

L'ENSEIGNEMENT DE LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE À LA TRANSITION ÉCOLE-COLLÈGE

Groupe IREM Transition école-collège¹

IREM de Montpellier, Université Montpellier 2

aurelie.chesnais@um2.fr

Résumé

Cet atelier propose de questionner la continuité des enseignements entre l'école et le collège en géométrie. Nous nous appuyons pour cela sur le travail mené au sein du groupe IREM de Montpellier « transition école-collège ». Le groupe a notamment travaillé sur l'enseignement de la symétrie orthogonale, notion emblématique des difficultés qui se posent à cette transition. Nous clarifions tout d'abord les enjeux d'enseignement de cette notion en cycle 3 et en sixième, compte tenu des programmes et d'éléments didactiques. Nous présentons ensuite des situations de classe qui ont été élaborées par le groupe et testées dans des classes de CM2 et de sixième. L'analyse de la mise en œuvre de ces situations dans des classes et de réponses d'élèves permet d'en présenter les enjeux, les difficultés et les marges de manœuvre qui s'offrent aux enseignants pour leur mise en œuvre.

Cet atelier vise à présenter le travail du groupe IREM « transition école-collège » de Montpellier, créé en septembre 2012. Le groupe associe des enseignants de cycle 3 et des enseignants de mathématiques de sixième et a fait le choix de travailler sur l'enseignement de la géométrie. Le travail a porté, pour cette première année, sur l'enseignement de la symétrie axiale. Le travail proposé aux participants de l'atelier consiste à étudier deux des premières situations de classes conçues par le groupe (une situation pour le CM2 et une situation pour la sixième) ainsi que des vidéos de séances de classes durant lesquelles ces situations ont été mises en œuvre. L'objectif est ainsi d'obtenir un retour critique sur les réalisations du groupe pour alimenter la suite du travail. Le contenu des échanges durant l'atelier a ainsi nourri l'écriture de ce texte.

Ce choix a été guidé par le fait qu'il s'agit d'une notion emblématique du programme de géométrie qui mobilise de nombreux objets mathématiques ; elle a été déjà largement étudiée, y compris en relation avec des questions de continuité entre école et collège (Perrin-Glorian et al. 2013, Chesnais 2012). Elle est commune aux programmes du cycle 3 et de sixième – comme la plupart des notions de géométrie – avec des contenus quasiment identiques, mais les enjeux se situent dans le changement de perspective nécessaire sur la notion, comme nous le détaillerons plus loin. La question de la continuité est donc particulièrement aigüe à propos de cette notion.

Nous proposons de préciser les enjeux d'apprentissage fondamentaux en ce qui concerne la symétrie axiale puis nous montrons, à travers un exercice pour le cycle 3 et un exercice pour la sixième, comment nous déclinons ces enjeux dans une progression d'apprentissage. L'analyse *a posteriori* de vidéos de séances de classes, durant lesquelles ces exercices ont été mis en œuvre, permet ensuite de mettre en évidence les activités que les élèves peuvent développer sur ces exercices (« tout ce que les élèves font, disent, pensent », cf. Robert 2008), les difficultés des élèves et les conditions de mise en œuvre dans la classe, en particulier en ce qui concerne l'accompagnement de l'activité des élèves par l'enseignant.

¹ Le groupe IREM Transition école-collège de Montpellier est composé de : Fabrice Bonicel (CLG J. Vallès, Nîmes), Laurent Carayon (PEMF, Ecole Bouloche, IUFM, Montpellier), Aurélie Chesnais (MCF, laboratoire LIRDEF, Université Montpellier 2), Damien Delorme (Ecole J. Moulin, Nîmes), Aurélien Destribats (CLG M. Pagnol, Sérignan), Marie Francis (CLG Rabelais, Montpellier), Céline Mathieu (PEMF, Ecole E. Pottier, Montpellier).

I - CONTEXTE DE TRAVAIL

1 Les travaux existants sur lesquels nous nous appuyons

Les travaux de didactique existants sur la symétrie orthogonale à la fin du primaire ou au début du secondaire ont mis en évidence les principaux enjeux et difficultés de son apprentissage.

Ainsi, les principales conceptions erronées de la notion ont été répertoriées par Grenier (1988), puis reprises par d'autres auteurs. Nous retenons les mêmes que dans Chesnais (2012), à savoir la confusion avec d'autres transformations (notamment la translation et la symétrie centrale, mais aussi la rotation), la prégnance des axes horizontaux et surtout verticaux, ainsi que la transformation d'un demi-plan dans un autre, le plus souvent dans une seule direction, en privilégiant les directions de haut en bas et de gauche à droite.

L'enseignement de la symétrie axiale est aussi en prise avec les enjeux plus larges de l'apprentissage de la géométrie. Ainsi, Perrin-Glorian et al. (2013) pointent l'importance de travailler sur des tâches de restauration de figures incluant des contraintes sur l'usage des instruments à la fois pour faire émerger des propriétés de la symétrie (conservation des alignements, le fait que le symétrique d'un point de l'axe est lui-même, etc.) et plus largement la déconstruction dimensionnelle des figures (Duval, 2005). Les programmes d'enseignement de 1985 avaient en outre fait de la symétrie axiale, le pilier de l'axiomatisation de la géométrie du collège et, même si cette logique s'est progressivement perdue dans les programmes suivants (Chesnais, 2012), la symétrie axiale n'en reste pas moins un des supports privilégiés pour l'initiation au raisonnement déductif en sixième.

Le fait qu'il s'agisse d'une transformation géométrique suppose qu'elle caractérise des relations entre figures et non seulement des propriétés de figures, avec toutes les difficultés langagières associées comme l'avait pointé Vergnaud (1991). Nous choisissons, à la suite de Chesnais (2012), de distinguer d'une part, ce qui se rapporte aux axes de symétrie de figures, c'est-à-dire à la symétrie comme propriété d'une figure, que nous qualifions d'aspect statique de la symétrie ; d'autre part, ce qui se rapporte à la transformation comme relation entre deux ensembles de points, que nous qualifions d'aspect dynamique de la symétrie. Notons que l'entrée dans la symétrie, y compris du point de vue purement perceptif et quotidien, se fait en général par la notion d'axe de symétrie, tandis que du point de vue mathématique, l'axe de symétrie correspond au cas particulier de la transformation où la figure et sa symétrique sont confondues.

