

# ENRICHISSEMENT D'UNE VISION NON ICONIQUE AVEC UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE ET PRÉMISSSES D'UNE GÉOMÉTRIE AXIOMATIQUE-NATURELLE (GII)

**Sylvia COUTAT**

Maître assistante, Université de Genève

Equipe DiMaGe

Sylvia.Coutat@unige.ch

## Résumé

Cet atelier s'inscrit dans la continuité de l'atelier B1 animé par S. Coutat et R. Falcade lors du précédent colloque COPIRELEM (Coutat, Falcade 2013). Nous avons orienté ce précédent atelier sur l'étude de l'enseignant dans la mise en œuvre d'une séquence de géométrie utilisant un logiciel de géométrie dynamique en fin de primaire. Nous reprenons de nombreux éléments dans ce présent atelier en nous intéressant plus particulièrement aux connaissances des élèves en jeu dans des activités utilisant un logiciel de géométrie dynamique. La géométrie du cycle 3, orientée vers les propriétés, est le support des activités travaillées en classe, les enjeux de cette géométrie sont précisés dans une première partie à travers les travaux de Braconne Michoux (2008) alliés aux travaux de Houdement et Kuzniak (1998) et de van Hiele (1958). Nous présentons ensuite les travaux de Duval et Godin (2005), et ceux de Offre, Perrin et Verbaere (2006) sur l'évolution du regard des figures géométriques avec l'usage des instruments. Dans une deuxième partie nous analysons deux activités issues d'une ingénierie didactique sur l'introduction d'un Logiciel de Géométrie Dynamique au début du cycle 3. Cette introduction du dynamisme dans l'apprentissage de la géométrie vise une évolution de la réflexion des élèves vers la prise en compte des propriétés. L'utilisation d'un Logiciel de Géométrie Dynamique s'accompagne de l'introduction d'une nouvelle règle de contrat didactique : *une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement*. Dans la troisième partie l'analyse de deux élèves démontre à la fois la difficulté dans le changement de regard souhaité chez les élèves et l'évolution positive de la réflexion de ces derniers. Un bref compte-rendu du travail des participants est présenté dans la quatrième partie. La dernière partie expose quelques éléments de conclusion.

## I - QUELQUES ÉLÉMENTS THÉORIQUES

### 1 Paradigmes géométriques et niveaux de van Hiele

La pratique de la géométrie évolue avec la scolarité. Afin d'identifier quels types d'activités et de raisonnements peuvent être traités à l'école primaire, nous utilisons les paradigmes géométriques développés par Houdement et Kuzniak (1998). Ils identifient trois paradigmes géométriques. Le paradigme G1, la *géométrie naturelle*, ce paradigme a pour source de validation la réalité et le sensible, la déduction s'appuie sur la manipulation d'objets réels et l'utilisation d'instruments. Le paradigme G2, la *géométrie axiomatique naturelle*, s'éloigne de la réalité il aspire à être un schéma de la réalité. La validation s'appuie sur une axiomatique et la mise en œuvre de démonstration. Le paradigme G3, la *géométrie axiomatique formaliste*, se détache complètement de la réalité. L'axiomatique n'est plus inspirée du sensible mais de la logique formelle. Le paradigme G3 étant plutôt associé à la géométrie pratiquée au post obligatoire (lycée et plus), nous nous limitons aux paradigmes G1 et G2 et à leur articulation. Afin d'ajouter une certaine finesse dans la distinction et d'éventuelles relations entre ces deux paradigmes nous utilisons les travaux de Braconne Michoux (2008) qui elle-même s'appuie sur les travaux de van Hiele (1958). Van Hiele définit cinq niveaux de pensées géométriques dans l'évolution des connaissances géométriques. Au niveau 0 (N0),

appelé niveau de *visualisation*, les objets géométriques sont identifiés par leur forme globale. Au niveau 1 (N1), niveau *d'analyse*, des propriétés sont associées aux objets géométriques. Cependant, ces propriétés ne sont pas reliées entre elles. Ces liaisons apparaissent au niveau 2 (N2), appelé *déduction informelle*, mais elles ne permettent pas encore de relier les objets entre eux. Dans le niveau 3 (N3), *déduction formelle*, les liaisons se forment et s'organisent certaines déductions formelles. Le dernier niveau (N4), *niveau de rigueur*, correspondrait à l'état des connaissances du mathématicien expert. En utilisant les travaux de van Hiele (1958) Braconne Michoux (2008) complète les paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (1998) et l'articulation G1/G2 : elle montre que le niveau *d'analyse* (N1) peut être envisagé comme une « zone de tuilage » entre les paradigmes G1 et G2. Le niveau d'analyse est partagé en deux niveaux : G1-N1 et G2-N1. Braconne-Michoux ajoute que le paradigme G1 est partagé en 2 : G1-N0 et G1-N1. On peut déduire que ces deux sous-paradigmes utilisent une validation perceptive ou instrumentée (G1) avec pour G1-N0 une vision des figures par leur forme (N0), alors que pour G1-N1 la vision des figures s'appuie sur les propriétés (N1).

