension matérielle mais aussi une dimension langagière. Pour nous, cette acculturation s'opère à la fois par interactions des élèves avec une situation problématique mais également au sein des interactions sociales au sein de la classe. Dans ce cadre, lors des analyses *a priori* et *a posteriori* de situations d'apprentissage, nous nous efforçons d'interroger les liens qu'entretiennent activités matérielles et activités langagières des élèves, dans une situation donnée. Nous souhaitons également explorer la manière dont ces deux dimensions de l'activité géométrique des élèves interagissent pour évoluer vers des pratiques géométriques idoines.

L'expérimentation présentée dans cet atelier avait également pour objectif d'avancer dans l'élaboration d'outils permettant de saisir plus finement l'activité géométrique des élèves et les conditions de son évolution. Quels liens les interactions langagières verbales qui se développent autour de la résolution matérielle des problèmes proposés entretiennent-elles avec le regard porté par les élèves sur les figures, avec les techniques instrumentées de restauration ? Comment contribuent-elles à l'émergence des objets géométriques ?

2 Présentation globale de l'expérimentation, travail et supports proposés dans cet atelier

Durant les quelques mois d'expérimentation dans la classe de CM2 de Stéphanie Montigny, notre travail a consisté en l'élaboration collective puis la mise en œuvre de séances et de séquences de classe autour de notion diverses : l'alignement, les droites perpendiculaires, les quadrilatères et triangles particuliers à partir de l'étude de polyèdres, les programmes de construction et les caractérisations du cercle. Toutes ces séances ont été observées et filmées. Nos questions de recherche portant essentiellement sur l'activité des élèves, nous nous sommes en particulier efforcés de recueillir le maximum de traces matérielles et vidéos de productions d'élèves au cours de chaque phase de travail, n'hésitant pas parfois à demander à certains élèves d'expliciter la procédure qu'ils venaient de mettre en place. Le corpus ainsi obtenu est constitué de deux films par séance ainsi que des enregistrements audio de l'intégralité du discours de l'enseignante, par micro et dictaphone.

Pour cet atelier, nous avons choisi pour support de travail les deux premières séances d'une séquence de quatre séances portant sur la notion de droites perpendiculaires. D'après les programmes de 2008 (Bulletin Officiel n°3 du 19 juin 2008), la notion d'angle droit est abordée en CE1. Les élèves y apprennent à « décrire, reproduire, tracer un carré, un rectangle, un triangle rectangle ; utiliser des instruments pour réaliser des tracés : règle, *équerre ou gabarit de l'angle droit* ; percevoir et reconnaître quelques relations et propriétés géométriques : alignement, *angle droit*, axe de symétrie, égalité de longueurs. ». La notion de droites perpendiculaires apparaît dans les programmes du CM1 : « utiliser en situation le vocabulaire géométrique : points alignés, droite, *droites perpendiculaires*, droites parallèles, segment, milieu, angle, axe de symétrie, centre d'un cercle, rayon, diamètre. » Rien n'est formulé dans les programmes du CM2 à propos des notions de droites perpendiculaires ou d'angle droit. Les enjeux d'apprentissage formulés par ces programmes autour de la notion de droites perpendiculaires au cycle 3 ne sont donc pas très clairs. Le concept de droites perpendiculaires nous semblant toutefois constituer un enjeu d'apprentissage important dans le cadre d'un enseignement de la géométrie, pensé dans une continuité de l'école au collège, nous avons tout de même choisi de reprendre en CM2 un travail sur ce thème. Notre séquence articule un premier problème, visant à introduire la notion de droites perpendiculaires, à partir des conceptions des élèves sur l'angle droit, puis deux problèmes de restauration de figure. Son objectif est d'amener les élèves à reconnaître et tracer des droites perpendiculaires ou pour être plus précis tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point, appartenant ou non à cette droite. L'insertion de problèmes de restauration dans la progression nous permet également un travail sur des enjeux d'apprentissage en géométrie un peu plus larges, nous le verrons dans la suite de ce texte.

Après avoir présenté l'expérimentation et nos questions de recherche, l'atelier se déroule en deux temps, correspondant chacun à la présentation, l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*, en appui sur des extraits vidéos et des transcriptions, des deux premières séances de la séquence. Ce texte suit ce déroulement.

II - UNE PREMIÈRE SÉANCE PROPOSÉE AUTOUR DE LA NOTION DE DROITES PERPENDICULAIRES

Cette première partie prend appui sur la première séance de la progression autour de la notion de droites perpendiculaires mise en place par Stéphanie Montigny dans sa classe de CM2, une séance ayant pour finalité de travailler le passage du concept d'angle droit à celui de droites perpendiculaires. Notre objectif est de proposer et de mettre à l'épreuve une méthodologie de description de l'activité géométrique des élèves. Lors de l'atelier, cette méthodologie a été présentée aux participants puis mise à l'épreuve à partir d'un corpus de vidéos, photos, descriptions et transcriptions recueilli lors de cette première séance. Nous reprenons ici cette organisation.