2 Les enjeux fondamentaux que nous avons retenus

Les différents éléments issus des recherches en didactique des mathématiques et résumés ci-dessus, ainsi que les programmes, nous ont permis de dégager ce qui nous semble être les enjeux fondamentaux de l'apprentissage de la notion de symétrie axiale de l'école au collège. Notons que ceux-ci ne sont évidemment pas indépendants les uns des autres :

- dépasser les conceptions erronées (transformation d'un demi-plan dans un autre, confusion avec d'autres transformations notamment translation, symétrie centrale et rotation, prégnance des axes horizontaux et verticaux) ;
- concevoir la symétrie comme relation entre trois objets, c'est-à-dire en particulier tenir compte du rôle de l'axe dans l'aspect dynamique (et ne pas la voir seulement comme relation entre deux figures), ainsi que concevoir l'axe de symétrie comme étant le résultat du fait que la figure est sa propre symétrique (et non pas seulement comme « droite coupant une figure au milieu »). Cet enjeu est fortement lié à celui qui suit :
- relier les aspects statique et dynamique de la symétrie, c'est-à-dire être capable de relier l'idée d'axe de symétrie d'une figure à celle de symétrique d'une figure par rapport à un axe ;
- acquérir certaines propriétés de la transformation : d'une part, celles correspondant à la définition du symétrique d'un point (orthogonalité de l'axe avec le segment joignant un point et son

symétrique, équidistance à l'axe des deux points) et conservation des mesures et des formes. Cet apprentissage des propriétés est inscrit dans une initiation au raisonnement déductif ;

- maîtriser certains éléments langagiers permettant de verbaliser sur les tâches et les procédures : connaissance des expressions « symétrique (de) », « symétrie (axiale, orthogonale) » et « par rapport à ».

Nous avons ensuite tenté d'élaborer, relativement à chacun de ces objectifs, une progression des apprentissages, du cycle 3 à la sixième.

En particulier, il nous semble qu'un objectif essentiel du CM2 est le dépassement des conceptions erronées, du moins dans les cas les plus évidents, car on sait à quel point elles résistent et peuvent ressortir dès que les élèves sont confrontés à une difficulté nouvelle (Grenier, 1988). Grenier avait également identifié que ces conceptions se manifestent essentiellement lors du travail sur les figures perçues globalement (qui relève davantage du CM2), plus que dans le travail sur les points (qui occupera une large place en sixième).

En ce qui concerne les propriétés citées, il nous semble qu'elles doivent être perçues globalement en CM2, tout en commençant à considérer des points de vue plus locaux (par exemple identifier que les différences de taille de figures, perçues globalement, correspondent à des différences de longueurs de segments correspondants, notamment dans le cas de figures polygonales, ou encore considérer des sommets correspondants de figures polygonales pour préciser la notion de distance à l'axe, etc.), mais que leur formalisation relève de la sixième. Le travail sur les propriétés est alors un moyen de travailler sur la déconstruction dimensionnelle des figures, c'est-à-dire permettre aux élèves d'articuler la vision globale de la figure et des considérations portant sur des éléments de dimension 1 ou 2. De même, en ce qui concerne les éléments langagiers, les élèves doivent y être familiarisés en CM2, mais leur usage rigoureux par les élèves relève de la sixième. Le fait de considérer la symétrie comme relation entre trois objets et de relier les aspects statique et dynamique de la symétrie ne pourront qu'être abordés en CM2, notamment par la variété des tâches réalisées (par exemple en faisant rechercher des axes de symétrie de figures formées par deux sous-figures identifiables par les élèves ou en travaillant des tâches du type « compléter la figure pour qu'elle admette un axe de symétrie », notamment sur quadrillage, ou encore éventuellement en permettant aux élèves d'identifier que les figures qui possèdent un axe de symétrie se superposent à elles-mêmes lorsqu'on retourne un calque par rotation dans l'espace autour de l'axe). Toutefois, l'idée d'invariance globale d'une figure ne pourra être formalisée en CM2, ni complètement maîtrisée en sixième. Enfin, la conception erronée de transformation d'un demi-plan dans un autre – éventuellement dans un seul sens – peut aussi être remise en cause à l'occasion de ces tâches, elle est également en jeu dès que l'axe coupe une figure.

II - EXERCICES TESTÉS

1 Exercices de CM2

L'exercice que nous présentons ici s'inscrit dans une série de cinq exercices (prévus pour être traités en trois à cinq séances) élaborée par le groupe. Pour permettre de mieux comprendre le contexte, nous donnons quelques éléments sur l'organisation de cette séquence.

Dans les deux premiers exercices, les élèves doivent observer l'emplacement de l'empreinte d'une tache de peinture après pliage, puis anticiper l'emplacement et la forme de l'empreinte d'une figure en forme de « L » après le pliage d'une feuille, selon différents cas (variation de la distance de la figure à l'axe, de l'orientation de l'axe et de l'orientation de la figure par rapport à l'axe). À travers cette première phase, nous visons à institutionnaliser le fait que deux figures symétriques sont superposables par pliage le long de l'axe. Outre le fait d'apporter aux élèves une représentation mentale commune – et vérifiable en acte – de la symétrie axiale, ces exercices sont aussi l'occasion de mettre en évidence certaines conceptions erronées, ainsi qu'un certain nombre de propriétés : si une figure est « loin du pli » (resp. « près du pli »), alors son empreinte aussi ; une

figure et son empreinte ont la même forme et la même taille, mais sont retournées l'une par rapport à l'autre. Notons que le vocabulaire utilisé ici participe des enjeux langagiers d'apprentissage mentionnés plus haut. Dans les deux exercices suivants, les élèves doivent identifier si des couples de figures (toujours en forme de « L ») sont ou non symétriques par rapport à l'axe proposé, puis retrouver l'axe dans le cas de couples de figures symétriques l'une de l'autre. L'objectif est également le travail sur les conceptions erronées et les propriétés identifiées lors des premiers exercices. Les derniers exercices sont consacrés à la construction de symétriques de figures sur quadrillage.

L'exercice que nous faisons le choix d'analyser plus précisément dans cet atelier est le troisième de la séquence. La fiche élève est présentée en annexe 1.

