BUTS & MOYENS D'UNE CONTINUITÉ DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMETRIE

François BOULE
MdC retraité
francois.boule@neuf.fr

Résumé
L'enseignement de la géométrie, dans l'enseignement français, est en déclin depuis les années 70. Il s'agit de retrouver l'intérêt, le sens et une pédagogie, d'une part pour les élèves, d'autre part pour les futurs enseignants. Des réflexions anciennes (Clairaut, Méray…) ou plus récentes permettre de reconstruire des éléments significatifs d'une culture géométrique et de les dérouler de l'école au collège et au lycée. Quelques-uns de ces thèmes sont proposés à la discussion : les aires, les pliages, les isométries, l'étude conjointe de l'espace et du plan, la perspective …

I - INTRODUCTION HISTORIQUE

L'objet de cet atelier n'est en aucune façon une nostalgie de la « vieille géométrie », à la mémoire de Ménélaüs et du bon vieux temps. La réforme « des mathématiques modernes » en 1970 a fait d'incontestables dégâts dont les brèches sont loin d'être colmatées (on dira sans doute dans dix ou vingt ans la même chose de la « réforme » de la formation des maîtres du quinquennat précédent).

Cela vaut une brève analyse.

Pour l'école primaire, en 1970, il s'est agi d'intégrer les travaux de Piaget ; les conséquences ont été un étalement de l'apprentissage du calcul, la fréquentation de structures logiques à l'école maternelle, un recul du calcul mental et un retrait de la géométrie (Piaget s'est beaucoup intéressé à la construction de l'espace, peu à la géométrie et confondait le plus souvent les deux termes).

Dans l'enseignement secondaire, le moteur n'est pas le même, quoiqu'on puisse trouver une origine commune aux deux (rencontre entre Piaget et Dieudonné en 1952). Il s'est agi de formaliser l'enseignement, d'ajouter un supplément de rigueur, de favoriser les structures (programme d'Erlangen) aux dépens des figures… Toutes choses qui ont un sens, mais qui témoignent en même temps d'une méconnaissance pédagogique et psychologique.

Ce que l'on se propose de chercher ici, ce n'est pas un retour aux sources, ni un sens de l'histoire, mais une façon d'enseigner. Enseigner la géométrie, ce n'est pas ouvrir un traité.

Qu'apporte la géométrie à l'éducation du citoyen ? Comment aborder les choses pour qu'elles aient un sens ? Tout apprentissage procède par paliers et réorganisation. Pas nécessairement du simple (point, ligne, surface…) au complexe, et probablement par approximation : la perception n'est pas immédiate, la rigueur est un cheminement, le plus souvent en va-et-vient (Gonseth, 1936).

La meilleure référence me semble être le chapitre du rapport Kahane (2002) sur l'enseignement des mathématiques, que j'approuve sans restriction, mais dont je ne suis pas sûr que ses conclusions aient bien inspiré les auteurs de programme. D'ailleurs il ne s'agit pas de suggérer (encore) des modifications de programme, mais d'abord d'inspirer un enseignement.

Ces questions ne sont pas nouvelles, et nous allons retrouver des analyses anciennes, augmentées de plus récentes.

1 Critiques de Clairaut sur l'enseignement de la géométrie

La critique vient de loin.

CLAIRAUT (1741) : « Il faut avouer que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'appliquer [à la Géométrie] viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, et de principes préliminaires qui semblent ne promettre rien que de sec. […] Qu'Euclide se donne la peine de démontrer que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est enfermé, on n'en sera pas surpris. Ce géomètre avait à convaincre des sophistes obstinés, qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il fallait donc qu'alors la géométrie eut comme la logique, le secours des raisonnements en forme pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. »

« La mesure des terrains m'a toujours paru ce qu'il y avait de plus propice à faire naître les premières propositions de géométrie […] Il m'a paru à propos d'occuper continuellement le lecteur à résoudre des problèmes, c'est-à-dire à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de découvrir quelque vérité inconnue […] En suivant cette voie, les commençants aperçoivent à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'inventeur, et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention. »

2 Critiques de Laisant sur l'enseignement de la géométrie

LAISANT (1915) : « Pas plus en mathématiques qu'ailleurs, l'instruction ne fait des savants ; et il ne s'agit pas d'en faire ; mais il existe en toutes matières un fonds général de connaissances utiles, nécessaires même à tout le monde, et d'une acquisition facile […]. Tout enfant peut, qu'il soit doué ou non, s'assimiler l'ensemble de ces connaissances ; s'il a le goût inné des mathématiques, il en fera ensuite de lui-même. L'enseignement n'a jamais fait de savants ni d'artistes ; son but devrait être de préparer des hommes […].

Notre enseignement primaire est passable ; l'enseignement primaire supérieur serait le moins mauvais de tous […]. Quant à l'enseignement secondaire, je me bornerai à citer un très court passage d'une étude de M. Ascoli : « ce que l'on s'est proposé en augmentant l'importance des sciences, c'est de leur attribuer la large part qui doit leur revenir dans la formation des esprits. Jusqu'ici ce rôle était dévolu aux lettres, tandis que les sciences étaient surtout des matières d'examen, dénuées de tout caractère éducateur ». Traduisez : jusqu'ici notre enseignement secondaire a eu pour mission d'abrutir la jeunesse, tandis que dans l'avenir, il en sera de même.

Il y a plus de trente années, un savant de haute valeur, M. Charles Meray, publia « Nouveaux éléments de géométrie », un livre tout à fait remarquable, menant de front l'étude du plan et de l'espace, et mettant en évidence les vérités d'ordre expérimental que la méthode classique dissimule avec hypocrisie. L'administration universitaire fut prise de fureur. […] La nouvelle méthode s'est introduite dans un grand nombre d'écoles…Partout elle donne des résultats remarquables. Mais l'enseignement secondaire reste fermé jusqu'ici, comme les oreilles d'un sourd qui ne veut pas entendre. »

II - QUELLE PROBLÉMATIQUE POUR L'ATELIER ?

Les programmes, en particulier à l'école, et singulièrement les derniers insistent sur la nomenclature, mentionnent quelques propriétés, et —à bon droit— l'usage des instruments. Mais d'une part, cela ne suffit pas pour donner du sens, et d'autre part la formation des maîtres ne saurait s'en tenir aux courtes perspectives proposées aux élèves. L'enseignant doit prendre de la hauteur, et en particulier apercevoir une cohérence dans la suite de l'enseignement, au-delà de l'école et même du collège. Ce qui ne veut pas dire adopter un point de vue savant sur la géométrie, celui des traités.

Les principes suivants pourraient être acceptés comme points de départ :

1. La géométrie enseignée (école, collège) doit dépendre des capacités d'apprentissage et de représentation des élèves, et non, comme il est arrivé, d'une conception « moderne » de la

géométrie (réduction des représentations, axiomatisation, etc.), ce qui convient à des étudiants, mais non à un apprentissage premier.

2. L'enseignement de la géométrie à l'école a certes une visée concrète (établir des savoir-faire et des représentations) mais s'inscrit dans une organisation des connaissances. Il est donc concevable de faire fréquenter des procédures (simples) qui ne seront complètement justifiées que plus tard. Partir d'objets familiers (feuille, boîte, ballon…) plutôt que « simples » et d'évidences sensibles.
Une pratique concrète établira des représentations, qui faciliteront ultérieurement l'ancrage en mémoire et le raisonnement spéculatif. Exemples : équi-partage d'un segment, gabarit à 60°, tracés à la règle, etc.

3. La formation des enseignants doit s'élever résolument au-dessus du savoir enseigné aux enfants, de façon à en saisir l'organisation présente et ultérieure. Il ne s'agit pas d'un retour aux programmes des années 50 (Menelaüs, coniques, inversion...), mais d'aborder quelques domaines dont les applications peuvent être mises à profit dès l'école, de façon à construire un capital d'expériences : ainsi le choix de Clairaut (1741) de s'appuyer largement sur la manipulation des aires [Annexe 1] ou celui de Méray (1974) de tenir compte des déplacements et de joindre géométrie 2D et 3D ; Aires, Déplacements, Homothétie, constructions, et pourquoi pas un peu de projective ?

Ce qui est proposé maintenant à la discussion c'est d'intégrer quelques perspectives pédagogiques qui, à la fois, ont du sens pour l'apprentissage (et pas seulement en vue d'une géométrie « pure »), et de les dérouler à l'école et au-delà, au collège, voire au lycée. C'est développer (et enseigner en formation) une culture géométrique qui tienne compte de l'accès à la connaissance pour les jeunes élèves, et pas seulement de convier les futurs professeurs d'école, quelle que soit leur spécialité à un retour vers la géométrie du collège.

III - THEMES ABORDÉS

1 Les aires

L'annexe 1 schématise ce que l'on peut tirer, dès le cycle 2 et jusqu'en fin de collège, de deux principes : à partir de l'aire du rectangle, par décomposition et grâce à l'invariance par recomposition, on peut obtenir l'aire de nombreuses autres surfaces (triangles, parallélogramme, trapèze, …). En prenant pour unité l'aire d'un carré de côté unité, on obtient facilement l'aire d'un rectangle de longueur entière a et de largeur entière b. Le principe d'associer à l'aire d'un rectangle le produit longueur × largeur est d'autant plus facilement admis par les élèves que c'est généralement ainsi que l'on représente le produit de deux entiers (quadrillage rectangulaire). Mais il importe de souligner, pour les futurs professeurs, ce que dissimule cette acceptation. La notation a x b représente d'abord un « produit de longueurs » qu'un abus d'écriture fait noter de la même façon qu'un produit numérique (mesures de longueur). Cependant cette confusion n'a pas lieu d'être examinée à l'école et répond à une intuition qui fonctionne bien. La seconde difficulté ainsi camouflée, est celle du passage d'une mesure entière (carreaux) à une mesure décimale ou réelle ; la démonstration classique du Théorème de Thalès (que n'éludent ni Clairaut (1741), ni Méray (1974)) fait appel à un passage à la limite que l'on a renoncé à enseigner depuis longtemps en Troisième.

2 Les pliages

Le premier principe admis est celui de l'égalité par superposition. Les pliages permettent une étude concrète de la symétrie axiale, à partir d'objets aussi simples qu'une feuille de papier rectangulaire (annexe 2a). Les nouvelles notions abordées sont : angle droit, perpendicularité, parallélisme, axe de symétrie, médiatrice, bissectrice, partage régulier, … Les figures géométriques rencontrées : carré, triangle isocèle, équilatéral, pentagone, hexagone, octogone réguliers. Il s'agit ainsi de construire des outils (gabarits, figures régulières, partage régulier) qui peuvent utilement fonctionner à l'école avant d'être complètement justifiés. L'explication ultérieure s'adossera ainsi à un capital d'expériences.

La composition de symétries axiales (annexe 2b) permet d'aborder naturellement la rotation et la translation, et de structurer ainsi l'ensemble des isométries, voire d'aborder les problèmes de décomposition en symétries axiales, qui ont déserté les programmes du Secondaire depuis longtemps.

3 Espace et Plan

Méray (1974) insistait sur le va et vient entre géométries du plan et de l'espace. On retient de ce choix le principe pédagogique suivant : partir plutôt d'objets familiers que d'une hiérarchie « pure » (point, ligne, surface, volume). Par exemple partir d'un pavage de l'espace par des cubes, ou de l'observation et la déconstruction de boîtes que de « figures géométriques planes » sans rapport évident avec l'environnement de l'enfant. L'annexe 3 propose quelques problèmes de géométrie plane dont une solution fait intervenir l'espace ou réciproquement, des solutions d'un problème spatial par « rabattement » ou troncature.