1 Méthodologie d'analyse

Comme nous l'avons signalé en introduction, notre observation de l'activité géométrique repose sur trois dimensions solidaires : une dimension matérielle (ce qui est fait), une dimension visuelle (ce qui est regardé, vu) et une dimension verbale (ce qui est prononcé, dit). La méthodologie que nous allons présenter vise à rechercher la manière dont ces différentes facettes s'organisent au sein d'une même activité. Nous reprenons ici une problématique formulée par Radford autour de la notion de cognition sensible (*sensuous cognition*) :

"D'un point de vue méthodologique, le problème est de comprendre comment les divers canaux sensitifs et signes sémiotiques (linguistique, symboles écrits, diagrammes, etc.) sont mis en relation, coordonnés, et subsumés dans une nouvelle unité de pensée, une nouvelle unité psychologique" (Radford, 2013, p. 65, notre traduction de l'anglais)

Dans ce texte, nous utiliserons le terme *activité* en référence à cette unité de pensée, nous la qualifions d'activité géométrique lorsqu'elle s'inscrit dans le cadre d'une problématique géométrique. Précisons que pour nous, réaliser une action matérielle, éventuellement instrumentée, produire des signes verbaux ou graphiques ou porter un regard particulier sur une figure relèvent d'un acte de pensée générateur de significations. La difficulté que nous proposons d'explorer ici est d'en saisir l'unité. Pour y parvenir, notre principal outil sera une analyse logique élémentaire des concepts mathématiques en jeu (Barrier, Hache & Mathé, à paraître).

À l'école, l'angle droit est le plus souvent introduit comme un secteur angulaire particulier, c'est-à-dire un élément de surface vérifiant une propriété spécifique. Par exemple, vérifier si un angle est droit consiste dans de nombreuses tâches à vérifier si un gabarit d'angle droit donné (équerre ou autre) se superpose ou non avec le secteur angulaire concerné. En cas de superposition, l'objet secteur angulaire est qualifié d'angle droit. Sur le plan logique, on dira que le prédicat "être droit" s'applique à l'objet considéré, le concept d'angle droit s'analyse comme une *propriété* d'objet. Le concept de droites perpendiculaires met en jeu des objets différents en nature et en nombre. Percevoir une perpendicularité nécessite l'identification d'une relation particulière entre deux objets rectilignes. Le concept de droites perpendiculaires s'analyse donc comme une *relation binaire* entre deux objets. Il s'agit maintenant de montrer comment cette distinction élémentaire, mais pour nous fondamentale, permet de se doter d'un arrière-plan unificateur dans l'analyse des trois dimensions retenues pour la description de l'activité géométrique des élèves dans le contexte du passage du concept d'angle droit à celui de droites perpendiculaires.

Les trois dimensions de l'activité géométrique

Commençons par la dimension matérielle de l'activité géométrique. Nous l'avons dit plus haut, contrôler si un angle est un angle droit consiste, dans une approche instrumentée, à superposer un gabarit d'angle droit avec le secteur angulaire concerné. Le geste associé nécessite la prise en compte d'une double contrainte : il faut superposer un côté et un sommet du gabarit avec les éléments correspondants du secteur angulaire. Nous considérons néanmoins qu'il s'agit d'une unique contrainte, puisque le geste associé de superposition peut le plus souvent être accompli d'un seul mouvement. Du point de vue du tracé, la situation est similaire. Lorsqu'il s'agit par exemple de compléter un carré dont un côté est donné (cf. partie 2), le geste consiste à positionner le gabarit ou l'équerre le long du segment de manière à ce que le sommet de l'angle droit du gabarit coïncide avec l'extrémité du côté. Il s'agit là aussi d'*une* contrainte (double). En revanche, lors d'un tracé d'une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite par exemple, le geste du tracé est soumis à *deux* contraintes *successives*. Il est nécessaire dans un premier temps de positionner le côté du gabarit le long de la droite donnée puis d'ajuster le second côté de l'angle droit du gabarit pour qu'il se positionne au niveau du point extérieur à la droite. Ces deux contraintes sont bien distinctes dans la mesure où elles mettent en jeu deux éléments spatialement différenciés de l'instrument. La distinction logique entre propriété (relation *unaire*) et relation *binaire* s'exprime ici à travers le nombre de contraintes matérielles pesant sur l'utilisation de l'instrument. Sur le plan méthodologique, l'observation de l'activité géométrique passera donc par la recherche du nombre de contraintes prises en considération par les élèves dans leurs actions matérielles.