1.1 Analyse a priori

Les objectifs de cet exercice se relient aux enjeux identifiés plus haut : il s'agit essentiellement de faire émerger les conceptions erronées afin de permettre aux élèves de les remettre en question et de travailler les propriétés de la symétrie axiale de manière globale (distance à l'axe, conservation des mesures, « retournement » de la symétrique par rapport à la figure initiale). Notons que la propriété d'orthogonalité à l'axe a été volontairement écartée (notamment, aucun cas de symétrie glissée n'est présenté) dans la mesure où nous considérons que le travail sur cette propriété relève de la sixième puisqu'il est associé au passage à la transformation ponctuelle. L'objectif est de développer les images mentales globales que les élèves se font de figures symétriques l'une de l'autre. Notons que l'exercice permet aussi de relier les aspects statique et dynamique de la symétrie car il s'agit à la fois de considérer une transformation qui permet de « passer d'une figure à l'autre » et de trouver l'axe de symétrie d'une figure formée par un couple de sous-figures.

L'émergence des conceptions erronées et leur remise en cause sont assurées par les modalités d'organisation de l'exercice. Celui-ci est prévu pour être traité tout d'abord sans calque, ni pliage, ni instrument de mesure, afin de travailler l'anticipation. Le travail de groupes devrait permettre la mobilisation d'argumentations et d'éléments langagiers. L'usage d'un calque ou du pliage est réservé comme moyen de validation et est l'occasion de remobiliser la définition de figures symétriques comme étant superposables par pliage.

Présentons les caractéristiques et objectifs de chacun des dix cas proposés en fonction des valeurs des variables didactiques retenues :

- **Cas n° 1 :** mettre en jeu la conception erronée « confusion avec la translation », c'est-à-dire qu'il est attendu des élèves qu'ils identifient que l'une des figures n'est pas retournée par rapport à l'autre ou encore qu'on l'a seulement fait « glisser ».
- **Cas n° 2 :** travailler un cas où l'axe est oblique et où la figure « touche » l'axe.
- **Cas n° 3 :** travailler essentiellement l'idée de retournement de la figure et la propriété de conservation de la distance à l'axe.
- **Cas n° 4 :** travailler sur les axes obliques et identifier que l'orientation « horizontale-verticale » d'une figure n'est pas conservée. Toutefois, une difficulté de mise en page a inséré un petit espace entre la figure située en-dessous de l'axe et l'axe, ce qui peut être utilisé comme argument pour invalider la symétrie.
- **Cas n° 5 :** travailler sur les axes obliques et la confusion avec la symétrie centrale : distinguer le retournement de la figure du demi-tour.
- **Cas n° 6 :** remettre en question la prégnance des axes verticaux et travailler le fait que la symétrie est une relation entre trois objets, incluant l'axe. Ce cas peut également être l'occasion d'introduire des expressions comme « les figures ne sont pas symétriques l'une de l'autre » **par rapport à** l'axe représenté, mais sont symétriques par rapport à un axe vertical ».

- **Cas n° 7 :** mettre en évidence la conservation des mesures. Cela peut être l'occasion de relier la perception globale de taille de la surface avec la mesure d'éléments de dimension 1.
- **Cas n° 8 :** remettre en question la confusion avec la rotation et la translation en mettant en évidence le fait que les figures doivent être retournées l'une par rapport à l'autre.
- **Cas n° 9 :** l'objectif est ici que les élèves rencontrent des cas où la figure est coupée par l'axe. En effet, même si l'on peut décomposer la figure en deux morceaux situés chacun d'un côté de l'axe, on peut supposer que certains élèves reconnaissent la forme « L » et considèrent la symétrie d'une figure coupée par l'axe.
- **Cas n° 10 :** comme dans le cas n° 6, il s'agit de mettre en évidence des figures symétriques l'une de l'autre mais pas par rapport à l'axe tracé. En l'occurrence, la remise en question de la prégnance des axes horizontaux est également visée.

Même s'il ne s'agit pas des enjeux principaux de ces cas, notons que la propriété de conservation de la distance à l'axe peut aussi être mobilisée dans les cas 5, 6, 8 et 10, à condition de considérer des « parties de figures » (par exemple le « coin » ou « la petite branche du L ») ou des sommets : cela peut ainsi être l'occasion de travailler la déconstruction dimensionnelle des figures.

L'institutionnalisation visée porte sur les propriétés de la symétrie axiale déjà identifiées ainsi que sur les moyens d'invalider une proposition (l'invalidation d'une seule propriété suffit pour affirmer que les figures ne sont pas symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe proposé).

1.2 Analyse a posteriori

L'exercice a été mis en œuvre et filmé dans la classe de Clémentine, maître formateur dans une école d'application associée à l'IUFM de Montpellier. La classe compte 22 élèves et le public est hétérogène. La séance a été réalisée au mois de mai.

Repères pour la vidéo

Dans un premier temps, Clémentine reprend les propriétés et les procédures de vérification observées lors des exercices de la tâche d'encre et de l'anticipation du « L » sous forme d'un dialogue entre les élèves. Clémentine insiste sur les propriétés de conservation de la symétrie et sur le retournement. Le tableau proposé en annexe 2 rend compte des différents temps et mots clés dans les échanges entre Clémentine et la classe.

Le travail des élèves s'organise ensuite par une réflexion individuelle débattue au sein de leur groupe, puis par une correction collective où les élèves sont amenés à donner leur réponse et justification.

Lors du bilan, Clémentine invite les élèves à s'exprimer sur les différents cas en validant ou invalidant les réponses tout en répertoriant les différentes procédures rencontrées. Le tableau suivant rend compte de ce bilan et des arguments retenus par Clémentine.

Début	Cas n° 1	Non Lorsque tu plies, il n'y a pas superposition. L'image doit être retournée par rapport à la figure de départ
1'40''	Cas n° 2	Oui La figure de départ qui touche le pli Même forme, taille L'image est bien retournée
3'40	Cas n° 3	Oui Même distance, taille et forme L'image est retournée

5'00 -	Cas n° 4	Oui La distance entre la figure et le pli
7'00	Cas n° 6	Non Distance à l'axe Possibilité du oui avec un axe vertical
8'25 9'30	Cas n° 5	Non Image à l'envers, non retournée. Pour avoir une figure correcte, sens de lecture du bas vers le haut
10'35	Cas n° 7	Non, Il est plus gros, la taille n'est pas respectée
11'40	Cas n° 8	Non Difficulté de justification, insistance sur la distance à l'axe Figure devrait être retournée
13'20	Cas n° 9	Oui Cas des figures symétriques chevauchées, identifier le L Rappel de la méthode du calque
16'40	Cas n° 10	Non Pas le même écart
17'27	Bilan	Pourquoi la symétrie axiale ? L'axe, c'est le pli L'empreinte, c'est l'image, de l'autre côté.
18'50	Deuxième exercice	Formulation de la consigne
20'50 - 25'36		Institutionnalisation par Clémentine <i>Quand on fabrique une nouvelle figure (image) en pliant le long d'une droite (axe), on fait une symétrie.</i> <i>L'image a la même forme, même taille et séparée de la même distance de l'axe que la figure de départ. L'image est retournée.</i>