## 2 Les instruments en géométrie

### 2.1 Les instruments du papier-crayon (Duval)

Les travaux de Duval et Godin (2005) d'une part sur la décomposition dimensionnelle des formes et, d'autre part, ceux de Offre, Perrin et Verbaere (2006) sur l'usage des instruments de géométrie constituent des outils d'analyses pertinents pour identifier dans quel paradigme se situe la réflexion d'un élève. Duval et Godin (2005) identifient différents rapport aux figures géométriques. Ainsi une figure peut être identifiée par sa forme, un élément global de dimension 2, un élément 2D, c'est aussi une vision iconique. Cette réflexion se situe au niveau N0 de van Hiele. Cependant une figure peut aussi être vue par les éléments qui la composent, les droites, éléments de dimensions 1, 1D, et les points, éléments de dimension 0, 0D. Offre, Perrin et Verbaere (2006) complètent cette évolution du regard de la figure en utilisant les instruments de géométrie. Ils défendent que l'utilisation des instruments de géométrie permet de travailler cette décomposition dimensionnelle et la prise en compte des propriétés entre les sous éléments de la figure. Ainsi une telle réflexion serait plutôt du niveau N1 de van Hiele. Cependant l'utilisation des instruments ne va pas de soi et doit être prise en charge dans la séquence d'apprentissage. La prise en compte des connaissances instrumentales en lien avec les connaissances conceptuelles apparaît à travers la genèse instrumentale, processus de construction d'un instrument par un sujet. Rabardel (1995) définit cette genèse comme une composée de deux processus. Le *processus d'instrumentalisation*, relatif à l'émergence et à l'évolution des composantes de l'artefact, et le *processus d'instrumentation*, portant sur l'émergence et l'évolution des schèmes sociaux d'utilisation. Ainsi les artefacts ou outils de construction, sont les entités matérielles qui deviennent des instruments lorsqu'ils sont associés à une finalité dans la résolution d'une tâche.

### 2.2 Les instruments des Logiciels de Géométrie Dynamique

Dans le contexte d'un Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD pour la suite), Laborde et Capponi (1994) ont analysé l'utilisation du déplacement dans la validation de constructions géométriques. L'outil déplacement est utilisé pour identifier des invariants, c'est-à-dire des configurations du dessin qui perdurent quelques soient les déplacements réalisés. Ces invariants correspondent aux propriétés géométriques associées aux constructions, propriétés embarquées explicitement dans les Cabri-dessins<sup>1</sup> et assurées valides par le logiciel lui-même. Une vision plus fine des différents instruments déplacement est introduite par Restrepo (2008). Nous n'utiliserons pas toutes les distinctions présentées dans son travail, nous retiendrons seulement que le déplacement peut être utilisé pour identifier des invariants d'un Cabri-dessin, c'est-à-dire ses propriétés géométriques. Le

<sup>1</sup> Nous reprenons la définition de Laborde-Capponi 1994 : *une représentation graphique sur l'écran de Cabri-géomètre*.

déplacement peut aussi être utilisé pour valider une construction (instrument utilisé par Laborde et Capponi 1994), c'est-à-dire que les propriétés désirées au cours de la construction sont effectivement des propriétés de la construction, et les invariants identifiables par le déplacement.

### 3 Nos objectifs d'apprentissage

À partir des travaux de Duval et Godin (2005) nous précisons les trois sous-paradigmes de Braconne-Michoux :

- G1-N0 dans lequel la validation est sensible, (perceptive ou instrumentée), elle est associée à une vision iconique (vision 2D), qui s'appuie sur les formes.
- G1-N1 dans lequel la validation est sensible, (perceptive ou instrumentée), elle est associée à une vision non iconique (vision 0D, 1D et 2D), qui s'appuie sur les propriétés des figures.
- G2-N1 dans lequel la validation n'est plus uniquement sensible, ne s'appuie pas encore sur les lois hypothético-déductives, elle est associée à une vision non-iconique qui s'appuie sur les propriétés des figures.

Notre objectif est d'enrichir les connaissances des élèves de début de cycle 3 en travaillant sur des propriétés simples afin de solliciter une réflexion de niveau G1-N1 et non plus seulement de niveau G1-N0. Pour cela nous reprenons les travaux de Duval et Godin (2005) sur la décomposition dimensionnelle, c'est-à-dire l'évolution du regard sur les figures pour considérer les éléments de dimension 1, les droites et les éléments de dimension 0, les points. Nous reprenons aussi les travaux de Offre, Perrin et Verbaere (2006) sur la reproduction de figures avec des instruments spécifiques. Nous avons choisi de travailler autour d'activité de reproduction dans un LGD, où les propriétés à reproduire sont identifiables par la mise en œuvre du déplacement associée à la décomposition dimensionnelle des formes. Cependant l'utilisation du déplacement tel que nous l'envisageons passe par l'acquisition d'une nouvelle règle du contrat didactique pour le LGD : *une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement*. Ainsi les reproductions des élèves ne doivent pas être uniquement des copies superposables et perceptivement identiques au modèle (G1-N0), mais elles doivent avoir les mêmes propriétés que le modèle, les mêmes invariants que le modèle (G1-N1).

---

## II - LES ACTIVITÉS PROPOSÉES

---

L'ingénierie didactique mise en place utilise le logiciel Cabri Elem, un logiciel de la société Cabrilog, inspiré du logiciel Cabri II Plus. Ce logiciel permet de construire un cahier numérique interactif où les différentes pages du cahier sont personnalisables par l'auteur (chercheur ou enseignant). Sur chaque page on retrouve la page blanche de travail du Cabri II Plus, l'auteur du cahier choisit ensuite les outils de construction qu'il souhaite éventuellement mettre à disposition de l'élève (point, droite, perpendiculaire, symétrie axiale ...). Lorsque l'auteur crée son activité il peut à chaque page programmer des rétroactions et interactions qu'il souhaite. Ces rétroactions peuvent être spécifiques à certaines procédures et elles peuvent soutenir l'élève au cours de sa résolution par des indices en lien avec ses difficultés. D'autres rétroactions peuvent informer l'élève sur la validité de sa réponse. Enfin l'élève peut utiliser les rétroactions liées à la manipulation directe des objets de l'environnement dynamique.

La séquence mise en place comprend cinq regroupements. Chaque regroupement contient un cahier Cabri Elem réalisé par la classe en 50 mn environ, des moments de travail en binôme et des moments d'échanges collectifs. Une séance en papier-crayon est associée à chaque séance de travail sur un cahier Cabri Elem. Une description de la séquence est présentée en annexe.