Nous nous intéressons maintenant à la dimension verbale de l'activité. La verbalisation d'une propriété d'objet nécessite la présence dans le langage d'un nom d'objet, dont la référence pourra ou non être qualifiée d'angle droit. Ce nom d'objet peut être partiellement décontextualisé, si l'on se donne des moyens de désignation par exemple en utilisant un codage ou un vocabulaire spécifique ("les angles d'un carré sont des angles droits", "dans le quadrilatère ABCD, l'angle formé par les côtés [AB] et [BC] est droit"), ou au contraire très fortement lié au contexte spécifique d'énonciation ("cet angle est droit"; "ici, c'est un angle droit"). Le point de vue des droites perpendiculaires nécessite le recours à deux noms d'objets afin de verbaliser une relation distinguant explicitement chacune des droites en jeu. Comme pour la verbalisation des angles droits, les noms d'objets peuvent relever d'unités linguistiques de natures diverses. Dans le contexte de cet atelier, les verbalisations étudiées ont été presque exclusivement orales, résultant le plus souvent d'interpellations spontanées par les expérimentateurs ou par l'enseignante et d'échanges au sein de groupes d'élèves. Nous avons donc proposé aux participants à l'atelier de prendre tout particulièrement en compte les déictiques, c'est-à-dire les unités linguistiques dont le sens ne peut être saisi qu'en relation avec le contexte d'énonciation (les démonstratifs, les adverbes de lieu, les articles définis, etc.). Sur le plan méthodologique, cela suppose d'accompagner les transcriptions d'éléments de contexte, notamment de vidéos ou de photos afin d'être en mesure d'en interpréter le sens. De la même manière que les objets mathématiques peuvent être des appuis pour l'action matérielle (générant une ou deux contraintes), ils peuvent aussi être des références pour l'activité verbale des élèves. L'analyse logique précédente nous invite à rechercher la nature et le nombre des objets faisant partie du domaine d'interprétation du langage verbal utilisé par les élèves.

Sur le plan de la dimension visuelle, nous avons réinvesti l'approche du groupe de géométrie de Lille, décrite en introduction. Comme nous l'avons dit plus haut, le concept d'angle droit fait référence à des éléments de surface, qui sont vus comme tels. Le passage aux droites perpendiculaires nécessite une domestication des sens, pour reprendre une expression de Radford (2013), une éducation vers un regard plus théorique consistant à appréhender les formes 2D à partir de sous éléments 1D ou 0D (et réciproquement). Il s'agit cette fois de concevoir la relation des élèves aux objets mathématiques par le canal visuel, en s'interrogeant sur le support du regard géométrique en construction, comme nous proposons de le faire pour les autres dimensions de l'activité géométrique. Les observables associés sont cette fois les mouvements oculaires des élèves, et d'une manière plus générale, l'ensemble des gestes ostensifs par lesquels les élèves montrent, typiquement lorsqu'un élève pointe quelque chose de l'index.

2 Description de la séance et analyse *a priori*

Nous poursuivons l'atelier par la présentation de la séance au cours de laquelle le corpus qui a servi de support à la mise à l'épreuve de la méthodologie de description a été recueilli. Il s'agit de la première séance du travail collectif engagé entre collègues de l'IUFM Nord – Pas de Calais, ayant donné lieu à des mises en œuvre dans la classe de CM2. Cette séance vise, entre autres, à travailler avec les élèves le passage des angles droits aux droites perpendiculaires. Il s'agit de la première séance visant cet objectif. Elle est organisée autour d'une tâche générique empruntée au manuel de géométrie ERMEL cycle 3 (« Rectangle à terminer 2 » pp. 221-229). Une pièce est découpée dans un rectangle (figure 1).

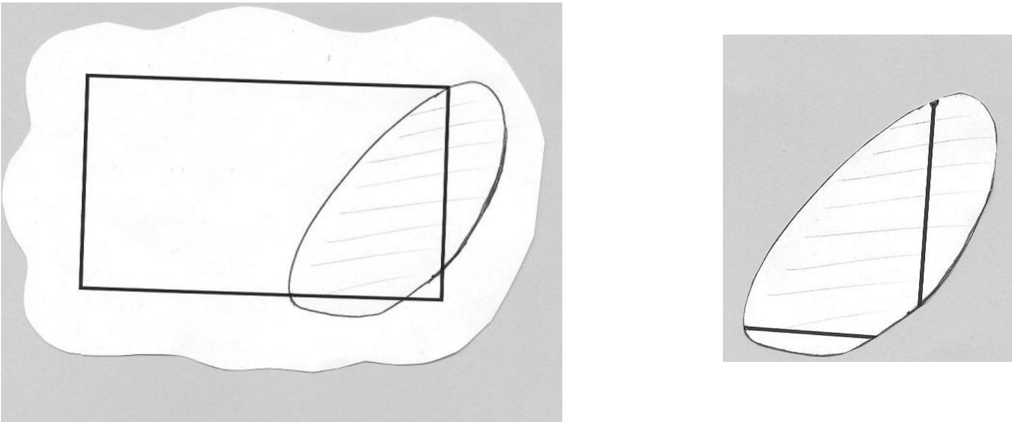


Figure 1

Une version de cette pièce découpée est donnée aux élèves placés en binôme (une pièce découpée par binôme), version dans laquelle un des deux traits présents sur la pièce initiale a été effacé à l'exception de son extrémité correspondant à un sommet d'angle droit du rectangle (figure 2). Le rectangle est affiché au tableau et la tâche générique pour les élèves est de reproduire le trait manquant sur leur pièce de manière à pourvoir, par superposition, "compléter le rectangle".