Synthèse sur la séance

Certaines spécificités de la symétrie axiale peuvent être explorées au travers des différents usages du papier calque. On peut recenser deux principales procédures : soit par retournement complet des deux figures décalquées, soit par retournement (le long de l'axe) d'un unique demi-plan dans l'autre. Les deux mouvements conduisent ensuite à la vérification de la superposition. La première est liée à une transformation complète du plan, tandis que la seconde véhicule l'image un demi-plan dans l'autre. Ces deux types d'usage renforcent une rupture entre les aspects statique et dynamique dans la symétrie, alors que nous visons davantage une réunification des deux. Clémentine rappelle ces procédures de vérification mais en limite l'usage lors de la validation pour favoriser l'utilisation des propriétés de la symétrie par les élèves, conformément aux objectifs de l'exercice.

Le déroulement de la séance filmée informe sur la prégnance des conceptions des élèves, comme la propriété d'équidistance à l'axe d'une figure et de son symétrique. A ce stade d'apprentissage, cette notion reste encore perçue globalement par les élèves : la caractérisation mathématique formelle de la distance à l'axe est encore inconnue des élèves et suppose une certaine déconstruction dimensionnelle des figures (Duval, 2005). Un autre argument qui apparaît souvent dans la séance consiste en une formulation vague des propriétés : « elles [les figures] sont identiques », « c'est les mêmes », etc. Cette difficulté d'identification et/ou de formulation des

propriétés, outre le fait qu'elle traduit une perception globale, souligne également les notions langagières en cours de construction et le lien étroit qui existe entre l'utilisation d'un vocabulaire adapté et la reconnaissance des propriétés visées. En marge de ce travail de justification, quelques remarques d'élèves indiquent une conception dynamique de la symétrie par le sens de lecture qu'ils utilisent (de gauche à droite ou de haut en bas et inversement), notamment dans le cas n° 5 où certains ont un sens de lecture du bas vers le haut et considèrent que c'est la figure du haut qui ne convient pas. Notons que c'est l'occasion pour Clémentine de mentionner la symétrie de la relation de symétrie : elle fonctionne « dans les deux sens ». L'aspect dynamique de la symétrie axiale ne semble pas faire obstacle dans le cas n° 9 (figure coupée par l'axe) qui pourtant favorise une perception statique.

L'action de l'enseignante se concentre sur le repérage du travail des élèves, qui permet d'orienter la synthèse et de fixer le niveau de justification. Clémentine s'emploie à rectifier constamment les maladresses des élèves dans leur vocabulaire afin d'introduire les propriétés spécifiques à la symétrie axiale et les compétences langagières pour les dire. Les questions posées par l'enseignante dans chaque cas tournent autour de l'anticipation des raisons pour lesquelles les deux figures ne peuvent se superposer, attendant des élèves qu'ils précisent la propriété particulière qui fait défaut. L'enseignante fait l'inventaire des propriétés rencontrées² (équidistance à l'axe, figure retournée, même taille, même forme) et l'institutionnalise en précisant son usage, dans chaque cas, par un travail de reformulation des réponses des élèves.

Afin de travailler l'anticipation, la représentation mentale de la symétrie et ses propriétés globales (notamment le retournement, les conceptions erronées, etc.), l'enseignante ne doit utiliser le calque ou le pliage qu'en dernier recours. Cette contrainte forte entraîne une difficulté pour l'enseignant, lors du bilan, consistant à prendre en compte et à hiérarchiser l'ensemble des arguments des élèves sans délaisser un aspect plutôt qu'un autre. Par exemple, le cas n° 8 peut être argumenté perceptivement selon la distance à l'axe, alors que l'argument principal de l'enseignant peut reposer sur le retournement. L'argument d'équidistance, délicat du fait d'une impossibilité de définition rigoureuse, devient pertinent seulement lorsque les deux figures sont symétriques par rapport à un autre axe que celui tracé. Cette notion reste problématique pour l'enseignant qui doit néanmoins rendre accessible cette connaissance aux élèves. Plus généralement, l'exercice peut être l'occasion d'un travail sur la déconstruction dimensionnelle des figures, passant d'une perception en termes de surfaces délimitées par un contour à un travail sur des éléments 1D (les côtés), voire 0D (les points).

Dans un objectif de travail en continuité entre le cycle 3 et la sixième, ayant privilégié comme objectif le dépassement de conceptions erronées en cycle 3, il nous est apparu important de travailler essentiellement l'aspect global, tout en mobilisant ponctuellement des éléments de dimension 1 ou 0, pour dévoluer à la classe de sixième le travail des propriétés à l'échelle des points.

2 Exercice d'introduction en sixième

Le groupe s'est parallèlement questionné sur la symétrie axiale en sixième, devenant, selon les programmes, la symétrie orthogonale. La ressource (cf. fiche élève en annexe 3) constitue une première ébauche de notre travail à ce niveau. Elle a été élaborée à partir d'un document proposé par un membre du groupe et retravaillé par le groupe.

La diversité des enseignements de cette notion au cycle 3 accentue les écarts entre les connaissances des élèves et il appartient à l'enseignant de faire émerger cet ensemble disparate de

² Notons que la propriété d'orthogonalité n'est pas mentionnée à ce niveau, même si elle est implicite dans la définition de la symétrie à partir du pliage. Nous considérons en effet qu'elle ne relève pas du cycle 3, sauf pour évoquer la conception erronée de confusion entre la symétrie orthogonale et la symétrie glissée, mais celle-ci n'est pas apparue très prégnante chez les élèves dans des travaux antérieurs (Chesnais, 2012). C'est pourquoi cet enjeu n'est pas pris en charge dans la séquence proposée.

connaissances et procédures, de les unifier et de les retravailler dans l'optique du passage de la géométrie de l'école à la géométrie fondée sur les propriétés des figures (passage de la géométrie 1 à la géométrie 2, Houdement et Kuzniak, 2000). Notre questionnement porte sur la phase de remobilisation des connaissances et du vocabulaire des élèves lors de l'introduction de la notion de symétrie axiale. Il s'agit donc d'élaborer une situation d'introduction de la symétrie axiale servant également de diagnostic des connaissances.