Les deux activités que nous présentons sont issues de deux cahiers différents. La première activité « Le parcours des petites bêtes » est issue du deuxième cahier. La deuxième activité « La maison

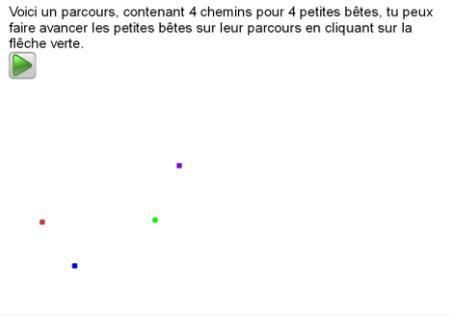
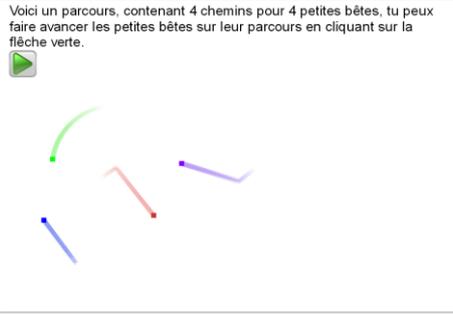
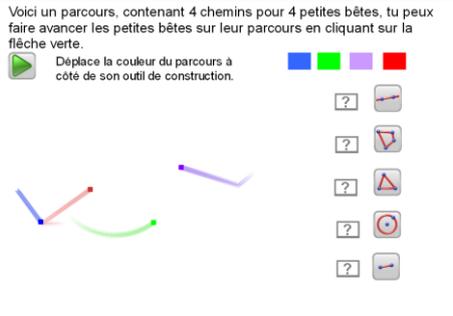
des petites bêtes » est issue du quatrième cahier « Evaluation géométrie » sur la reconnaissance de formes géométriques.

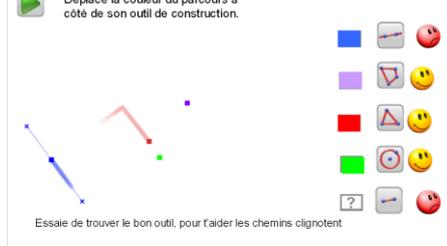
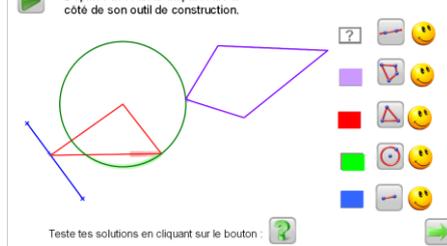
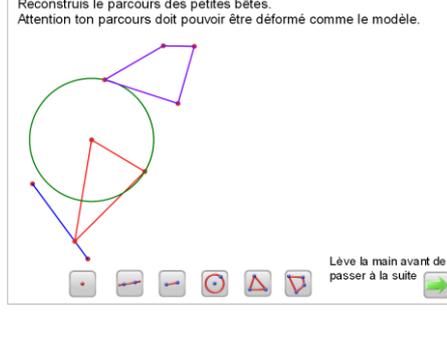
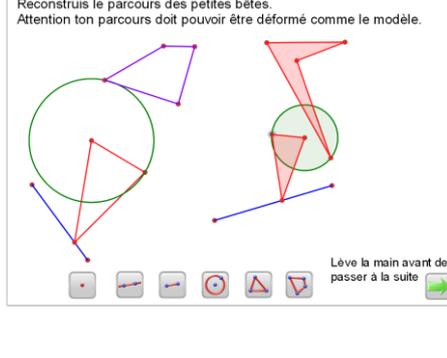
### 1 Activité : Le parcours des petites bêtes

Cette activité est composée de deux parties. La première partie a pour but de travailler la reconnaissance de formes simples à partir d'une vision morcelée des formes. C'est-à-dire que la forme n'est jamais visible dans sa globalité. Ensuite l'objectif est que les élèves associent un outil de construction à une forme géométrique, ici l'outil quadrilatère à la forme quadrilatère, l'outil cercle à la forme cercle, l'outil triangle à la forme triangle, l'outil segment à la forme segment.

La deuxième partie du cahier a pour but de travailler la mise en place d'une nouvelle règle du contrat didactique liée à l'utilisation du LGD : *une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement.*

Voici une description de la première activité. Un film disponible sur internet peut aider à la compréhension : <http://www.youtube.com/watch?v=n9fT1yQLn0>

<p>Voici un parcours, contenant 4 chemins pour 4 petites bêtes, tu peux faire avancer les petites bêtes sur leur parcours en cliquant sur la flèche verte.</p> 	<p>La première page présente une consigne quatre points et une flèche. Les points symbolisent quatre petites bêtes. Lorsqu'on clique sur la flèche, le point bleu commence à se déplacer sur son chemin. Une fois que le point bleu est proche du point rouge, il s'arrête et c'est le point rouge qui se déplace. Une fois que le point rouge est proche du point vert, le point rouge s'arrête et le point vert se déplace. Il s'arrête lorsqu'il s'approche du point violet qui commence son déplacement. Lorsque le point violet revient à sa position initiale, il s'arrête et le point vert reprend son déplacement. Ainsi de suite jusqu'au point bleu qui réinitialise l'enchaînement des déplacements.</p>
<p>Voici un parcours, contenant 4 chemins pour 4 petites bêtes, tu peux faire avancer les petites bêtes sur leur parcours en cliquant sur la flèche verte.</p> 	<p>Chaque point se déplace sur un chemin en laissant une trace. Les chemins, liés entre eux, forment un parcours. Le point bleu se déplace sur un segment, le point rouge sur un triangle, le point vert sur un cercle et le point violet sur un quadrilatère.</p>
<p>Voici un parcours, contenant 4 chemins pour 4 petites bêtes, tu peux faire avancer les petites bêtes sur leur parcours en cliquant sur la flèche verte.</p> <p>Déplace la couleur du parcours à côté de son outil de construction.</p> 	<p>Une fois la première boucle des déplacements réalisée, les élèves doivent associer chaque couleur de parcours à son outil de construction c'est à dire déplacer le rectangle de couleur à côté de l'icône outil correspondant.</p> <p>Une fois que tous les rectangles couleurs sont positionnés, il peut valider sa solution.</p>