4 Perspective

L'annexe 4, trop rapidement évoquée lors de l'atelier propose d'aborder (au collège) un champ historiquement et culturellement riche : celui de la construction de la perspective.

5 Birapport, faisceau harmonique

L'annexe 5, trop rapidement évoquée elle aussi, concerne quelques éléments de géométrie projective, et une application possible aux constructions à la règle seule.

Plusieurs chapitres n'ont pas été abordés lors de l'atelier, mais pourraient entrer dans le champ d'un Guide de Formation en Mathématiques destiné aux futurs professeurs du premier ou du second degré, et organisé autour de quelques nœuds fondamentaux. Par exemple :

- Un nœud concernant le cercle, associant figures géométriques, constructions, relations métriques, et approche de π.
- Un nœud qui associe homothétie, théorème de Thalès et proportionnalité.
- Une progression concernant les instruments de la géométrie et les constructions : papier quadrillé, règle simple, gabarits, équerre, disque, compas.

Ce guide aurait pour triple fonction :

- d'une part d'assurer une cohérence longitudinale dans l'enseignement ;

- d'autre part de pointer les éléments les plus significatifs des Programmes de Géométrie et de leur donner du sens ;

- enfin de permettre de rafraîchir pour les uns, d'établir pour les autres, un fond commun de culture géométrique, sans réveiller de possibles anciennes réticences.

BIBLIOGRAPHIE

BOULE F. (2001) Questions sur la géométrie et son enseignement, Nathan

BRAHEM J-L. (2011) Histoires de géomètres et de géométrie, Le Pommier

CLAIRAUT A-C. (1741) Eléments de géométrie

GONSETH F. (1936) Les Mathématiques et la Réalité, (rééd. Blanchard 1974)

KAHANE J-P. (dir) (2002) Rapport sur l'enseignement des sciences mathématiques, CNDP/Odile Jacob

LAISANT C-A. (1915) Initiation mathématiques (« ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance »), Hachette

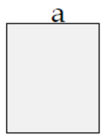
MERAY C. (1974) Nouveaux Eléments de géométrie, Jobard, Dijon, (rééd 1903)

WITTMANN E-C. (1998) Géométrie élémentaire et réalité, Didier-Hatier

IV - ANNEXES

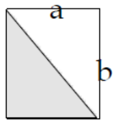
Annexe 1 – De l'aire

Définition



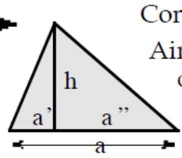
aire d'un rectangle : $a \times b$

Conséquence 1



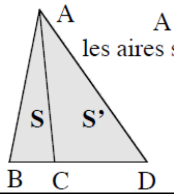
Aire d'un triangle rectangle : $\frac{a \times b}{2}$

Conséquence 2

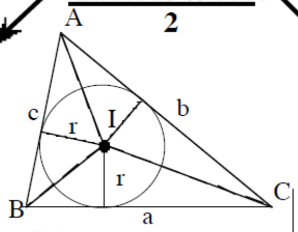


Aire d'un triangle quelconque : $\frac{h(a'+a'')}{2} = \frac{h \times a}{2}$

Aire d'un triangle : $\frac{\text{hauteur} \times \text{base}}{2}$



A hauteur égale, les aires sont proportionnelles aux bases : $\frac{S}{S'} = \frac{BC}{CD}$



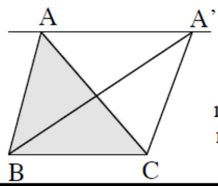
ABC triangle quelconque et son cercle inscrit.

$S = ra + rb + rc$

$S = r\,(a + b + c)$

$p = \frac{a+b+c}{2}$

$\boxed{S = p \times r}$

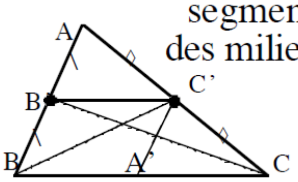


AA' // BC alors

ABC et A'BC : même hauteur & même base, donc même aire

Réciproquement : si ABC et A'BC ont même aire alors AA' // BC

segment des milieux



aire BB'C = aire ABC / 2

aire BC'C = aire ABC / 2

De même A'C' // AB

Donc B'C'A'B parallélogramme

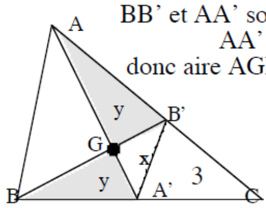
Donc $\boxed{\text{B'C' // BC}}$

$\boxed{\text{BC} = 2\ \text{B'C'}}$

BB' et AA' sont les médianes

AA' // AB

donc aire AGB' = aire BGA



Posons aire A'B'C = 3

A'B' médiane de AA'C

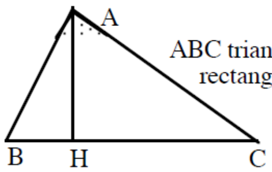
donc x+y = 3 et aire BGA = x+3

$\frac{GA}{GA'} = \frac{y}{x} = \frac{x+3}{y}$

$\Rightarrow$ $y^2 = x^2 + 3x$ mais $y^2 = 9 - 6x + x^2$

Donc $x = 1$, $y = 2$ $\Rightarrow$ $\frac{GA}{GA'} = 2$

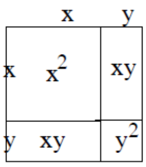
Le Centre de gravité est situé au 2/3 de la médiane en partant du sommet



ABC triangle rectangle :

$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2}$

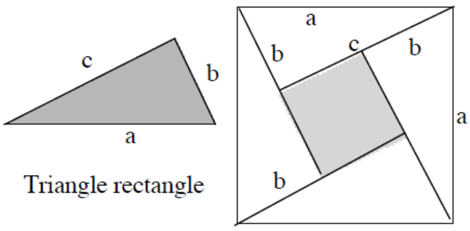
$\boxed{AH \times BC = AB \times AC}$



$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

de même

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$



Triangle rectangle

On assemble quatre exemplaires.

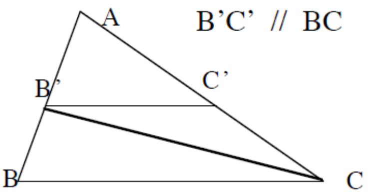
La figure extérieure est un carré de côté a

La figure centrale un carré de côté (c–b)

$a^2 = 4\left(\frac{bc}{2}\right) + (c-b)^2 = 2bc + c^2 + b^2 - 2bc$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ THEOREME DE PYTHAGORE

réciproque : $a^2 = b^2 + c^2$ $\Rightarrow$ ABC triangle rectangle



B'C' // BC

$\frac{\text{aire BB'C}}{\text{aire BAC}} = \frac{BB'}{AB}$ $\qquad$ $\frac{\text{aire BC'C}}{\text{aire BAC}} = \frac{CC'}{AC}$

Or aire BB'C = aire BC'C

Donc $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$

THEOREME DE THALES

ou : $\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{BB'}{CC'}}$

réciproque : $\frac{AB}{AC} = \frac{BB'}{CC'}$ $\Rightarrow$ B'C' // BC

Annexe 2a – Pliages

La géométrie plane a pour point de départ la manipulation d'objets concrets. A partir de là, il s'agit d'observer, de construire, de représenter. Cet ensemble d'expériences conduit à découvrir des objets géométriques nouveaux, à les mettre en relation les uns avec les autres. L'enfant élabore des représentations à partir de son expérience, et construit ainsi un savoir nouveau, qui est une « géométrie concrète» ». Après quoi, ces notions trouveront un cadre plus général et conduiront à des énoncés de *définitions*, de *propriétés* et de *procédures*. Mais ceux-ci n'auront de sens que pour autant qu'ils renverront à une expérience sensible antérieure.

Par conséquent :

- Les objets *nouveaux* sont définis à partir d'objets familiers connus.
- La **pluralité** des approches est importante :: un objet géométrique n'a pas une définition unique; il résulte de la synthèse de plusieurs approches possibles.
- La connaissance d'un objet géométrique n'est pas seulement *déclarative* : elle intègre également ce que l'on *sait faire* avec cet objet, ou bien ce qu'il *permet de faire*.
- L'usage des instruments (ou la construction des instruments) fait partie de la géométrie : un instrument condense du savoir. Le choix pertinent d'un instrument, le soin dans son usage sont des compétences importantes.

Le choix qui est fait dans les pages qui suivent est d'utiliser le minimum d'instrument nouveau, et de partir des figures les plus répandues dans l'environnement quotidien : le **rectangle** (*feuille de papier*, dalle, vitre, porte, mur, …) et le **cercle** (trace d'un verre ou d'une assiette). La seule opération utilisée pour l'instant est le **pliage**, ou la **superposition**.

RECTANGLE

Une feuille de papier donne l'image d'un rectangle (fig.1.a)

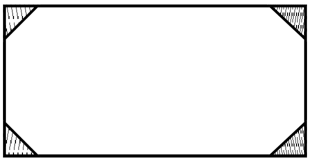


Fig. 1.a

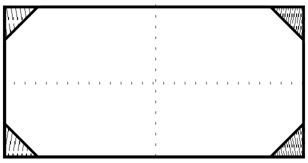


Fig. 1.b

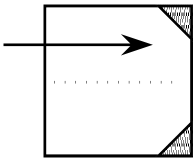


Fig. 1. c

Par pliages bord sur bord (fig. 1.b), on fait apparaître deux axes de symétrie (médianes du rectangle). Ces pliages permettent de superposer deux à deux les coins du rectangle (fig.1.c). Ces angles sont donc tous égaux. Chaque angle du rectangle est donc égal à un quart de tour, c'est à dire un ANGLE DROIT. La rencontre des axes de symétrie est le CENTRE du rectangle.

Il est possible de faire apparaître les diagonales par pliage.

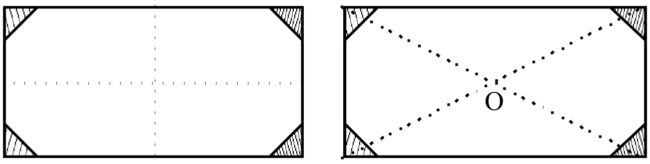


Fig. 2

Mais ces diagonales ne sont *en général* pas des axes de symétrie. Si elles le sont, la longueur et la largeur du rectangle sont superposables : il s'agit d'un CARRE.

Ces diagonales se rencontrent au centre du rectangle. Chacune découpe le rectangle en deux TRIANGLES RECTANGLES. Les quatre triangles rectangles que l'on peut ainsi obtenir sont superposables par décalque, ou par rotation.

CARRE

L'observation précédente fournit le moyen d'obtenir un carré à partir d'une feuille rectangulaire.

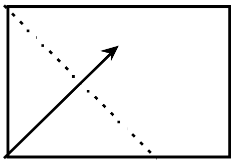


Fig. 3.a

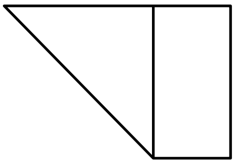


Fig. 3.b

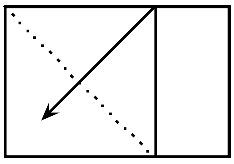


Fig. 3.c

On plie largeur sur longueur (fig.3.a). Puis on plie selon le bord obtenu (fig. 3.b). Enfin, on déplie (fig. 3.c). La surface obtenue possède quatre axes de symétrie (les médianes et les diagonales) qui se rencontrent tous au centre du carré.