Les objectifs de l'exercice

- Harmoniser le vocabulaire mobilisé par les élèves et systématiser l'emploi de l'expression complexe « ... symétrique de ... par rapport à ... ».
- Caractériser des figures symétriques par rapport à un axe comme superposables par pliage le long de l'axe.

2.1 Analyse a priori

Spécificités de l'exercice

Il s'agit de reconnaître une propriété de symétrie (ou non) dans des couples de figures. Ce type de tâche permet de travailler la symétrie à la fois dans son aspect statique et dans son aspect dynamique en créant un lien entre les deux. En effet, il s'agit de trouver si deux figures sont symétriques l'une de l'autre, c'est-à-dire s'il existe un axe de symétrie pour le dessin constitué des deux parties. Nous travaillons ainsi dans la continuité du CM2 avec une approche globale de la symétrie, et en reprenant l'idée de relation entre deux figures, présentée ici comme propriété d'un couple de figures. Notons que le choix de cette introduction « mixte » de la symétrie est largement partagé dans les manuels scolaires (Chesnais, 2012).

Il comporte plusieurs spécificités qui nous semblent pertinentes pour une situation d'introduction :

- Aucune indication sur les attentes de la symétrie axiale n'est présente dans la consigne, pour éviter les effets de contrat et travailler la disponibilité des connaissances, c'est-à-dire la capacité des élèves à les mobiliser alors qu'elles ne sont pas indiquées (Robert, 2008). Le choix de parler de « situations » vise à inciter les élèves à rechercher des relations entre les éléments des couples de figures plus que des propriétés de figures.
- Une utilisation libre des instruments et du calque, laissant s'exprimer toutes les connaissances spontanées des élèves.
- L'éventail des procédures de justification peut permettre l'émergence des propriétés de conservation de la symétrie axiale.

Certains choix volontaires, comme l'absence de l'axe, la composition de figures doubles ou leur nature même, comportent quelques caractéristiques à prendre en compte. Les figures doubles véhiculent l'idée de déplacement d'une figure ce qui peut permettre une première appréhension de la symétrie comme transformation (aspect dynamique) même si cette idée de déplacement peut poser problème plus tard, notamment pour concevoir l'idée de transformation du plan. L'absence de l'axe tend *a priori* à affaiblir le lien entre les trois objets d'une symétrie axiale, mais l'objectif est bien de le mettre au centre de l'institutionnalisation de la symétrie comme superposition par pliage le long d'un axe.

La formulation de la consigne comporte une marge d'interprétation que l'enseignant devra maîtriser pour atteindre les objectifs fixés. Le sous-entendu d'exactly quatre situations (et pas plus) peut passer inaperçu chez les élèves qui peuvent exhiber six situations (ce qui est mieux que quatre !) partageant un point commun (par exemple : « On a reproduit une figure »). Les mots « propriété » et « figure » sont aussi sources de confusion. Que désigne le mot figure ? Dans les situations 5 et 6, on peut légitimement penser que les élèves perçoivent l'ensemble comme une seule figure (pour clarifier, nous considérerons par la suite que chaque situation est composée de

deux figures). Le mot « propriété » peut aussi être discuté : Que dire d'un élève qui recherche des propriétés dans les figures, comme les angles, le parallélisme, etc., et non pas entre les figures ?

Enfin, le matériel autorisé permet une grande diversité dans les manipulations et les observables sous-jacents (longueurs, angles, parallélisme). En particulier, le papier calque est une incitation forte pour la superposition des figures, et donc une incitation à mobiliser la symétrie.

Les 6 situations révèlent des choix de valeurs de variables didactiques que nous décrivons brièvement :

- Situation 1 : axe vertical, figures par assemblage de triangles, un côté parallèle à l'axe,
- Situation 2 : axe oblique, aucun côté ni parallèle à l'axe ni horizontal ou vertical.
- Situation 3 : cas d'une translation (direction horizontale) : symétrie avec un « axe vertical » suggérée par l'aspect général de la figure (un côté parallèle au bord de la feuille, qui semble posée à la verticale).
- Situation 4 : symétrie centrale avec des côtés verticaux. Possible confusion avec un « axe oblique ».
- Situation 5 : axe oblique, figure simple coupée par l'axe. On s'attend à deux types de procédures : soit on observe deux triangles qui se chevauchent et laissent apparaître l'axe, soit on considère les deux triangles comme composants d'une seule figure globale possédant un axe de symétrie.
- Situation 6 : axe horizontal avec deux côtés de la figure parallèles à l'axe ; les figures se touchent en un point.

Par rapport à nos enjeux

- Cette tâche permet le travail sur les conceptions erronées par la confusion possible avec d'autres transformations du plan (symétrie axiale et translation), et comporte un équilibre entre axe vertical/horizontal et oblique.
- Enjeux sur la conception de la symétrie et la transition avec le cycle 3 : (ré-)expliciter le fait que deux figures symétriques sont deux figures qui se superposent par pliage le long d'un axe et le fait que dans ce cas, une figure est retournée par rapport à son image.
- Aspect dynamique/statique en travaillant sur une tâche « mixte » : en cherchant un axe de symétrie dans les situations (aspect statique), la particularité des « figures doubles » fait que la transformation (aspect dynamique) est présente et qu'on peut le faire émerger (nécessaire pour la définition que l'on vise).
- Les situations portent des figures doubles et ne privilégient pas un sens de lecture gauche/droite ou haut/bas, ni une transformation d'un demi-plan dans un autre.
- Propriétés de la symétrie : conservation des mesures et des formes, mais peu la conservation de la distance à l'axe, sauf si on cherche à caractériser la position de l'axe dans les situations 1, 2 et éventuellement 6. On retrouve ici le cadre de travail en cycle 3, laissant volontairement de côté la propriété d'orthogonalité.
- Compte tenu de la possible richesse des recherches des élèves, les compétences langagières, et leur usage pour rendre compte des procédures et objets conceptuels manipulés, constituent un enjeu fort. On peut notamment imaginer, en lien avec la symétrie, la mobilisation d'un lexique composé des mots : *symétrie, axiale, axe, figure, superposable, pliage*, éventuellement *transformation*, etc. ainsi que celle d'expressions permettant de signaler le rôle de l'axe : *pliage le long de l'axe, symétrique de ... par rapport à ...*
- L'enjeu de l'axe (relation entre 3 éléments) : l'exercice introduit l'axe comme pli. À noter que la superposition du calque par retournement du couple de figures pour chaque situation fonctionne et masque le rôle de l'axe et du pli. L'usage du calque, compte tenu des objectifs visés, peut donc constituer un obstacle.