<p>Voici un parcours, contenant 4 chemins pour 4 petites bêtes, tu peux faire avancer les petites bêtes sur leur parcours en cliquant sur la flèche verte.</p> <p>Déplace la couleur du parcours à côté de son outil de construction.</p>  <p>Essaie de trouver le bon outil, pour t'aider les chemins clignotent</p>	<p>Si sa solution contient des erreurs, la ou les erreurs sont signalées par une icône rouge et le ou les chemin(s) correspondant à l'erreur clignote(nt). L'élève a une visibilité globale du ou des chemin(s) relatif(s) à ses erreurs et peut alors modifier sa solution.</p>
<p>Voici un parcours, contenant 4 chemins pour 4 petites bêtes, tu peux faire avancer les petites bêtes sur leur parcours en cliquant sur la flèche verte.</p> <p>Déplace la couleur du parcours à côté de son outil de construction.</p>  <p>Teste tes solutions en cliquant sur le bouton :</p>	<p>Une fois la solution correcte tous les chemins s'affichent. L'élève peut passer à la suite.</p>
<p>Reconstruis le parcours des petites bêtes. Attention ton parcours doit pouvoir être déformé comme le modèle.</p>  <p>Lève la main avant de passer à la suite</p>	<p>Dans la deuxième partie de l'activité les élèves doivent reproduire le parcours, une forme complexe, c'est-à-dire une figure composée de sous-figures simples. Ces sous-figures simples sont reliées entre elles. Le segment est défini par deux points libres, tout comme le cercle. Le triangle a un sommet sur le segment, un sommet qui est le centre du cercle, son dernier sommet est le point qui définit le rayon du cercle. Enfin, un sommet du quadrilatère est un point du cercle et les trois autres sommets sont des points libres.</p>
<p>Reconstruis le parcours des petites bêtes. Attention ton parcours doit pouvoir être déformé comme le modèle.</p>  <p>Lève la main avant de passer à la suite</p>	<p>Voici une solution, sa validité ne peut être prouvée que par la comparaison entre le déplacement de tous les points de la reproduction et le déplacement des points correspondants du modèle. Les extrémités du segment doivent pouvoir être déplacées dans le plan, tout comme trois des sommets du quadrilatère, le centre du cercle et le sommet du triangle qui apparaît sur le cercle. Le quatrième côté du quadrilatère doit se déplacer sur le cercle et le troisième côté du triangle doit se déplacer sur le segment.</p>

Analysons cette activité en termes de propriétés à identifier et paradigme suffisant pour la résolution.

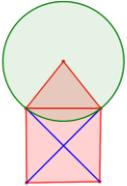
Dans la première partie de l'activité, il s'agit de reconnaître des formes simples en ne percevant qu'une partie de ces formes à travers la trace laissée par les points. Ici, les propriétés des figures concernées n'ont pas besoin d'être mobilisées. Lorsqu'il s'agit d'associer chaque trace à un outil de construction, là encore une réflexion sur la forme globale est suffisante, mais celle-ci est mise en difficulté car la forme n'est pas accessible dans sa globalité. La vision mobilisée pour cette

première partie de l'activité est une vision 2D. Ainsi, le paradigme de résolution de la première partie est le paradigme GI-N0.

La seconde partie consiste à reproduire une figure complexe, composée de figures simples. Les sous-figures ont été identifiées dans la page précédente. Pour pouvoir reproduire la figure et non seulement la forme complexe, c'est-à-dire pour reproduire la forme avec les relations entre ses sous-éléments qui la composent, il faut utiliser le déplacement pour identifier les invariants. La difficulté de cette activité repose sur la consigne « ton parcours doit pouvoir être déformé comme le modèle ». Jusqu'à présent, dans une pratique statique de la géométrie en papier-crayon, une telle consigne n'a pas de sens. Cette consigne s'appuie sur une règle spécifique du contrat didactique lié à l'utilisation d'un LGD : *une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement*. Les élèves doivent donc travailler sur les propriétés de la figure à reproduire, c'est-à-dire qu'un sommet du triangle est défini comme un point du segment. Le centre du cercle est aussi un sommet du triangle, le dernier sommet du triangle définit aussi le rayon du cercle. Enfin, un sommet du quadrilatère est un point du cercle. La figure modèle contient deux points avec une propriété topologique d'appartenance soit à un cercle, soit à un segment et deux points ont un double statut, centre d'un cercle et sommet d'un triangle ; définition du rayon du cercle et sommet d'un triangle. Pour identifier ces propriétés portant sur des points, le déplacement des points doit être utilisé conjointement à une vision portant sur les points, c'est-à-dire une réflexion sur des éléments 0D. La résolution de l'activité utilise la déconstruction dimensionnelle pour identifier les propriétés d'une figure, elle nécessite le paradigme GI-N1. Une reproduction qui ne prend pas en compte ses relations et se contente d'une reproduction perceptivement à l'identique, c'est-à-dire une reproduction superposable au modèle mais non déformable comme le modèle, est une résolution qui utilise une vision de la forme, une vision 2D. Le paradigme associé est le paradigme GI-N0.