ANGLE DROIT. EQUERRE

Les coins du rectangle donnent une bonne image de l'angle droit. En voici une autre, obtenue par double pliage :

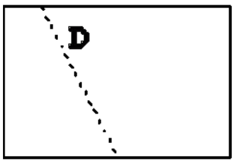


fig. 4.a

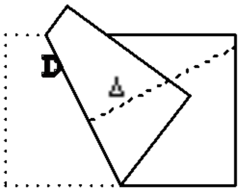


fig.4.b

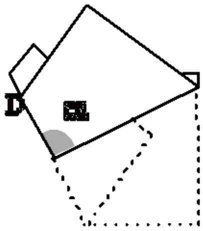


fig. 4.c

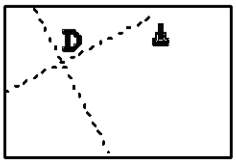


fig. 4.d

On plie une feuille (fig.4.a) selon un premier pli (D), puis on replie ce pli bord sur bord (fig.4.c). On détermine ainsi un second pli (Δ), qui est *par définition* perpendiculaire au premier. Le coin (a) ainsi obtenu est un **angle droit**. C'est un moyen simple de construire une **équerre**.

Il en résulte par pliage, la construction simple d'un gabarit à 45°.

PARALLELISME

Une En opérant une nouvelle fois le second pliage précédent (fig 5.a), on obtient un pli (Δ') lui aussi perpendiculaire à (D). *Par définition*, les plis (Δ) et (Δ') sont parallèles (deux plis perpendiculaires à un troisième).

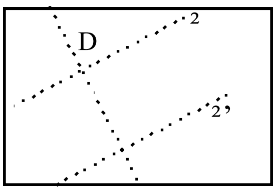


fig. 5.a

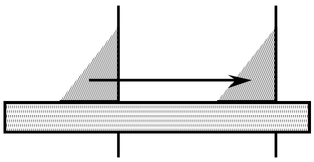


fig. 5.b

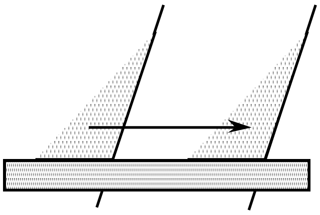


fig. 5.c

Cette construction en justifie une autre, obtenue en faisant glisser une équerre le long d'une règle (fig. 5.b), ou plus généralement celle qui consiste à faire glisser un gabarit le long d'une règle (fig. 5.c).

TRIANGLE EQUILATERAL

Construction à partir d'un rectangle.

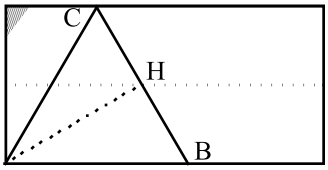


fig. 6.a

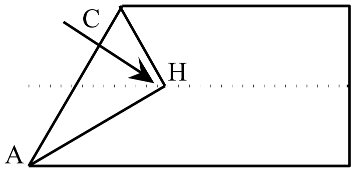


fig.6.b

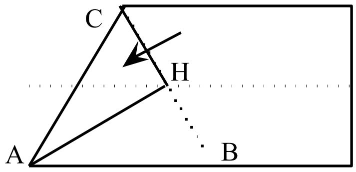


fig. 6.c

On cherche à obtenir le triangle ABC (fig. 6.a). Le pli médian va rencontrer le côté BC en son milieu. AH sera médiane, et doit être aussi hauteur. Pour obtenir H, il suffit de plier le coin marqué sur le pli médian (pli passant par A, fig. 6.b). Un second pliage autour de CH fait apparaître le côté BC. On s'aperçoit également que la longueur du rectangle va coïncider avec le côté AC. On a ainsi partagé l'angle plat en trois angles superposables : leur mesure est donc de 60°.

Il résulte de ceci la construction simple d'un gabarit à 60°.

Construction à partir d'un disque

Analyse de la figure

On obtient un cercle en prenant la trace d'un objet rond, puis on découpe le disque (fig. 7.a). On fait apparaître un diamètre par un premier pliage, puis le centre O du disque par un second pliage autour d'un diamètre perpendiculaire au premier (fig. 7.b).

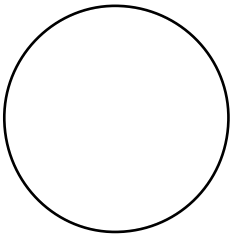


fig. 7.a

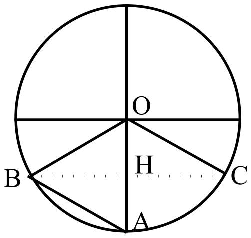


fig. 7.b

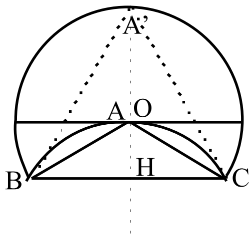


fig. 7.c

REMARQUE : le disque possède une *infinité* d'axes de symétrie passant tous par le centre, ce sont les <u>diamètres</u>.

Soit H le milieu de [OA] et BC la perpendiculaire en H; c'est la médiatrice de [OH].

Donc OA = OB = BA. Le triangle OBA est équilatéral ; donc l'angle BOA mesure 60°.

Par conséquent BOC mesure 120°.

Construction : en pliant A sur O (fig. 7.c), on fait apparaître le pli (BC). Il reste à plier autour de BA', puis de CA' pour obtenir le triangle équilatéral BCA'. On constate que les trois arcs de cercle passent tous par le centre O.

PENTAGONE REGULIER

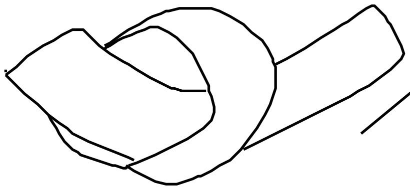


fig.8.a

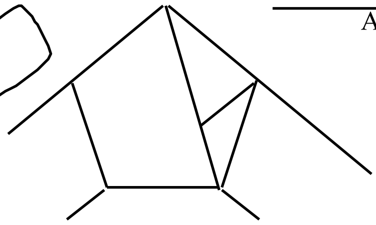


fig. 8.b

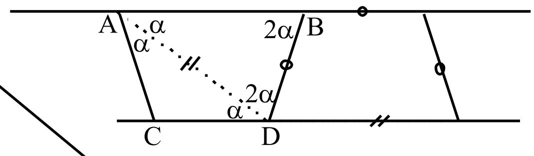


fig. 8.c

Construction : on utilise une bande rectangulaire assez longue, à laquelle on fait subir un nœud (fig.8.a). Serrer ce nœud et l'aplatir de telle façon que les sommets soient bien marqués. On obtient un pentagone régulier (fig. 8.b). Cette construction est exacte.

Justification : déplier la bande. La trace des plis (fig. 8.c) déterminent une suite de trapèzes. En remarquant les parties qui viennent d'être superposées, on constate que : les diagonales sont égales à la grande base (donc BAD est isocèle) ; les côtés obliques sont égaux à la petite base (donc ACD est isocèle).

Soit α l'angle CAD. Il en résulte que CDA = α. Mais comme les bases sont parallèles, DAB = α.

Mais ABD = BAC = 2α. Comme BAD est isocèle : ADB = 2α. Par suite l'angle plat = 5α. Donc α = 36° et ACD = CDB qui sont les angles du pentagones mesurent 108°. Le pentagone est bien régulier.

HEXAGONE REGULIER

On peut l'obtenir de plusieurs façons :

- soit à l'aide de six triangles équilatéraux (fig. 9.a)
- soit à partir du disque utilisé (fig. 9.c) : une fois réalisé le triangle équilatéral, on plie selon les trois diamètres axes de symétrie (fig. 9.b). On obtient les sommets de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle.

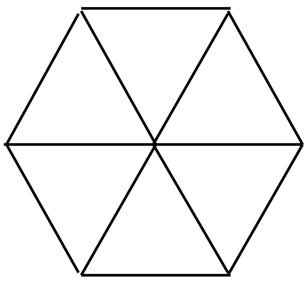


fig. 9.a

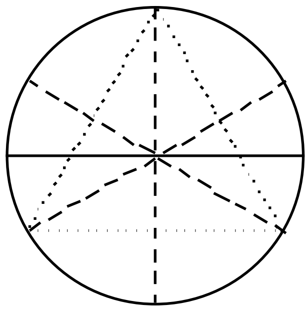


fig. 9.b

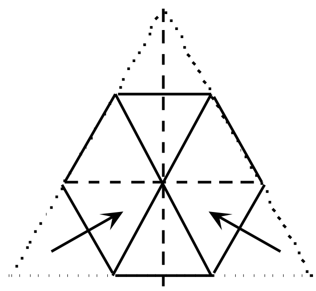


fig. 9.c

- soit enfin en pliant tous les sommets du triangle équilatéral sur le centre du triangle (fig. 9.c) : on obtient ainsi un hexagone régulier.

OCTOGONE REGULIER

- A partir d'un disque, il suffit de faire apparaître des diamètres perpendiculaires, puis les bissectrices de ces angles : on obtient les sommets de l'octogone régulier (fig. 10.a).
- A partir de deux carrés superposables (fig. 10.b) : marquer les diagonales de l'un et les médianes de l'autre. Puis les placer l'un sur l'autre, les médianes de l'un superposées aux diagonales de l'autre (fig. 10.c). Enfin découper tous les triangles qui dépassent. On obtient ainsi deux octogones réguliers superposés.

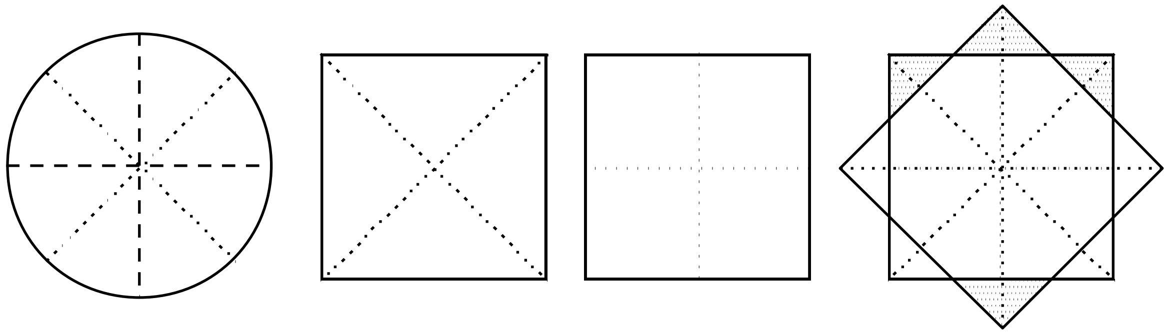


fig. 10.a *fig. 10.b* *fig. 10.c*

Remarque : On peut très bien imaginer de poursuivre cette procédure. En décalant les deux polygones de 1/16° de tour, puis en découpant les triangles débordant, on obtient deux polygones réguliers de 16 côtés, etc. On obtient ainsi une **approximation polygonale du cercle** inscrit dans les carrés initiaux. C'est une méthode (à vrai dire peu précise) pour obtenir une valeur approchée du nombre π (rapport de la circonférence au diamètre).

MEDIATRICE ET BISSECTRICES

La médiatrice de [MN] est **le pli** qui applique M sur N (fig. 12a).

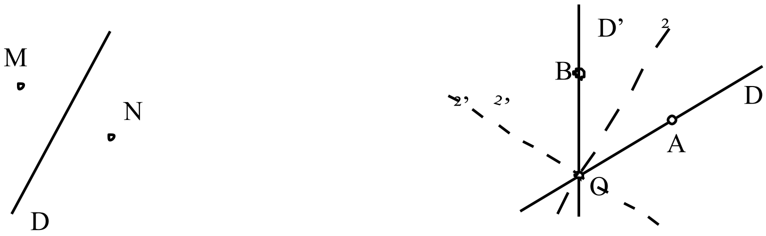


fig. 11. a *fig. 11.b*

Les plis (D) et (D') étant concourantes en O (fig. 11.b), il existe <u>deux</u> pliages qui appliquent (D) sur (D'); l'un autour de (Δ), qui applique B sur A, l'autre autour de (Δ'). Ce sont les **deux bissectrices** de l'angle (D, D'). *Elles sont perpendiculaires.*

TRIANGLE QUELCONQUE : hauteurs, somme des angles.