2.2 Analyse a posteriori

Description synthétique de la séance filmée

La séance a été filmée dans la classe de Fabien, enseignant expérimenté exerçant dans un établissement à recrutement « mixte ». La classe compte 20 élèves. La séance a été filmée au mois de décembre.

1^{ère} phase : Consignes de l'exercice

- Lecture individuelle puis « collective » de l'énoncé par un élève.
- Reformulation par l'enseignant de l'expression « propriété commune » : « particularité commune » / « point commun ».
- Reformulation de la consigne par l'enseignant qui insiste sur deux points : l'identification des quatre situations parmi les six et la nécessité de justifier. L'enseignant rappelle également le matériel disponible.

2^{ème} phase : Recherche individuelle

L'enseignant circule et recueille les procédures des élèves dans le but d'organiser la phase suivante.

3^{ème} phase : Débat / Bilan

L'ordre des propositions est choisi par l'enseignant selon ses observations. Le dialogue est piloté par l'enseignant.

- Proposition 1 : Angles droits.
Rejetée (par vérification à l'équerre) car la propriété n'est pas commune à quatre situations.
- Proposition 2 : Toutes les longueurs sont égales (comparaison des « doubles figures »)
Rejetée car la propriété est commune aux six situations.
- Proposition 3 : Superposition des « doubles figures ».
Rejetée car la propriété est commune aux six situations.
- Proposition 4 : Superposition par pliage.
Validée par l'utilisation du papier calque. Le mot « symétrique » est introduit par un élève lors de cette phase.

Analyse des copies d'élèves

Sur 15 productions analysées³, 7 élèves identifient la propriété de symétrie (5 élèves ont identifié la bonne propriété et les bonnes configurations, 2 élèves ont identifié la bonne propriété et trois situations sur les quatre – sauf la situation 5) et 8 élèves n'identifient pas la propriété ou l'identifient mal.

Analyse du déroulement

Lors de la première phase, l'enseignant a œuvré sur la consigne afin de clarifier ses attentes pour la phase de recherche en renforçant l'investigation des élèves sur une caractéristique commune partagée par quatre situations parmi les six. Le sous-entendu du « exactement » quatre situations reste un point difficile à percevoir pour les élèves, malgré le pilotage de l'enseignant.

Malgré la formulation de la consigne, de nombreux élèves cherchent des propriétés des figures (prégnance forte de la mesure et des angles droits) et peu se tournent spontanément vers la

³ Les autres se sont révélées illisibles.

symétrie, alors que la suggestion du papier calque laisse penser que cela pourrait induire des effets de contrat.

La phase bilan de l'exercice, dirigée par l'enseignant, laisse percevoir les différentes procédures des élèves qui, selon le matériel utilisé, mobilisent un grand nombre de connaissances, généralement liées aux mesures et aux propriétés locales des figures (leur perception des figures a manifestement évolué depuis le cycle 3). Si ces propriétés, comme celles portant sur les angles, les longueurs, les aires, etc., ne sont pas directement liées à la symétrie, elles n'y sont néanmoins pas étrangères. Il appartient à l'enseignant de les raccrocher aux propriétés de la symétrie (même forme, même taille, etc.).

La gestion du bilan est complexe, du fait de l'objectif de viser la propriété « les figures sont superposables par pliage le long d'un axe ». Alors que le retournement du calque entraîne en effet une autre caractérisation de la symétrie, tout aussi pertinent dans la résolution de cet exercice, mais que l'enseignant choisit d'écarter. Il s'appuie sur les élèves qui décalquent les deux figures et essaient de plier pour qu'elles se superposent, ou ceux qui en décalquent une et qui essaient de superposer sur l'autre, mais sans forcément retourner.

Un autre enjeu qui apparaît lors du bilan est la formulation de la propriété : certains élèves évoquent la superposition des deux figures, mais sans préciser davantage. Or certaines interventions laissent penser que, pour certains élèves, cela sous-entend « par pliage », tandis que pour d'autres, ce n'est pas le cas. L'enseignant précise la nuance et insiste sur le rôle de l'axe, notamment à l'aide des situations 3 et 4.

Durant le débat, les enjeux langagiers portent sur les aspects privilégiés par l'enseignant, que ce soit ceux des propriétés de la transformation ou ceux des relations entre les objets dans le cas d'une symétrie axiale.

Synthèse de la séance

L'analyse de ce type de tâche et l'observation d'un déroulement effectif renseignent sur les enjeux fondamentaux d'apprentissage de la symétrie axiale. Cependant, certains nœuds dans le déroulement reflètent les choix réalisés par l'enseignant : il oriente le travail vers une conception de la symétrie par action de pliage le long d'un axe, renforçant ainsi la relation entre les trois éléments. Cette introduction de la symétrie comme transformation repose sur l'utilisation d'un vocabulaire spécifique lié aux conceptions visées, dont l'enseignant est une nouvelle fois le garant. Le fil conducteur du travail offre l'avantage de rester dans une perception globale de la symétrie, cohérente avec l'approche du cycle 3, tout en permettant de mobiliser une conception des figures plus élaborée que celle du cycle 3. En revanche, ces mêmes choix induisent de mettre en avant l'aspect dynamique de la symétrie axiale, au détriment d'un aspect statique qui pourrait être davantage exploité. Cela permettrait notamment d'expliquer les difficultés des élèves à identifier la propriété de symétrie dans la situation 5.

III - CONCLUSION

La continuité de l'enseignement de la symétrie axiale entre le cycle 3 et la sixième tient donc selon nous à l'explicitation des enjeux spécifiques de chaque niveau, qui n'est pas suffisamment prise en compte dans les programmes, ainsi qu'à la déclinaison progressive des enjeux communs aux deux niveaux.