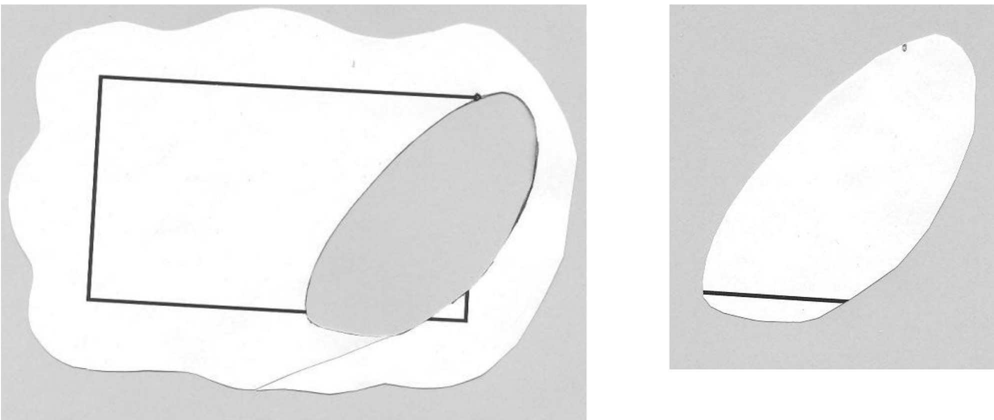


Figure 2

Le travail des élèves est organisé en trois tâches successives par un jeu sur deux variables didactiques de la situation : les instruments à disposition et les positions relatives de l'extrémité restée visible du trait effacé et de l'autre trait. Pour les deux premières tâches, une malle contenant des gabarits d'angles droits de différentes formes et tailles, dont des équerres, est à disposition des élèves. Ils disposent aussi de règles. Pour la troisième tâche, les seuls des gabarits de petite taille sont laissés à disposition, avec des règles. Concernant le positionnement du point et du segment, la situation de la première tâche est celle représentée par la figure 2 (positionner une équerre peut suffire à tracer le segment manquant). Pour les tâches suivantes, le segment est plus éloigné du point (figure 3, les gabarits proposés sont trop petits pour pouvoir être utilisés directement, il est d'abord nécessaire de prolonger un ou plusieurs des traits).

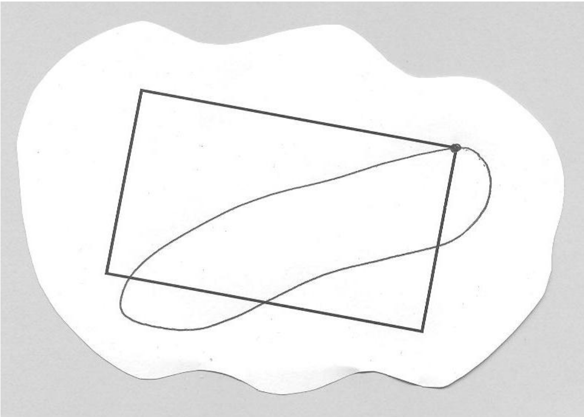


Figure 3

Le jeu sur ces variables didactiques a pour finalité de rendre nécessaires des prolongements du segment donné et/ou des côtés du gabarit utilisé. Chacune de ces tâches donne lieu à une phase de recherche autonome des binômes, suivie d'une phase collective au cours de laquelle les binômes valident leur production au tableau, lesquelles sont ensuite classées en deux colonnes, une pour les productions satisfaisantes et une pour les autres. Cette validation est accompagnée d'une explicitation de la procédure utilisée. La séance se termine par une synthèse pilotée par l'enseignante.

La séance a été filmée à l'aide de deux caméras. Le recueil s'est concentré sur l'activité des élèves, c'est-à-dire qu'en dehors des phases collectives, qui ont bien sûr été filmées, les expérimentateurs ont cherché à recueillir ce que faisaient, disaient, regardaient les élèves en naviguant de binôme en binôme, n'hésitant pas à interpeller les élèves pour qu'ils décrivent leur procédure, quitte à perturber le fonctionnement ordinaire de la classe. Lors de l'atelier, nous avons proposé aux participants une analyse *a priori* succincte en nous concentrant sur les aspects génériques la tâche, c'est-à-dire sans prendre en compte le jeu sur les variables didactiques présenté plus haut, puisqu'il n'est pas central pour notre propos dans ce texte. Nous présentons ici une synthèse de cette analyse *a priori*, ayant permis aux participants de cerner les enjeux de la situation et qui nous servira de grille d'analyse pour la description de l'activité géométrique effective de quelques élèves.