## 2 Activité : la maison des petites bêtes

Nous analysons la dernière page du cahier 4 dont voici l'énoncé <http://www.youtube.com/watch?v=wO4ccOn12Nw>

<p>Essaie de reconstruire la maison des petites bêtes. Attention ta maison doit se déformer comme la maison modèle !</p> <div data-bbox="165 1361 614 1675"> <p>Essaie de reconstruire la maison des petites bêtes. Attention ta maison doit se déformer comme le modèle !</p>  <p>Note sur ta feuille comment tu as fait</p> </div>	<p>La figure est composée d'un triangle quelconque, d'un quadrilatère avec ses deux diagonales et d'un cercle. Le triangle n'est pas un triangle isocèle mais un triangle quelconque. Le cercle a pour centre un sommet du triangle et passe par un seul sommet du triangle commun au sommet du quadrilatère.</p>
---	---

Cette activité se rapproche de la page 2 de l'activité que nous venons d'analyser. L'utilisation du déplacement avant toute construction permet d'identifier les propriétés de la figure, c'est à dire que le triangle n'est pas isocèle mais quelconque, et donc que le cercle ne passe que par un sommet du triangle. Les propriétés à identifier concernent là encore des points qui ont un double voire triple statut. Le centre du cercle est aussi un sommet du triangle, les deux autres sommets du triangle sont aussi des sommets du quadrilatère, enfin un de ces deux sommets définit aussi le rayon du cercle. Une construction correcte doit contenir toutes ces relations entre le cercle, le triangle et le quadrilatère. Pour résoudre cette activité, la perception seule et une vision globale de

la forme complexe ne suffisent pas. Les élèves doivent décomposer la figure en figures simples, puis identifier les relations entre ces figures simples qui reposent sur des propriétés des points. Le paradigme GI-N0 n'est pas suffisant. Une procédure qui utilise le paradigme GI-N0 aboutirait par exemple à construire un cercle qui ne passe pas par un sommet du triangle. Une autre construction pourrait dans un premier temps considérer les trois sous-figures, un triangle, un cercle, un quadrilatère et ses diagonales, indépendamment les unes des autres. Dans un second temps, les sous-figures sont regroupées et placées dans la configuration de la figure modèle, mais sans être liées les unes aux autres. La mobilisation du paradigme GI-N1 est nécessaire.

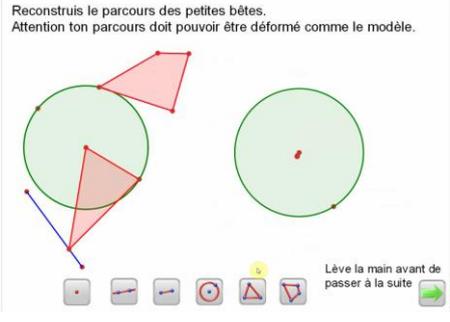
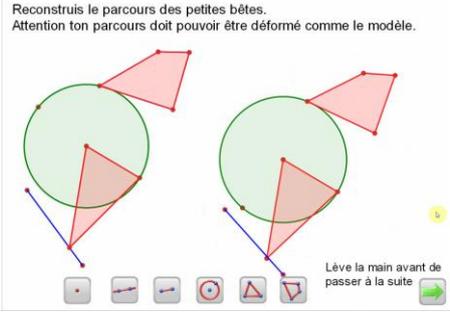
### III - ANALYSE A POSTERIORI DE DEUX ÉLÈVES

Nous analysons deux élèves qui ont travaillé en binôme pour l'activité « Le parcours des petites bêtes » et individuellement pour l'activité « La maison des petites bêtes ». Pour chaque activité nous nous interrogeons sur les relations que les élèves ont identifiées, comment ils ont identifié ces relations et comment ils les ont reproduites. Cela nous renseignera sur la vision que les élèves mettent en œuvre et le paradigme qu'ils utilisent pour la résolution de l'activité.

#### 1 Parcours des petites bêtes

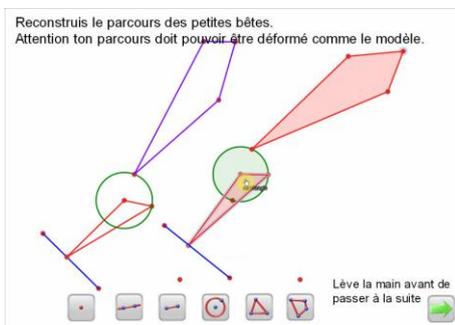
La première partie de l'activité n'a pas posé de problème pour les élèves. Ils ont facilement reconnu les différentes formes et les ont associées aux outils de construction. Ils maîtrisent le paradigme GI-N0.

La deuxième partie a été résolue en environ 36 mn avec de nombreux échanges avec l'enseignante. Nous analysons plus finement trois extraits de leur procédure de résolution.

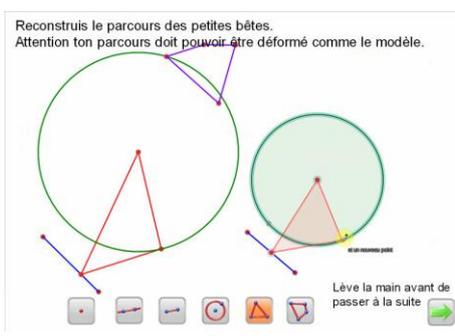
	<p>Dans le premier extrait (<a href="http://www.youtube.com/watch?v=EnMyG_q6Eu8">http://www.youtube.com/watch?v=EnMyG_q6Eu8</a>), les élèves commencent à construire le cercle à côté du modèle. Rapidement, ils changent leur procédure et reproduisent les différents éléments de la figure sur le modèle. Ainsi, leur reproduction est superposée au modèle.</p> <p>L'enseignante précise que la construction des élèves doit être faite à côté du modèle et non pas dessus.</p>
	<p>Dans le deuxième extrait (<a href="http://www.youtube.com/watch?v=c0oaXXQl6MM">http://www.youtube.com/watch?v=c0oaXXQl6MM</a>), les élèves commencent par construire le cercle, puis le triangle avec un sommet comme étant le centre du cercle, un sommet sur le cercle et un sommet libre. Puis, ils construisent le quadrilatère avec un sommet sur le cercle et trois sommets comme des points libres. Enfin, le segment est construit avec deux points libres. Les élèves prennent soin de positionner chaque forme comme le modèle. Ainsi, bien que leur construction soit à côté du modèle, elle pourrait être superposable au modèle.</p>

Dans ces deux extraits, les élèves se placent dans le contrat classique et opérationnel du papier-crayon : dans une activité de reproduction, la reproduction doit être superposable au modèle. Les élèves n'utilisent pas le déplacement pour identifier les relations entre les sous-figures. De plus, leurs contrôles considèrent les formes et non les points. La vision des élèves se porte sur les éléments 2D et non les éléments de dimensions inférieures. Ils restent dans un paradigme de résolution GI-N0.