Ainsi, nous pensons qu'un des objectifs principaux du cycle 3 est le dépassement de conceptions erronées, très prégnantes chez les élèves (confusion avec translation ou symétrie centrale, prégnance des axes horizontaux et verticaux, transformation d'un demi-plan dans un autre) ; il appartient aussi à l'école de travailler l'usage effectif du pliage et du calque pour la validation et la construction de figures symétriques, notamment dans l'objectif de caractérisation de couples de figures symétriques par rapport à un axe comme étant superposables par pliage le long de cet axe. La classe de sixième doit être l'occasion de consolider ces acquis, tout en les approfondissant : le

travail sur les conceptions erronées reste à consolider (et doit être poursuivi en cinquième en particulier lors du travail sur la symétrie centrale) et la référence au pliage et au calque doit être retravaillée (rappelons que les programmes préconisent de s'appuyer sur des manipulations effectives). Certains enjeux relèvent des deux niveaux, tout en étant déclinés de façon différente : le travail sur les propriétés de la symétrie (conservation des mesures, de la forme, de la distance à l'axe, retournement) reste non formalisé et plus global au cycle 3, même s'il peut aussi être l'occasion d'un travail sur la déconstruction dimensionnelle des figures, par exemple en évoquant des mesures de segments etc. La classe de sixième est le lieu d'une formalisation des propriétés, de leur caractérisation en termes de points, ainsi que de la rencontre avec la propriété d'orthogonalité à l'axe. De même, le caractère ternaire de la relation de symétrie, incluant le rôle de l'axe doit être rencontré explicitement au cycle 3, par exemple en rencontrant des figures qui sont symétriques mais pas par rapport à l'axe tracé, et doit être poursuivi en sixième. Enfin, un enjeu important est aussi, à terme, l'articulation des aspects statique et dynamique de la symétrie, ce qui est visé étant que l'existence d'un axe de symétrie est le corollaire de l'existence d'une symétrie conservant globalement la figure. Dans cet optique, il nous semble fondamental de travailler les deux aspects de la symétrie (l'existence d'axes de symétrie de figures et la transformation symétrie) ainsi que leur articulation dès le cycle 3. Certains des exercices mentionnés dans cet atelier visent cet objectif.

Des enjeux concernant des compétences langagières sont dialectiquement liées à ces enjeux conceptuels : la formulation de relations entre objets mathématiques, en particulier de relations ternaires présente des difficultés non négligeables ; ainsi, l'usage d'expressions comme « la figure F est la symétrique de la figure G par rapport à la droite (d) » ou d'autres formulations équivalentes doit faire l'objet d'un enseignement explicite en sixième, mais il nous semble qu'il devrait être rencontré au cycle 3.

Toutefois, l'analyse de la mise en œuvre en classe de certains des exercices élaborés par le groupe montre que la complexité de la notion et la multiplicité des enjeux impliquent une certaine complexité de la gestion des phases de travail en classe. Une bonne gestion passe par la clarification, tant pour le professeur que pour les élèves, des enjeux d'apprentissage, du travail sur les formulations, de l'explicitation des raisonnements. Un élément clé nous semble être l'importance de la maîtrise des enjeux d'apprentissage de la notion par l'enseignant pour une analyse efficace en temps réel des procédures et des connaissances mobilisées par les élèves, afin d'ajuster les déroulements aux objectifs visés.

IV - BIBLIOGRAPHIE

CHESNAIS A. (2012). L'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième : des contraintes, des ressources et des choix. *Recherches en didactique des mathématiques*, 32(2), 229-278.

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et sciences cognitives*, vol 10, pp. 5-53.

GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de l'université Joseph-Fourier, Grenoble 1. Perrin

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques* 20(1), pp. 89–116.

PERRIN-GLORIAN M.J., MATHÉ A.C. & LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments, *Repères IREM*, 90, pp. 5-41.

ROBERT A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 33-44). Toulouse : Octarès.

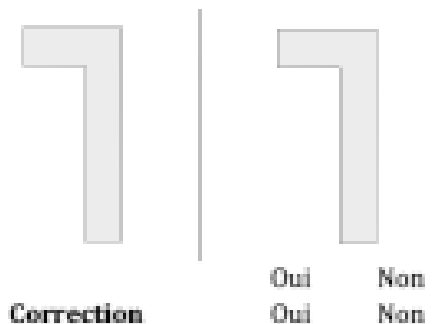
VERGNAUD G. (1991) Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques, *Revue Française de Pédagogie*, vol. 96, pp. 79-86.

V - ANNEXE 1 EXERCICE DE CM2

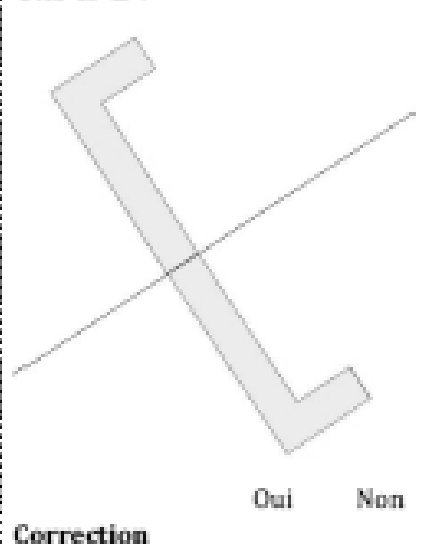
Consigne : Dans chaque cas, a-t-on fait une symétrie axiale par rapport à la droite tracée ?

Entourer oui/ou non selon les cas.

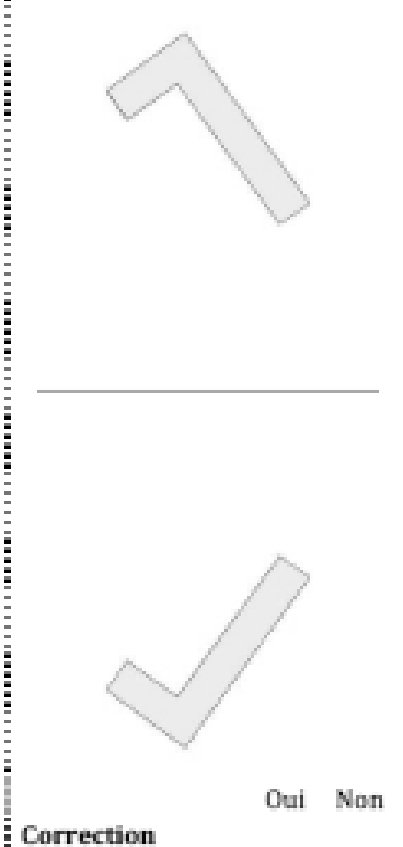
Cas n°1 :