Une première procédure, qu'il est possible d'envisager, est une procédure par essai-erreur. On peut envisager des tracés à l'œil, ajustés par validations successives. On peut aussi envisager des stratégies visant à utiliser l'extrémité apparente comme sommet d'un angle droit du rectangle à restaurer. Cette procédure pourrait conduire à positionner le sommet de l'angle droit du gabarit (ou de l'équerre) sur cette extrémité et à produire un tracé sans autre précaution. Il est important de relever qu'en l'absence de côté dont ce point pourrait être une extrémité, seule une contrainte, un seul point d'appui, est disponible pour positionner l'instrument. Le geste associé se rapproche alors de ce que nous avons décrit comme relevant d'un tracé d'angle droit. Notons également que ce point est le seul sommet potentiel d'un angle droit sur la pièce à disposition des élèves. Du côté de la dimension verbale de l'activité, si l'on se positionne dans une telle approche de la tâche par les angles droits, nous pourrions faire l'hypothèse d'une absence de référence au segment dans le discours des élèves, d'une caractérisation du tracé sans relation avec ce deuxième objet, c'est-à-dire ne mobilisant que les seules propriétés de l'objet construit (par exemple : le trait tracé est trop penché). Sur le plan du rapport à la figure, il se pourrait que la vision des élèves soit focalisée sur cette seule partie de la pièce découpée.

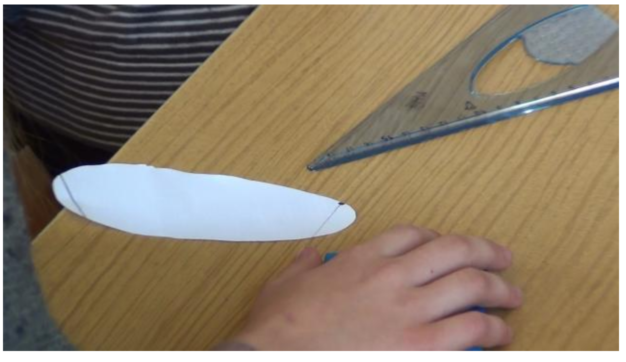
À l'opposé d'une approche relevant strictement des angles droits, il est possible d'envisager une approche par les droites perpendiculaires. Celle-ci consisterait à positionner successivement son gabarit le long du segment donné puis à faire glisser le gabarit jusqu'à atteindre l'extrémité restée visible du segment effacé. Ce tracé serait accompagné d'une verbalisation explicite faisant référence aux deux objets représentés sur la pièce découpée et d'aller-retour du regard entre ces deux éléments.

Cette méthodologie nous livre ainsi une grille d'analyse pour décrire l'activité géométrique supposée des élèves dans la situation, à partir de traces prenant en compte les diverses dimensions de cette activité. Il nous semble néanmoins nécessaire de garder en tête que les trois dimensions de l'activité peuvent ne pas être nécessairement strictement convergentes, à tout moment dans le travail des binômes. Des procédures intermédiaires pour chacune de ces approches sont susceptibles d'apparaître. Nous pouvons par exemple, envisager un tracé que nous rattacherions davantage à une procédure « angle droit » accompagné d'une verbalisation et/ou d'une vision prenant en compte les deux éléments de la pièce à disposition des élèves. Cela pourrait être notamment le cas pour des binômes ne parvenant pas à matérialiser au travers de l'usage des instruments la relation perçue et/ou verbalisée entre le segment donné et le point. Un binôme pourrait également très bien parvenir à une procédure matérielle adéquate, mobilisant la relation binaire entre les deux segments perpendiculaires, sans pour autant parvenir par exemple, à verbaliser la relation matérialisée par le tracé.