Le troisième extrait (<http://www.youtube.com/watch?v=awPi4MAhzFU>) a lieu après 30mn d'essais et d'invalidations avec l'enseignante. En effet, après chaque essai, l'enseignante déplace les points et demandent aux élèves s'ils considèrent leur solution correcte. A chaque fois, les élèves invalident leur solution avec l'enseignante. Progressivement, les élèves commencent à valider par eux-mêmes leur construction en utilisant le déplacement.

	<p>Les élèves commencent par construire le cercle, le triangle puis le segment. Ils terminent par le quadrilatère. Le cercle est construit à l'aide de deux points libres. Le triangle utilise le centre du cercle comme sommet, un point libre et un point sur le cercle. Le segment est positionné de façon à ce qu'il passe par-dessus le sommet du triangle. Enfin, le quadrilatère a un sommet sur le cercle et trois sommets libres. La reproduction des élèves est encore très proche du modèle par sa forme, sa taille et son orientation. Lorsque l'enseignante intervient pour valider leur construction, elle déplace le sommet du triangle qui doit être sur le segment, et le centre du cercle.</p>
--	--

Afin d'amener les élèves à modifier leur vision de la figure, l'enseignant revient sur les petites bêtes introduites dans le cahier 1 pour modéliser les points. Elle reprend le déplacement de la petite bête point sur segment. Les élèves reprennent la construction d'un point sur segment travaillée lors du cahier précédent. Ensuite, l'enseignante revient sur la construction du cercle et de son rayon en demandant aux élèves ce qui définit le centre et le rayon du cercle. Les élèves reprennent seuls la construction. Ils commencent par le cercle puis le triangle en utilisant le centre et le rayon du cercle. Cependant, lorsqu'ils doivent construire le segment, Mattéo dit « il fallait faire la petite bête avant » puis « c'est faux, bouge le triangle ». Hamed efface toute la construction et Mattéo donne les instructions de construction à Hamed :

<p>Reconstruis le parcours des petites bêtes. Attention ton parcours doit pouvoir être déformé comme le modèle.</p>  <p>Lève la main avant de passer à la suite</p>	<p>7 :22  <i>Mattéo : Tu fais la ligne, tu mets le petit point dessus</i>  <i>Hamed : je fais le triangle</i>  <i>Mattéo : non le petit point</i>  <i>Une fois le point construit sur le segment, (Hamed déplace le point)</i>  <i>Mattéo : voilà tu fais le rond, voilà tu prends le triangle tu l'accroches là (centre du cercle) tu vas l'accrocher là (point sur segment) et (Hamed dirige le curseur à l'opposé du point définissant le rayon du cercle, comme sur le modèle, cf image ci-contre) non ensuite tu l'accroches là le petit point là (point du cercle définissant le rayon)</i></p>
--	---

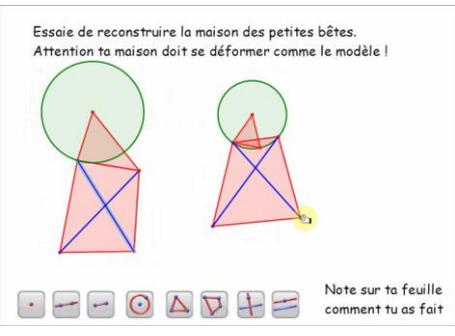
Une fois tous les éléments de la construction reproduits, les élèves déplacent les points et les objets de leur construction et du modèle afin de s'assurer que les comportements au cours du déplacement sont effectivement les mêmes.

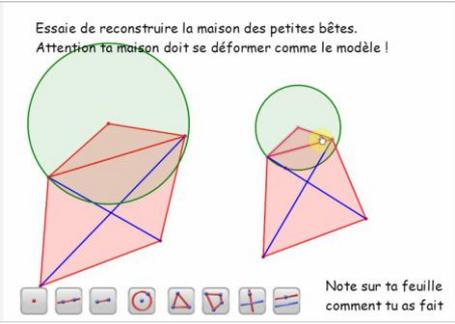
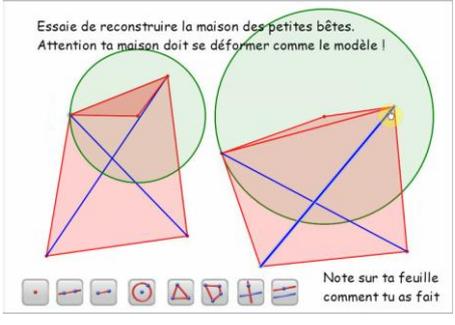
Ce troisième extrait montre que Mattéo a adapté son paradigme à l'activité, il ne considère plus uniquement les formes dans l'activité de reproduction mais aussi les relations entre les sous éléments. Sa vision de la figure s'appuie sur les points et les propriétés topologiques de ces points, son paradigme de résolution est le GI-N1. Cette adaptation de paradigme passe par de nombreuses interactions avec l'enseignant et la prise en compte de la nouvelle règle de contrat didactique : une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement. Il semble que Hamed n'ait pas changé de paradigme, on voit bien dans la dernière partie du dialogue que Hamed cherche toujours à reproduire une forme qui ressemblera au modèle par son orientation par exemple, il cherche à construire un rectangle qui aura la même orientation que le modèle. Le paradigme de résolution de Hamed est le paradigme GI-N0.

## 2 La maison des petites bêtes

### 2.1 Procédure de Hamed

Comme pour l'activité présentée précédemment, nous avons découpé la résolution de Hamed en trois épisodes.