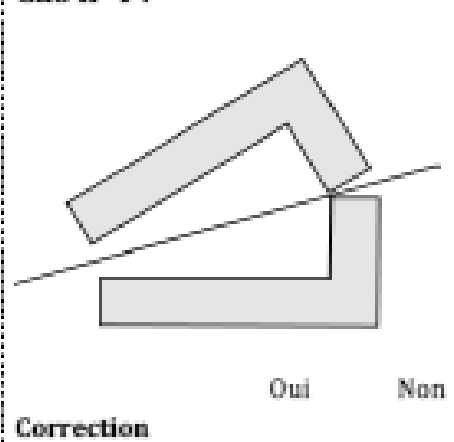
Cas n°2 :



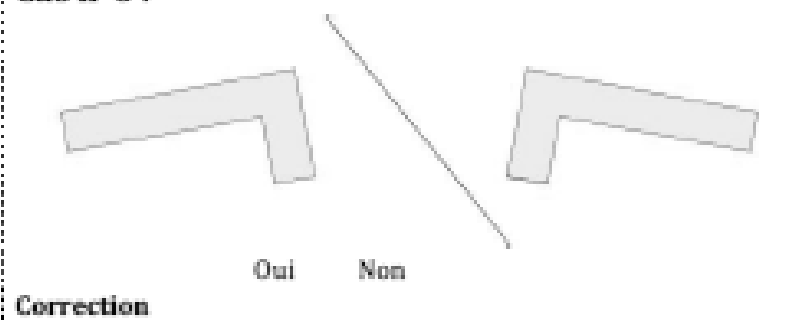
Cas n°3 :



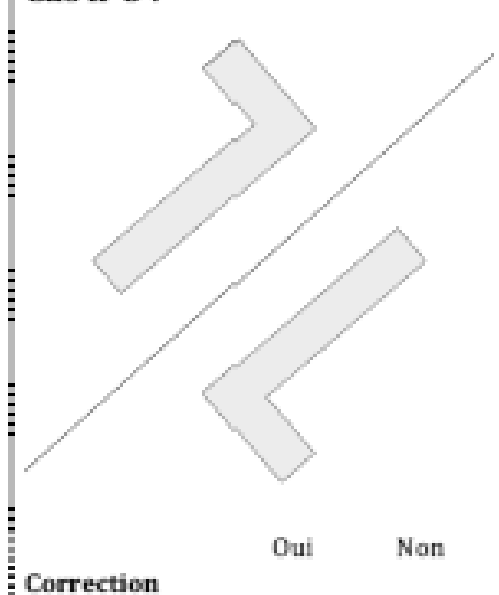
Cas n°4 :



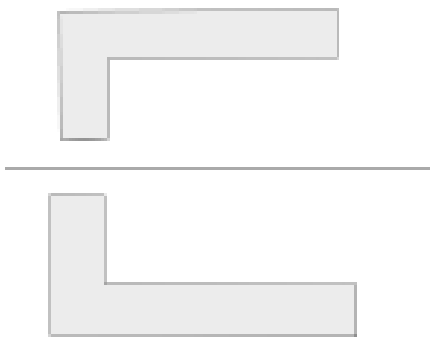
Cas n°6 :



Cas n°5 :



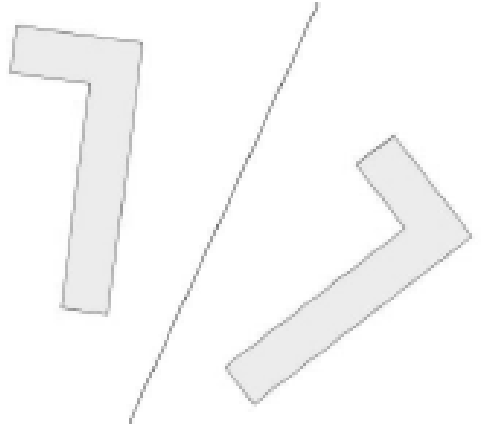
Cas n°7 :



Oui Non

Correction

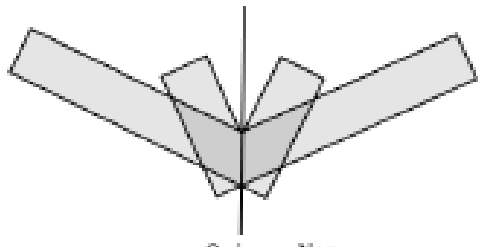
Cas n°8 :



Oui Non

Correction

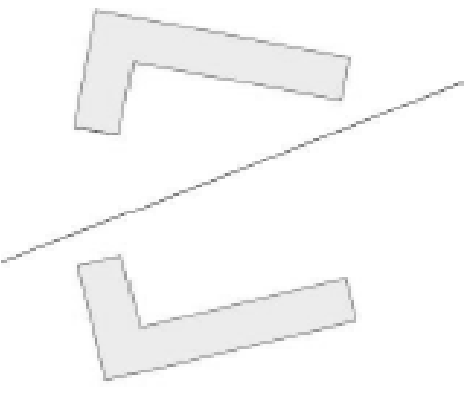
Cas n°9 :



Oui Non

Correction

Cas n°10 :



Oui Non

Correction

VI - ANNEXE 2 DÉBUT DE LA SÉANCE – CLASSE DE CLÉMENTINE

Début 1'00	Quelles conclusions sur l'image, l'empreinte et le pli lors de la séance précédente ?
1'45	Le mot symétrique.
2'00	Empreinte dans l'autre sens... retournée.
2'40	Aussi proche, même écart par rapport au pli.
3'30	Identique ; Même forme, même taille.
4'50	Consigne sur l'exercice à faire et questionnement sur les moyens disponibles pour vérifier une symétrie ?
6'00	Par pliage puis transparence ; Usage du calque. Consigne spécifique : Interdiction de plier directement ou d'utiliser le calque pour répondre, ou d'utiliser un papier calque.

VII - ANNEXE 3 EXERCICE DE SIXIÈME

Parmi les 6 situations ci-dessous, 4 d'entre-elles représentent des figures qui ont une propriété commune. Lesquelles ? Quelle est cette propriété commune ? Expliquer de manière détaillée votre réponse.

Matériel disponible : Instruments de géométrie / papier calque