3 Analyse *a posteriori* : mise à l'épreuve de la méthodologie de description présentée

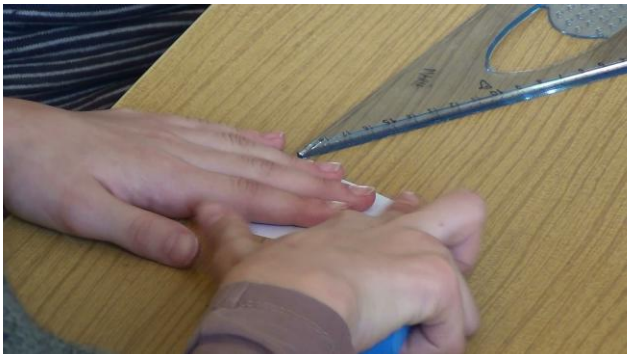
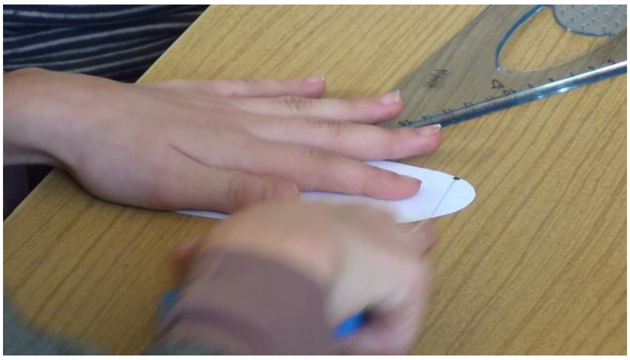
Le document de travail, que nous avons proposé aux participants à l'atelier afin de mettre à l'épreuve les outils méthodologiques présentés plus haut, consiste en une reconstitution des parcours de plusieurs binômes d'élèves à partir du recueil vidéo réalisé. Les données concernant les trois phases collectives faisant suite à chacune des tâches, disponibles pour presque tous les binômes, ont été complétées par des extraits de phases de recherche et d'interactions avec les expérimentateurs. Le document final est constitué d'une alternance de description, de photographies et de transcription, conformément à notre approche tridimensionnelle de l'activité. Dans ce texte, nous nous concentrons sur le parcours de deux binômes.

Nous commençons par un premier binôme composé de Louise et Benoît. Lors de la première tâche, Louise commence par positionner un des angles droits de son gabarit (de forme carrée) sur le point visible sur la pièce et trace un premier trait (photos 1 et 2).



Photos 1 et 2

Son index pointe ensuite vers le point. Il s'ensuit deux mouvements rectilignes pendant lesquels son autre main maintient la pièce tout en cachant le segment initialement tracé (photos 3 et 4).

Photos 3 et 4

La recherche du binôme se poursuit, le binôme trace alors un nouveau trait selon les mêmes modalités. Les dimensions matérielle et visuelle de l'activité de ce binôme semblent convergentes : Louise ne prend en compte qu'une seule contrainte lors de son tracé et ne tient pas compte du segment lors de l'analyse de son tracé. Pour ce qui est de la verbalisation associée à cette première tâche, nous disposons d'éléments provenant de la phase de mise en commun collective. Benoît se rend au tableau et constate, par superposition, que leur production ne permet pas de fermer le rectangle. Nous proposons ci-dessous un extrait de transcription des échanges suivant cette validation :

1. Stéphanie : Alors le premier, vous avez fait quoi pour tracer le premier ? Qu'est-ce que vous vous êtes dit pour tracer le premier trait ?
2. Benoît : [silence]
3. Stéphanie : Tu sais pas ? Vous avez juste posé l'équerre comme ça ?
4. Benoît : [silence]
5. Stéphanie : Ben c'est oui ou c'est non ?
6. Benoît : C'est elle [Louise] qui a…
7. Stéphanie : Alors Louise ?
8. Louise : Au début, on a cru qu'il fallait faire tout droit.
9. Stéphanie : D'accord.
10. Louise : Mais après, on s'est dit tout droit ça n'allait pas parce que… Au début, on a voulu faire comme le premier parce qu'au début, on a cru que tout était droit et après on a fait l'autre et on a posé l'équerre euh… La pointe vers le point. Et après, on a tracé.
11. S : D'accord. Alors, est-ce que c'est bon ?
12. D'autres élèves : Non.

On peut relever dans cet extrait la référence exclusive au point (10). Le discours concernant le tracé effectué utilise essentiellement le terme « droit » (8 et 10), ce qui peut s'interpréter, d'un point de vue logique, par une caractérisation du tracé par ses propriétés propres, plutôt que par ses relations avec les autres éléments de la figure. Bien sûr, caractériser ce qui ne va pas dans la production par les seules propriétés du segment qui vient d'être tracé est un exercice délicat dans une situation dont les contraintes sont conçues pour rendre nécessaire la prise en compte des relations entre deux côtés consécutifs du rectangle. Cela contribue à expliquer les difficultés rencontrées par ce binôme quant à la verbalisation de leur procédure. On retrouve d'ailleurs le même type de difficultés de verbalisation chez un autre binôme ayant utilisé la même procédure de tracé (angle droit de l'équerre sur le point) :

13. Stéphanie : Alors vas-y remets dedans. Alors à ton avis, qu'est-ce qui ne va pas ?
14. Émile : C'est trop sur le côté
15. Stéphanie : D'accord
16. Émile : Enfin c'est trop...

17. Stéphanie : C'est trop à l'intérieur effectivement. Donc on met dans oui ou dans non ?
18. Émile : Dans non.

Là aussi, l'expression utilisée (« trop sur le côté ») ne tient compte que du tracé qui vient d'être effectué, de manière isolée par rapport à l'autre trait figurant sur la pièce.