<p>Essaie de reconstruire la maison des petites bêtes. Attention ta maison doit se déformer comme le modèle !</p>  <p>Note sur ta feuille comment tu as fait</p>	<p>Dans le premier épisode (<a href="http://www.youtube.com/watch?v=JJGjKXVUIE4">http://www.youtube.com/watch?v=JJGjKXVUIE4</a>), Hamed prend en compte les points dans la figure à reproduire, mais en s'appuyant sur la configuration initiale du modèle et non sur les multiples statuts des points. Ainsi, il essaie de placer les deux sommets du triangle commun aux sommets du quadrilatère sur le cercle comme dans la configuration initiale, alors que la nouvelle configuration ne respecte plus cette configuration. Il invalide cependant sa construction en utilisant le déplacement.</p>
---	---

	<p>Dans le deuxième épisode (<a href="http://www.youtube.com/watch?v=K0dbJlsRS-k">http://www.youtube.com/watch?v=K0dbJlsRS-k</a>), Hamed s'appuie encore sur une vision 2D du modèle pour sa construction. Il construit tout d'abord le cercle, puis le triangle avec un sommet sur le cercle et un sommet dans le cercle, puis le quadrilatère avec deux sommets libres et deux sommets superposés aux sommets du triangle. Il invalide seul sa construction en utilisant le déplacement sur tous les points de sa reproduction. Il compare les déformations de sa construction et du modèle en déplaçant tous les points. En invalidant sa construction de la sorte, nous pouvons supposer que la règle du contrat didactique liée à l'utilisation du LGD est prise en compte par Hamed.</p>
	<p>Le dernier épisode (<a href="http://www.youtube.com/watch?v=inAntG-qSIE">http://www.youtube.com/watch?v=inAntG-qSIE</a>) ne débouche pas sur une reproduction valide, mais elle démontre tout de même une évolution pertinente dans la réflexion de Hamed. La production est en effet non valide car le troisième sommet du triangle qui doit être un point libre est construit comme un point à l'intérieur du cercle et non un point libre du plan. Le déplacement permet de prendre conscience rapidement de l'origine de l'erreur. Le modèle ne ressemble plus à la configuration initiale. La reproduction finale de Hamed est différente visuellement du modèle par sa forme, taille et orientation, tout en étant différente de la configuration initiale. Ainsi, on peut conclure que Hamed a su se détacher d'une vision s'appuyant uniquement sur la forme et les éléments 2D pour prendre en compte les éléments 1D et surtout 0D (points) dans sa reproduction.</p>

A la fin de la résolution de l'activité « Le parcours des petites bêtes » Hamed était toujours dans le paradigme GI-N0. Les premiers essais de Hamed dans la résolution de l'activité « La maison des petites bête » appartiennent encore au paradigme GI-N0. Pourtant, à force d'essais et d'invalidations par le déplacement, Hamed finit par faire évoluer sa vision, il apporte moins d'importance à la forme et s'attache plus aux multiples statuts des points dans sa reproduction. Ainsi, on peut considérer que Hamed a fait évoluer son paradigme pour finalement utiliser le paradigme GI-N1 dans la résolution de cette activité.

## 2.2 Procédure de Mattéo

Mattéo ([http://www.youtube.com/watch?v=\\_i5wLLuXwNs](http://www.youtube.com/watch?v=_i5wLLuXwNs)) a su mobiliser le paradigme GI-N1 dans la résolution de l'activité « Le parcours des petites bêtes ». Dans cette nouvelle activité, Mattéo ne déforme pas le modèle, il ne peut donc pas identifier les multiples statuts des points. Sa procédure de résolution s'appuie donc uniquement sur la perception de la forme. Pourtant, il parvient à une reproduction correcte. Pour valider sa construction, il déplace plusieurs sommets, et sous éléments de sa construction puis du modèle. Ainsi, dans la validation de sa construction, il

mobilise une vision qui prend en compte les sous éléments de la figure. On peut supposer que Mattéo s'est appuyé sur le paradigme GI-N0 dans la mise en œuvre de sa construction, et a mobilisé le paradigme GI-N1 dans la validation de celle-ci.

---

## IV - BREF COMPTE-RENDU DE L'ATELIER

---

L'atelier a commencé par une introduction des outils théoriques avec la présentation des travaux de Houdement et Kuzniak sur les paradigmes géométriques, ceux de van Hiele sur les niveaux de résolution et ceux de Braconne Michoux pour relier les paradigmes géométriques aux niveaux de van Hiele. La présentation théorique s'est poursuivie par les éléments relatifs aux instruments et à l'évolution de la vision des figures géométriques pour aboutir à la reproduction de figures. Les participants ont été confronté au logiciel CabriElem tout d'abord par une présentation de différentes activités mettant en valeur les spécificités de l'environnement à travers les rétroactions « programmables » au préalable. Cette première présentation du LGD a permis l'introduction et la définition du déplacement pour identifier des invariants et/ou pour valider une construction.

Une fois que les participants se sont appropriés les éléments théoriques et l'environnement dynamique, nous avons présenté la problématique : en quoi le travail des propriétés avec un LGD permet-il de mobiliser le niveau 1 d'analyse dans le paradigme G1 ?

Pour répondre à cette question les participants ont travaillé sur les deux cahiers : « Le parcours des petites bêtes » et « Evaluation géométrie » d'où est extraite l'activité « La maison des petites bêtes ». Pour chaque cahier, les participants devaient répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les relations à identifier ?
- Quel est le niveau de van Hiele suffisant pour la résoudre.
- Quelle(s) procédure(s) relève(nt) du G1-N0, du G1-N1 ?

L'analyse de ces cahiers a permis aux participants de s'approprier encore davantage le logiciel. La consigne « Ton parcours doit pouvoir être déformé comme le modèle » a suscité de nombreux échanges autour de sa formulation : remplacer « déformé » par « modifié », « bougé » ... Ces échanges ont démontré que cette consigne provoquait une difficulté et que sa compréhension était au cœur même de notre problématique et du passage au niveau 1 d'analyse par la déconstruction dimensionnelle des formes.