Soit un triangle quelconque A, B, C découpé (ou reproduit sur calque).

Le pli passant par A, qui applique (BC) sur elle-même (fig. 12.b) fait apparaître un angle droit. AH est une hauteur du triangle (fig. 12.c)

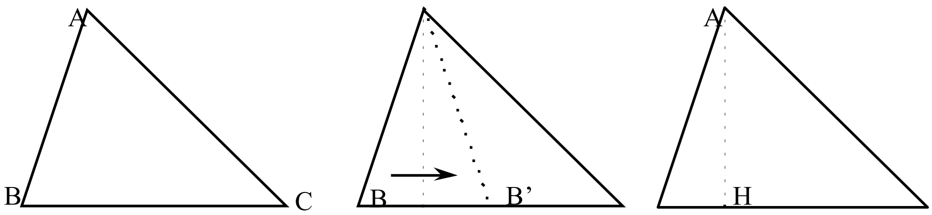


fig. 12.a *fig. 12.b* *fig.12.c*

Ce point H étant obtenu, replier les trois sommets A, B, C en ce point (fig. 13.a) ; on obtient un rectangle (fig. 13.b).

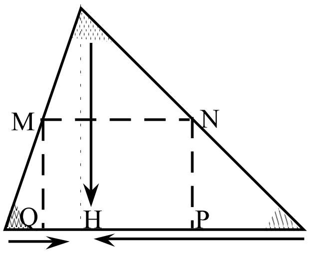


fig. 13.a

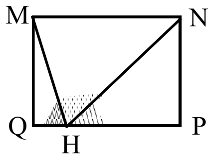


fig. 13.b

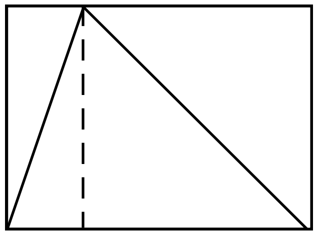


fig. 13.c

Il en résulte deux observations :

• Tous les angles du triangle se trouvent juxtaposés en H. *La somme des angles d'un triangle est un angle plat.*

• L'aire du triangle est double de celle du rectangle. Or celui-ci a pour hauteur la moitié de la hauteur du triangle, et pour longueur la moitié de la base correspondante. Donc l'aire du triangle est $S = \frac{1}{2}\ h \times \text{base}$

PARTAGE D'UNE FEUILLE ou d'un SEGMENT en 3, ou en 5 parties égales


fig. 14.a

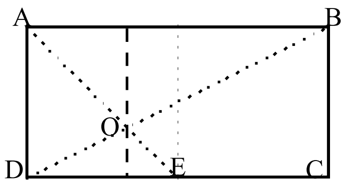


fig. 14.b

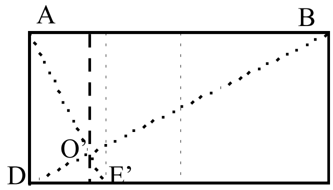


fig. 14.c

Il s'agit de partager un rectangle (fig. 14.a) en rectangles de même largeur et dont la longueur soit le tiers de la longueur initiale.

Construction : faire apparaître le pli médian passant par E, puis joindre AE et BD, qui se rencontrent en O. Le pli parallèle à la largeur passant par O divise la longueur au tiers.

De la même façon (fig.14.c), pour obtenir un partage au cinquième, plier la feuille en quatre selon la longueur, puis joindre AE' et BD. Le pli passant par le point de rencontre O' partage la longueur en son cinquième. C'est une application simple du théorème de Thalès.

Prolongements :

COMPOSITION DE DEUX PLIAGES (ou davantage) : voir l'annexe sur les transformations

Annexe 2b – Transformations

Les transformations géométriques ont été évoquées à plusieurs reprises dans les chapitres précédents. Elles peuvent en effet aisément donner lieu à des manipulations concrètes et des observations dès l'école élémentaire. Mais l'étude de leurs propriétés est étendue dans les programmes du collège jusqu'à la spécialité « math » de terminale scientifique. Ce qui rend difficile d'en avoir une vue synthétique et d'apprécier la fécondité de ces concepts. L'objet de ce chapitre est de présenter une rapide synthèse relative aux transformations géométriques, aux principaux résultats qui les concernent, et à quelques exemples de problèmes.

Les symétries axiales et les rotations

Les pliages ont mis en jeu des symétries axiales. Le pliage autour de D envoie le point M sur le point M' (et réciproquement).

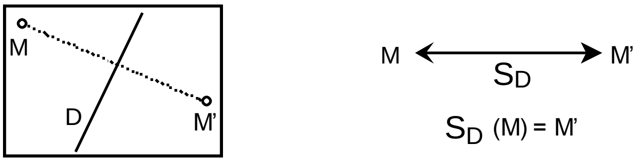


fig. 1

Une symétrie est entièrement déterminée par un point M et son image M' (si elle est distincte de lui) : l'axe est la médiatrice de MM'. L'image d'une droite est une droite (fig. 2). Si cette droite rencontre l'axe de symétrie (pli), le point de rencontre est invariant. Si cette droite est parallèle à l'axe, son image aussi (fig. 3) ; si la droite est perpendiculaire, elle est « globalement invariante » c'est à dire que l'image de cette droite est elle-même, mais un seul de ses points est invariant.

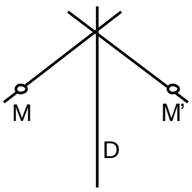


fig. 2

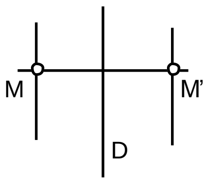


fig. 3

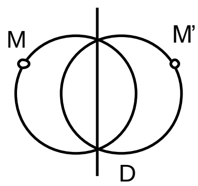
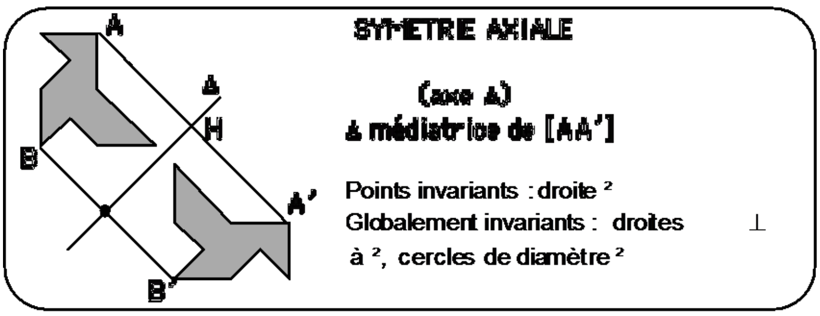


fig. 4

L'image d'un cercle est un cercle ; si le cercle rencontre l'axe, les deux points de rencontre sont invariants. Si l'axe est un diamètre du cercle, le cercle est « globalement invariant ».



Composition de deux symétries axiales

Notation :

Lorsque l'on effectue successivement les symétries S_D puis $S_{D'}$ le point M donne M′ par la première transformation et ce dernier donne M″ par la seconde :

$M \underset{S_D}{\longleftrightarrow} M' \underset{S_{D'}}{\longleftrightarrow} M''$ $S_D(M) = M'$ et $S_D(M') = M''$

On note $S_{D'} \circ S_D$ cette nouvelle transformation : $S_{D'} \circ S_D(M) = M''$

Plusieurs cas se présentent :

1. Deux symétries de même axe : M —> M′ —> M

On appelle IDENTITE cette correspondance : $S_D \circ S_D = I_d$

2. *Les deux axes sont parallèles* (fig. 5) : la composition est une **translation**. Une translation est déterminée par la connaissance d'un point M et de son image M′.

$\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{HM'}$ et $\overrightarrow{M'M''} = 2\,\overrightarrow{M'H'}$. Donc $\overrightarrow{MM''} = 2\,\overrightarrow{HH'}$

La translation est dirigée perpendiculairement à D et D′, et le déplacement est *le double* de la distance de D à D′.

Il n'est pas équivalent de composer S_D puis $S_{D'}$ ou bien $S_{D'}$ puis S_D. Dans le premier cas, la translation est dirigée de D vers D′, dans le second de D′ vers D.

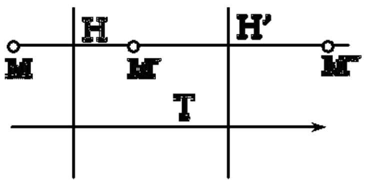


fig. 5

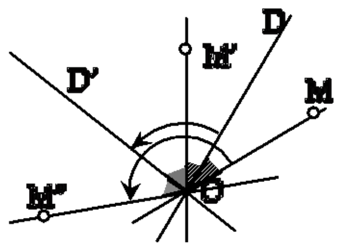


fig. 6

3. *Les axes sont concourants* (fig.6)

La première symétrie associe M et M′ (OM = OM′), la seconde M′ et M″ (OM′ = OM″). L'angle (OM, OM″) est *le double* de l'angle (D, D′).

La composition est une rotation de centre O et dont l'angle est double de l'angle (D, D′).

Il n'est pas équivalent de composer S_D puis $S_{D'}$ ou bien $S_{D'}$ puis S_D : La seconde rotation est réciproque de la première.

En résumé : Si les axes sont parallèles : la composée est une **translation** (cas particulier : axes confondus, il s'agit de l'Identité)

Si les axes sont concourants : la composée est une **rotation** (cas particulier : axes perpendiculaires, il s'agit d'un demi-tour).

Ces résultats sont facilement observables à l'école, à l'aide d'un simple papier calque.

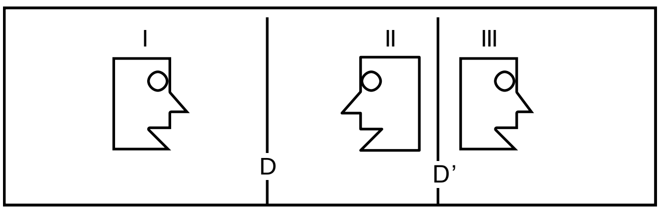


fig. 7

Une figure (I) est dessinée sur un calque. Après pliage autour de D, on la décalque en (II), puis après pliage autour de D′, cette dernière en (III).

On recopie de nouveau (I) sur un fragment de calque, et l'on constate qu'en faisant glisser le long d'une règle, on amène ce dessin sur (III).

Lorsque les plis sont concourants, on opère de la même façon (fig. 8).

Le décalque de (I) donne (II) après pliage autour de D, et ce dernier donne (III) après pliage autour de D'. Après avoir reproduit (I) sur un fragment de calque, on épingle ce fragment en Ω, et on fait tourner autour de Ω, jusqu'à amener en coïncidence avec (III).