Nous poursuivons avec la phase de recherche correspondant à la deuxième tâche proposée aux élèves. Notons qu'une feuille blanche A3 a été distribuée aux élèves afin de permettre de réaliser des prolongements effectifs. Cette décision n'avait pas été anticipée par les expérimentateurs. Elle a eu des conséquences importantes chez d'autres binômes, lesquels se sont servis de l'angle droit de cette feuille comme un (grand) gabarit. Le binôme commence par tâtonner, Benoît pointe le segment donné de l'index, puis Louise pointe sur le point (photos 5 et 6).


Photo 5 et 6

Il semble donc cette fois que ce binôme ait perçu les deux éléments à mettre en relation. Néanmoins, il commence par envisager un tracé à l'œil, à l'aide de la règle, puis un tracé à l'équerre, son angle droit étant positionné sur le point. La recherche se termine par des tracés successifs, suivis de gommage, sans prise en compte d'une éventuelle relation entre les deux éléments préalablement pointés du doigt. Signalons au passage que d'autres binômes, ayant également repéré chacun des deux éléments (et par ailleurs verbalisé en faisant référence à chacun des deux éléments), ont aussi rencontré des difficultés à mettre en œuvre sur le plan matériel la relation de perpendicularité par un tracé adéquat. La phase de validation collective de ce binôme a lieu après que plusieurs autres binôme soient allés au tableau et aient présenté une procédure, mathématiquement adéquate, consistant à utiliser la feuille blanche A3 comme un grand gabarit d'angle droit. Le binôme Louise-Benoît réinvestit cette stratégie lors de leur propre passage. Louise ajuste le segment qui vient d'être tracé, puis le segment initialement donné sur la pièce découpée dans le rectangle, son attention étant successivement focalisée sur chacun des deux segments. Le binôme superpose ensuite la pièce dans le rectangle à restaurer, le deuxième tracé est validé. Il n'y a néanmoins pas de verbalisation associée à la procédure lors de ce passage. On peut penser que le binôme procède essentiellement par imitation, sans qu'une conceptualisation avancée de la notion de droites perpendiculaires ne soit mobilisée. Nous passons maintenant à la troisième tâche de cette séance. Cette fois, les binômes ne disposent plus que d'un gabarit d'angle droit de petite taille et de règles, les autres instruments ayant été retirés et l'usage de la feuille A3 ayant été proscrit. Le binôme ne semble pas être en mesure d'utiliser le petit gabarit, lequel reste à distance tout au long de la recherche. Le binôme plie la pièce à restaurer, puis s'appuie sur les traces du pliage pour réaliser un tracé à la règle. Constatant l'impasse dans laquelle se trouvent les élèves, un expérimentateur intervient et demande au binôme : « il est où le rectangle ? ». Louise pointe alors le point de l'index puis décrit une forme dont le bord passe nettement en dessous du segment initialement donné, qui ne semble pas pris en considération (photos 7, 8 et 9).

Photos 7, 8 et 9

Ce passage nous paraît significatif d'une perception visuelle ne mettant pas en relation les deux éléments constitutifs de la pièce découpée. Les compétences mises en œuvre lors de la deuxième tâche n'ont pas pu être réinvesties dans ce nouveau contexte instrumental. L'absence de verbalisation aura peut-être été un signe d'une conceptualisation de la notion de droites perpendiculaires incomplète ou tout du moins insuffisante pour cette nouvelle tâche.

Nous terminons cette analyse *a posteriori* avec un autre binôme composé de Joseph et Emma[4]. Ce binôme a été choisi de manière à contraster avec le précédent. La première tâche ne lui a pas posé de problème. Il utilise l'équerre de manière adéquate et verbalise en faisant référence aux deux éléments :

Joseph : En fait, j'ai mis mon équerre *face au trait*, et ensuite je me suis aidé *du trait* pour tracer *là*.

La phase de recherche de la deuxième tâche a donné lieu à un tracé apparemment correct (les données recueillies ne permettent pas d'en connaître l'origine). Le binôme est alors sollicité par une expérimentatrice pour qu'il explicite sa stratégie :

Joseph : On a pris une équerre, on l'a mis là (photo 10). Comme on savait ben que c'était perpendiculaire ben, on a continué avec ça… et… on était allé jusque là-bas mais je sais plus… On avait réussi à aller jusque-là et on avait tracé mais je sais plus comment on avait fait (photo 11]).

Photo 10 et 11

Ce qui nous semble intéressant ici est que, bien que Joseph ne retrouve pas sa technique de tracé, celui-ci soit en mesure de verbaliser des contraintes qu'il perçoit bien (« on l'a mis là », « on était allé jusque là-bas », …), ce qui suppose une forme de conceptualisation avancée. Plus tard, lors de la phase de validation et de mise en commun, une forme de reprise publique de cette épisode,

[4] Cette dernière n'ayant pas rendu le document, concernant le droit à l'image, n'a pas été filmée. Elle est par ailleurs plutôt en retrait dans le travail du binôme.