- Après l'analyse a priori par les participants des cahiers, nous avons travaillé sur les vidéos des élèves. Pour chaque vidéo, l'analyse des participants était guidée par les questions suivantes : Quel(s) procédure(s) l'élève a-t-il mis en œuvre ?
  - Quelles relations a-t-il identifiées ?
  - Comment les a-t-il identifiées ?
  - Comment les a-t-il reproduites ?
- Dans quel paradigme/niveau se place-t-il ?

La synthèse de l'atelier a été rapide car les échanges des participants au cours des analyses ont été particulièrement riches.

---

## V - CONCLUSION

---

Cet atelier avait pour but d'identifier dans quelle mesure une réflexion dans le paradigme G1-N1 est possible au début du cycle 3 avec un Logiciel de Géométrie Dynamique. Afin de distinguer des procédures du paradigme G1-N0 de celles du paradigme G1-N1, nous avons utilisé les travaux de Duval et Godin (2006) sur l'évolution du regard sur les figures géométriques et déplacement, instrument spécifique d'un LGD. Nous avons analysé deux activités de reproduction. Ces activités de reproduction s'appuient sur une nouvelle règle du contrat didactique, spécifique au LGD : *une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement*. Cette nouvelle règle de

contrat didactique oblige les élèves à investir le déplacement pour identifier les propriétés et à les reproduire dans leur construction. Ainsi, la réflexion des élèves ne considère plus uniquement la forme, la taille et l'orientation de la forme à reproduire, mais elle s'appuie aussi sur les propriétés de celles-ci. Les propriétés travaillées ici sont des propriétés autour des points. Les analyses des deux élèves ont montré que cette réflexion sur les propriétés dans une activité de reproduction n'est pas évidente chez les élèves. En effet, leurs actions premières visent une reproduction à l'identique en utilisant une vision iconique, basée sur la forme. L'appropriation du déplacement pour identifier les propriétés est aussi difficile, là encore parce que les élèves mobilisent tout d'abord une vision 2D. Cependant dans la deuxième activité étudiée, l'analyse des actions des élèves démontre une évolution de la vision de la figure et une prise en compte des propriétés.

L'appropriation du déplacement pour identifier des invariants, permet une évolution du regard sur les figures. Cependant il serait illusoire de penser que le déplacement seul permet l'évolution jusqu'au paradigme G2 voire G2-N1. Les connaissances instrumentales s'allient aux connaissances visuelles mais aussi aux connaissances liées à la validation et à la preuve. Coutat (2014) présente l'analyse d'une séquence d'enseignement proche de la séquence travaillée dans cet atelier, avec des élèves de fin de primaire. Cette étude distingue deux instruments déplacement : le déplacement pour identifier un invariant, mobilisé pour explorer une figure et le déplacement pour valider, utilisé pour valider une construction. Ces deux instruments mobilisent des connaissances géométriques et instrumentales différentes. Cette recherche démontre qu'il est nécessaire que les élèves établissent des relations et connexions entre les connaissances liées à la vision des figures, les connaissances liées à l'appropriation des instruments et les connaissances liées à la validation et la preuve pour entrer dans une réflexion de niveau G2-N1.

---

## VI - BIBLIOGRAPHIE

---

BRACONNE MICHOUX A. (2008) *Evolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2- 6<sup>ième</sup>*, Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot.

COUTAT S. (2014) Quel Espace de Travail Géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ? *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa* (à paraître).

COUTAT S. (2012) Vers une évolution de la vision en géométrie au primaire avec un logiciel de géométrie dynamique, *Math-Ecole*, **218**, 50-55.

COUTAT S. FALCADE R. (2013) Le rôle de l'enseignant dans une séquence de géométrie utilisant deux environnements, dynamique et statique au cycle 3, *Actes du 39<sup>ième</sup> colloque international de la COPIRELEM*, IREM de Brest.

DUVAL R., GODIN M. (2005) Changement de regard nécessaire sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

HOUEMENT C. KUZNIAK A. (1998) Réflexion sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres, *Grand N*, **64**, 65-78.

LABORDE C. CAPPONI B. (1994) Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherche en didactique des mathématiques*, **14 n°1.2**, 165-210.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.-J. VERBAERE O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, **77**, 7-34.

RESTREPO A. (2008) *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6<sup>ième</sup>*, Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier, Grenoble.

VAN HIELE P.M. (1959) La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'APMEP*, **198**, 199-205.

---

## VII - ANNEXE

---

### 1 Description de la séquence didactique proposée

- Regroupement 1 : Les petites bêtes
  - Séance 1 – cahier 1 : avec Cabri Elem, introduction à l’environnement dynamique et des outils de construction de base (point, droite, segment, cercle, triangle, quadrilatère)
  - Séance 2 : avec papier-crayon, introduction de la feuille de liaison (LGD – papier-crayon)
- Regroupement 2 : Parcours des petites bêtes
  - Séance 1 – cahier 2 : avec Cabri, reconnaissances de sous-figures simples, reconstruction d’une figure complexe composée de figures simples
  - Séance 2 : avec papier-crayon l’élaboration d’un programme de construction
- Cahiers 3 : Planche à clous
  - Séance 1 – cahier 3 : avec Cabri, apprentissage et réinvestissement des instruments Parallèle et Perpendiculaire
  - Séance 2 : avec papier-crayon transposition des règles du logiciel dans le papier-crayon (codage) (pour plus d’informations Coutat Falcade (2013))
- Cahier 4 : C’est quoi ces formes ?
  - Séance 1 – cahier 4 : avec Cabri, évaluation sur la reconnaissance des figures (carré, losange, rectangle, parallélogramme), reconstruction d’une figure complexe composée de figures simples.
  - Séance 2 : avec papier-crayon, transcription d’invariants du LGD vers le papier-crayon.
- Cahier 5 : Lequel est-ce ?
  - Séance 1 – cahier 5 : avec Cabri, activité d’échanges de messages de reconnaissance de Cabri-dessin dans le papier-crayon