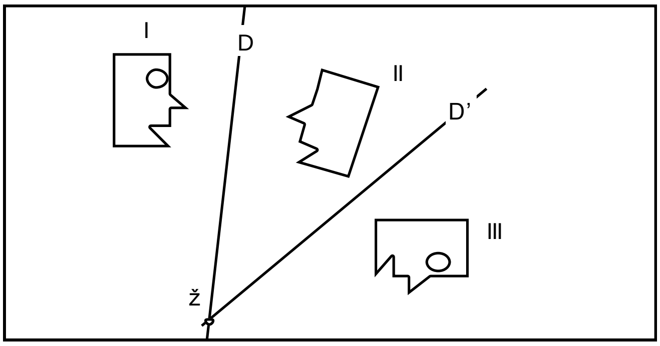


fig. 8

Les résultats réciproques sont intéressants :

– *Il est possible de décomposer une* ***translation*** *en deux symétries dont les axes sont perpendiculaires à la direction de la translation. L'un des axes peut être choisi arbitrairement (sous cette condition).*

– *Il est possible de décomposer une* ***rotation*** *de centre O en deux symétries dont les axes passent par O. L'un des axes peut être choisi arbitrairement (sous cette condition).*

Ces résultats donnent lieu à l'activité suivante :

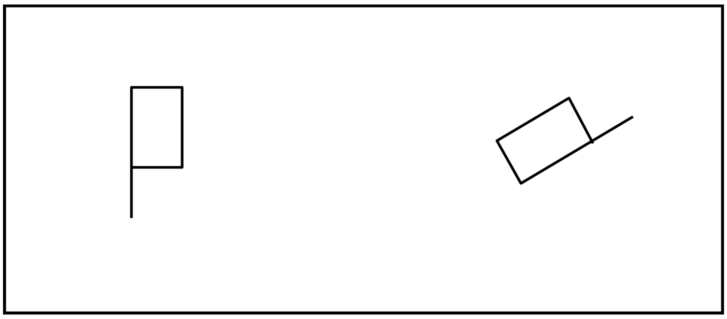


fig. 9

On décalque une figure sur une feuille, en deux emplacements quelconques, mais sans la retourner (fig.9).

Peut-on passer de la première figure à la seconde par une rotation ? autour de quel centre ? de quel angle ?

Voici une solution (fig. 10) : il est possible, par pliage, d'amener le point A sur le point B. Soit D ce pli, l'image de la première figure est représentée en pointillés. Un second pliage permet d'amener cette figure-ci sur la dernière, et C sur D. On passe donc de la première figure à la dernière par la composition de ces deux pliages : c'est une ROTATION de centre Ω, et dont l'angle est le double de l'angle (D, D').

Bien entendu, si les figures décalquées sont en *translation* l'une par rapport à l'autre, les deux axes D et D' seront parallèles.

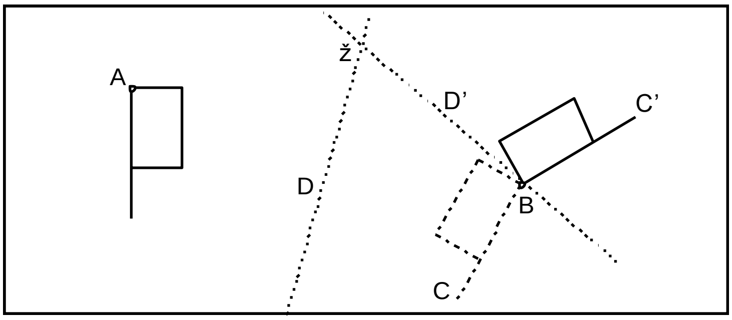


fig. 10

Ces résultats connaissent une généralisation supplémentaire.

Les translations et les rotations sont appelés des DEPLACEMENTS : une figure du plan est par elles déplacée, mais non retournée. Que se passe-t-il lorsque l'on compose deux déplacements ?

Il y a trois cas à envisager : translation et translation, rotation et rotation, translation et rotation. La décomposition en symétries facilite la résolution de cette question.

Translation puis translation

La composée de deux translations est une translation.

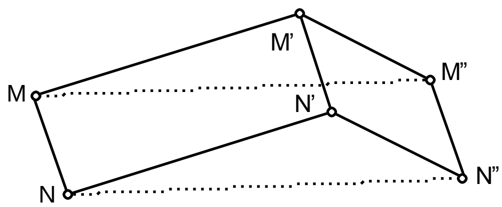


fig. 11

Translation et rotation

La rotation peut être décomposée en deux symétries dont les axes passent par le centre de rotation O ; une translation peut être décomposée en deux symétries dont les axes sont perpendiculaires à la direction de translation. Il est possible de choisir que l'un de ces axes passe par O, et que l'un des axes composant la rotation soit aussi celui-ci (fig. 12). Ainsi :

Translation : symétrie d'axe D, puis symétrie d'axe D'.

Rotation : symétrie d'axe D', puis symétrie d'axe D".

La succession des deux symétries d'axe D' est l'Identité.

Par conséquent la composition des deux transformations se réduit à la succession : symétrie d'axe D, puis symétrie d'axe D" : c'est une rotation de même angle que la première, et de centre Ω

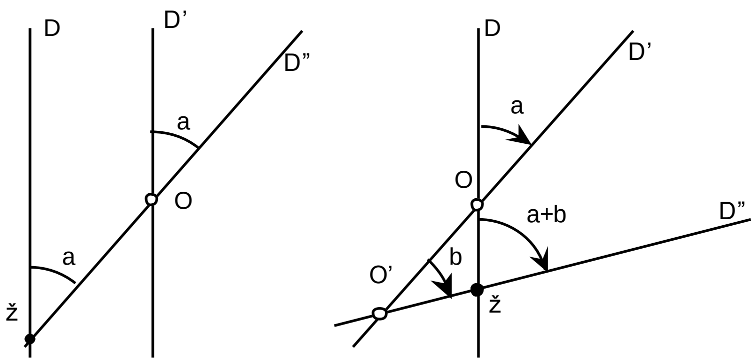


fig. 12 *fig. 13*

Rotation puis rotation

La première rotation est décomposable en deux symétries passant par O ; on peut choisir que l'axe de la seconde symétrie passe aussi par O', et que la première symétrie composant la seconde rotation soit ce même axe (fig. 13). Ainsi :

Première rotation : symétrie d'axe D puis symétrie d'axe D'.

Seconde rotation : symétrie d'axe D' puis symétrie d'axe D''.

La composition des deux symétries d'axes D' est l'Identité.

Il en résulte que la composition des deux rotations est une rotation de centre Ω et dont l'angle est la somme des angles des deux rotations.

Remarque 1 : il s'agit de somme algébrique, les rotations pouvant être de sens contraire.

Remarque 2 : dans le cas où cette somme est nulle (rotations réciproques l'une de l'autre), les axes D et D'' seront parallèles, la composition est une translation.

Remarque 3 : ces compositions ne sont pas **commutatives**.

Il résulte de ce qui précède que Rot (O, 2a) o T = Rot (Ω, 2a)

La composition T o Rot (O, 2a) est une rotation d'angle a, mais dont le centre n'est pas Ω. De même Rot (O', 2b) o Rot (O, 2a) ≠ Rot (O, 2a) o Rot (O', 2b)

En conclusion, la composée de deux déplacements (rotation ou translation) est un déplacement. En d'autres termes : une succession d'un nombre pair de symétries axiales peut être réduit à deux symétries.

Cette formulation invite à s'interroger sur la réduction possible d'un nombre impair de symétries axiales. Il suffit d'examiner ce qui se passe pour trois symétries. Deux cas de figures peuvent se présenter :

Les trois axes sont concourants (fig. 14)

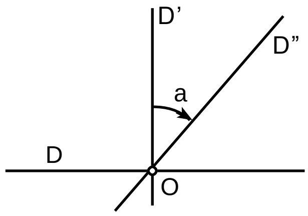


fig. 14

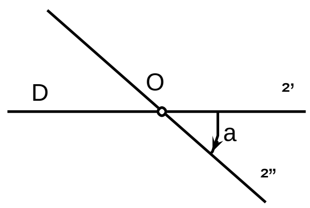


fig. 15

On effectue les symétries d'axe D, puis D', puis D''. Les deux dernières équivalent à une rotation de centre O et d'angle 2a, que l'on peut remplacer par deux symétries dont les axes passent par O et qui font le même angle, comme Δ' (confondu avec D) et Δ'' (fig. 15). Mais alors la succession des symétries d'axes D, Δ', Δ'' équivaut à la seule symétrie d'axe Δ''.

Les trois axes ne sont pas concourants (fig. 16)

On effectue les symétries d'axes D, puis D', puis D''. Mais les deux dernières équivalent à une rotation de centre O, que l'on peut remplacer par les symétries d'axes Δ' (parallèle à D), puis Δ'' (fig. 17). La succession des symétries d'axes D, puis Δ', puis Δ'' équivaut donc à une translation suivie de la symétrie d'axe Δ''.

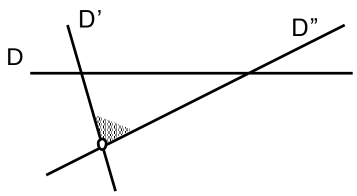


fig. 16

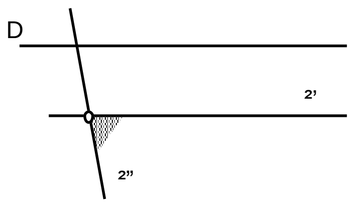


fig. 17

En résumé, on peut réduire une succession de trois symétries axiales (et par suite un nombre impair *quelconque de symétries axiales) soit à une seule symétrie, soit à la composition d'une translation et d'une symétrie.*

Ce résultat permet de résoudre le problème suivant : on reproduit une figure sur une feuille, puis la même figure après retournement (fig. 18). Comment peut-on passer de la première à la seconde ?

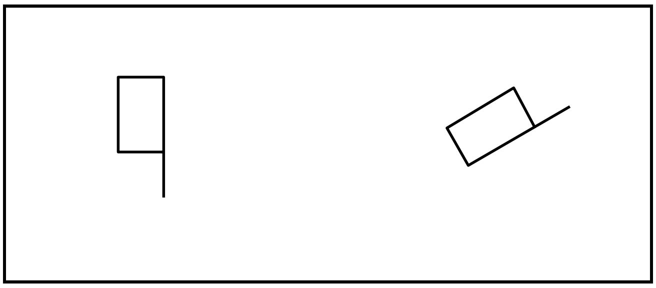
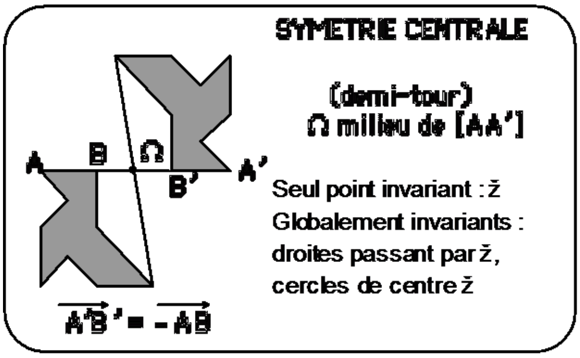
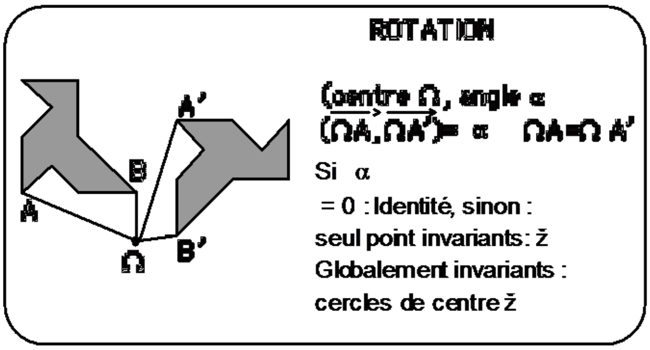


fig. 18

La réponse est : ou bien ces figures se correspondent dans une symétrie, ou bien on peut les faire correspondre par une translation, puis une symétrie ("symétrie glissée").