Joseph commence par positionner son équerre « à l'envers », c'est-à-dire avec l'angle droit du « mauvais côté » (photo 12). On peut alors observer un jeu de regards entre le segment initialement donné et le segment tracé par le binôme significatif de la prise en compte perceptive progressive de la deuxième contrainte. Joseph repositionne ensuite son équerre et parvient à retrouver la technique de tracé utilisée. Cette technique est originale, elle consiste à agrandir l'équerre en utilisant implicitement le parallélisme des côtés opposés d'un parallélogramme (photo 13).


Photos 12 et 13

L'analyse de la transcription montre, à l'image des extraits proposés plus haut, une verbalisation complète faisant référence aux deux objets en jeu. Ce même binôme sera un des quelques binômes à être parvenu à réussir la dernière tâche : il a commencé par prolonger le segment donné en positionnant une première règle le long de ce segment, il a ensuite positionné le petit gabarit d'angle droit sur cette règle pour enfin contrôler son positionnement en prolongeant un côté jusqu'au point à l'aide d'une deuxième règle et tracer le deuxième segment. Bien sûr, aucune de deux techniques « opératoires » utilisées lors des deuxième et troisième tâches n'est la technique experte visée par l'institution. De la même manière, certains binômes n'ont pas utilisé le vocabulaire géométrique de manière suffisamment précise. Signalons, pour éviter tout malentendu, que ce n'était pas l'objectif principal de cette séance. La réduction de l'enseignement de la géométrie à ces aspects dans de nombreuses classes, au détriment de la conceptualisation, a été l'un des points particulièrement discutés lors du colloque. Nous espérons avoir contribué à montrer au travers ces analyses que les enjeux langagiers et matériels dépassent de loin la question du vocabulaire et de l'enseignement de techniques opératoires de tracé.

4 Conclusion

Il est évident que l'intérêt que l'on pourrait trouver à ces outils méthodologiques, visant la description de l'activité géométrique des élèves, dépend des questions que chacun se pose. Pour notre part, il nous semble que cette démarche permet une approche relativement fine de l'activité des élèves, ce qui est certainement nécessaire si l'on souhaite être en mesure de saisir son évolution, de saisir les conditions de possibilité d'une éventuelle acculturation vers des pratiques géométriques stabilisées porteuses de savoirs. Au fondement de ce travail à dimension méthodologique, nous nous sommes aidés d'une analyse logique des concepts en jeu. Cette analyse logique a fonctionné comme un élément unificateur pour penser la conceptualisation de la notion de droites perpendiculaires et la distinguer de celle de l'angle droit. Nos analyses nous ont alors permis de décrire l'activité géométrique de quelques élèves, dans une dialectique entre les concepts d'angle droit et de droites perpendiculaires, selon trois dimensions – un faire, un voir et un dire – en nous aidant de l'analyse logique des concepts comme arrière-plan structurant.

Nous poursuivons l'exploration de ce corpus par une présentation et une analyse de la deuxième séance de cette séquence. Notre attention est cette fois davantage tournée vers la situation, son potentiel didactique, plutôt que sur la méthodologie elle-même.

III - BIBLIOGRAPHIE

BARRIER T., HACHE C. & MATHÉ A.C. (à paraître) Seeing – acting – speaking in geometry: a case study, in *Proceedings of CERME 8*, 2013, Antalya, Turkey.

BULF C., MATHÉ A.C, MITHALAL J. (2011) Language in geometry classroom, in *Proceeding of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 7, 2011, Rzeszow, Poland).

CHARNAY R., DOUAIRE J. & AL. (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes, cycle 3, Ermel, Hatier.

DUVAL R., GODIN M., PERRIN-GLORIAN M.-J. (2005) Reproduction de figures à l'école élémentaire, 5-89, *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2004*, IREM de Paris.

DUVAL R. & GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

HACHE C. (2013) Langage mathématique à la transition primaire-collège, in *Actes du colloque COPIRELEM 2012*, Quimper.

IREM DE LILLE (2000) Travaux géométriques – Apprendre à résoudre des problèmes au cycle 3, CRPD Nord Pas-de-Calais.

JAUBERT M., REBIÈRE M., BERNIÉ J.P. (2003) L'hypothèse « communauté discursive » : d'où vient-elle ? Où va-t-elle ? *Cahiers Théodile*, 4, 51-80.

MATHÉ A.C. (2012) Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **32.2**, La Pensée Sauvage édition.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.-J. & VERBAERE O. (2007) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, **77**, 7-34.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHÉ A.C., LECLERC R. (2013) Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, **90**, 7-41.

RADFORD L. (2013) Perceiving with the eyes and with the hands. *REPIME*, 3(1), 56-77.