Annexe 3 – Espace et plan : Les choix de Charles Meray

La géométrie d'Euclide fait intervenir le mouvement (cas d'égalité, superposition…) mais l'exclut en même temps (prescription de Platon). Distinguer une géométrie « pure » d'une géométrie « physique ». Ambiguïté de la question. Le XX° siècle exclut le mouvement (et le temps) : les transformations ponctuelles deviennent des « correspondances » (évacuation de t). Le problème pédagogique n'est pas le même.

C'est sans doute la préoccupation de Méray : restituer les mouvements, qui sont constitutifs des représentations. L'objet n'est plus alors un souci de rigueur ou d'histoire (cf justification des Maths Modernes), mais une préoccupation didactique : la construction de représentations et de schémas fait partie de la construction conceptuelle, par laquelle TOUS les mathématiciens sont passés, même ceux qui ont, ensuite, évacué le mouvement. Pas de contradiction avec le programme de Klein. Mais on n'arrive pas en géométrie par parachutage, ni par intuition immédiate.

L'évacuation de t est rendue possible par la distinction du mouvement (ou t intervient, cf. cinématique) et du *déplacement* (qui répond à une intention familière). Mais une autre question intéressante est ici soulevée : la superposition d'une figure plane à une autre est déterminée par la **possibilité** d'un déplacement (translation, rotation) et définit l'égalité. En conséquence, deux figures symétriques ne sont pas égales. Ce qui est contesté semble-t-il par Leibniz et Kant (exemple des deux mains). Car il existe un déplacement qui applique l'une sur l'autre : la rotation dans l'espace, qui est un déplacement ! Mais qui maintient distincts deux solides symétriques…

L'autre intérêt des déplacements, c'est de définir des solides par engendrement : pavé par translation d'une rectangle, cylindre par « révolution » d'un rectangle, ou sphère (ou d'un tore) par révolution un cercle. Mais psychologiquement, il semble plus accessible à l'intuition d'admettre l'existence d'une boîte ou d'un ballon. Ce qui peut faire admettre le point de vue de Méray, sans souscrire à la genèse de sa démarche.

Ce qui est posé (et se passe de définition) : l'espace (illimité), le repos / le mouvement, la notion de figure ou de corps (« figure solide »). Un **déplacement** est un mouvement entre une position initiale et une position finale [on élude ainsi le **temps**, et l'aspect cinématique].

Deux corps sont **superposés** (donc **égaux**) si on peut amener l'un dans la position exacte de l'autre.

Eléments **homologues** : qui se superposent dans la superposition des corps qui les contiennent.

En mouvement, un point **décrit** une ligne ; une ligne **engendre** une surface.

DROITE et PLAN

On admet la connaissance intuitive de droite et plan ; le rappel de propriétés tient lieu d'axiomatique. Ainsi « on peut faire coïncider 2 droites par un déplacement. Un segment [AB] de l'un se superposant à un segment [A'B'] de l'autre sont **égaux**.

Par 2 points, il existe une seule droite. Par un point une infinité de droites.

Il existe une infinité de façon de faire glisser une droite sur une autre. Ceci définit une **translation**.

Le parallélisme est défini par une translation :

DROITES // : il existe une translation qui amène l'une sur l'autre.

Par un point M, on peut faire passer une seule droite // à une autre donnée.

Droite D // plan P : il existe une translation qui amène D sur une droite Δ de P.

D //Δ —> Tout plan // à D est // à Δ.

PLANS // : il existe une **translation** amenant l'un sur l'autre.

P // P' —> toute droite D //P est // à P'

Toutes les droites passant par M et parallèles à P constituent le plan P' //P

PERPENDICULAIRE

P glisse sur P' de façon qu'un point O soit fixe. c'est une **rotation**. Il existe d'autres points invariants de l'espace : la droite passant par O et **perpendiculaire** à P (fig. 1).

P $\perp$ D, P//P' et Δ // D alors P' est $\perp$ Δ (fig. 2)

D $\perp$ P et D $\perp$ P' alors P //P' (fig. 3)

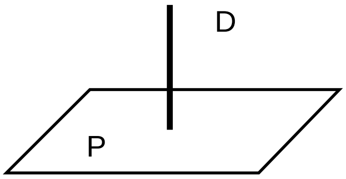


fig. 1

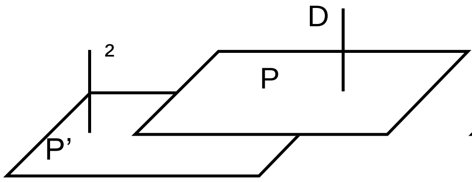


fig. 2

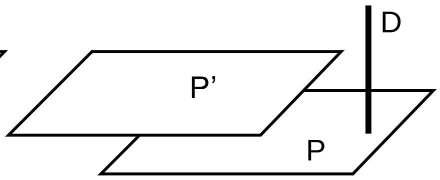


fig. 3

DROITES PERPENDICULAIRES

P $\perp$ D alors Δ appartenant à P est à $\perp$ D (fig. 4)

D et Δ **orthogonales** ⇔chacune appartient à un plan $\perp$ à l'autre (fig. 5).

PLANS PERPENDICULAIRES

si une droite D du plan P est $\perp$ P' alors P est $\perp$ P' (fig. 6).

D $\perp$ P ⇔ D $\perp$ 2 droites non parallèles du plan (fig. 7).

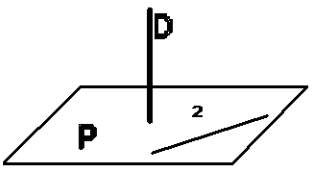


fig. 4

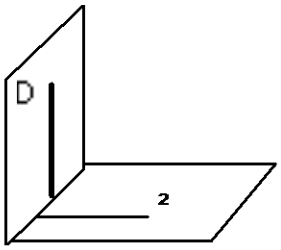


fig. 5

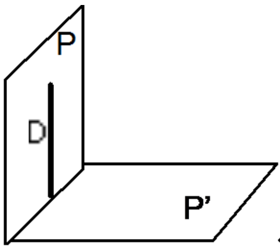


fig. 6

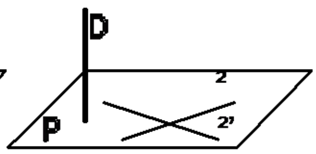


fig. 7

MESURE

Deux segments [AB] et [A'B'] sont **égaux** s'il existe une translation [AB] —> [A'B']

Le rapport de 2 segments est m/N si m fois l'un = n fois l'autre.

A partir de là, et du choix d'une unité, on peut définir une **mesure algébrique**.

Si D // Δ alors [AB[—> [A'B'] par translation donc AA' = BB' (fig. 8).

Si D non // Δ : cas de « bandes » parallèles de même largeur : AA'/BB' = A'A"/B'B" (fig. 9).

bandes parallèles de largeur différentes : AA'/BB' = A'A" / B'B" (fig. 10)

Ce qui établit le théorème de Thalès. Tout le reste s'en suit.

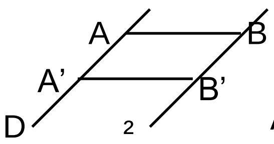


fig. 8

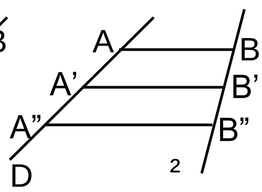


fig. 9

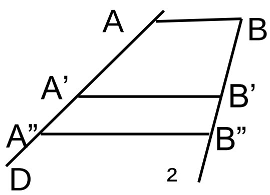


fig. 10

Annexe 4 – Perspective

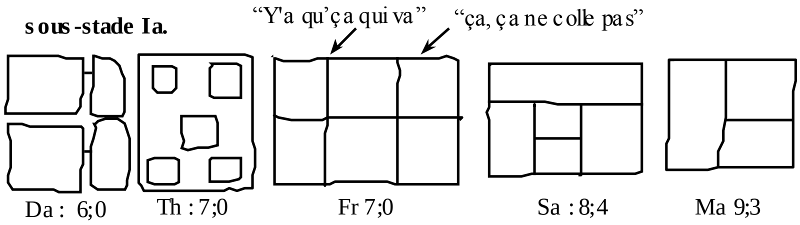
La représentation en perspective n'est pas aussi simple que l'on peut croire, et elle peut présenter des pièges. Il est faux de croire qu'elle est simple et "naturelle" ; si c'était le cas, elle serait apparue dans la représentation picturale bien avant la Renaissance. Mais comme on l'a souvent rappelé, il y a un écart considérable entre la **reconnaissance** et la **reconstruction**. Identifier une représentation en perspective peut sembler simple, en réaliser une ne l'est pas, comme l'ont analysé Dolle, Bataillard, et Guyon (1974) dont nous résumons l'étude.

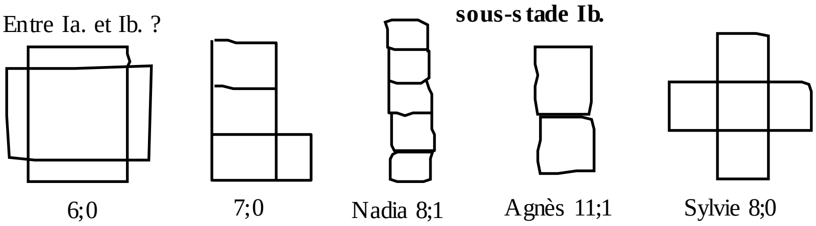
Conditions expérimentales : on a proposé aux enfants des cubes en carton de 8 cm d'arête, en les invitant à l'observation de ce qui est visible, puis on leur a demandé de dessiner tout ce qu'on verrait si le cube était en verre. Le procédé d'interrogation est inspiré de la méthode clinique de Piaget. 56 enfants ont été interrogés, de 6 à 15 ans, dans la région de Besançon. Le résultat escompté est la représentation "standard".

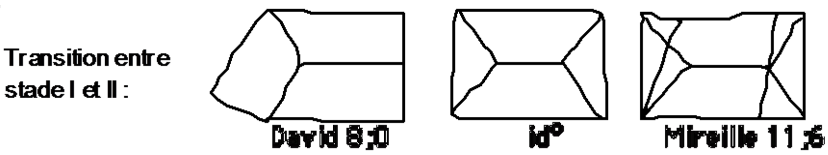
Résultats généraux

Stade I : absence de perspective (de 6 à 9 ans)

«[…] les enfants ne procèdent pas par dépliement, mais par rabattement […]. Le caractère entièrement plan des figures réalisées permet de constater l'absence complète de tout élément de perspective. »



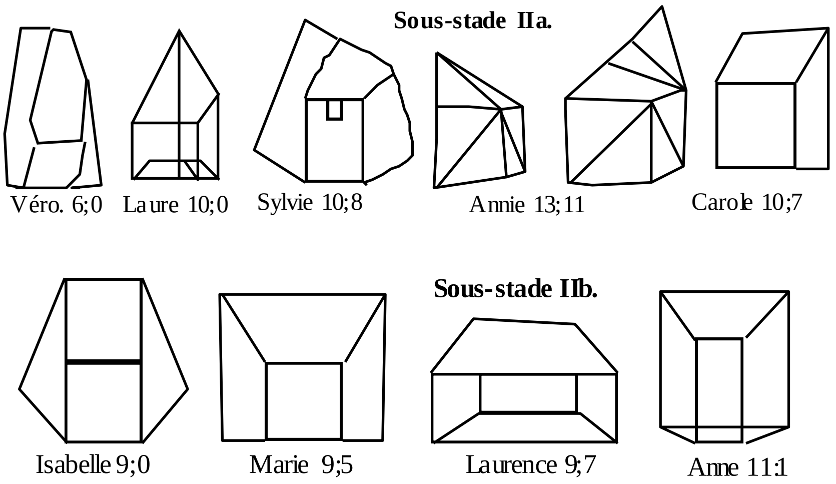




La construction du cube en perspective nécessite la présence de structures logiques complexes. Au *stade I*, les enfants se contentent d'une énumération, négligeant généralement la face de repos. ("C'*est un carré, avec des carrés autour*".) Il s'agit donc d'une description assez typiquement topologique. «*Les enfants paraissent encore proches de l'imitation sensori-motrice. Il leur est plus facile de fabriquer un cube que d'en dessiner un. […] Ils n'ont pas encore constitué une représentation qu'ils seraient capables de donner graphiquement.*»

Stade II : perspective empirique (9 à 12 ans)

Apparition d'une oblique. « *L'apparition de l'oblique paraît marquer l'entrée dans l'espace graphique à trois dimensions* » Mais il s'agit d'une perspective centrée en rapport avec le point de vue propre.

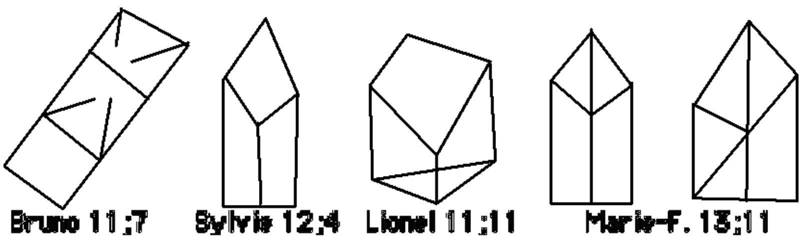


Au stade II, la figuration plane est abandonnée ; l'artifice de l'oblique oriente vers la superposition de deux plans. Il a pour origine l'apparente fuite en biais d'une face latérale du cube.

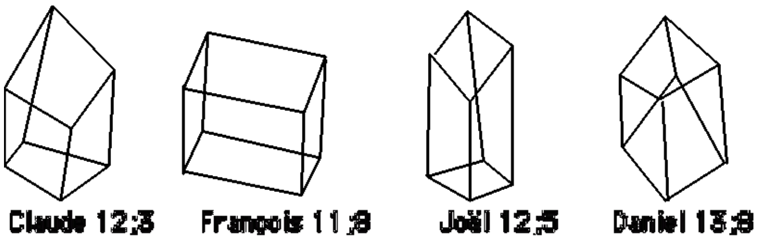
Stade III : accès à la perspective cavalière (après 12 ans)

Elle est réalisée en moyenne par tous les enfants à partir de 12 ans, pour un cube présenté de front. Ce n'est qu'au stade III que « *les procédés de construction présenteront un caractère systématique reposant sur le parallélisme des côtés opposés coordonné aux trois dimensions et répondant à une combinatoire.* »

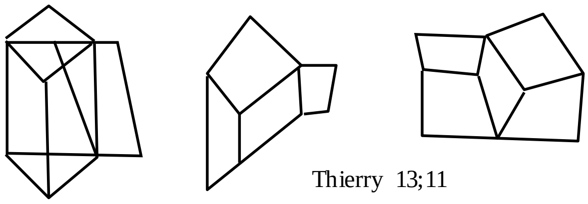
Sous-stade III.a : réalisation correcte du cube en présentation de front.



Sous-stade IIIb : représentation du cube en position trois quarts (de biais par rapport au cadre) avec coordination des arêtes opposées (parallélisme).



Sous-stade IIIc : de plus, la représentation du cube présenté sur une arête est correcte.



La représentation du cube sur un angle a été impossible pour tous les sujets étudiés.

A partir de 12 ans, les enfants entrent spontanément dans la perspective cavalière, à condition que le cube soit en position frontale. Ils n'y parviennent pas encore dans les autres cas.

Si le cube pouvait être représenté graphiquement en perspective cavalière à partir de la seule activité perceptive, il est à peu près certain que les enfants en donneraient un dessin parfaitement correct beaucoup plus tôt.

Les élèves du *stade I* possèdent le schéma du carré ; c'est donc lui qu'ils dessinent en premier ; ils ramènent les autres faces (à cause de ce qu'ils savent) à ce schéma.

Au *stade 2*, on observe un début de coordination des différentes centrations, de proche en proche ; le *volume* n'est donc pas encore construit. Au *stade 3* (niveau formel), l'enfant a établi une structure de représentation du volume (parallélisme des arêtes opposées, etc.). Alors pourquoi les *sous-stades IIIa,b,c* ? Les enfants se rendent compte que leur dessin n'est pas satisfaisant (“ça ressemble pas tellement”), et acceptent parfaitement une perspective cavalière qu'on leur propose (“Ah! J’avais pas pensé à ça”). Il y a donc une grande distance entre d'une part le cube perçu et le cube représenté mentalement, d'autre part ce denier et la production graphique. En résumé, on peut avancer « *que dans les conduites spontanées les enfants révèlent les structures définitivement acquises, alors que en situation d'apprentissage, ils révèlent celles qu'ils sont en train d'acquérir* ».

Ce qui frappe le plus dans les présentations non frontales « *c'est que l'on a l'impression d'assister à une régression à des stades antérieurs. Il est en réalité très difficile de discerner si un enfant trace un cube en perspective cavalière grâce à un procédé graphique appris ou s'il le trace en mettant en œuvre les structures correspondantes* ».

La perspective cavalière

La représentation en perspective la plus habituelle, pour des objets de petites dimensions, est la perspective cavalière.

Pour représenter l'espace (3 dimensions) sur un plan (2 dimensions), on utilise une projection sur ce plan (que l'on désigne par “plan de figure”) parallèlement à une droite.

Quels sont les paramètres utilisés ?

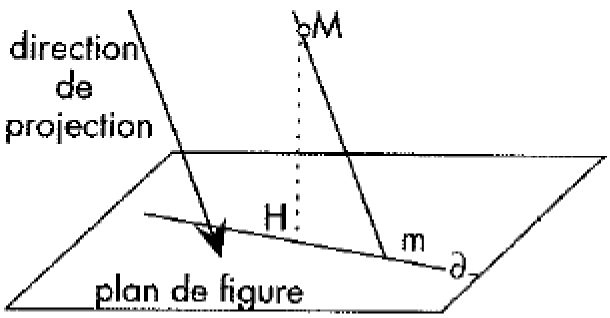


fig. 1a

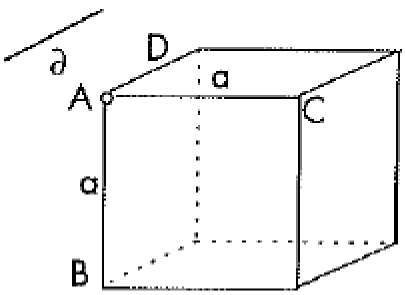


fig. 1b

Le plan de projection est appelé “plan de figure”. Le point M se projette en **m**. Soit H le projeté orthogonal de M. Hm/Mm = k est appelé le coefficient de réduction (on le choisit souvent égal à 1/2). La projection est ainsi déterminée par deux paramètres : la **pente de la droite,** et le **rapport de projection**.

Exemple : la représentation du cube [fig.1b]. Le plan de figure est parallèle à la face grisée. ∂ est la direction des perpendiculaires au plan de figure. Selon cette direction, les longueurs sont réduites de moitié. L'arête AD, perpendiculaire au plan de figure est représentée dans la direction ∂ avec une longueur moitié de celle des arêtes AC ou AB qui sont parallèles au plan de figure.

Changement de plan de figure

Sur la première représentation (fig.2 a), choisissons un plan vertical diagonal ACC'A' pour nouveau plan de figure, tout en conservant la même direction de projection ∂ et le même rapport de réduction.

Le rectangle ACC'A' étant dans le nouveau plan de figure est donc représenté en vraie grandeur (fig.2 b) ; ainsi AI=a√2/2. En revanche IB et ID sont perpendiculaires au plan de figure : IB et ID sont projetés dans la direction ∂ et selon la longueur a√2/4.

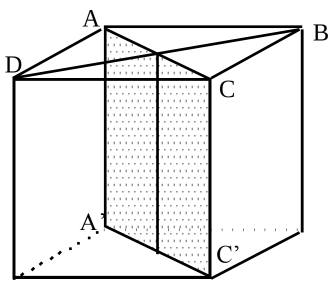


fig. 2a

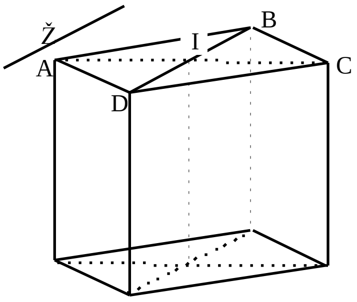


fig. 2b

Représentation d'un tétraèdre régulier

On choisit pour plan de figure le plan vertical de symétrie contenant A et I. Le centre de ABC est le projeté du sommet S. Le triangle AIS est isocèle (AI=IS=a√3/2) dans le plan de figure, donc en vraie grandeur. La direction BC est perpendiculaire au plan de figure, donc IB=IC ramené à a/4 (fig.16 et 17).

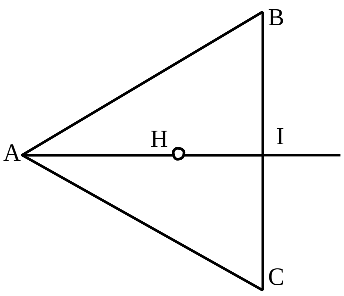


fig. 3

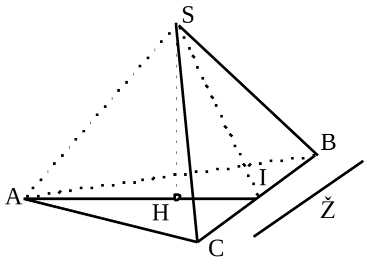


fig. 4

Perspective d'un cercle

Inscrivons un cercle sur chacune des faces d'un cube (fig. 5). Quelle est en la représentation en perspective ? On obtient par le théorème des milieux les images des milieux des arêtes (c'est à dire des points de contact du cercle). L'image par affinité d'un cercle est une ellipse, dont on voit que les axes de symétrie ne sont **ni les diagonales, ni les médianes** du parallélogramme OCB'A' (fig. 6).

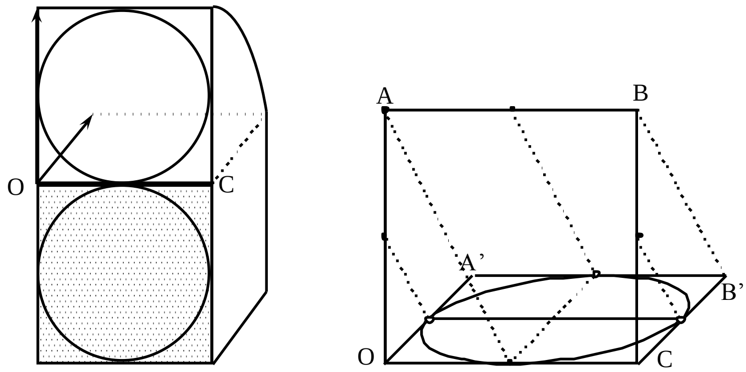


fig. 5 *fig.6*

Perspective d'une sphère

Considérons maintenant la sphère inscrite dans le cube. Le cube est représenté (fig. 7) avec ses plans médiateurs principaux. Dans chacun des carrés, on inscrit l'ellipse qui est la trace de la sphère (fig. 8).

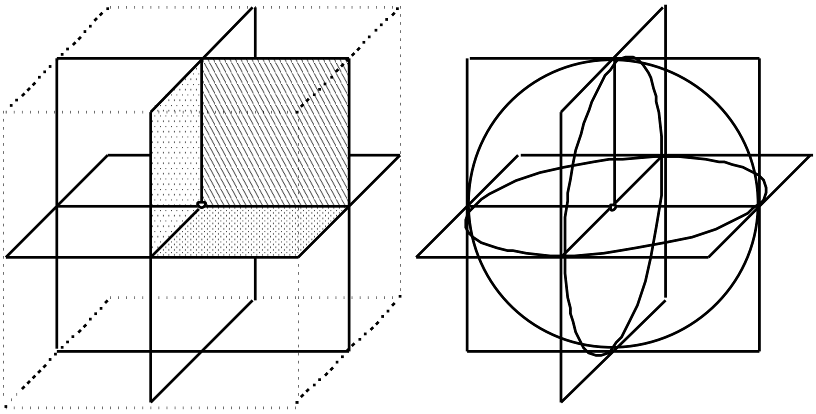


fig. 7 *fig. 8*

Le contour apparent extérieur de la sphère est l'enveloppe de tous les cercles méridiens. C'est une **ellipse** qui contient le **cercle méridien** parallèle au plan de figure.

Perspective avec point de fuite (Alberti 1435)

La perspective […] doit être mise au premier rang de toutes les sciences et disciplines humaines car elle couronne tant la mathématique que les sciences naturelles

Léonard de V.

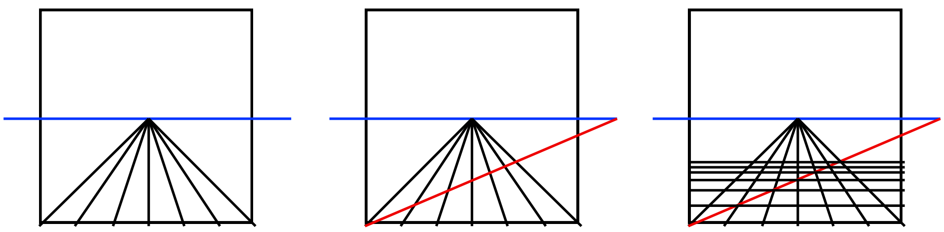


fig. 1 *fig. 2* *fig.3*

Des droites parallèles et horizontales ont un point de fuite sur l'horizon (fig. 1). Ces droites sont équidistantes. Elles sont coupées par une diagonale rouge (fig. 2). Les rectangles déterminés par les diagonales semblent égaux (fig. 3).

Les diagonales BD et BF sont parallèles : elles ont donc le même point de fuite B. Ceci permet de régler la profondeur (fig. 4).

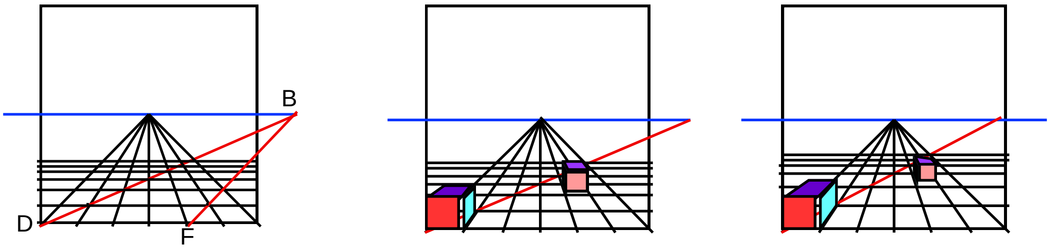
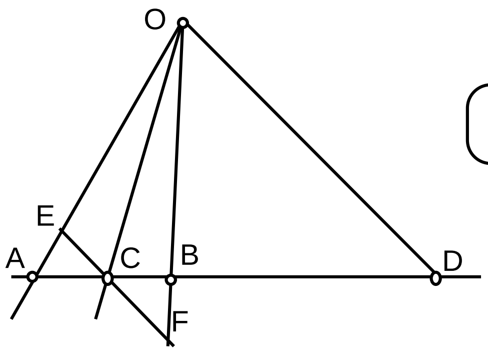


fig. 4 *fig. 5* *fig. 6*

Le choix du point de fuite B sur la ligne d'horizon règle la distance de l'observateur au plan du cadre : en [6], le point de fuite est plus proche du centre, ce qui donne l'impression que l'observateur est plus proche du cadre.

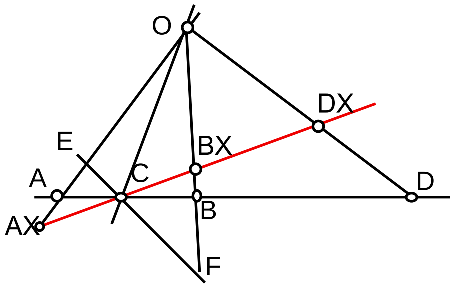
Annexe 5 – Birapport, faisceau harmonique



$\boxed{\text{(A, B, C, D) harmonique} \Leftrightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}}$

EF // OD [AEC] et [AOD] homothétiques
[BCF] et BOD] homothétiques

AE/AO = AC/AD = EC/OD
BC/BD = BF/BO = CF/OD → CE = CF



Généralisation : $\frac{CA}{CB} = c$ $\frac{DA}{DB} = d$ c/d = § (birapport)

Mêmes triangles: $\frac{CE}{CF}$ c/d = §

Sur une autre sécante : CAX/CBX = cX DXAX/DXBX = dX

Calcul analogue cX/bX = c/b = § **le birapport est invariant**

Deux faisceaux harmoniques particuliers (birapport = –1) :

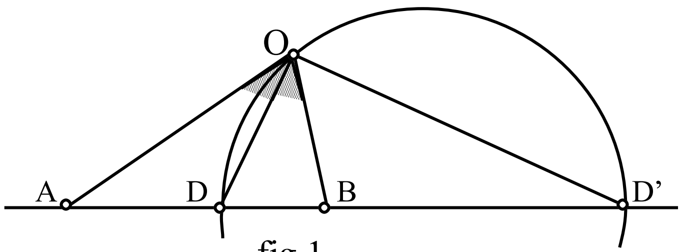


fig.1

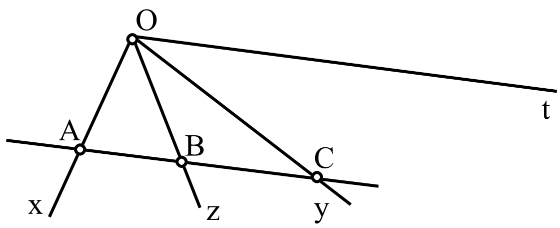


fig.2

- Un angle et ses bissectrices (fig.1) car DA/DB = CA/CB.
- Un triangle avec une médiane et une demi-droite parallèle à la base (relative à cette médiane).

Pôle et polaire :

Soit une division harmonique (A, B, C, D) et les droites Ox et Oy. Une autre sécante passant par A ; M est le **conjugué** de A. L'ensemble des conjugués est la droite (OM) [fig.1]. C'est la **polaire** de A par rapport à Ox, Oy. Réciproquement tous les **pôles** de (OA) sont sur (OB).

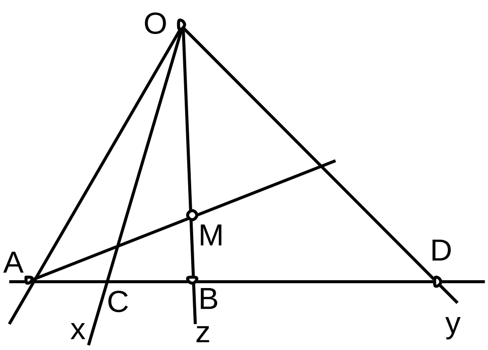


fig. 1

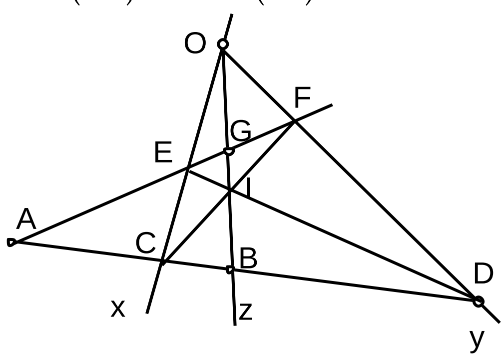


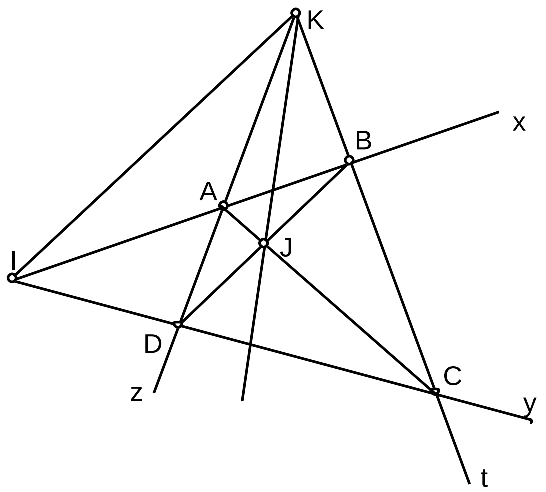
fig. 2

Construction de la polaire (fig. 2)

Soient 2 sécantes passant par A. Les divisions (ABCD) et (AGEF) sont harmoniques.

Soit I l'intersection de CF et ED. Le faisceau (I, ABCD) est harmonique ; donc I appartient à la polaire de A. Donc les points O, G, I, B sont alignés.

Construction : les diagonales du quadrilatère CDFE se coupent en I, (OI) est la polaire de A.



Un quadrilatère complet est formé de 4 droites : Ix, Iy, Kz, Kt. Ses diagonales sont : IK, AC, BD.

Le faisceau (KI, KJ, KA, KB est harmonique) :

Toute diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les côtés et les autres diagonales

Exemples, applications

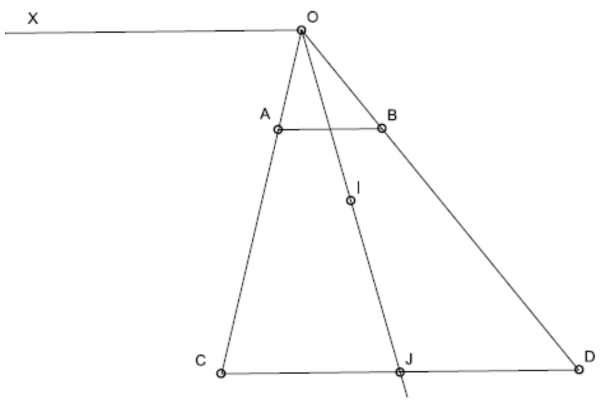


fig 1

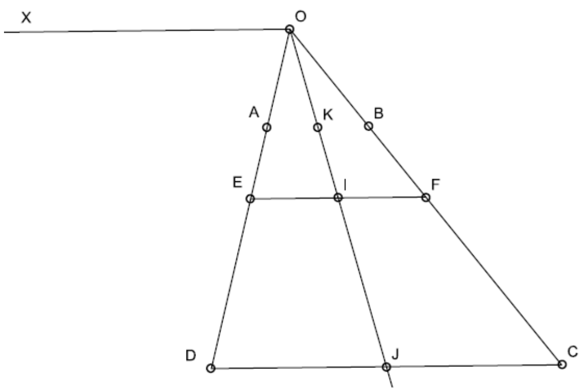


fig. 2

AB // CD // Ox. Le faisceau (O, Ox, OJ, OA, OB) est harmonique. Donc K milieu de AB et J milieu de CD.

Théorème du trapèze (fig. 2). Trapèze ABCD, Ox // bases. Même faisceau harmonique. EF passant par I, parallèle aux bases. Alors I est le milieu de EF.

Problème :

Deux droites D et Δ sont sécantes hors des limites de la feuille. Soit Ω leur point d'intersection.

Construire, avec la règle seule, la droite $M\Omega$